

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

MOMENTO DE INÉRCIA

Prof. Dr. Daniel Caetano

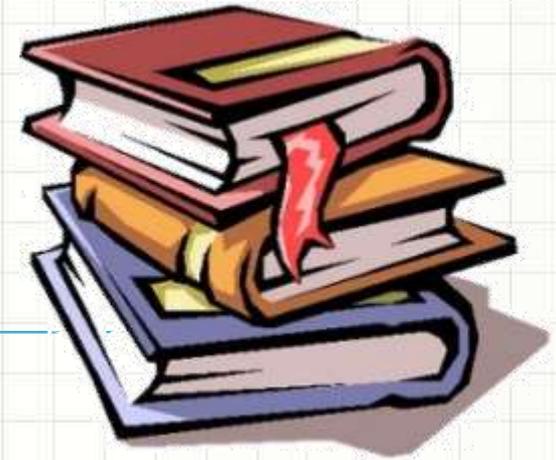
2012 - 2

Objetivos

- Apresentar os conceitos:
 - Momento de inércia
 - Momento polar de inércia
 - Produto de Inércia
 - Eixos Principais de Inércia
- Calcular propriedades geométricas com relação a quaisquer eixos
- Determinar os eixos principais e calcular os momentos principais de inércia



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Notas de Aula

<http://www.caetano.eng.br/>
(Aula 2)

Apresentação

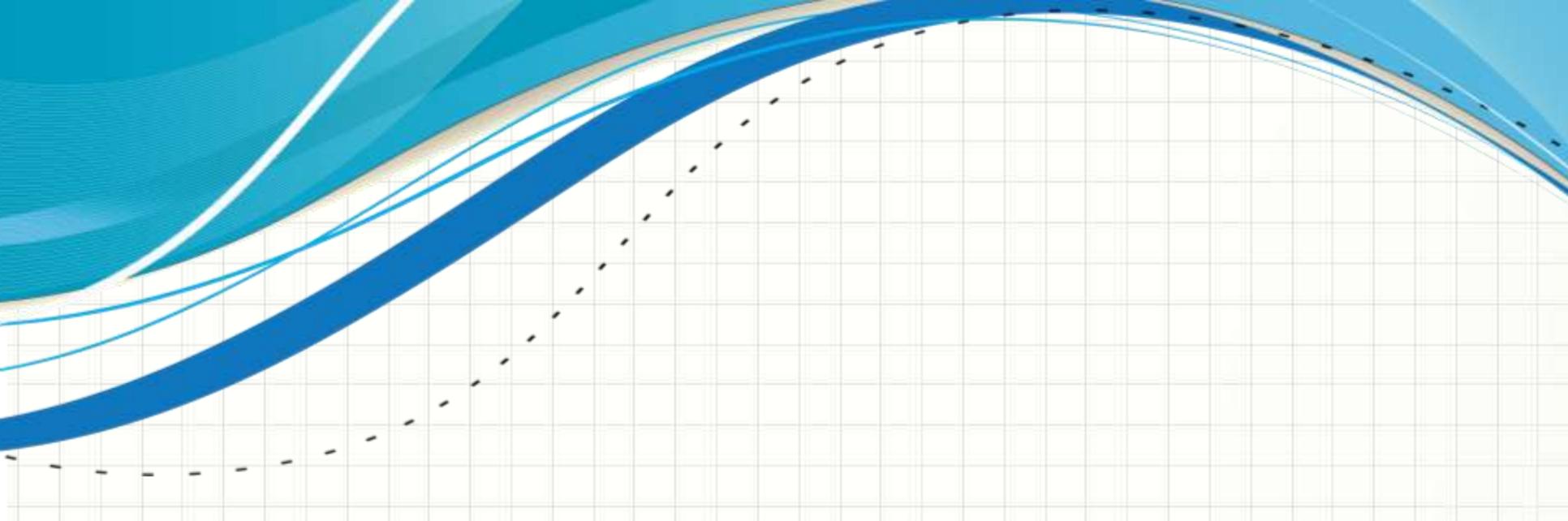
<http://www.caetano.eng.br/>
(Aula 2)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Beer, Johnston, Dewolf),
páginas 728 a 732

Resistência dos
Materiais (Hibbeler)

Biblioteca Virtual, páginas 570 a 576.



RELEMBRANDO:

A FORMA DÁ O TOM

Características das Figuras Planas

- Perímetro
- Área
- Momento Estático → cálculo do centróide
- Momento de Inércia...
 - Mas antes, vamos relembrar um pouco!

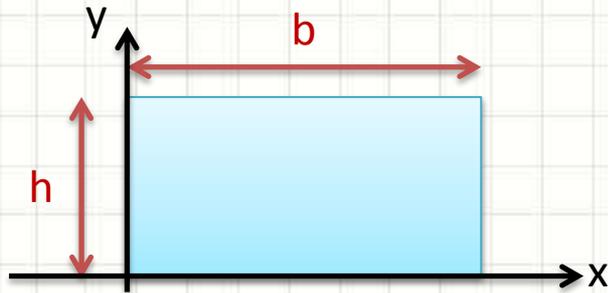
Momento Estático

- Cálculo do Momento Estático

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

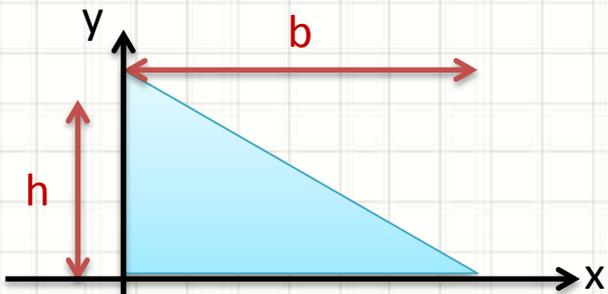
$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

Momentos Estáticos



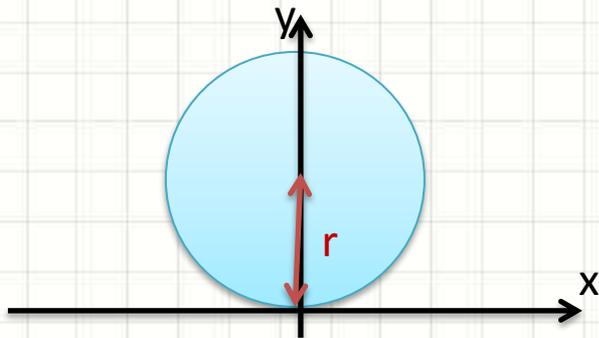
$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

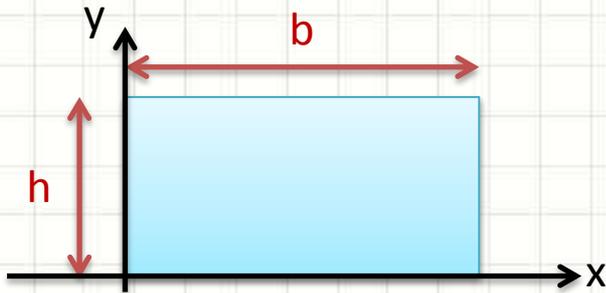
$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$



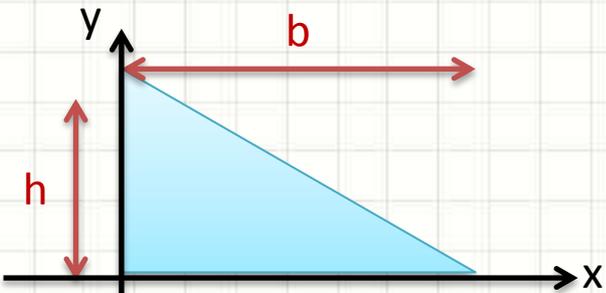
$$S_x = \pi \cdot r^3$$

$$S_y = 0$$

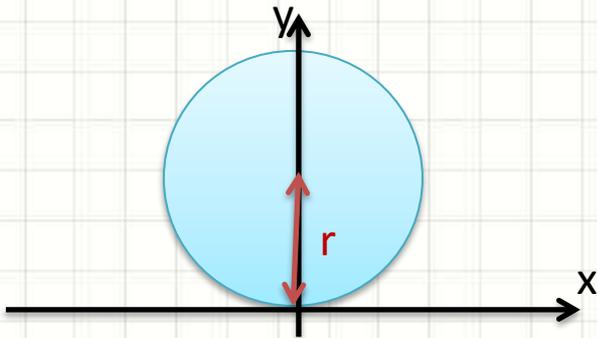
Distância ao Centro de Gravidade



$$\bar{y} = y_g = \frac{h}{2} \quad \bar{x} = x_g = \frac{b}{2}$$

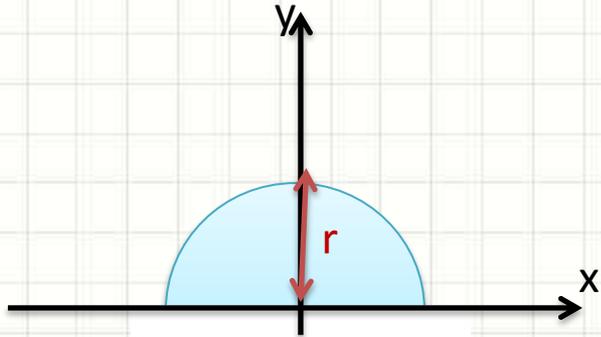


$$\bar{y} = y_g = \frac{h}{3} \quad \bar{x} = x_g = \frac{b}{3}$$



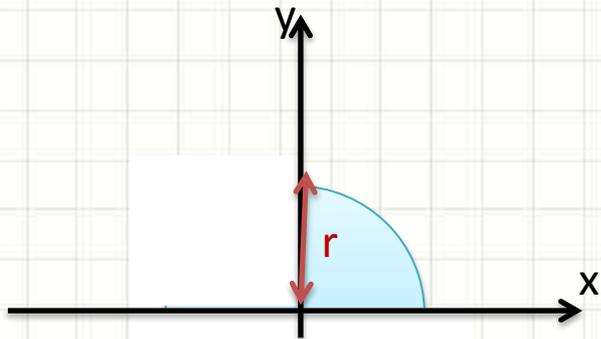
$$\bar{y} = y_g = r \quad \bar{x} = x_g = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



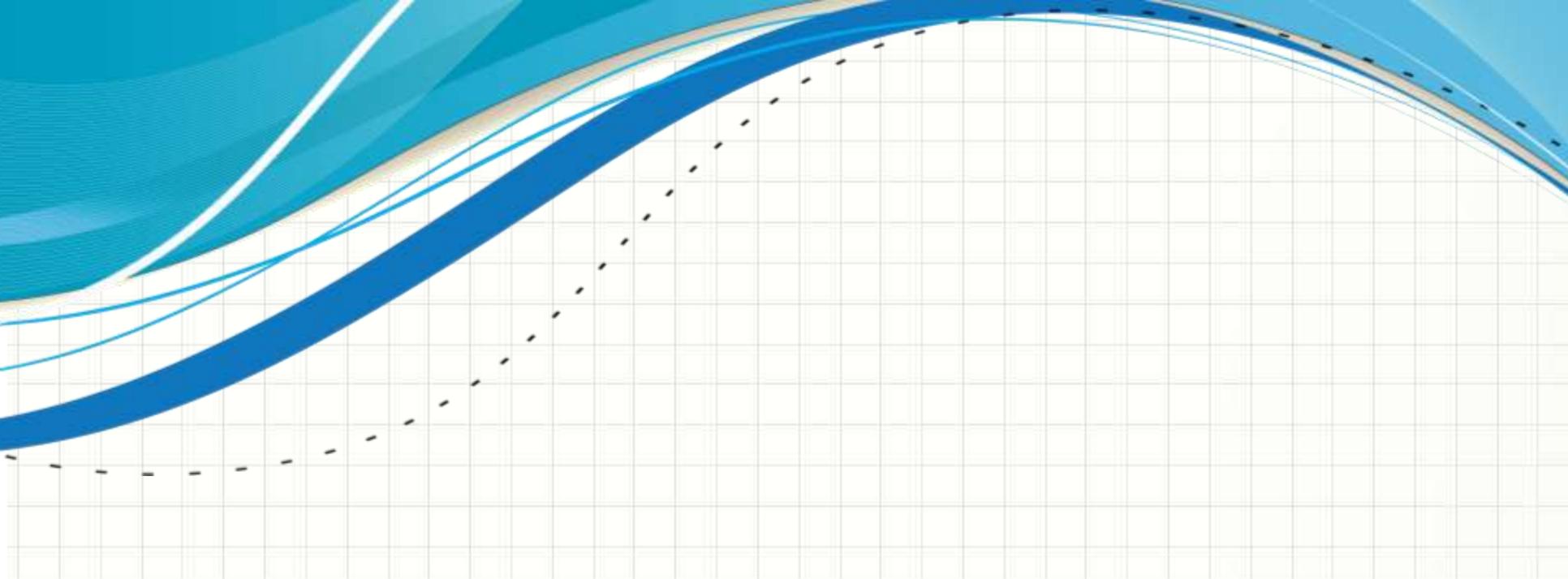
$$\bar{y} = y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$\bar{x} = x_g = 0$$



$$\bar{y} = y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$\bar{x} = x_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$



MOMENTO DE INÉRCIA

Momento de Inércia

- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)
 - $S = A \cdot d$
 - Mede ação da distribuição de massa de um corpo
- Momento de Inércia (ou de 2ª Ordem)
 - Mede a inércia de um corpo
 - Resistência a ser colocado em movimento
 - Massa x Momento de Inércia
 - $I = A \cdot d^2$

Momento de Inércia

- Cálculo do Momento *Retangular* de Inércia

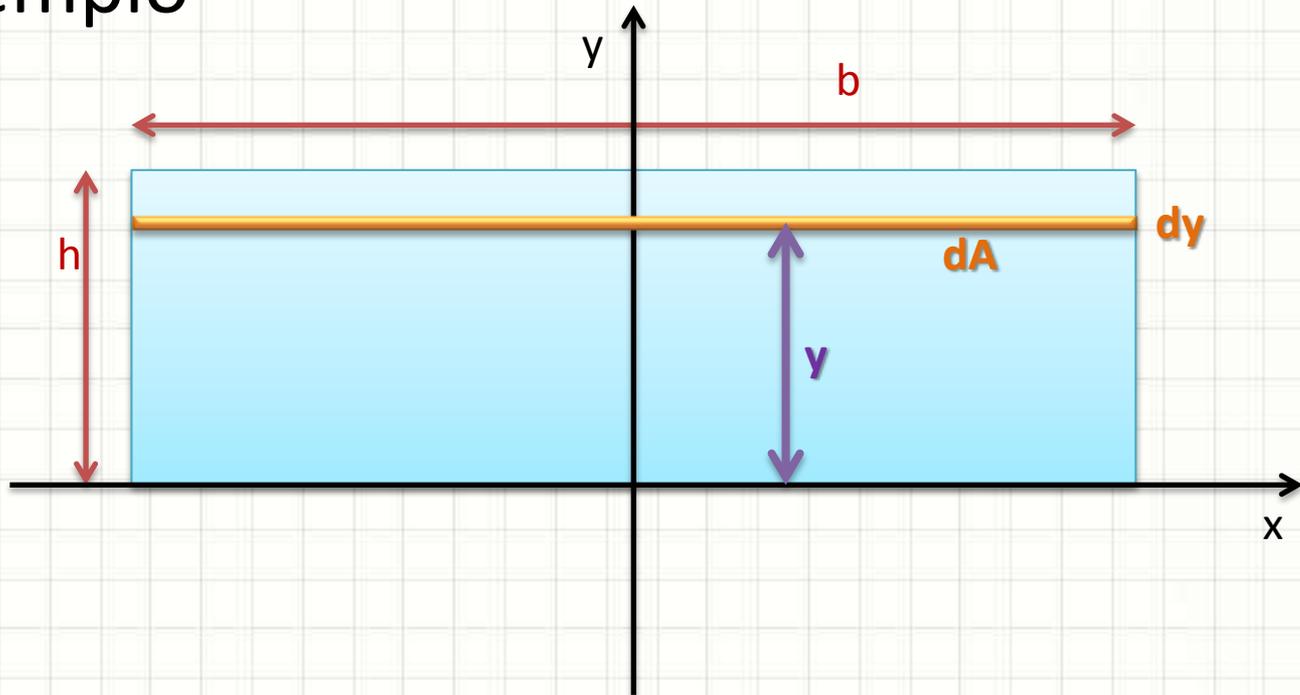
$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

- Sempre positivos! → Unidade $I = [L^4]$

Momento de Inércia

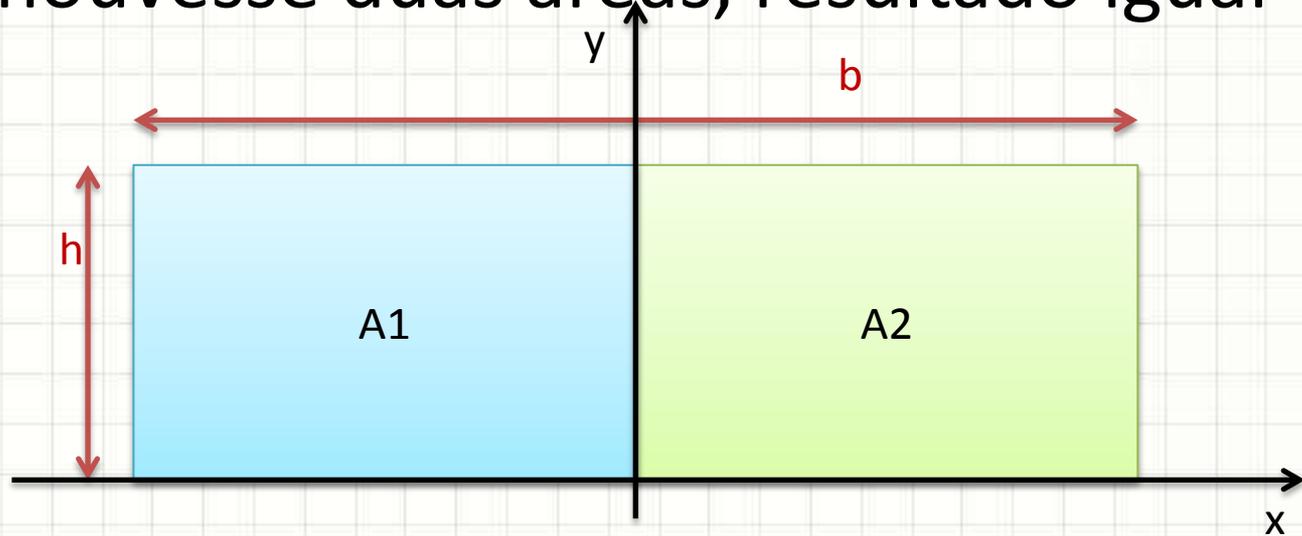
- Exemplo



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Momento de Inércia

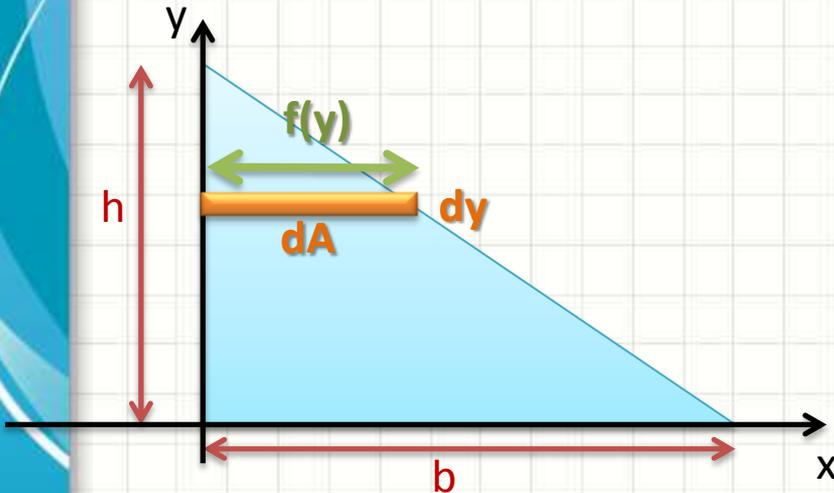
- Se houvesse duas áreas, resultado igual



$$\begin{aligned} I_x &= \int_{A1} y^2 \cdot dA + \int_{A2} y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot dy + \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot dy = \\ &= \frac{b \cdot h^3}{6} + \frac{b \cdot h^3}{6} = \frac{\mathbf{b \cdot h^3}}{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

Momento de Inércia

- Outro Exemplo



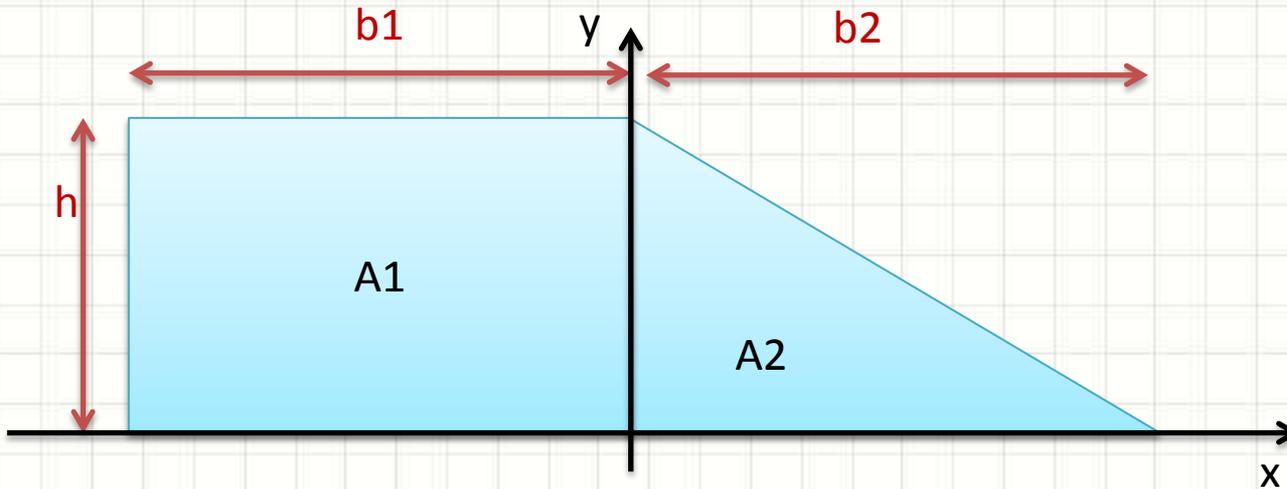
$$dA = f(y) \cdot dy$$

$$f(y) = b - \frac{b \cdot y}{h}$$

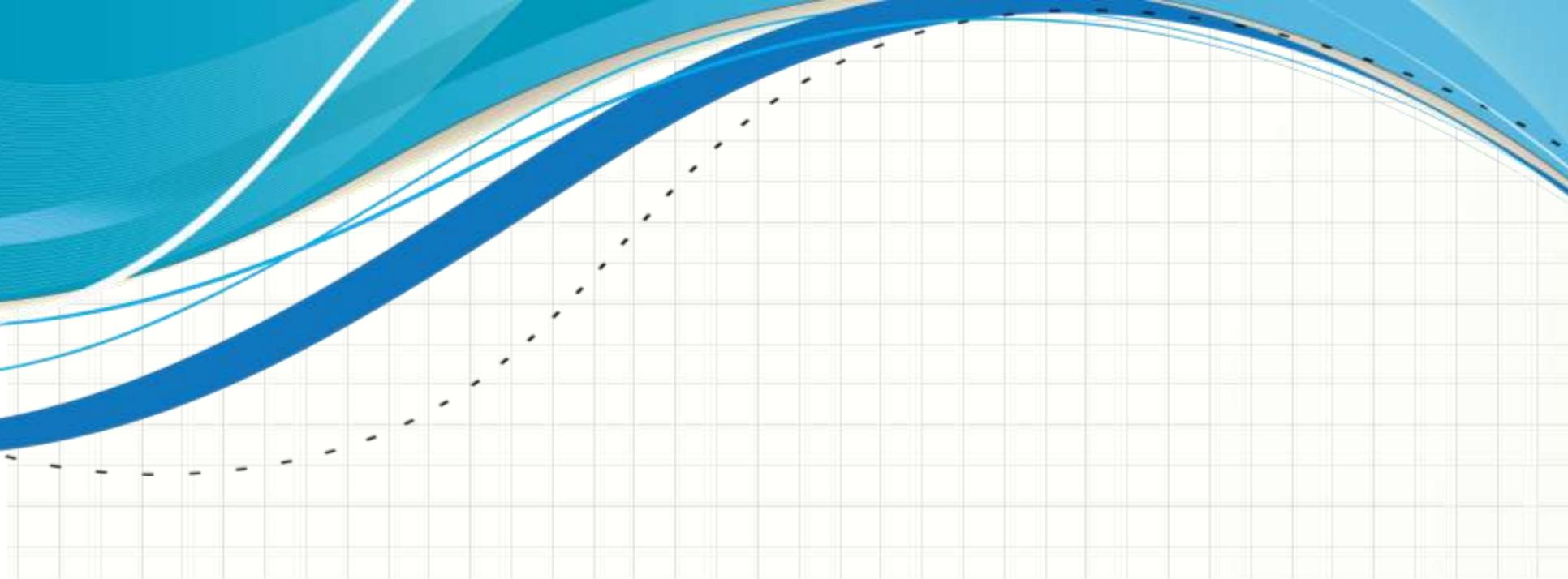
$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot \left(b - \frac{b \cdot y}{h}\right) \cdot dy \\ &= \int_0^h \left(b \cdot y^2 - \frac{b \cdot y^3}{h}\right) \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12} \end{aligned}$$

Momento Estático

- E nesse outro caso?



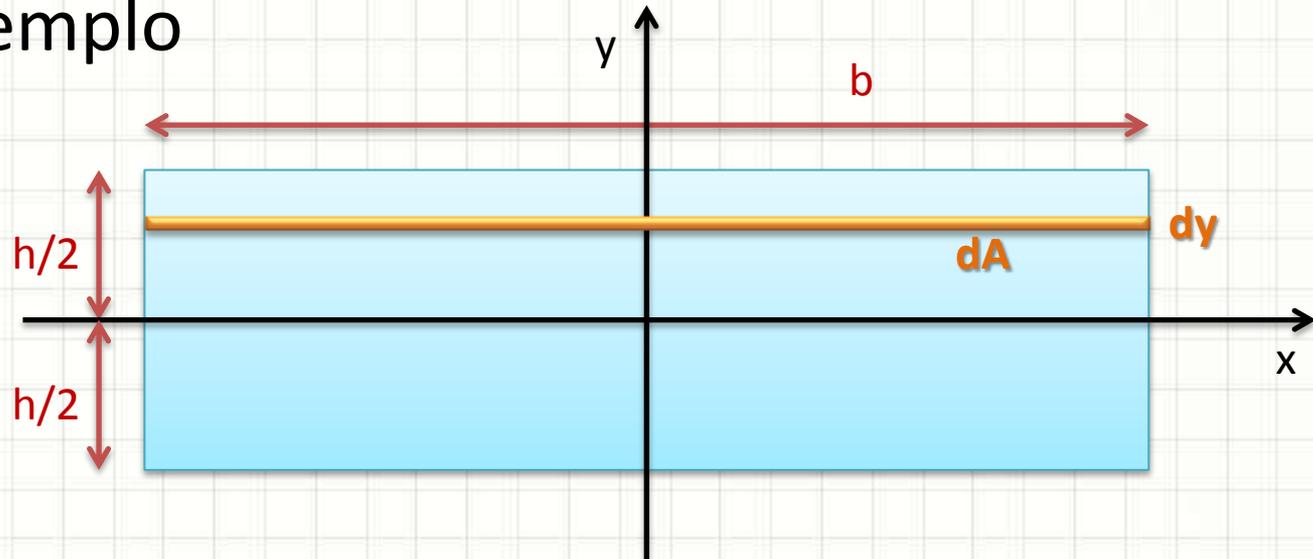
$$I_x = \int_{A1} y^2 \cdot dA + \int_{A2} y^2 \cdot dA = \frac{b1 \cdot h^3}{4} + \frac{b2 \cdot h^3}{12}$$



EIXO CENTRAL DE INÉRCIA

Eixo Central de Inércia

- Eixo Central de Inércia
 - Passa pelo centróide do corpo
- Exemplo

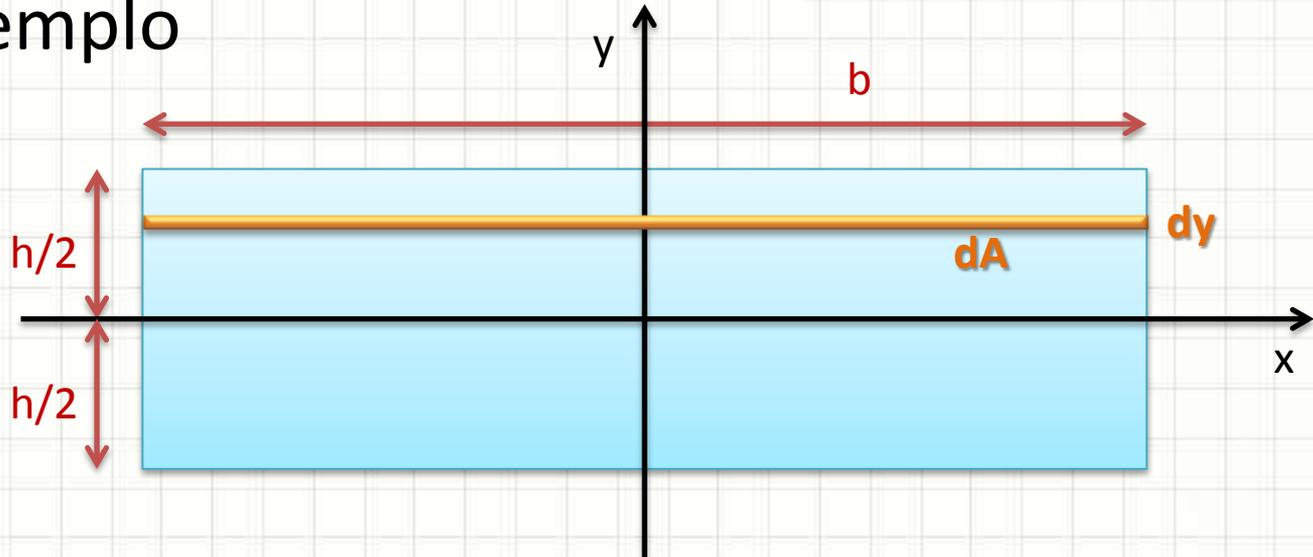


$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

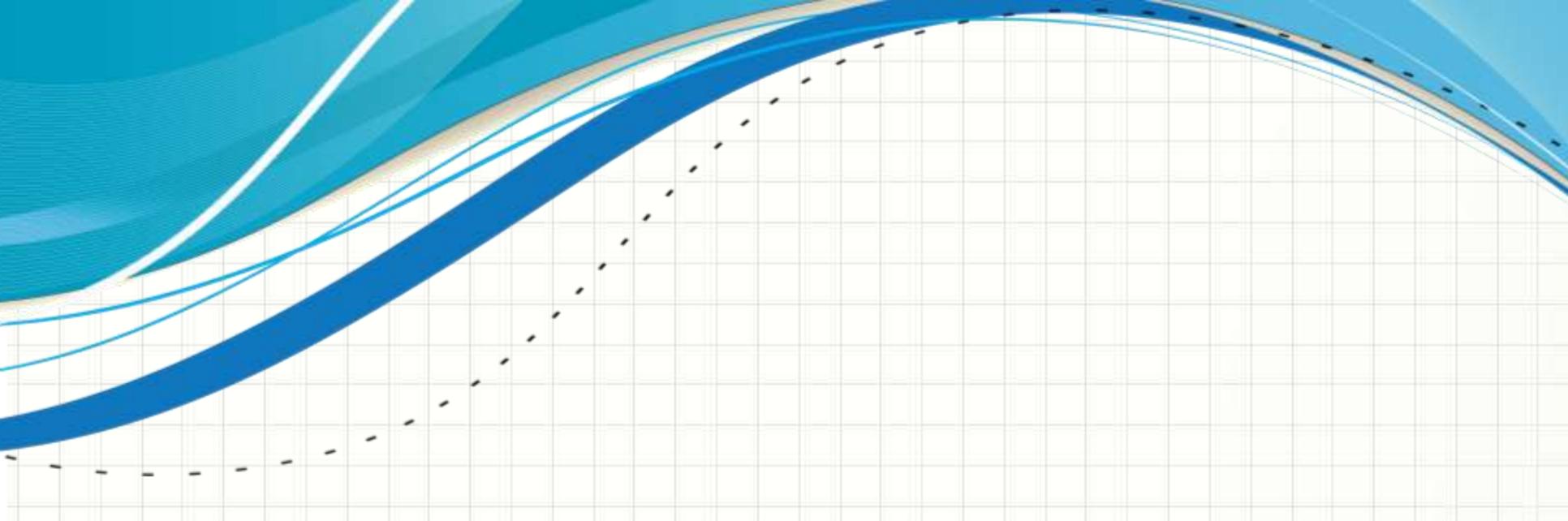
Eixo Central de Inércia

- Eixo Central de Inércia
 - Passa pelo centróide do corpo
- Exemplo

O eixo central, dentre os paralelos a ele, é o eixo de menor inércia



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



MOMENTO POLAR DE INÉRCIA

Momento Polar de Inércia

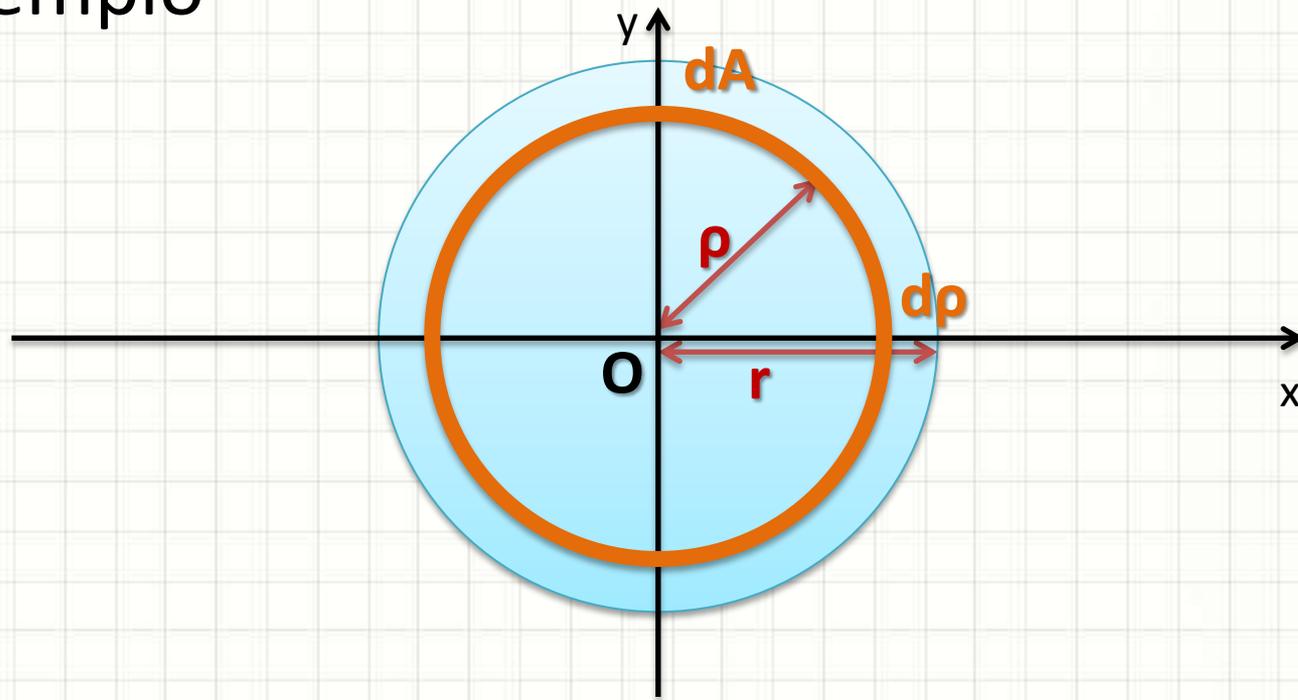
- Cálculo do Momento *Polar* de Inércia

$$J_o = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

- Inércia relativa a um ponto
- Importante nas torções
- Sempre positivo! → Unidade $J = [L^4]$

Momento de Inércia

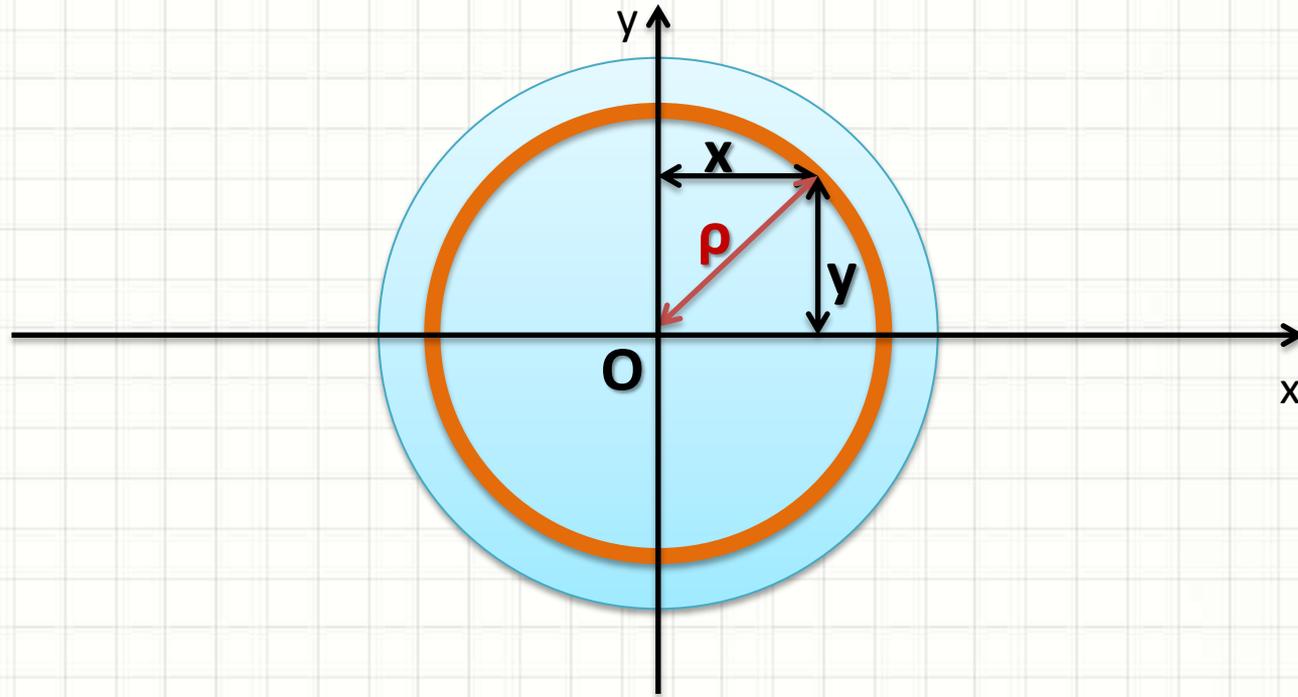
- Exemplo



$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^r \rho^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia



$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow J_o = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

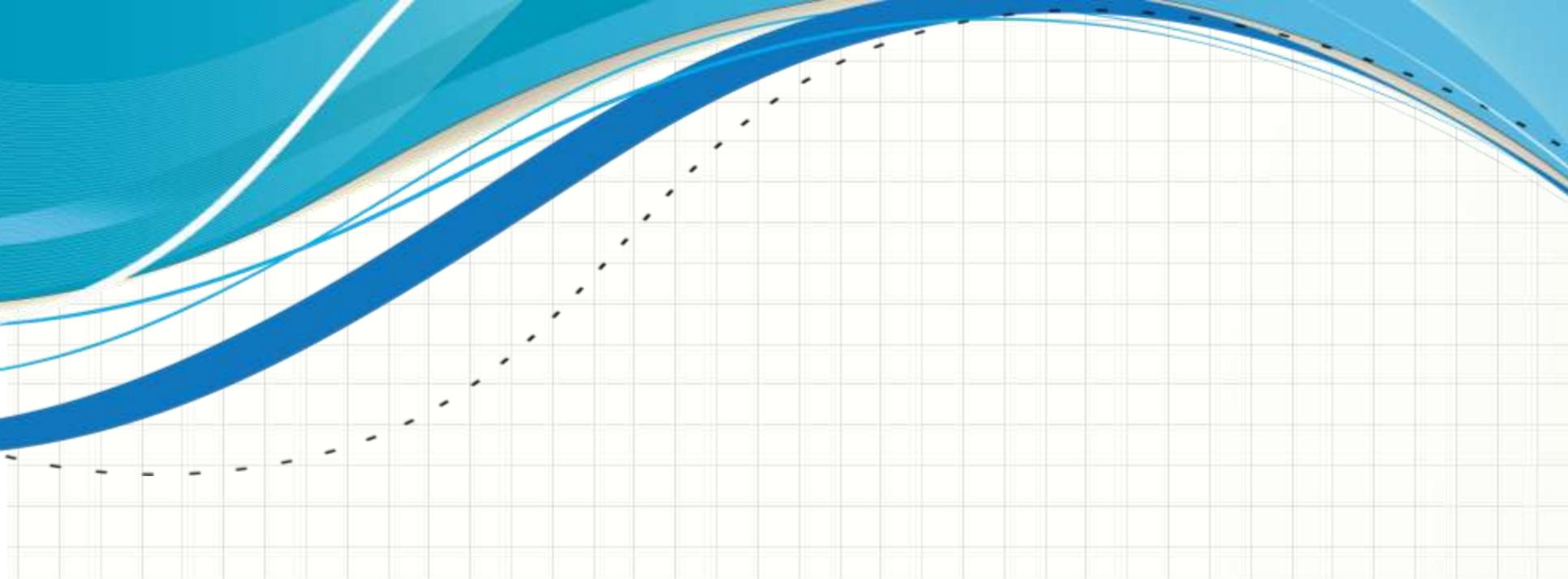
Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

$$J_o = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

$$J_o = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA$$

$$\mathbf{J_o = I_x + I_y}$$



PRODUTO DE INÉRCIA

Produto de Inércia

- Se isso é momento de inércia...

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

- O que seria isso?

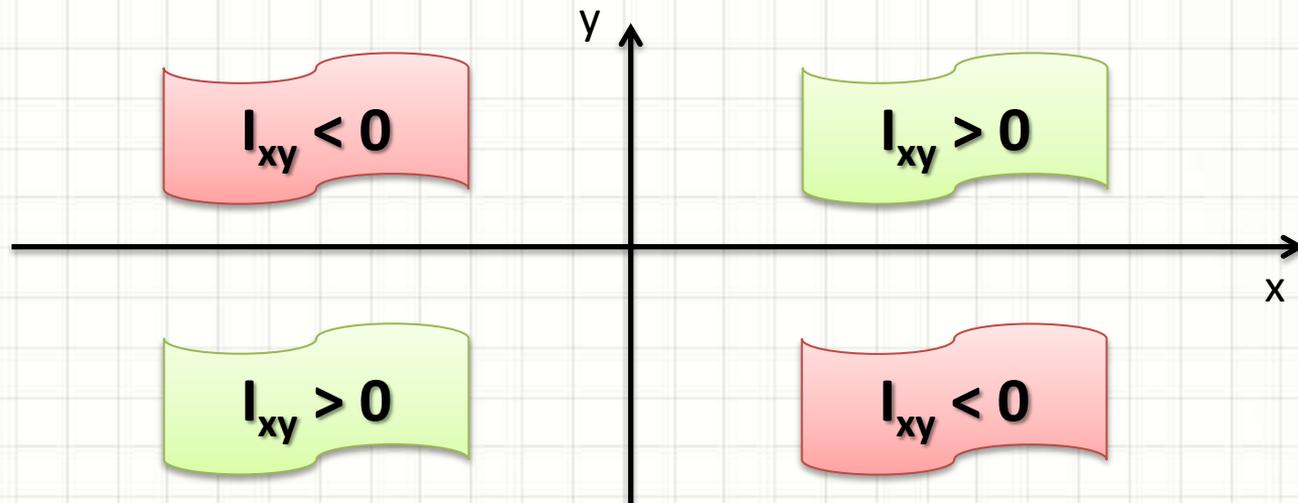
$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

Produto de Inércia

- Produto de Inércia: será usado depois

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo $\rightarrow [I_{xy}] = m^4$



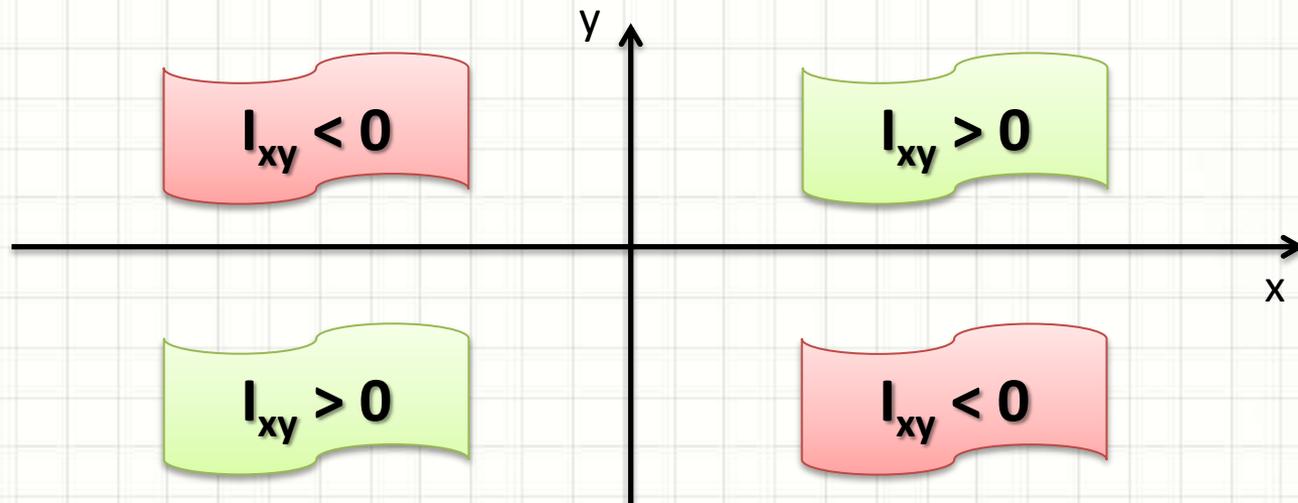
Produto de Inércia

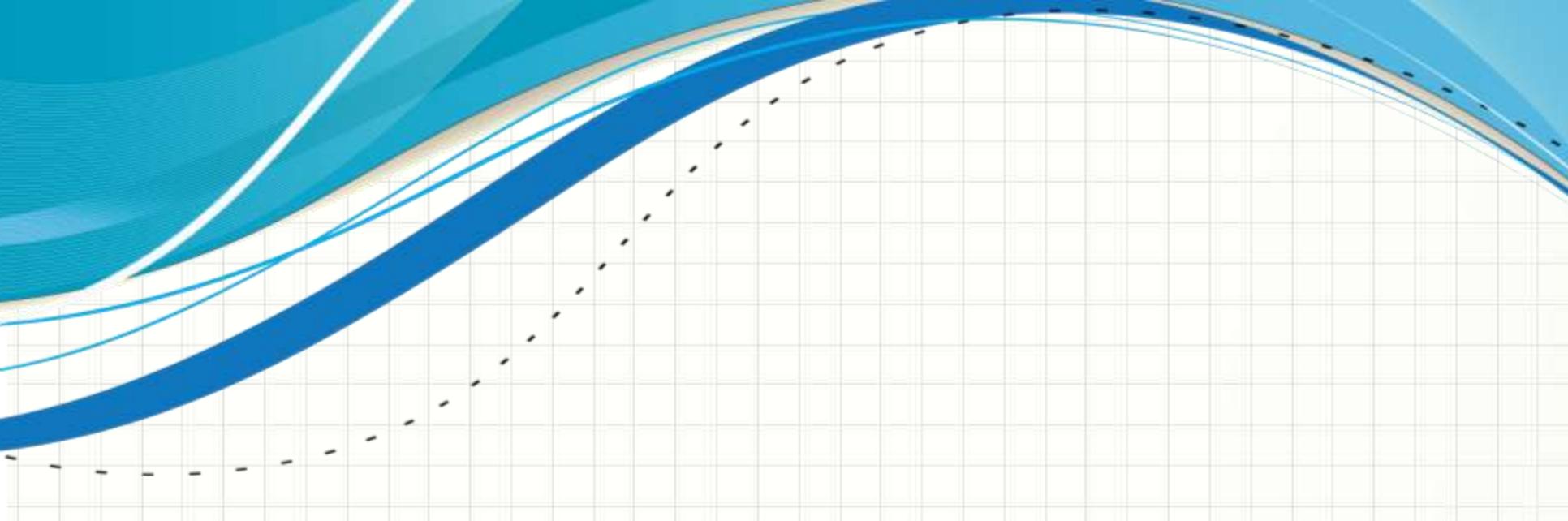
Quando um dos eixos é de simetria, o produto de inércia será sempre **ZERO!**

- Produto de Inércia: será

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo $\rightarrow [I_{xy}] = m^4$

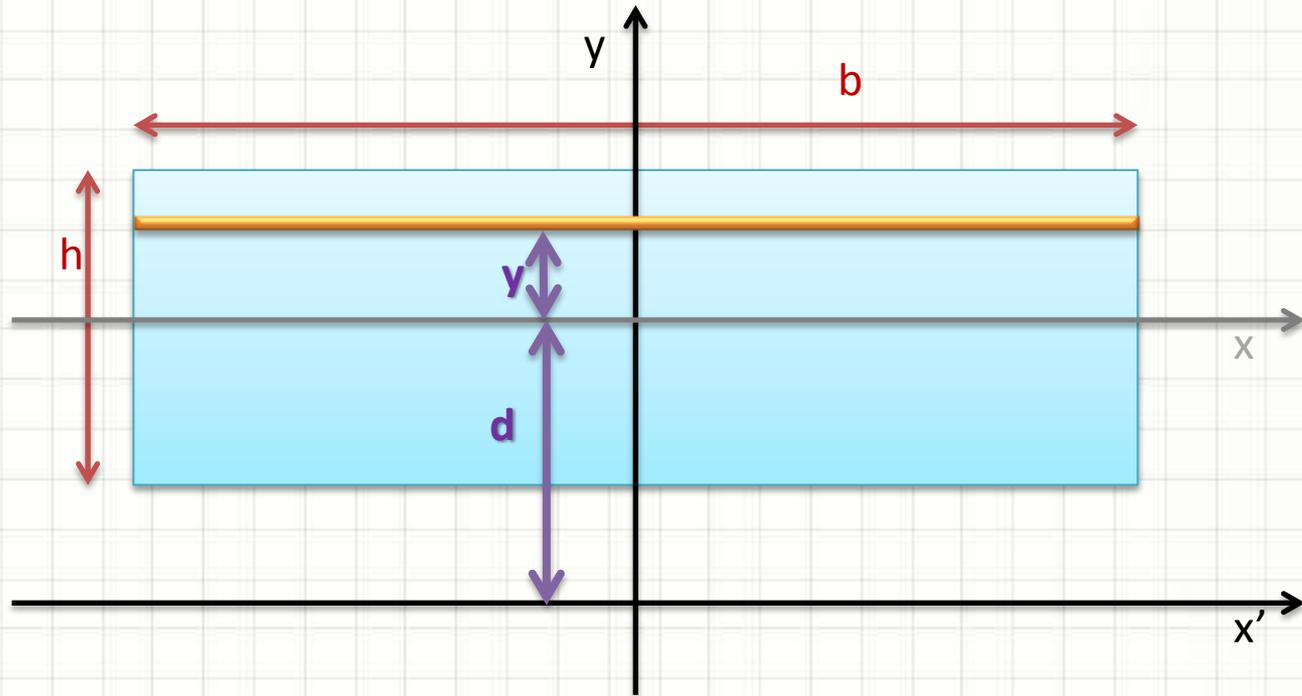




TRANSLAÇÃO DE EIXO NO MOMENTO DE INÉRCIA

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)



$$I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)

$$I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot d \cdot y \cdot dA + \int_A d^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = I_x + 2 \cdot d \cdot S_x + d^2 \cdot A$$

- Se x era o eixo que passa pelo centróide...

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$

Translação de Eixos

- Analogamente, para x e y passando pelo centróide

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$

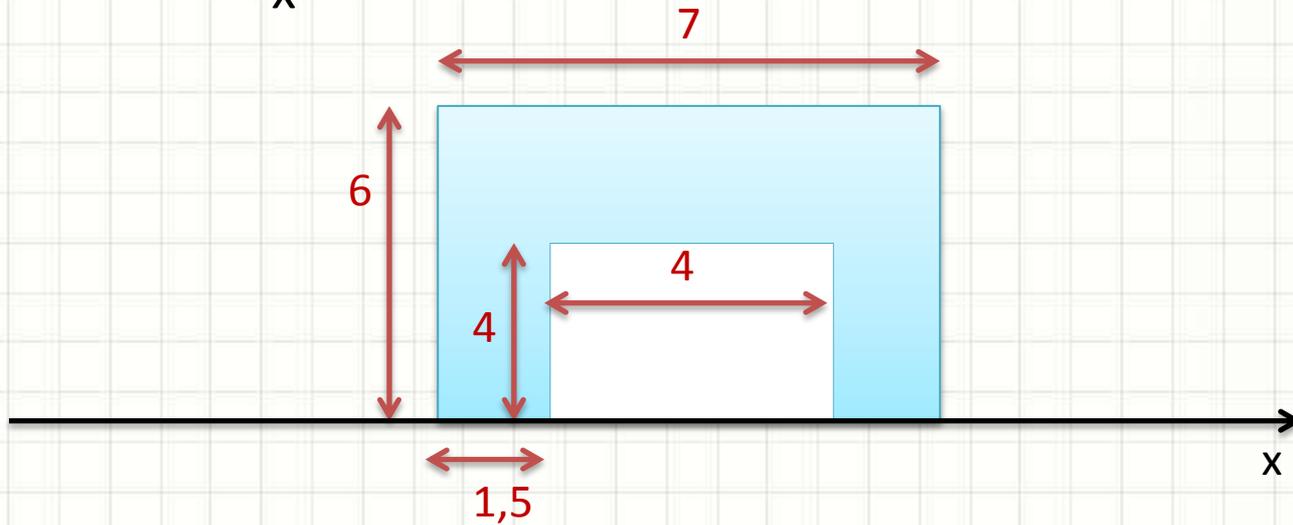
$$I_{y'} = I_y + A \cdot d^2$$

- Como I_x e $I_y \rightarrow$ eixos centrais, $d \rightarrow$ positivo
- E também... se O é o centróide...

$$J_{O'} = J_O + A \cdot d^2$$

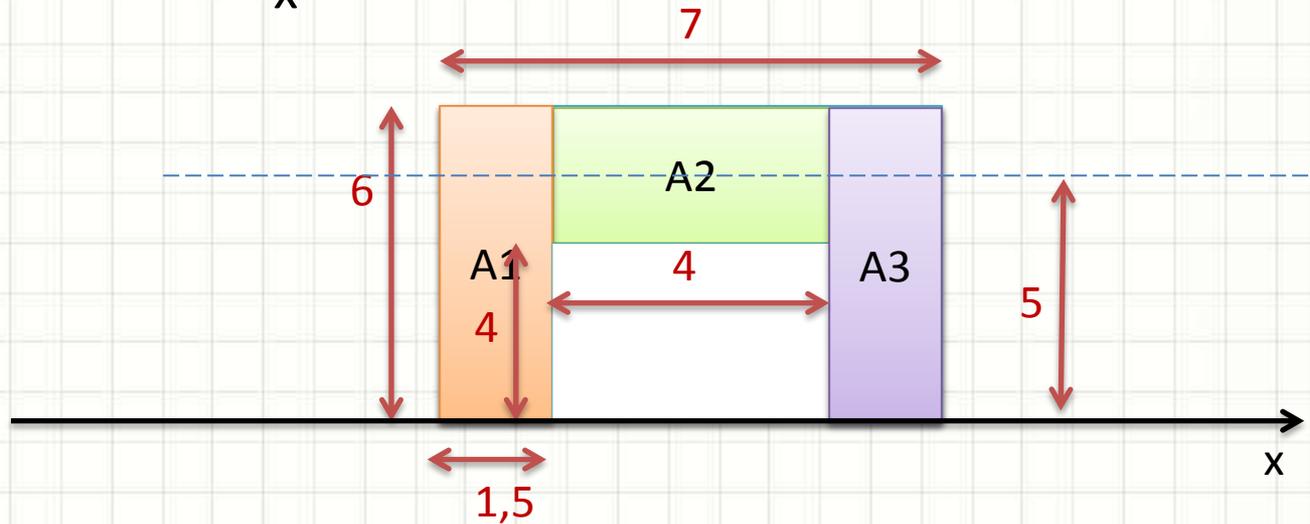
Exercício

- Calcular I_x

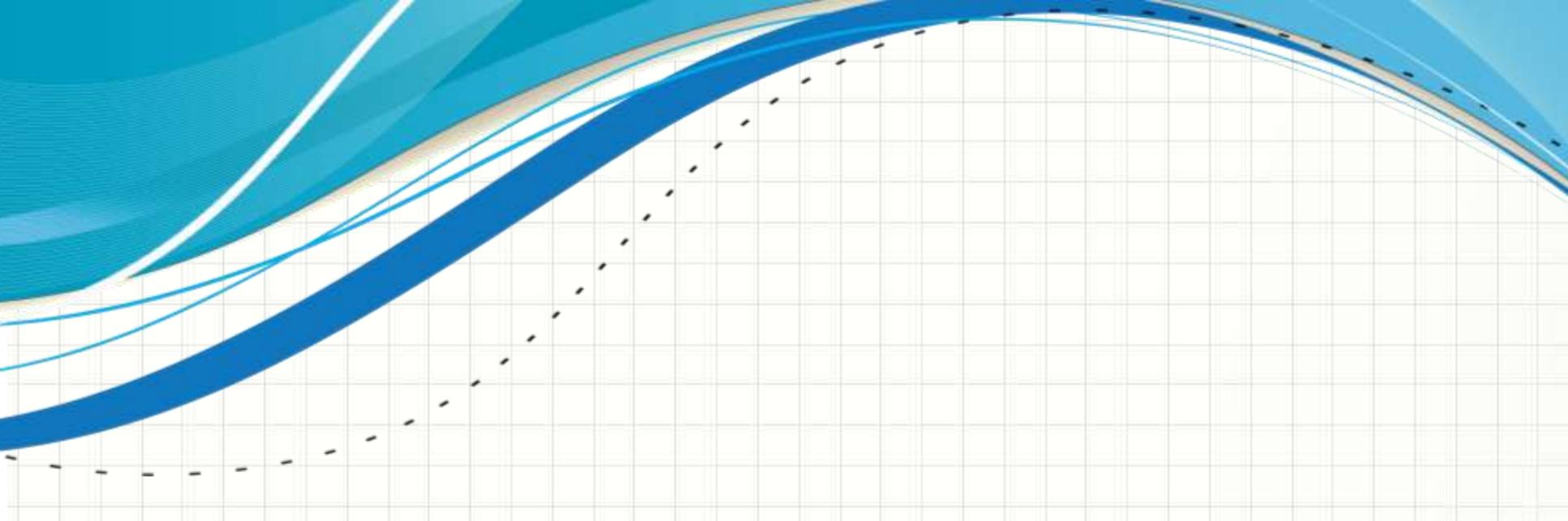


Exercício

- Calcular I_x - medidas em metros



- $I_x = I_{A1x} + I_{A2x} + I_{A3x}$
- $I_x = \frac{b1 \cdot h1^3}{3} + \left(\frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d^2 \right) + \frac{b3 \cdot h3^3}{3}$
- $I_x = \frac{1,5 \cdot 6^3}{3} + \left(\frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5^2 \right) + \frac{1,5 \cdot 6^3}{3} = 749,3 \text{ m}^4$



TRANSLAÇÃO DE EIXO NO PRODUTO DE INÉRCIA

Translação de Eixos

- Pode-se demonstrar que se os eixos passam pelo centróide, isso é válido...

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$

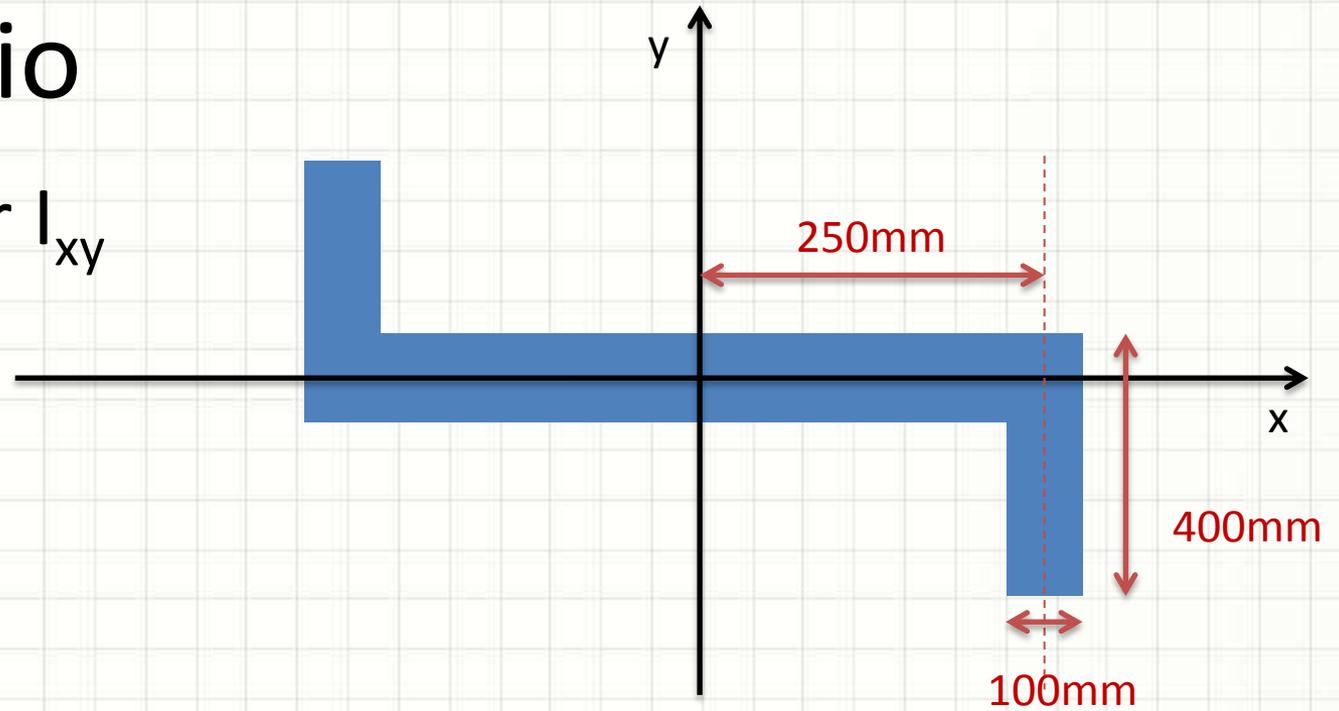
$$I_{y'} = I_y + A \cdot d^2$$

- Da mesma forma deduz-se que...

$$I_{xy'} = I_{xy} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

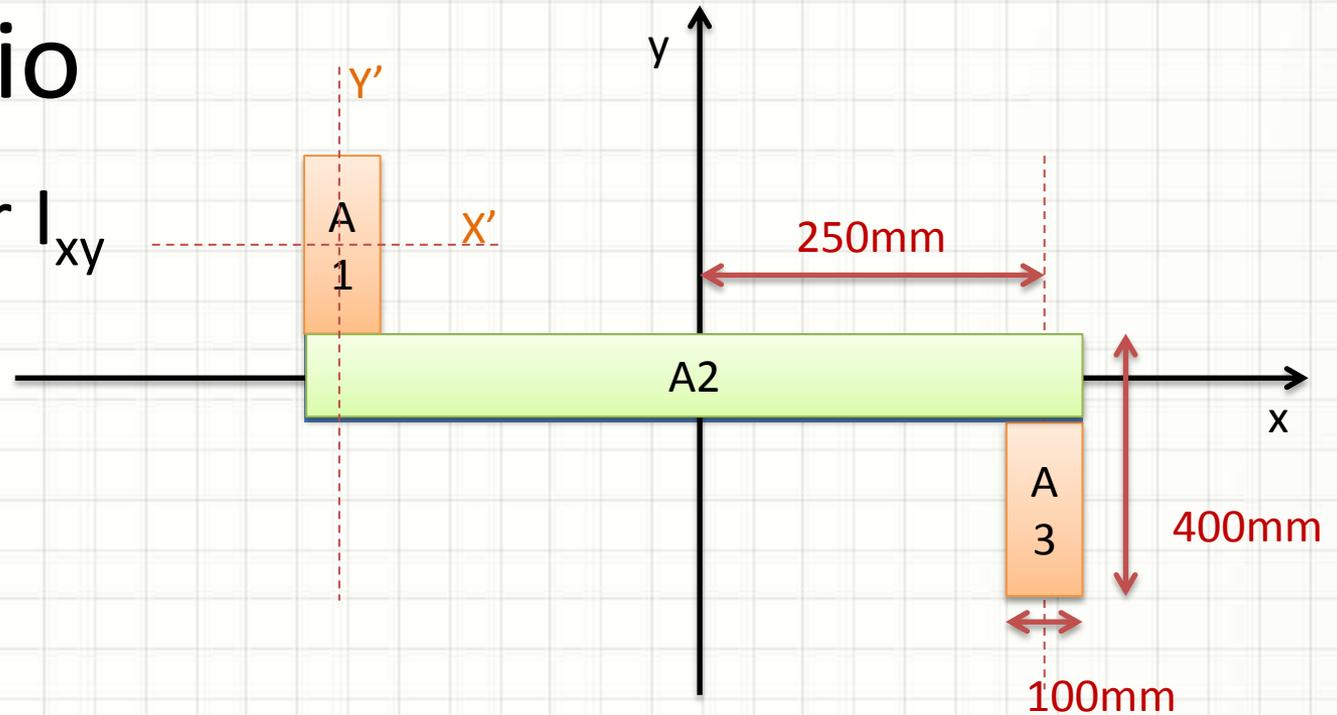
Exercício

- Calcular I_{xy}



Exercício

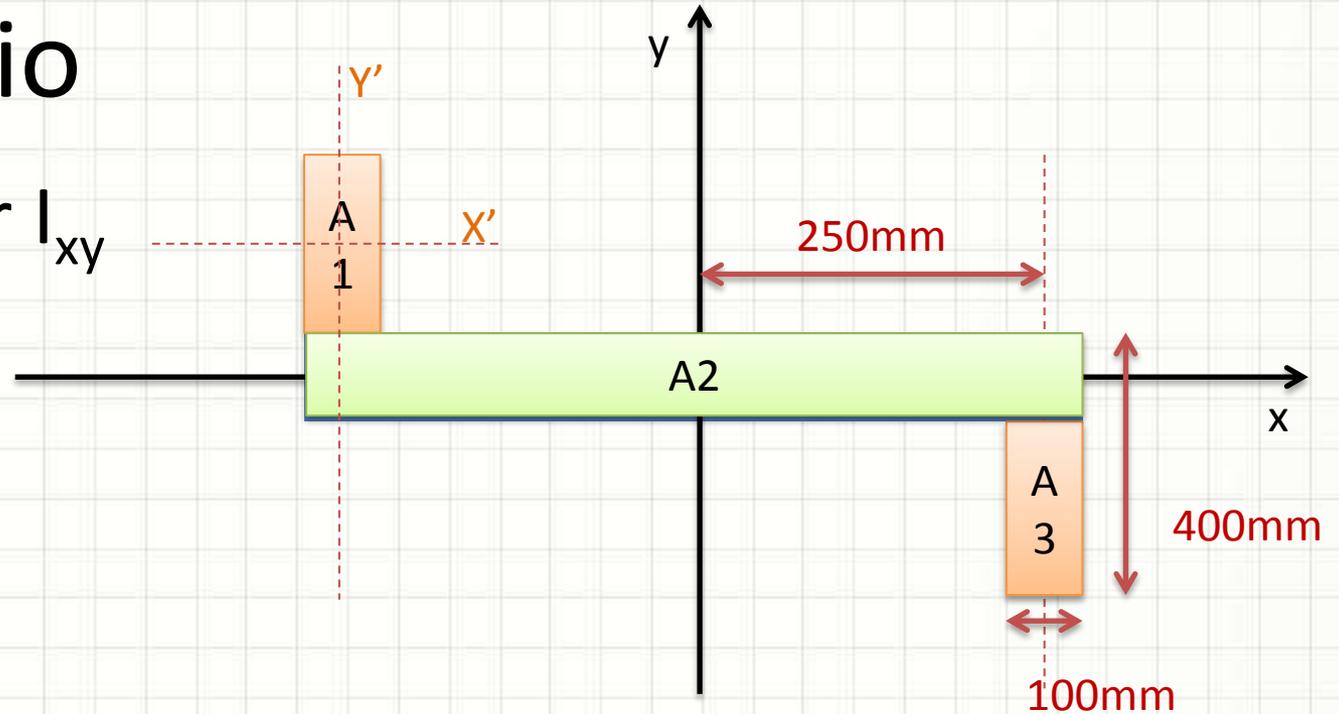
- Calcular I_{xy}



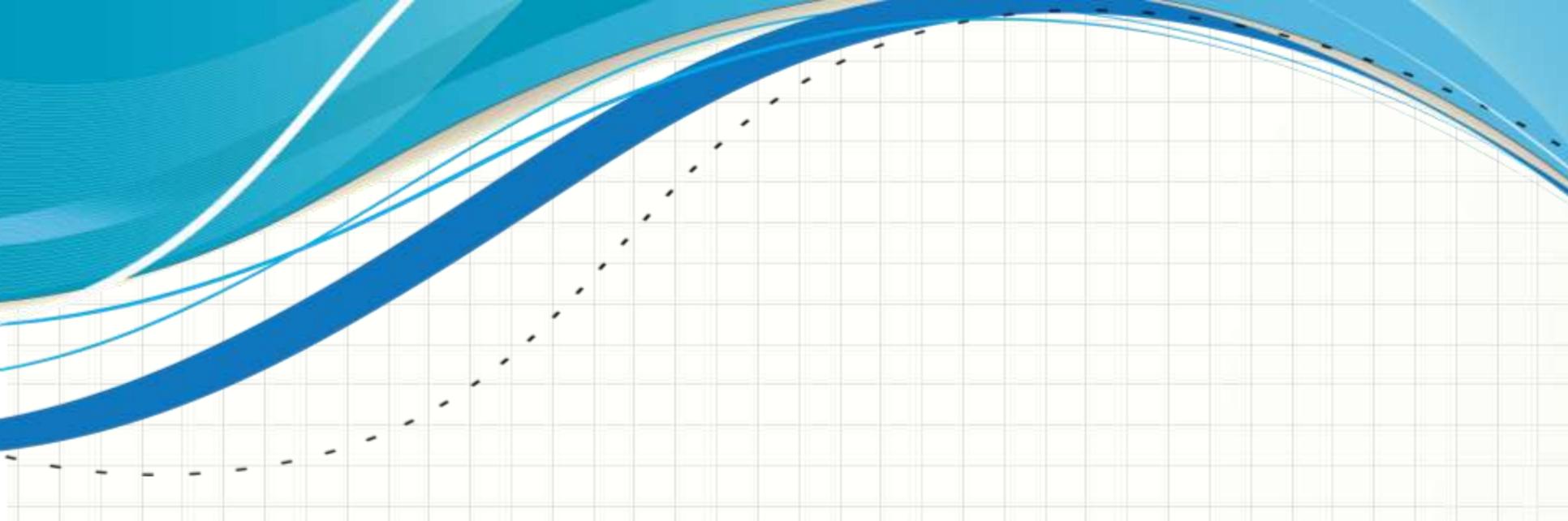
- $I_{A2xy} = 0$
- $I_{A1xy} = I_{A1x'y'} + A1 \cdot dx \cdot dy$
 $= 0 + 300 \cdot 100 \cdot (-250) \cdot 200 = -1,5 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$
- $I_{A3xy} = I_{A3x''y''} + A3 \cdot dx \cdot dy$
 $= 0 + 300 \cdot 100 \cdot 250 \cdot (-200) = -1,5 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

Exercício

- Calcular I_{xy}



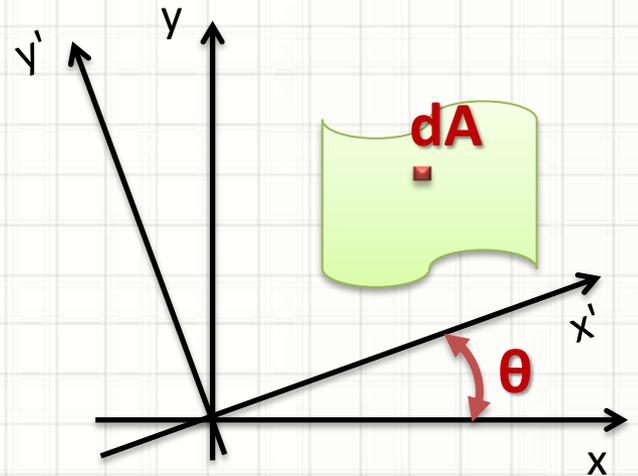
- $$I_{xy} = I_{A1xy} + I_{A2xy} + I_{A3xy} =$$
$$= 0 - 1,5 \cdot 10^9 - 1,5 \cdot 10^9 = -3,0 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$



ROTAÇÃO DE EIXOS DE INÉRCIA

Rotação de Eixos

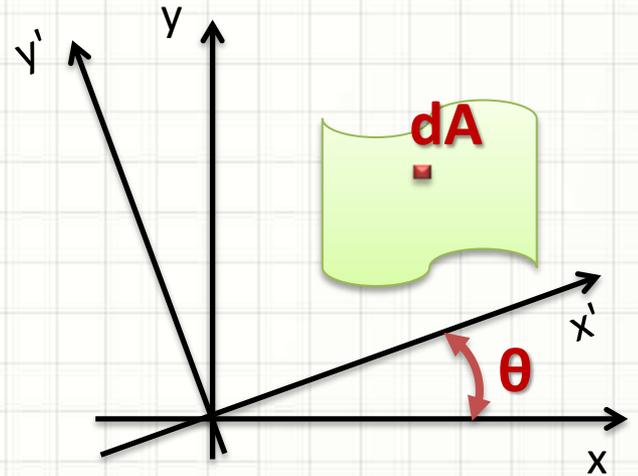
- Conhecidos I_x , I_y e I_{xy}
- Como calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$?
- $x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$
- $y' = y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta$
- $dI_{x'} = y'^2 \cdot dA$
- $dI_{y'} = x'^2 \cdot dA$



- Realizando a integral de $dI_{x'}$ e $dI_{y'}$...

Rotação de Eixos

- Relações:

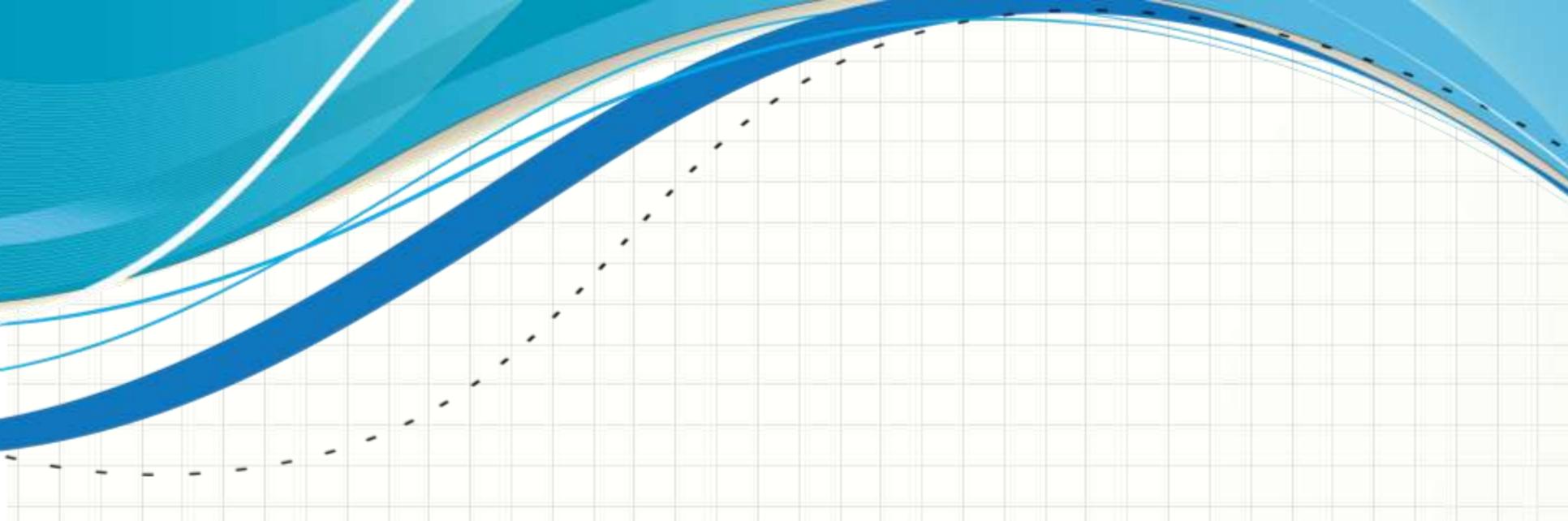


$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta + I_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

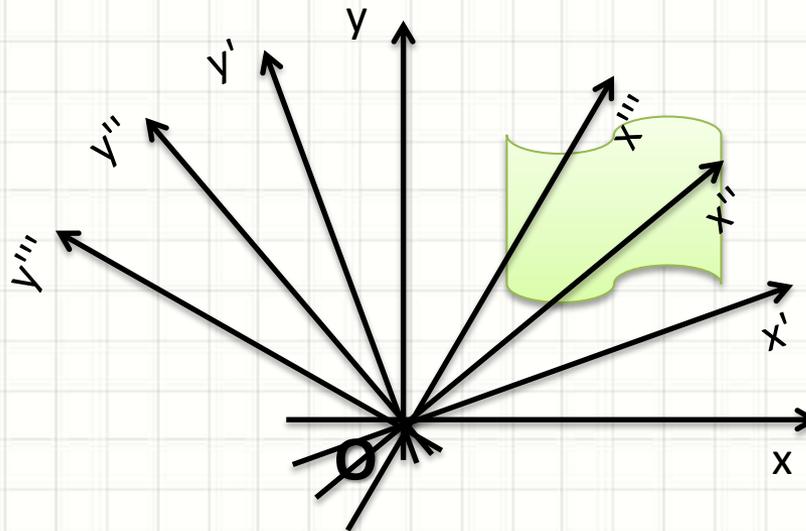
J_o permanece o mesmo!



EIXOS PRINCIPAIS E MOMENTOS PRINCIPAIS

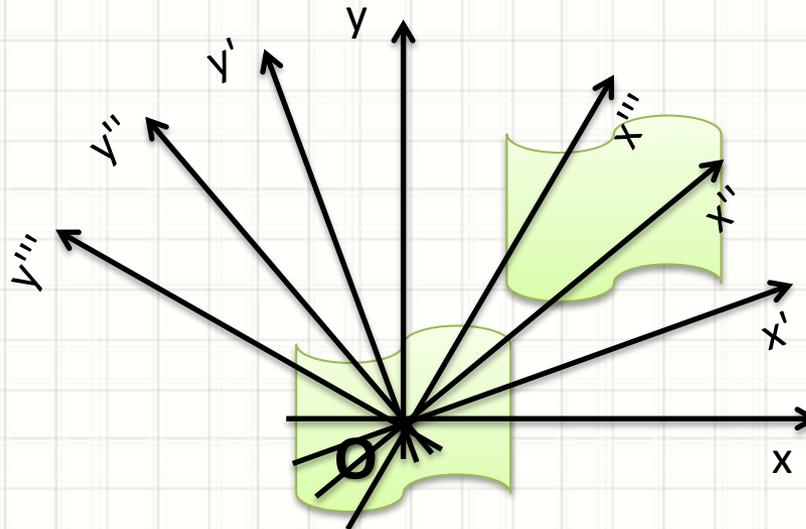
Eixos Principais e Momentos Principais

- Para um dado centro de inércia O ...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y



Eixos Principais e Momentos Principais

- Para um dado centro de inércia O ...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y
- ***Em geral***: considera-se o O no centróide



Eixos Principais e Momentos Principais

- Um desses pares: momento máximo x mínimo
- Podemos achar esse par de eixos
- Basta derivar $dI_{x'}/d\theta = 0$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

- Chegando à seguinte equação:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Eixos Principais e Momentos Principais

- Essa equação:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

- Tem duas raízes:

$$I_{max/min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

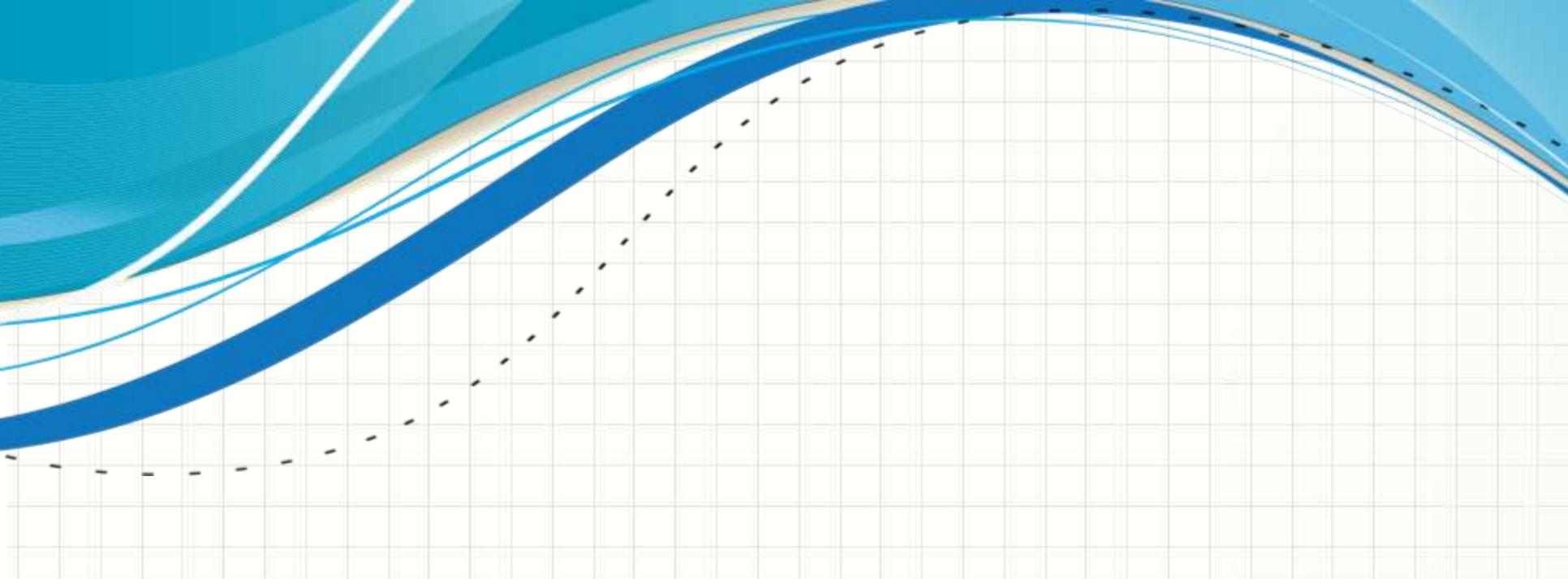
- **Momentos Principais**

Eixos Principais e Momentos Principais

- E o ângulo pode ser calculado por:

$$\theta_p = \frac{\mathit{atan} \left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \right)}{2}$$

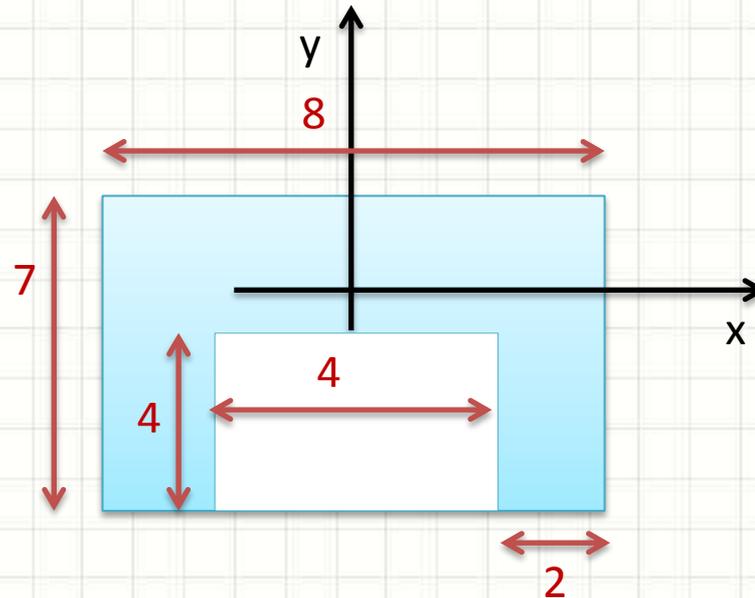
- Se eixos cruzam no centróide, $I_{xy} = 0$!
- Nesse caso, eixos principais \equiv eixos centrais...

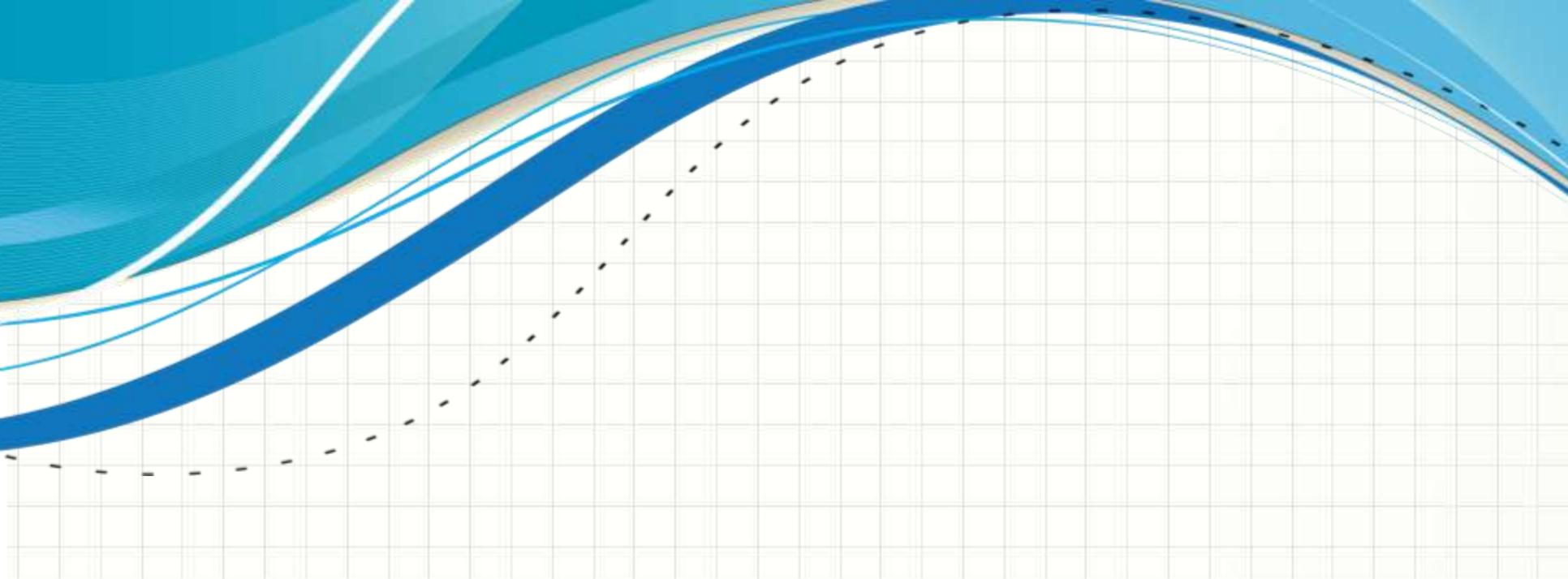


EXERCÍCIO

Exercício (Em Dupla)

- Calcule o I_x , o I_y e o I_{xy} no centróide
- Verifique se esses já são os eixos principais
- Se não forem, calcule-os

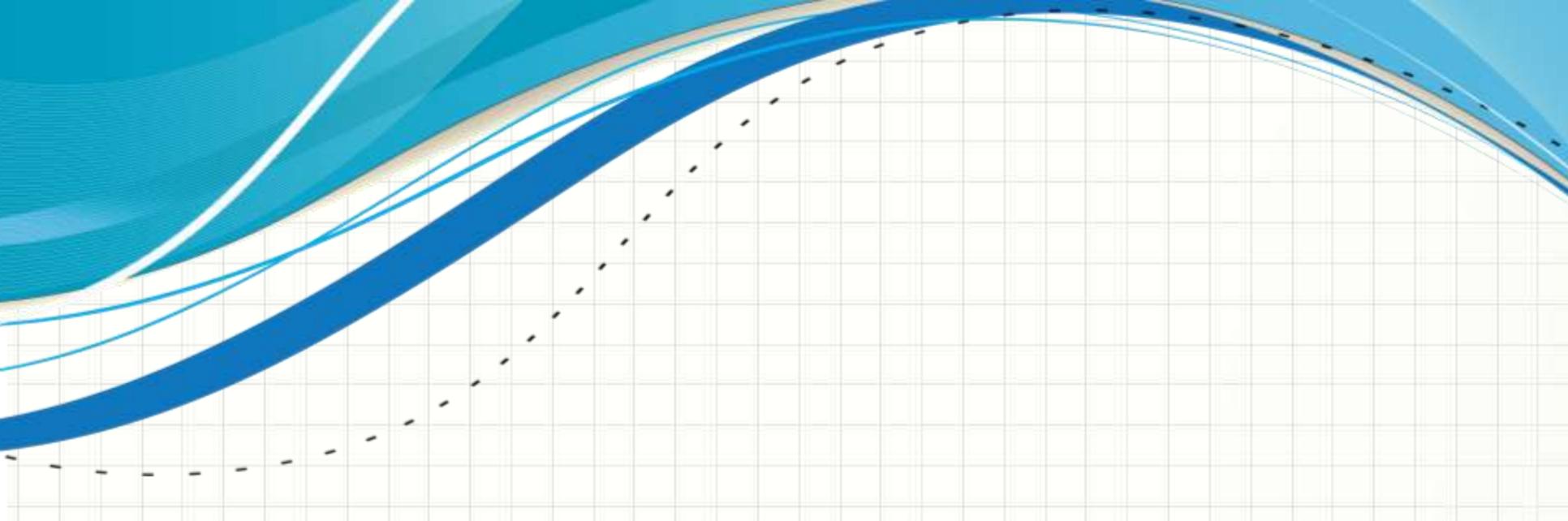




PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 578 e 579
- Mínimos:
 - Exercícios A.2 a A.6
 - Exercício A.11
- Extras:
 - Exercícios A.7 a A.10, A.12 a A.15 e A.17



CONCLUSÕES

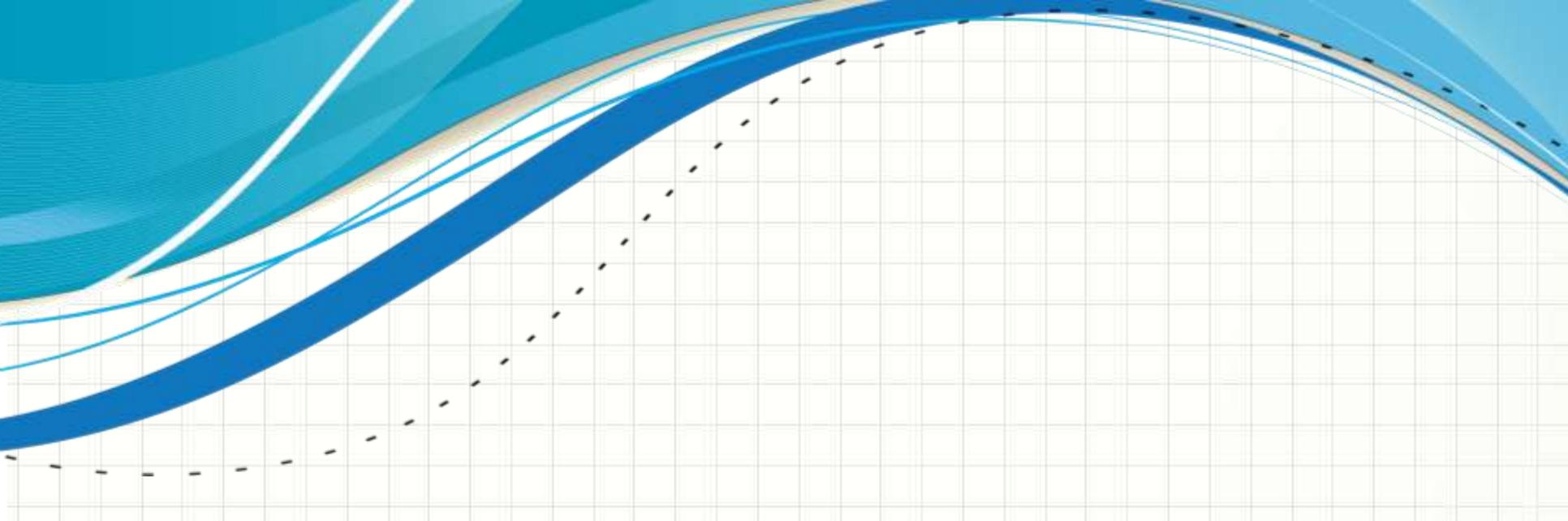
Resumo

- Momento de Inércia e Momento Polar de Inércia
- Produto de Inércia
- Eixos Centrais de Inércia
- Translação de Eixos
- Rotação de Eixos
- Eixos Principais de Inércia
- **Exercitar**
 - Exercícios Hibbeler / Material Didático

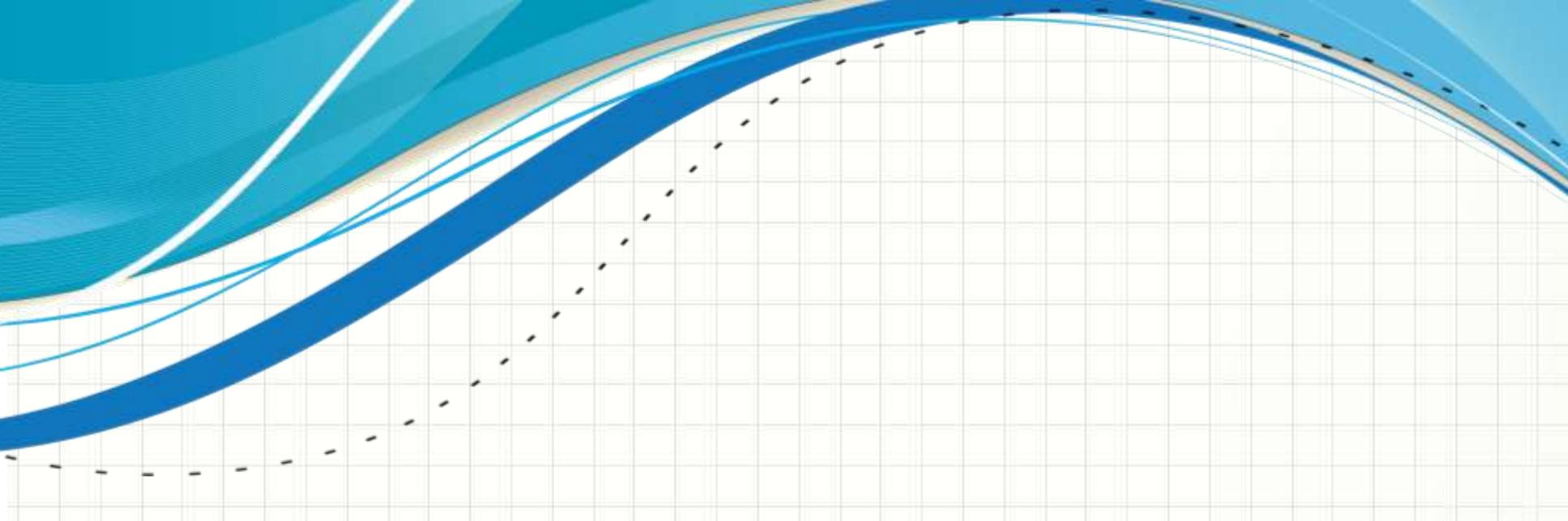
Próxima Aula



- E a resistência?
 - Esforços Axiais
 - Tração e Compressão



PERGUNTAS?



**BOM DESCANSO
A TODOS!**