Resistência dos Materiais II

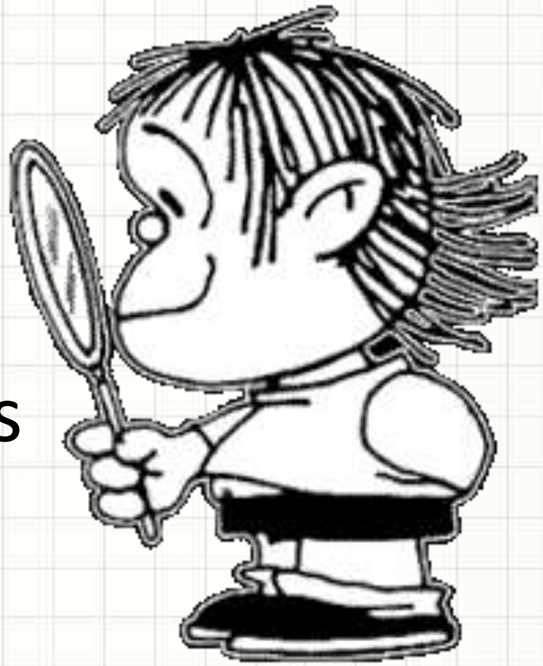
Carregamento Axial
Parte I

Prof. Dr. Daniel Caetano

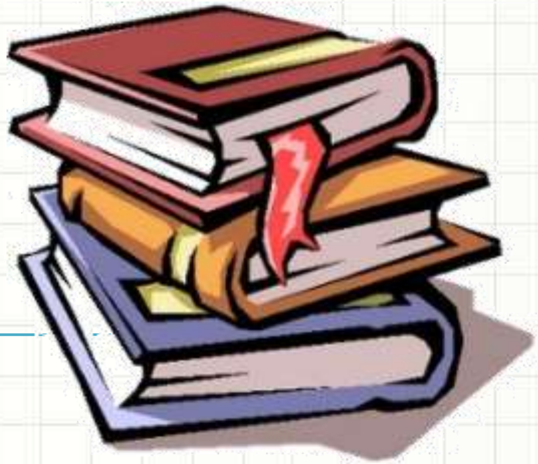
2012 - 2

Objetivos

- Conhecer o princípio de Saint-Venant
- Conhecer o princípio da superposição
- Calcular deformações em elementos submetidos a esforço normal
- Calcular reações em problemas estaticamente indeterminados simples



Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Notas de Aula	-
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Aula 3)
Material Didático	-
Resistência dos Materiais (Hibbeler)	Biblioteca Virtual, páginas 85 a 106.

Relembrando:

Forma x Deformação

Características das Figuras Planas

- Perímetro, Área...
- Momento Estático → cálculo do centróide
- Momento de Inércia → resiste à variação ω

- Mas o que tem a ver isso com resistência?
- Módulo de Rigidez...
  - Tem a ver com o Módulo de Elasticidade

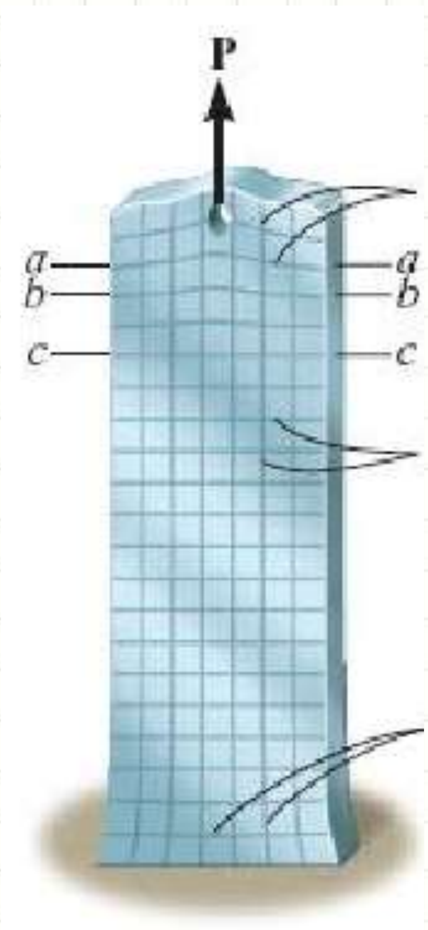
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$
$$F = k \cdot x$$

Lei de Hooke

O Princípio de Saint-Venant

Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga

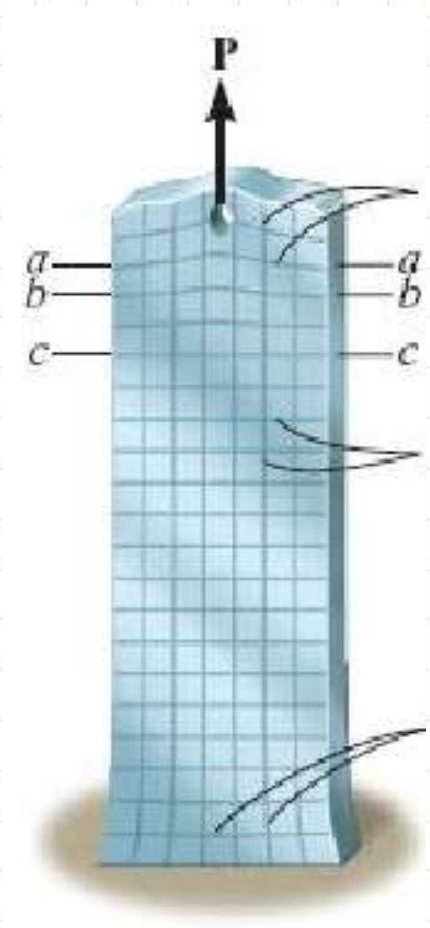


Distorção próxima à carga

Distorção próxima ao apoio (reação!)

Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga



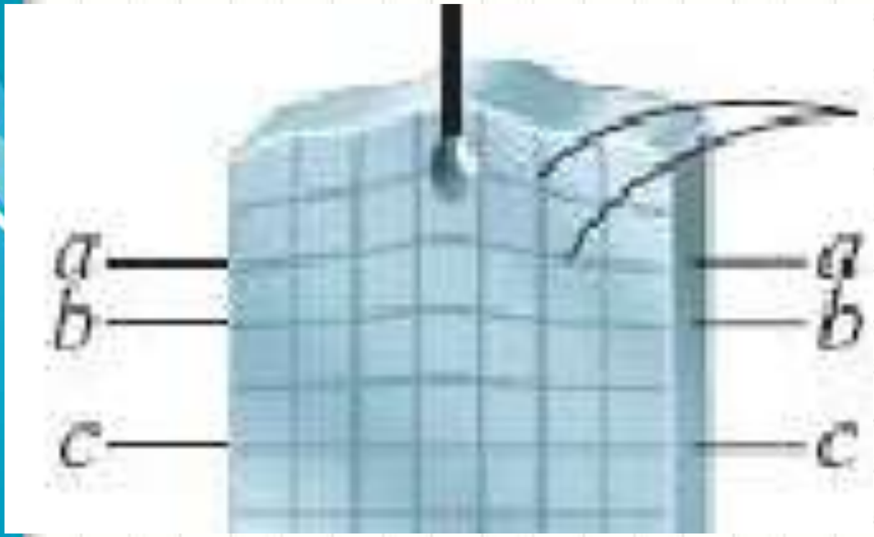
Distorção próxima à carga

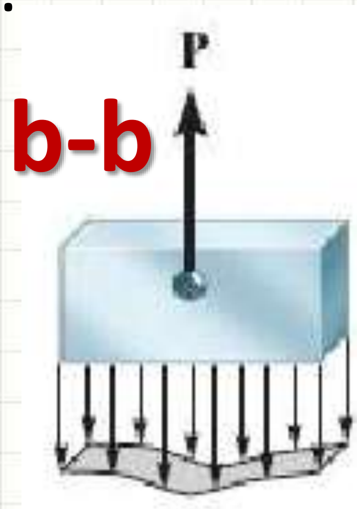
Longe das cargas e apoio...
Permanecem paralelas

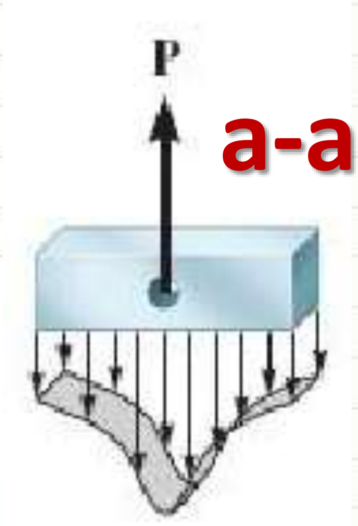
Distorção próxima ao apoio
(reação!)

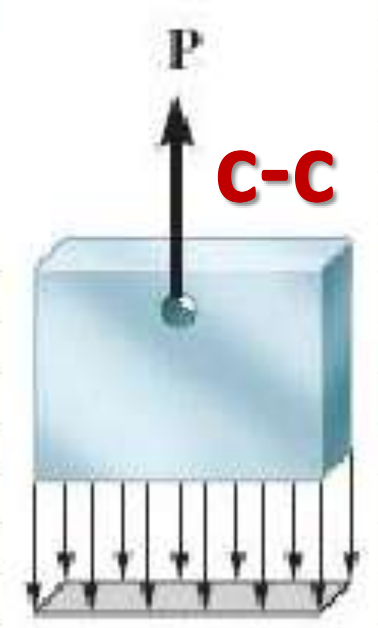
Princípio de Saint-Venant

- Com o distanciamento da carga...
  - A tensão se uniformiza...





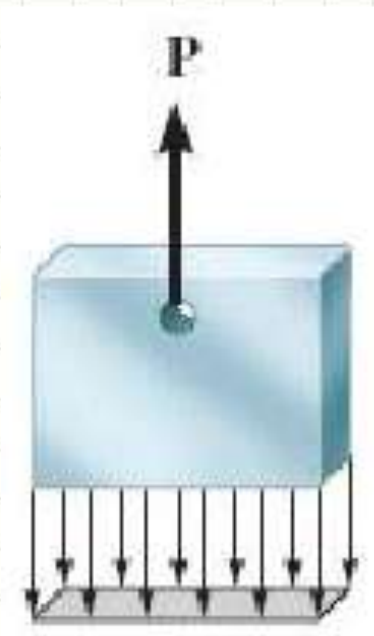




$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

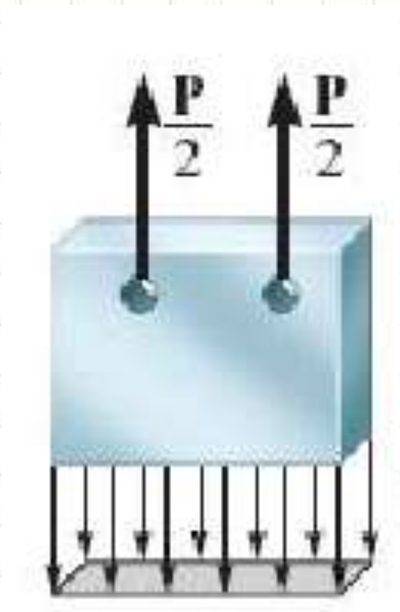
Princípio de Saint-Venant

- Uniformização independe da distribuição da carga!
  - Depende da resultante!



c-c

$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$



c-c

$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

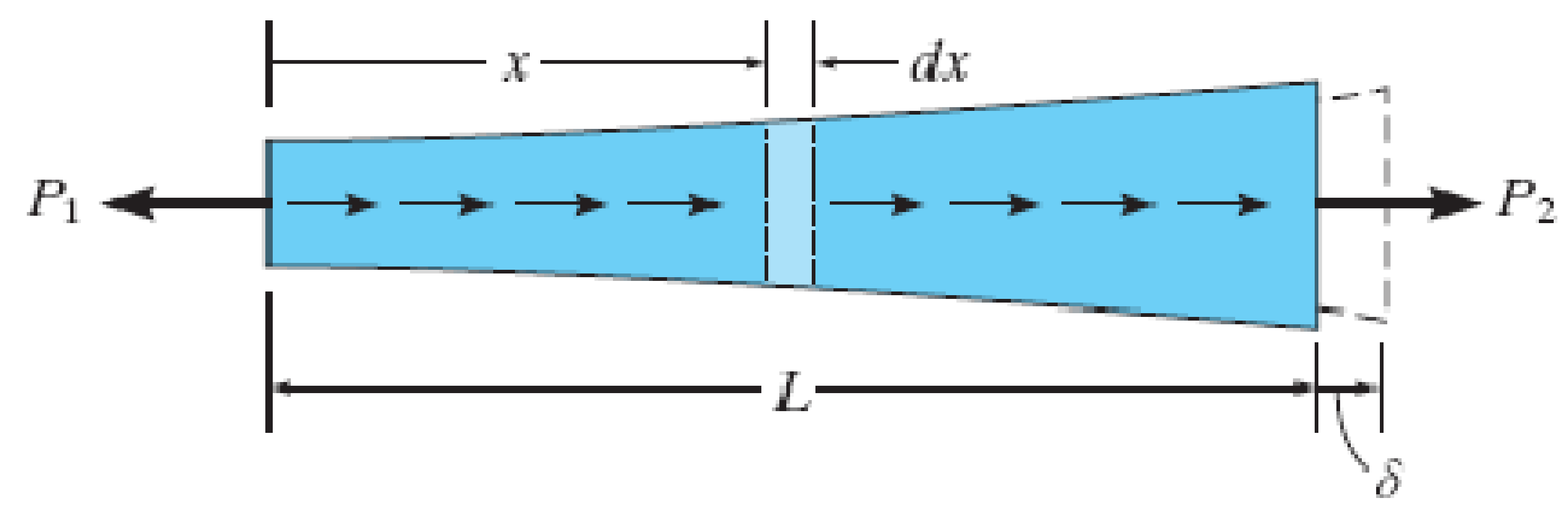
Princípio de Saint-Venant

- Quão longe da aplicação deve estar a medida?

Deformação Elástica de Corpo em Carga Axial

Deformação por Carga Axial

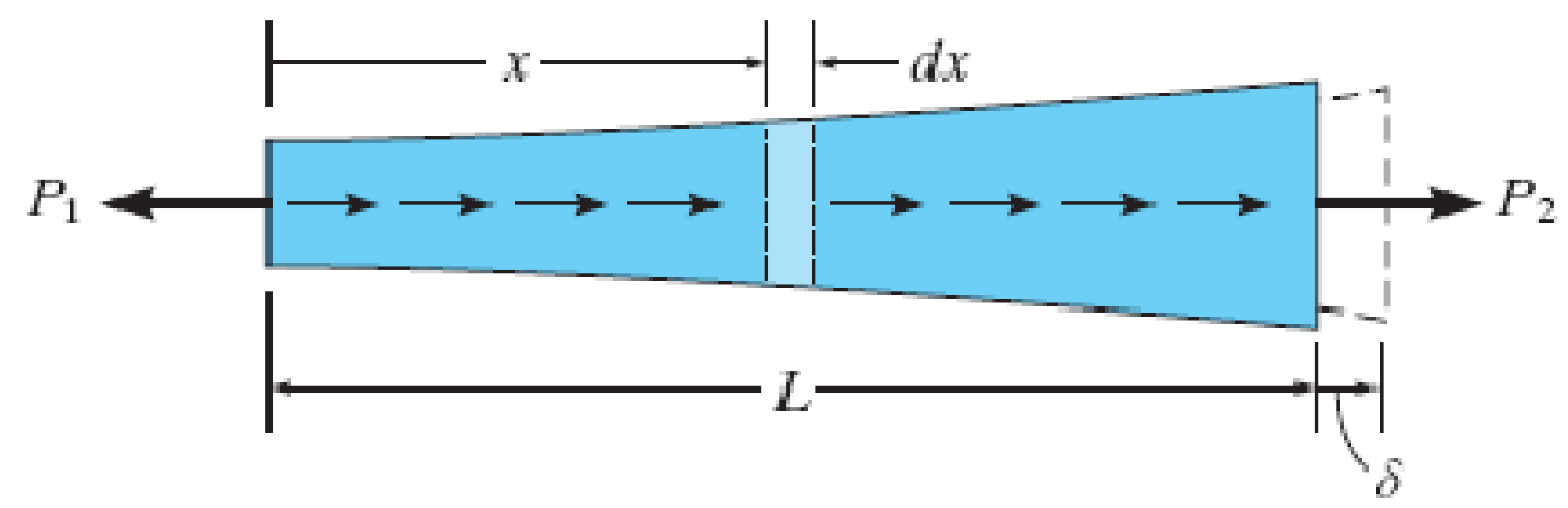
- Consideremos a viga genérica sob carga axial



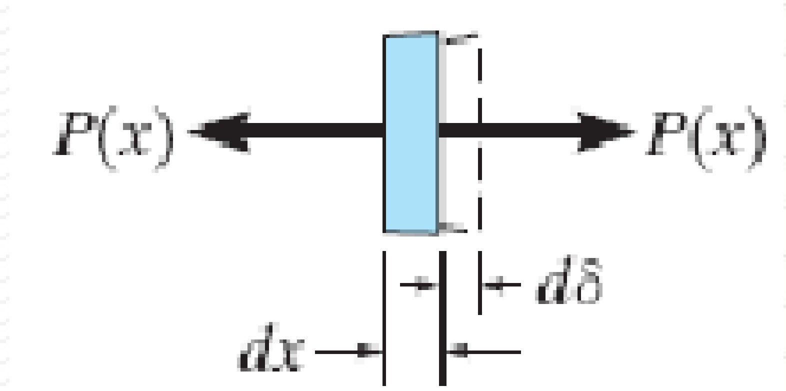
- Carga varia ao longo de x → P(x)
- Área varia ao longo de x → A(x)
- Considerar tensão uniforme (Saint-Venant)

Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial

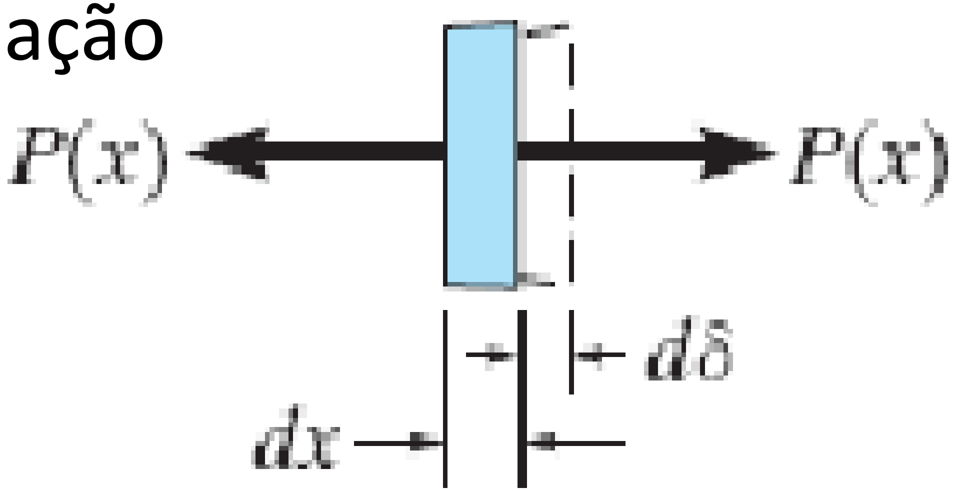


- Vamos calcular a deformação no elemento dx



Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação
- $\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$
- $\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$
- $\sigma = E \cdot \epsilon$

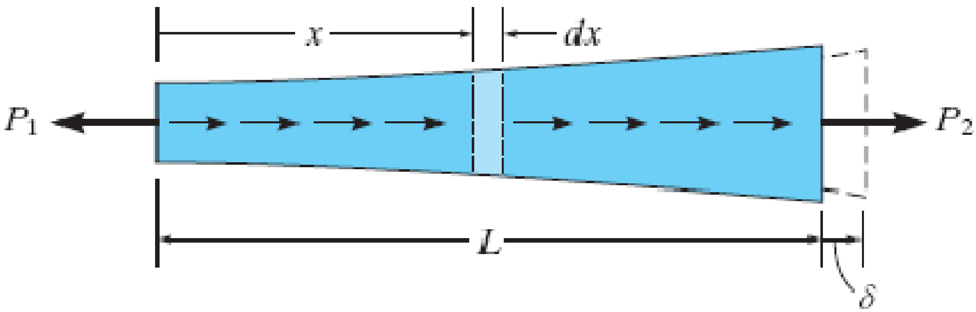


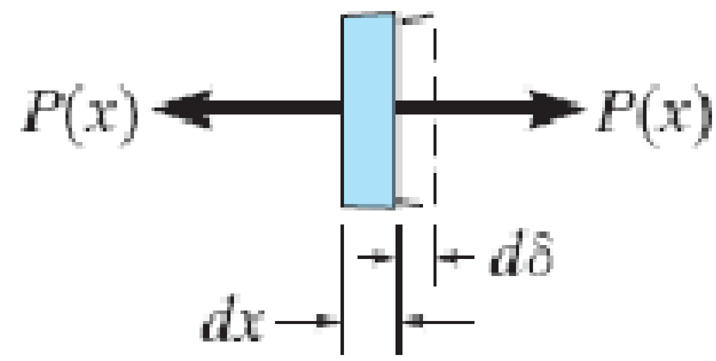
$$\frac{P(x)}{A(x)} = \mathrm{E} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação



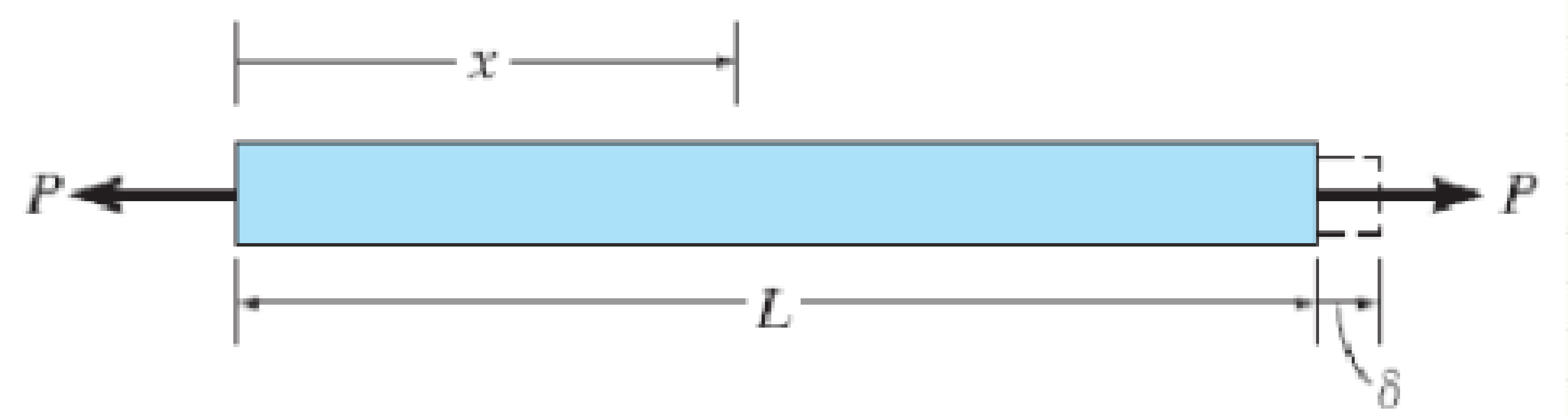


$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

Deformação por Carga Axial

- Deform. em Viga de Seção/Carga Constante

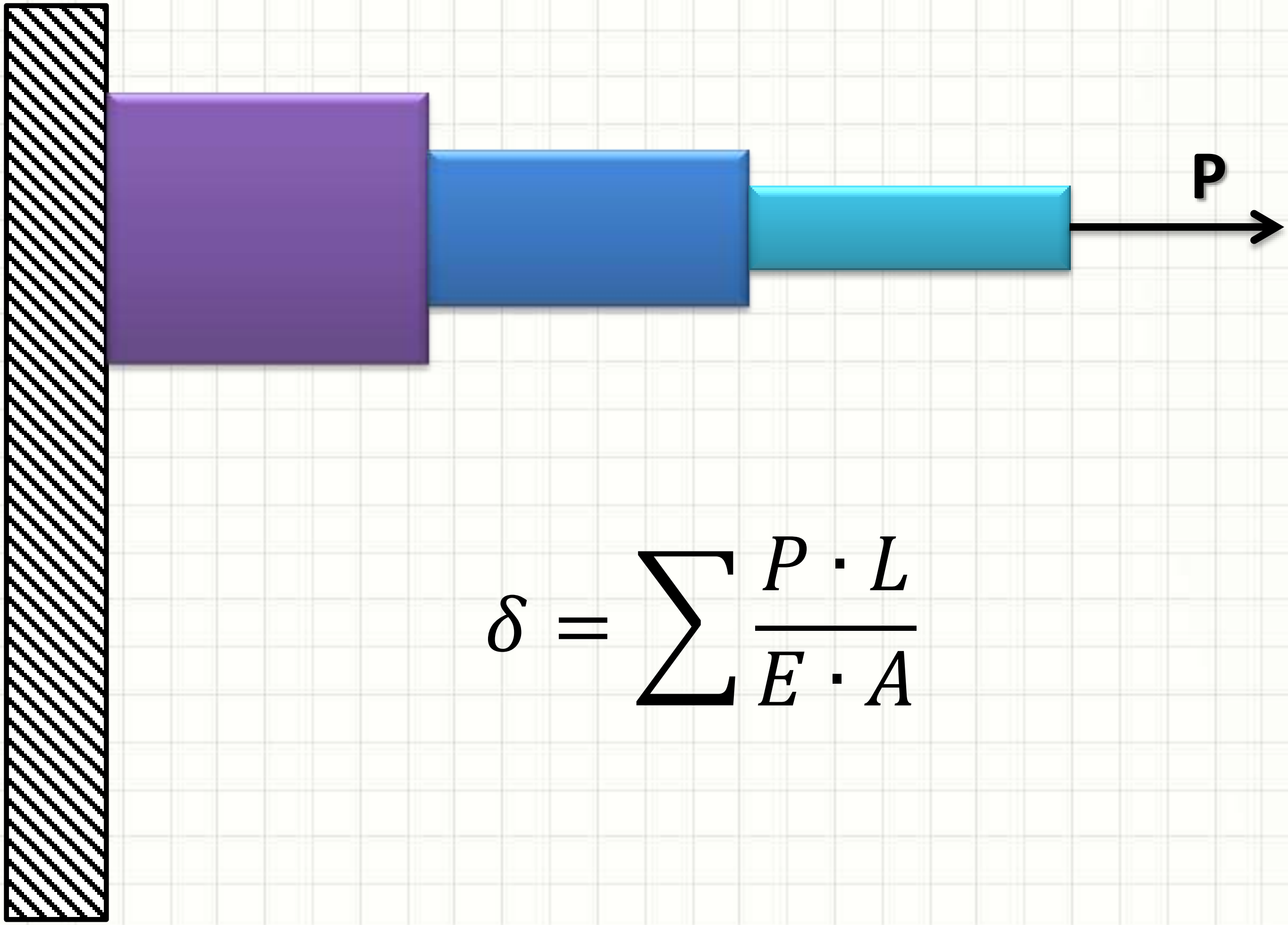


$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)} = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A}$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Deformação por Carga Axial

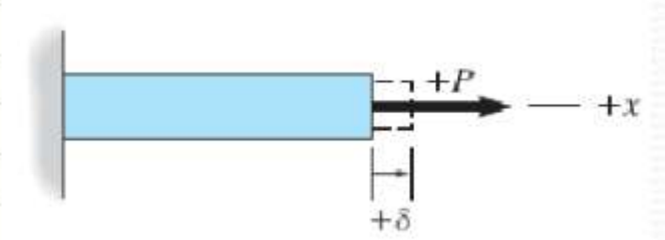
- Barras compostas de várias seções constantes

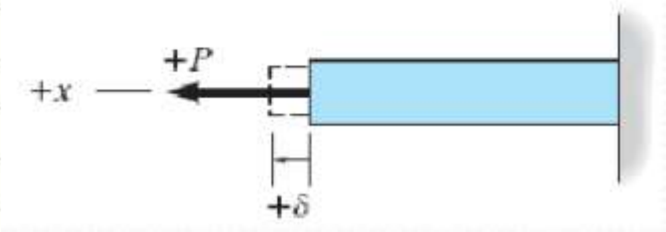


$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

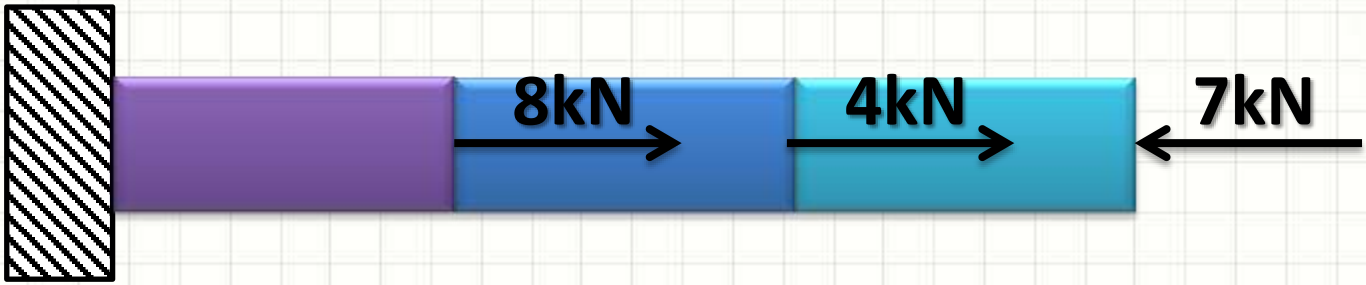
Deformação por Carga Axial

- Convenção de Sinais

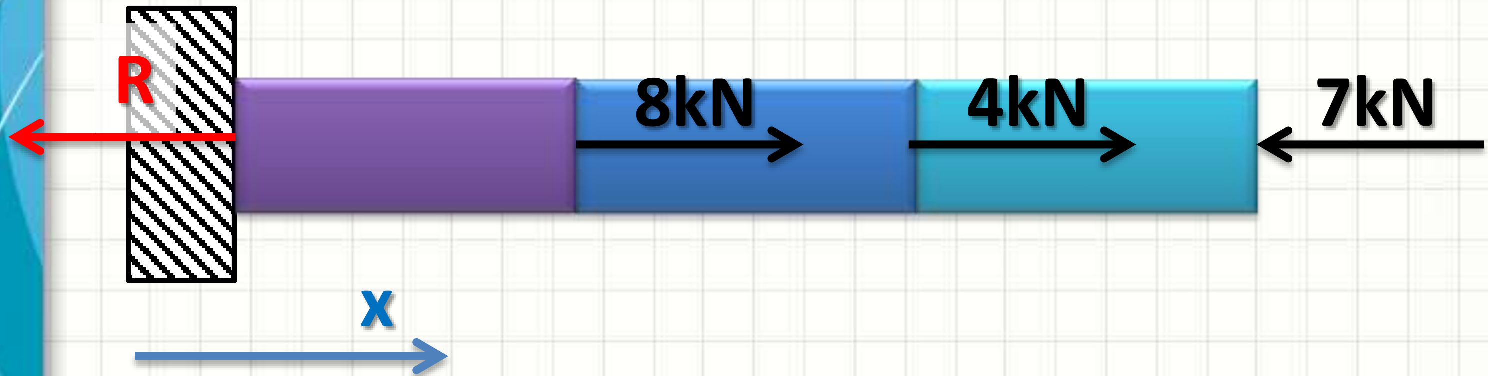




- Trações → Alongamentos → +
- Compressões → Contrações → -



Deformação por Carga Axial



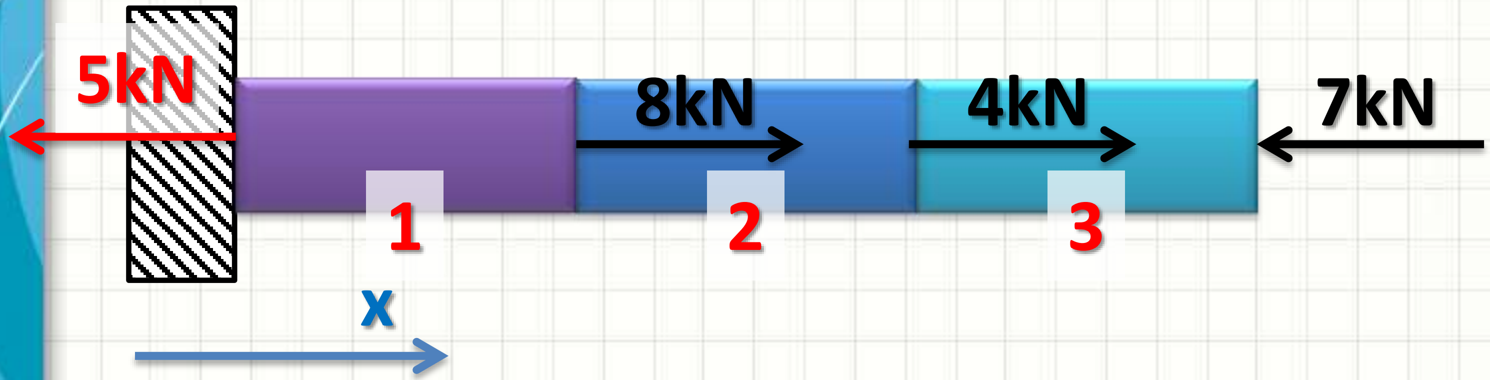
- A reação de apoio é...

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R + 8 + 4 - 7 = 0 \Rightarrow$$

R = 5kN

Deformação por Carga Axial

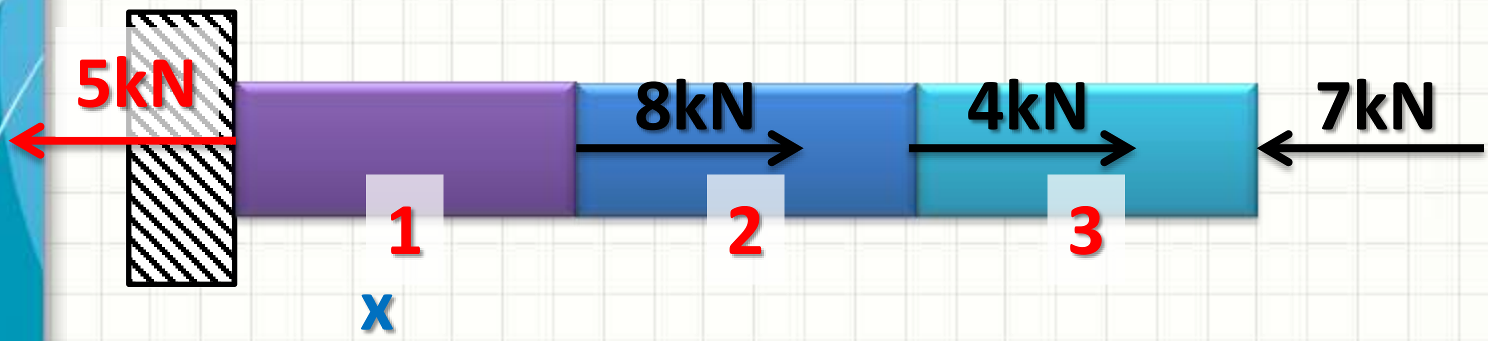


- O alongamento é...

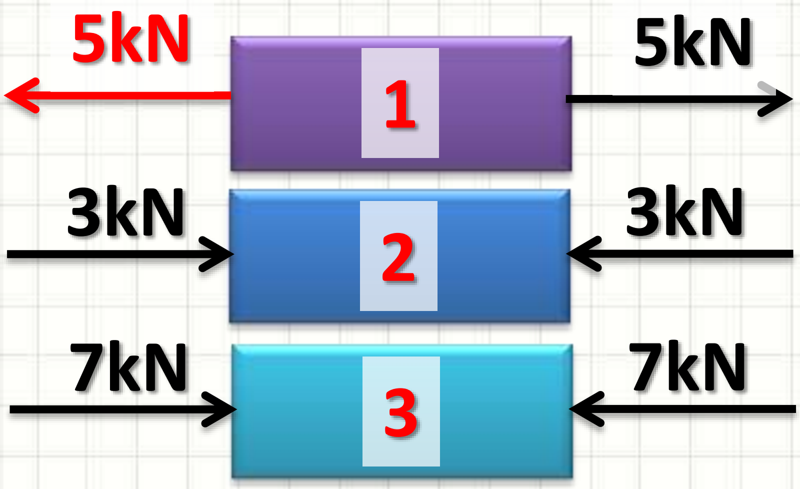
$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

Deformação por Carga Axial



$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

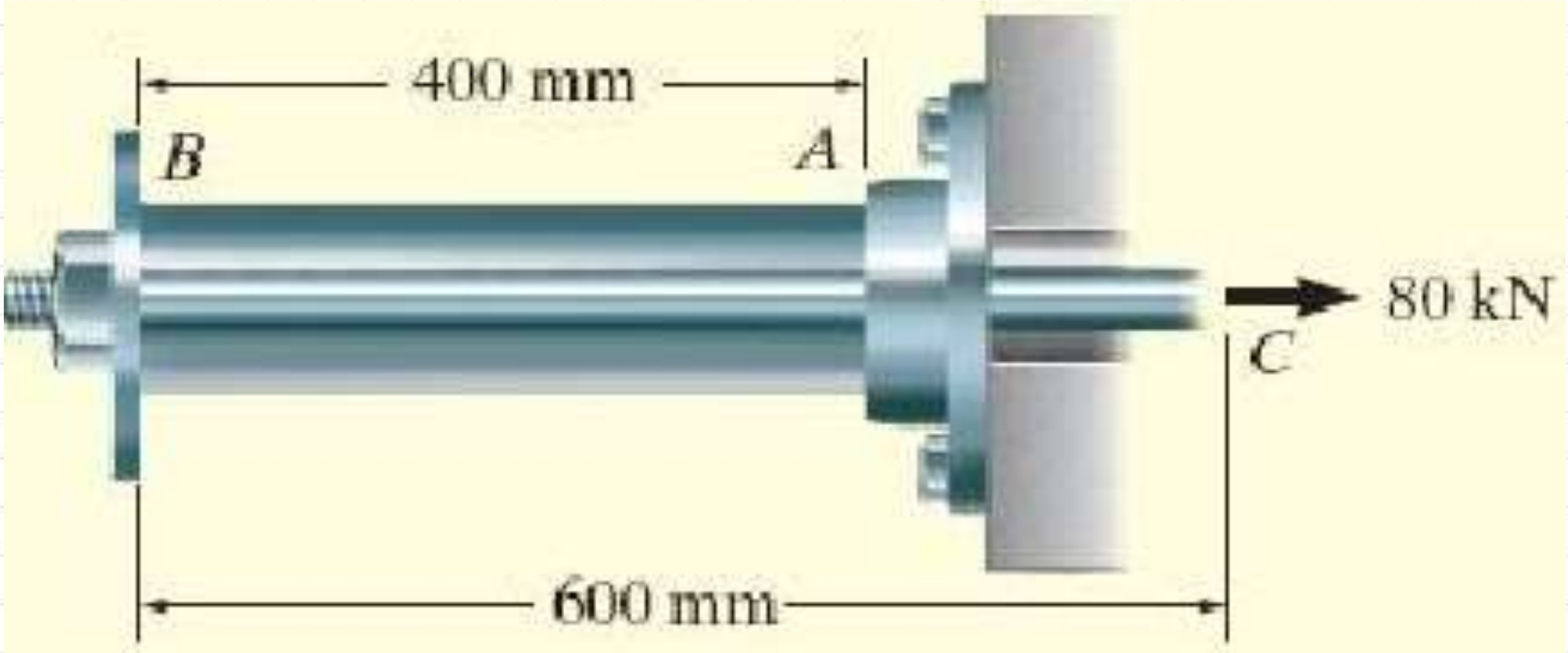


P1 = +5kN

P2 = -3kN

P3 = -7kN

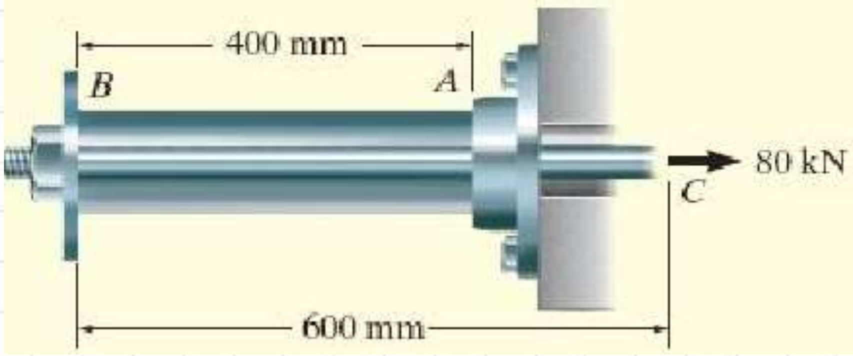
Exemplo – Def. por Carga Axial



- Tubo de alumínio (E = 70GPa) AB (A = 400mm^2).
- Barra de aço (E = 200GPa) BC (ϕ = 10mm).
- Tensão de 80kN em **C**…
- Faz **C** deslocar de quanto com relação a **A**?

Exemplo – Def. por Carga Axial

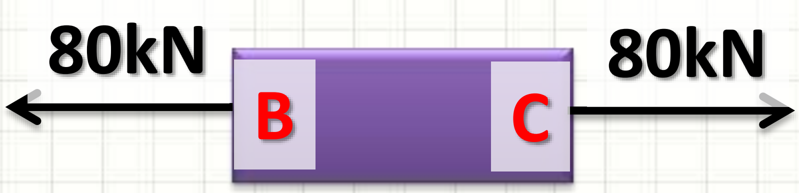
- E_{al}=70GPa, $E_{aço}$=200GPa
- A_{al}=400mm², $\phi_{aço}$=10mm



- Encurtamento AB

  – Move B para direita (considerando A fixo)

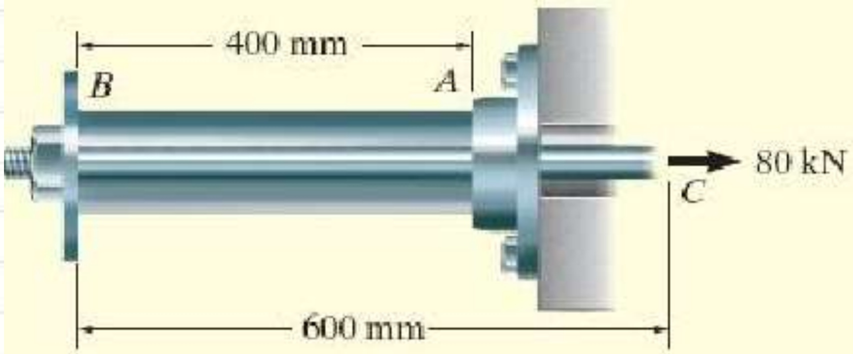
- Alongamento de BC



  – Move C para direita (considerando B fixo)

Exemplo – Def. por Carga Axial

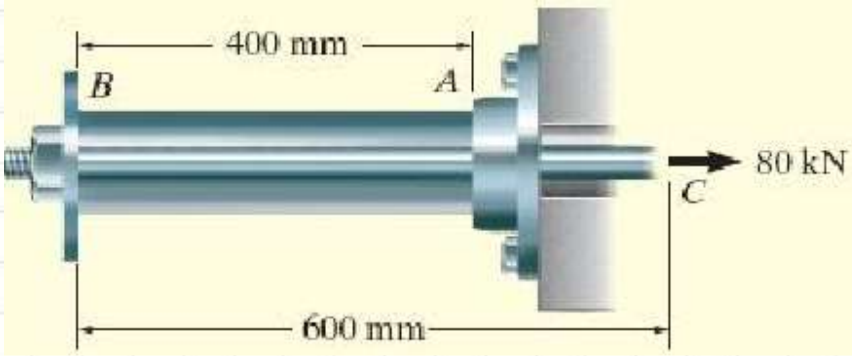
- E_{al}=70GPa, $E_{aço}$=200GPa
- A_{al}=400mm^2, $\phi_{aço}$=10mm
- Encurtamento AB



- $\delta_{BA} = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$
- $\delta_{BA} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{70 \cdot 10^9 \cdot 0{,}0004} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-1}}{70 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}$
- $\delta_{BA} = 0{,}001143m$ →

Exemplo – Def. por Carga Axial

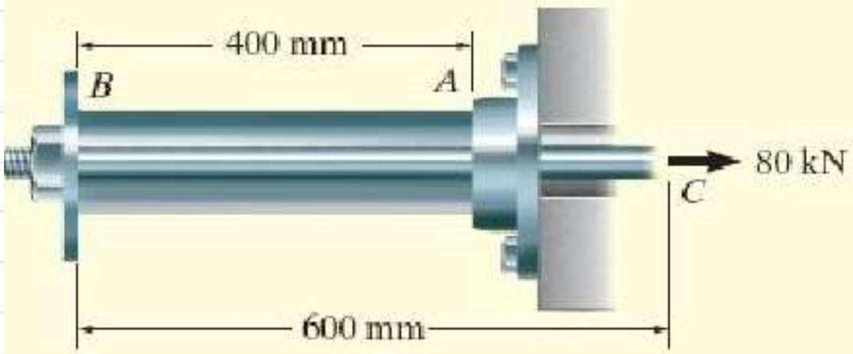
- E_{al}=70GPa, $E_{aço}$=200GPa
- A_{al}=400mm², $\phi_{aço}$=10mm
- Alongamento BC



- $\delta_{BC} = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$
- $\delta_{BC} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{200 \cdot 10^9 \cdot 0,005} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-1}}{200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}$
- $\delta_{BC} = 0,003056m$ →

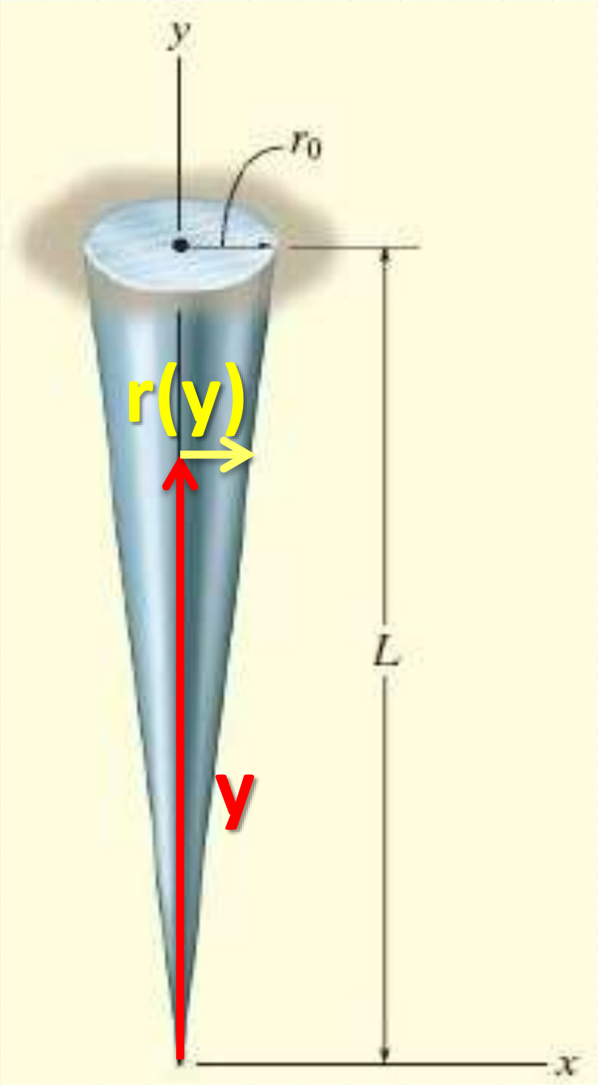
Exemplo – Def. por Carga Axial

- E_{al}=70GPa, $E_{aço}$=200GPa
- A_{al}=400mm², $\phi_{aço}$=10mm



- Logo...
- $\delta_{CA} = \delta_{BA} + \delta_{BC}$
- $\delta_{CA} = 0{,}001143m + 0{,}003056m$
- $\delta_{CA} = 0{,}00420m$ →

Exemplo – Def. por Carga Axial

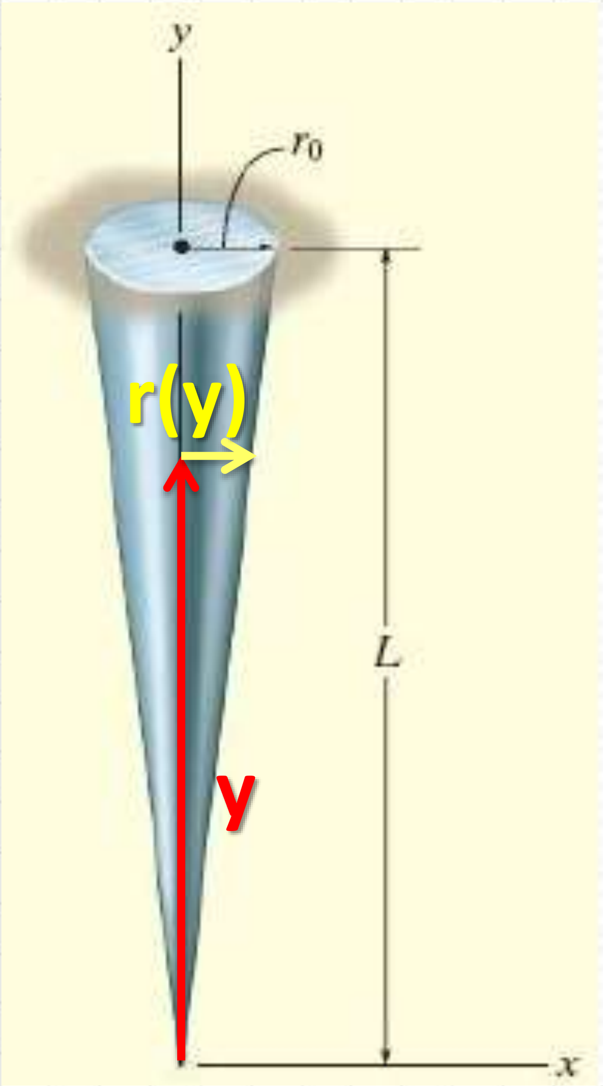


- Peso específico: γ
- Mód. Elasticidade: E
- Qual a distenção por peso próprio?

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y) \cdot dy}{E \cdot A(y)}$$

r(y) = ?

Exemplo – Def. por Carga Axial



- Peso específico: γ
- Mód. Elasticidade: E
- Qual a distenção por peso próprio?

$$\frac{r(y)}{y} = \frac{r_0}{L}$$

$$r(y) = \frac{r_0 \cdot y}{L}$$

Exemplo – Def. por Carga Axial

- $F_{peso} = W(y) = P(y) = V \cdot \gamma$

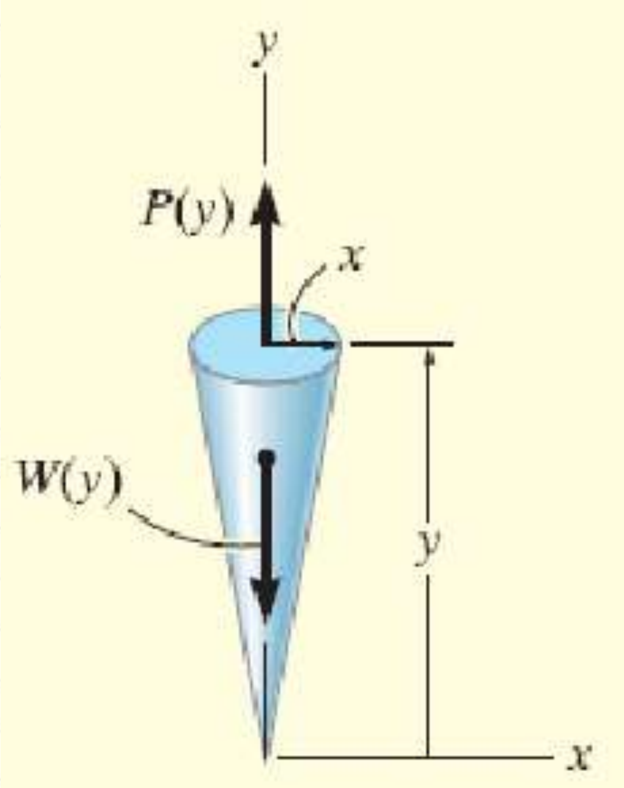
$$P(y) = \frac{y}{3} \cdot \pi \cdot r(y)^2 \cdot \gamma$$

- Mas...

$$r(y) = \frac{r_0 \cdot y}{L}$$

- Logo...

$$P(y) = \frac{y^3 \cdot \pi \cdot {r_0}^2}{3 \cdot L^2} \cdot \gamma$$



Exemplo – Def. por Carga Axial

- Além disso...

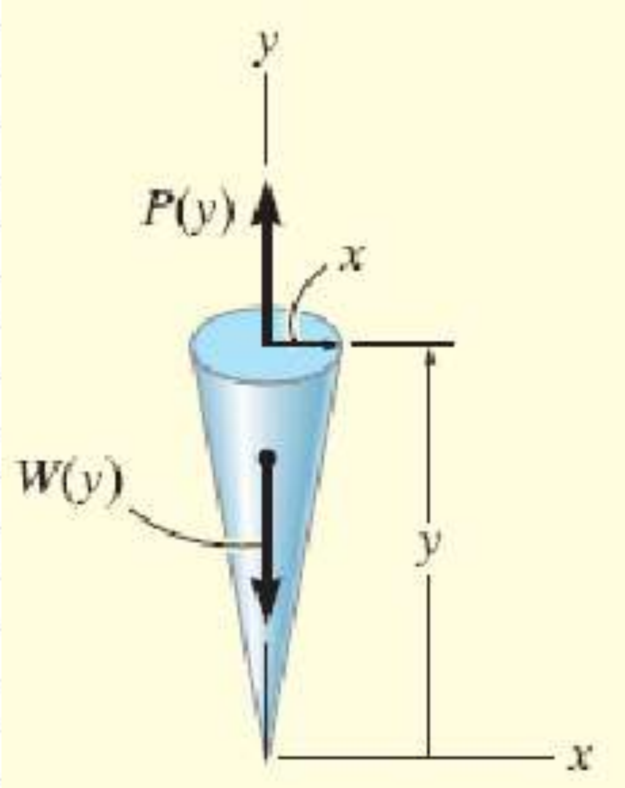
$$A(y) = \pi \cdot r(y)^2$$

- Mas...

$$r(y) = \frac{r_0 \cdot y}{L}$$

- Logo...

$$A(y) = \frac{\pi \cdot {r_0}^2 \cdot y^2}{L^2}$$



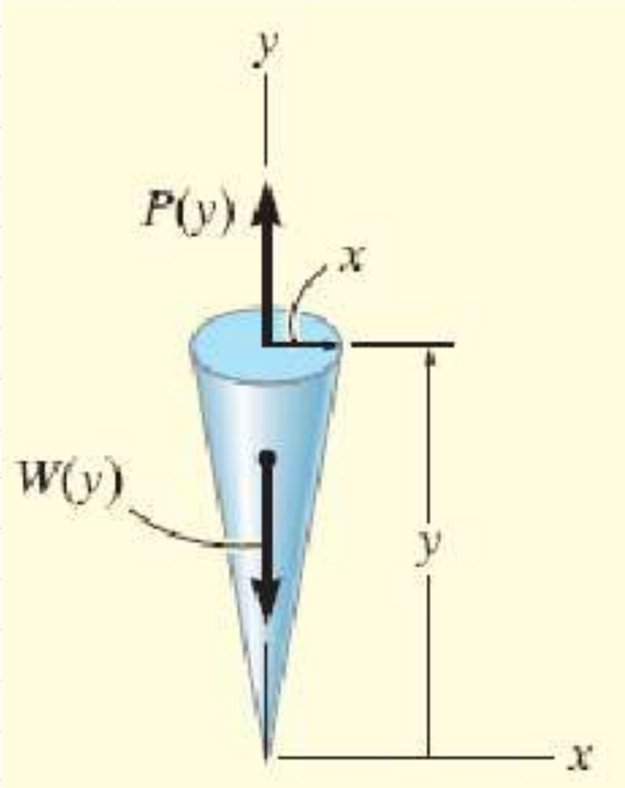
Exemplo – Def. por Carga Axial

- Juntando...

$$P(y) = \frac{y^3 \cdot \pi \cdot {r_0}^2}{3 \cdot L^2} \cdot \gamma$$

$$A(y) = \frac{\pi \cdot {r_0}^2 \cdot y^2}{L^2}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y) \cdot dy}{E \cdot A(y)}$$



$$\delta = \int_0^L \frac{y^3 \cdot \pi \cdot {r_0}^2 \cdot \gamma}{3 \cdot L^2 \cdot E} \cdot \frac{L^2 \cdot dy}{\pi \cdot {r_0}^2 \cdot y^2}$$

Exemplo – Def. por Carga Axial

- Juntando...

$$\delta = \int_0^L \frac{y^3 \cdot \pi \cdot {r_0}^2 \cdot \gamma}{3 \cdot L^2 \cdot E} \cdot \frac{L^2 \cdot dy}{\pi \cdot {r_0}^2 \cdot y^2}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{y \cdot \gamma}{3 \cdot E} \cdot dy$$

$$\delta = \frac{\gamma}{3 \cdot E} \cdot \int_0^L y \cdot dy$$

$$\delta = \frac{\gamma \cdot L^2}{6 \cdot E}$$

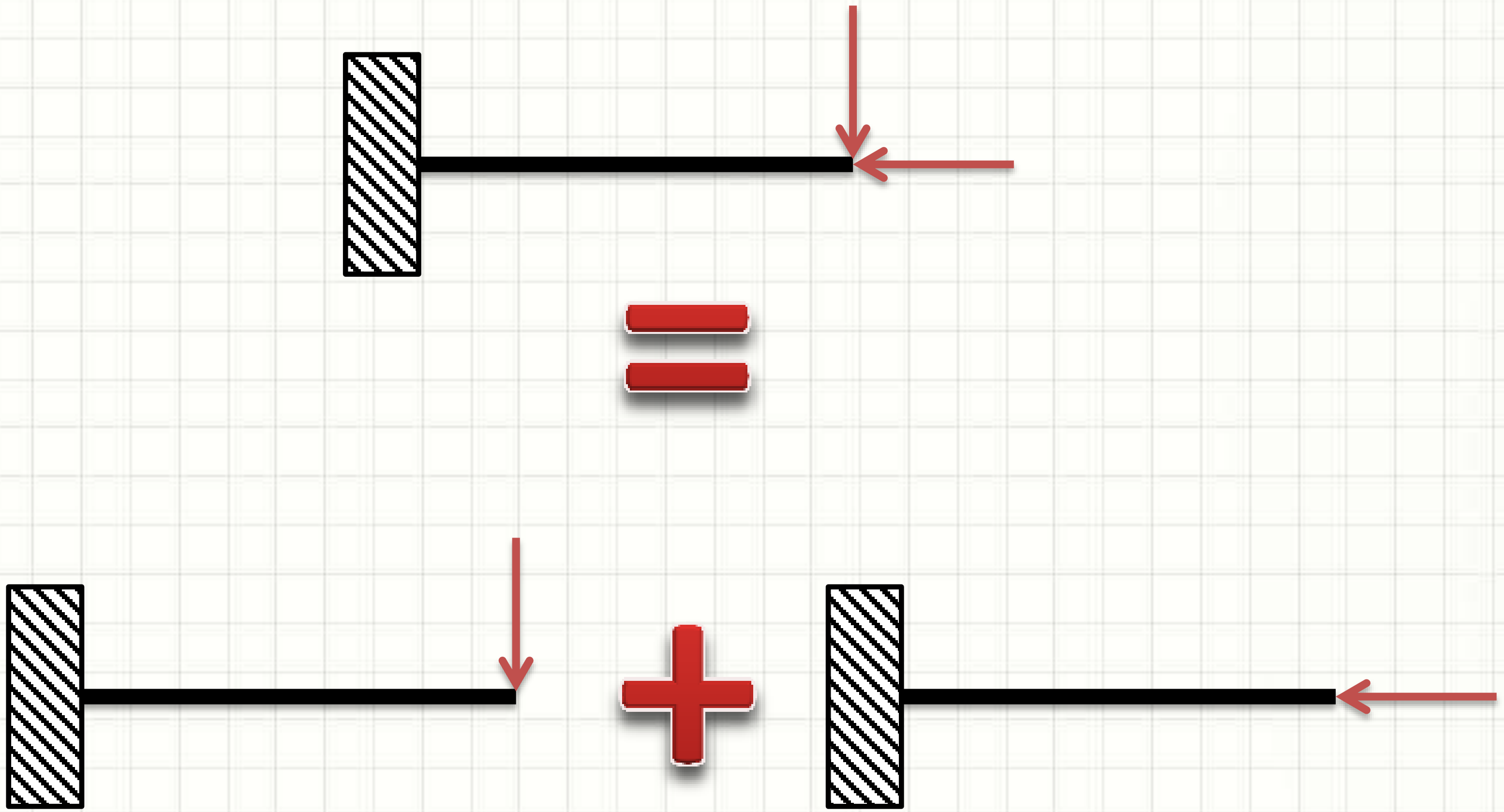
Superposição de Efeitos

Superposição de Efeitos

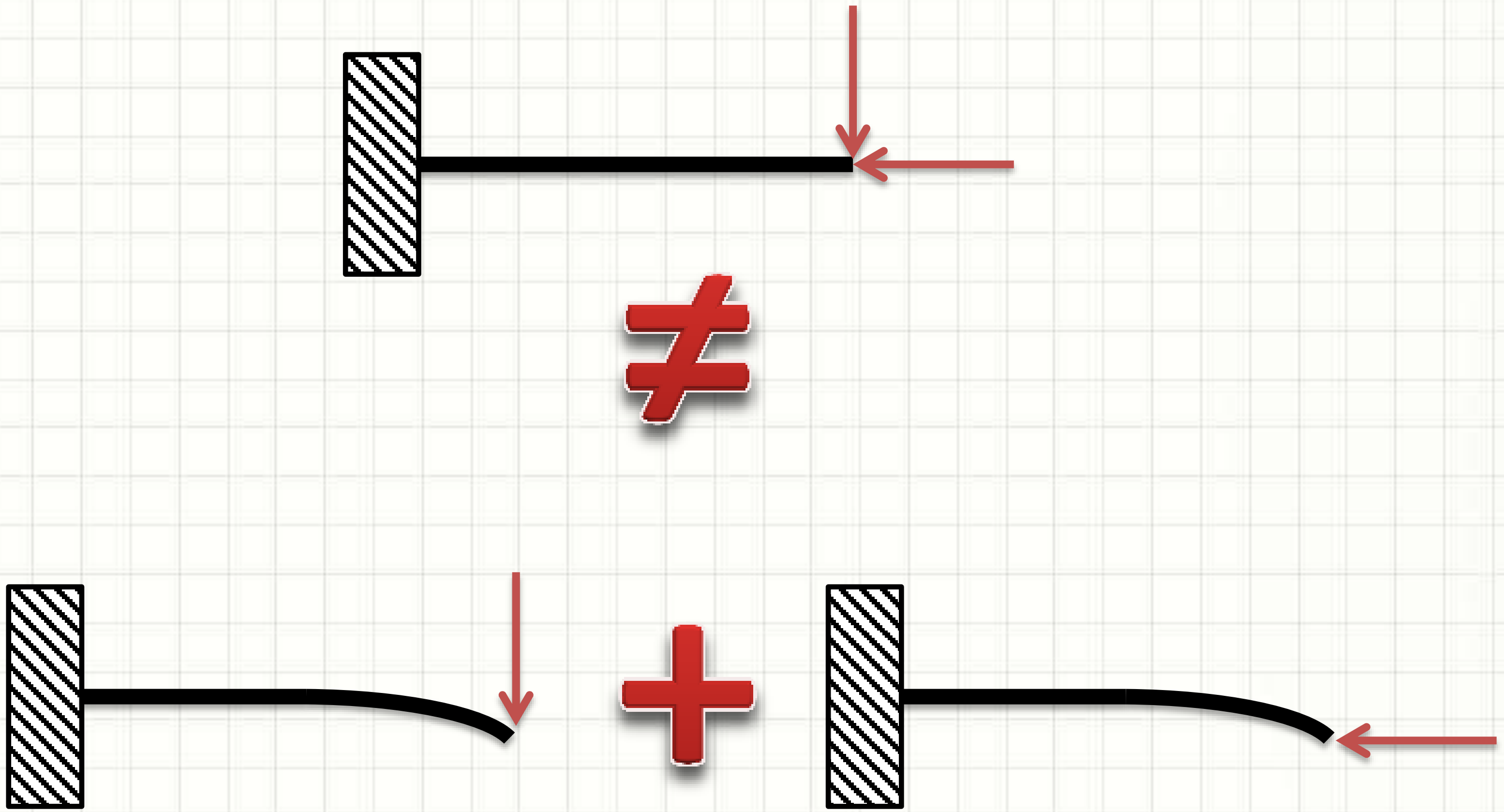
- Princípio da Superposição de Efeitos
  - Subdividir o carregamento em componentes
  - Calcular os efeitos em separado
  - Somar os resultados

- Carga relacionada linearmente com σ ou δ
  - Ex.: $\sigma = P/A$ ou $\delta = PL/EA$
- Carga não deve provocar grande mudança na geometria do elemento

Superposição de Efeitos



Superposição de Efeitos



Superposição de Efeitos

- Neste curso...
  - Pouca deformação
  - Cargas proporcionais a σ ou δ

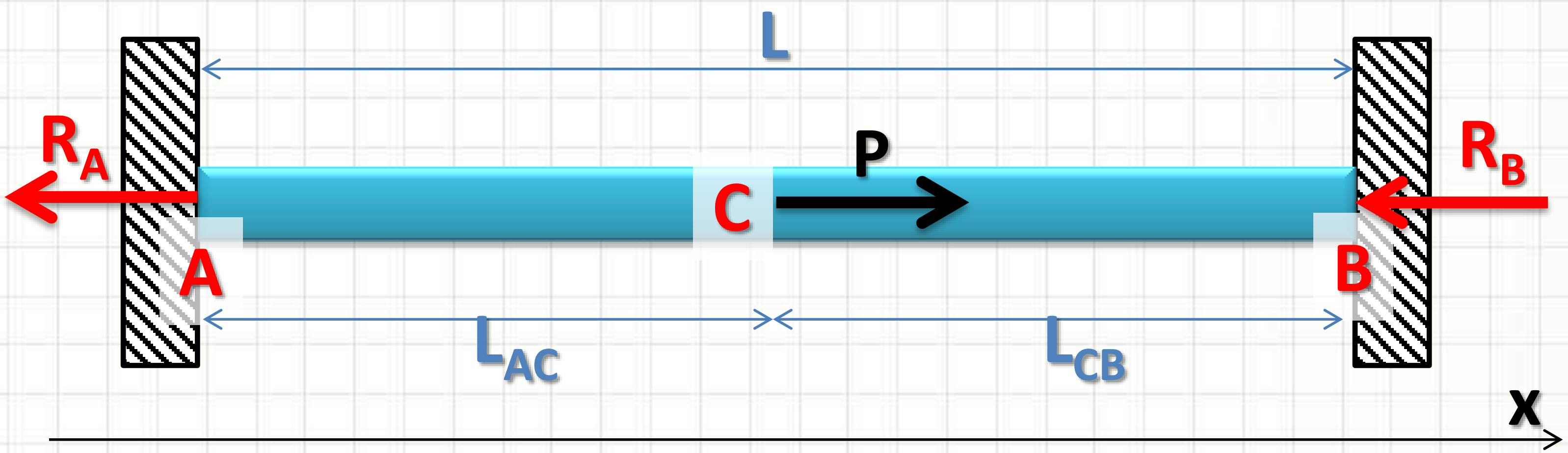
- A menos que especificado diferentemente!

- Em geral, valerá a superposição!

Elementos Estaticamente Indeterminados sob Carga Axial

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



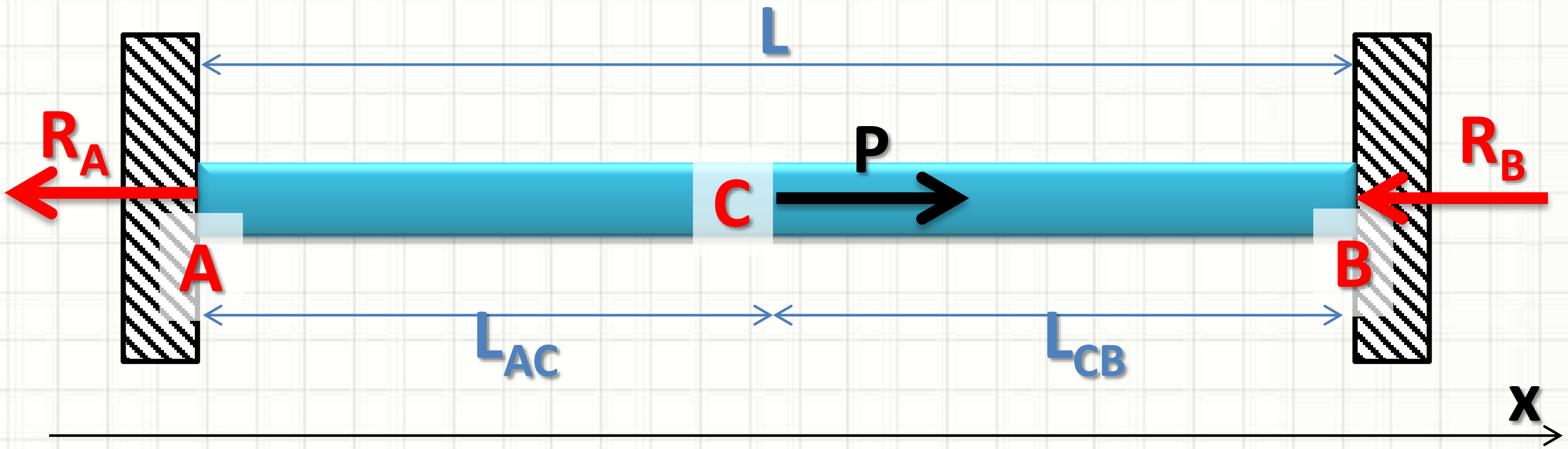
- Reações R_A e R_B ... ?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



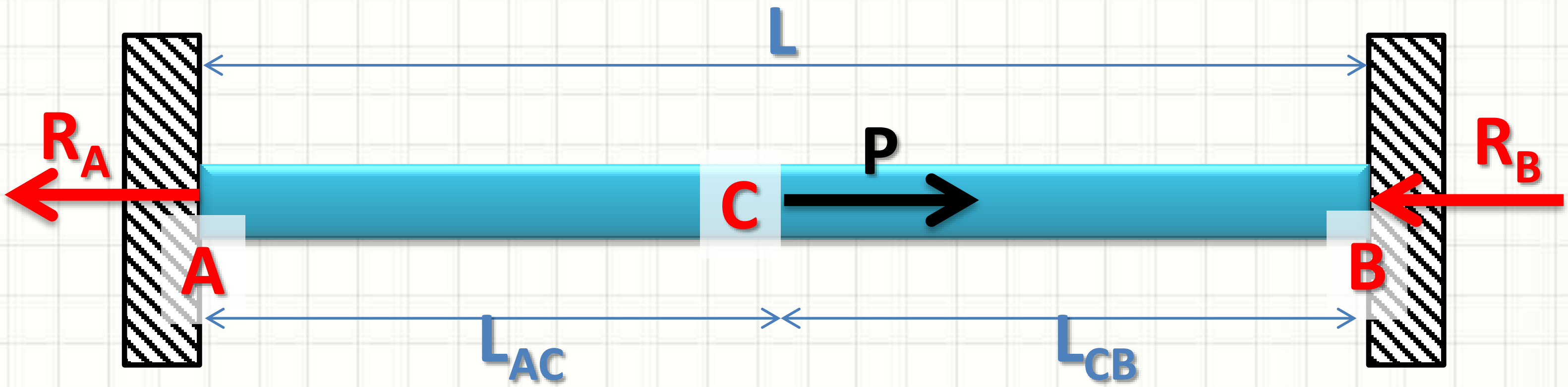
- Reações R

Viga Estaticamente Indeterminada

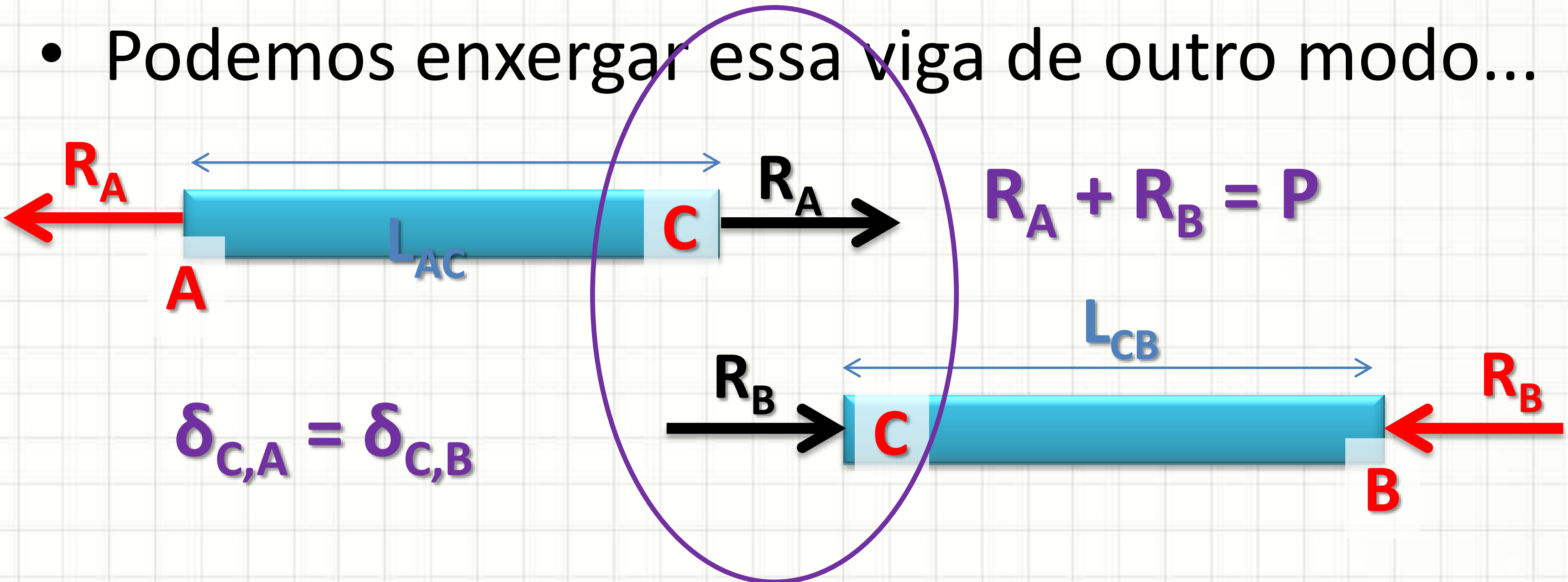
$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



- Podemos enxergar essa viga de outro modo...



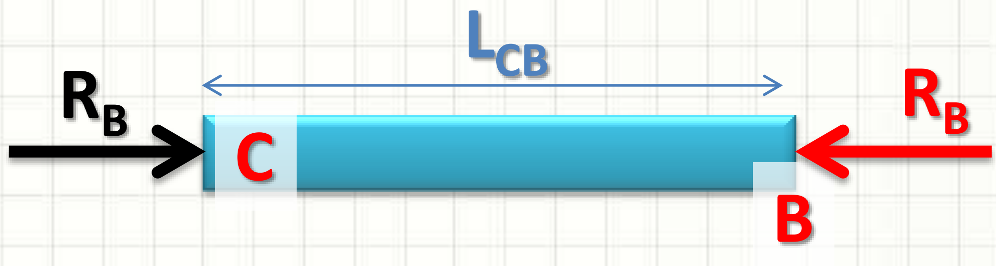
$$R_A + R_B = P$$

$$\delta_{C,A} = \delta_{C,B}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...

$R_A + R_B = P$



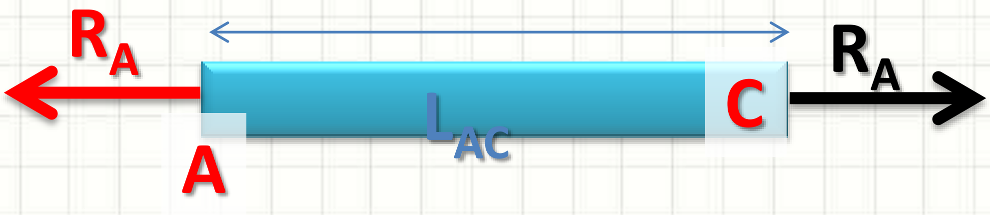
$\delta_{C,A} = \delta_{C,B}$

$$\delta_{C,A} = \frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = \delta_{C,B}$$

$$R_A = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...



$R_A + R_B = P$

$\delta_{C,A} = \delta_{C,B}$

$$= \frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} = \frac{R}{}$$

Condição de Equilíbrio

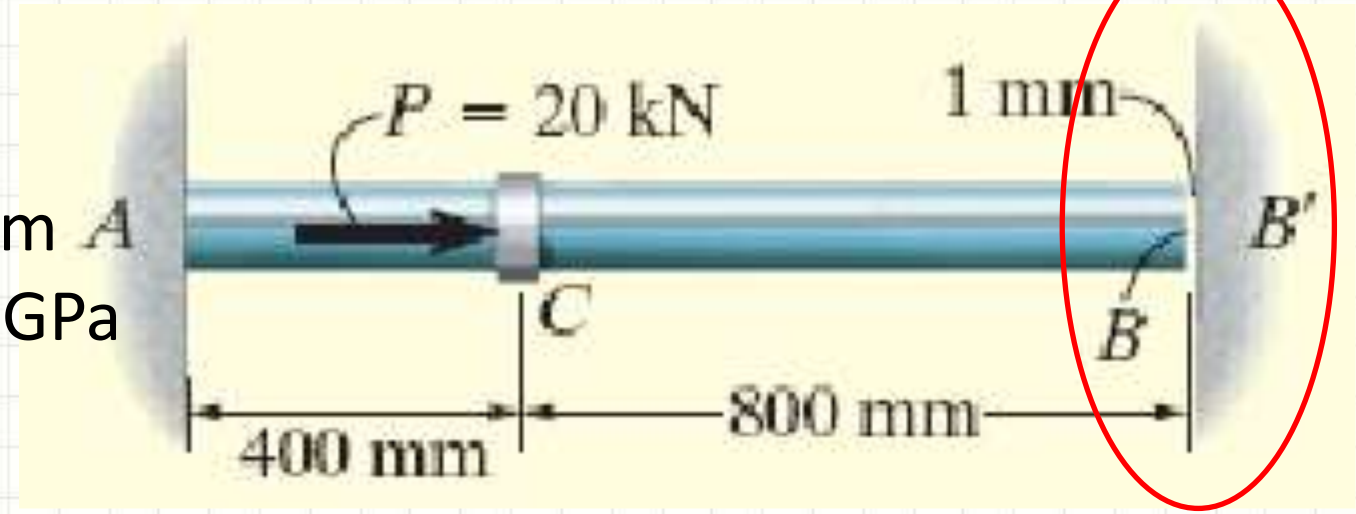
$$A = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Condição de Compatibilidade

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

ϕ = 5mm
E = 200GPa



- Reações R_A e R_B ... ?

$\delta_{C,A} = \delta_{C,B} + 0{,}001$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

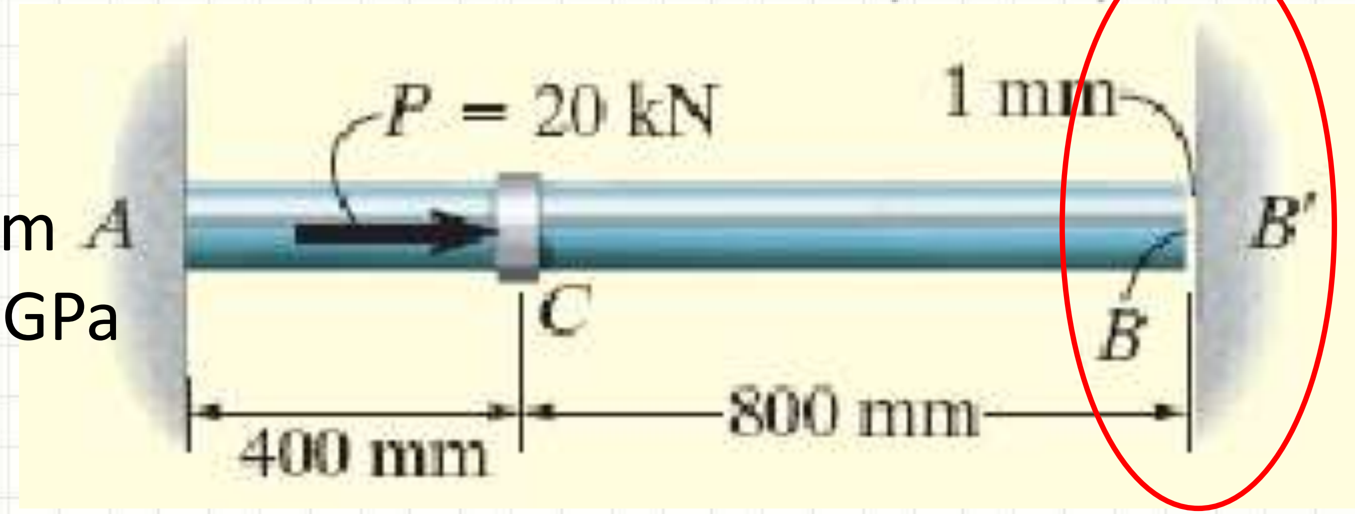
Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\delta_{C,A} = \delta_{C,B} + 0{,}001$

ϕ = 5mm

E = 200GPa



$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} + 0{,}001 \Rightarrow \frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} - \frac{R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0{,}001 \Rightarrow$$

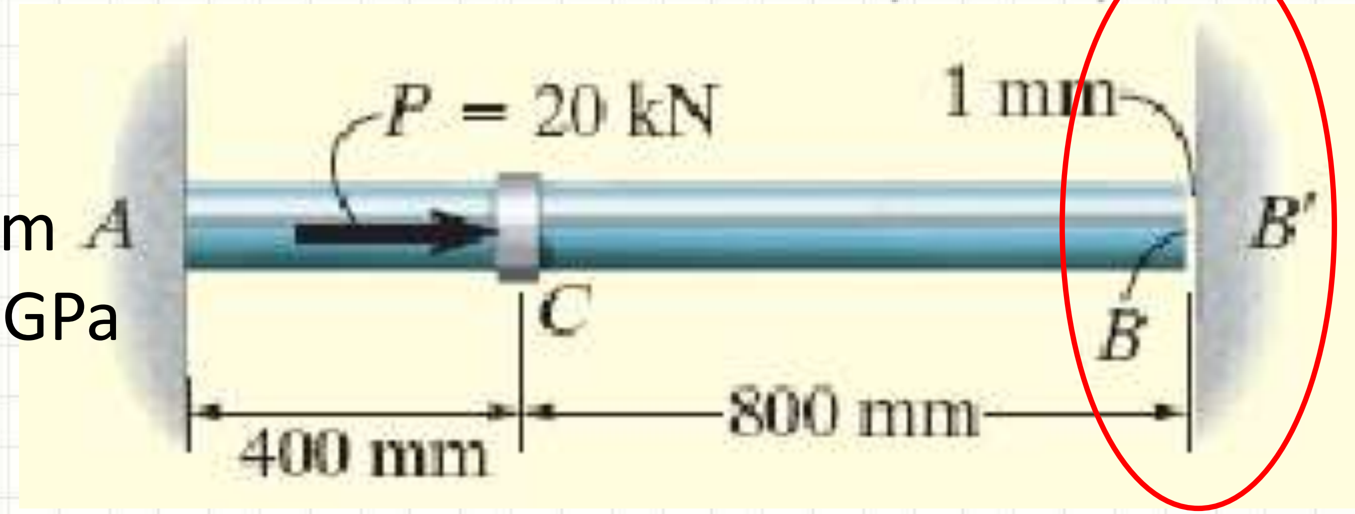
$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\delta_{C,A} = \delta_{C,B} + 0{,}001$

ϕ = 5mm
E = 200GPa



$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}} = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + (P - R_A) \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})^2 + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-6} + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

$$R_A = \frac{3927 + (20000 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

$$R_A = 9817{,}5 + 40000 - 2 \cdot R_A$$

$$3 \cdot R_A = 49817{,}5$$

$$R_A = 16605{,}8N \cong 16{,}6kN$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = 16605{,}8N \cong 16{,}6kN$$

$$R_B = P - R_A$$

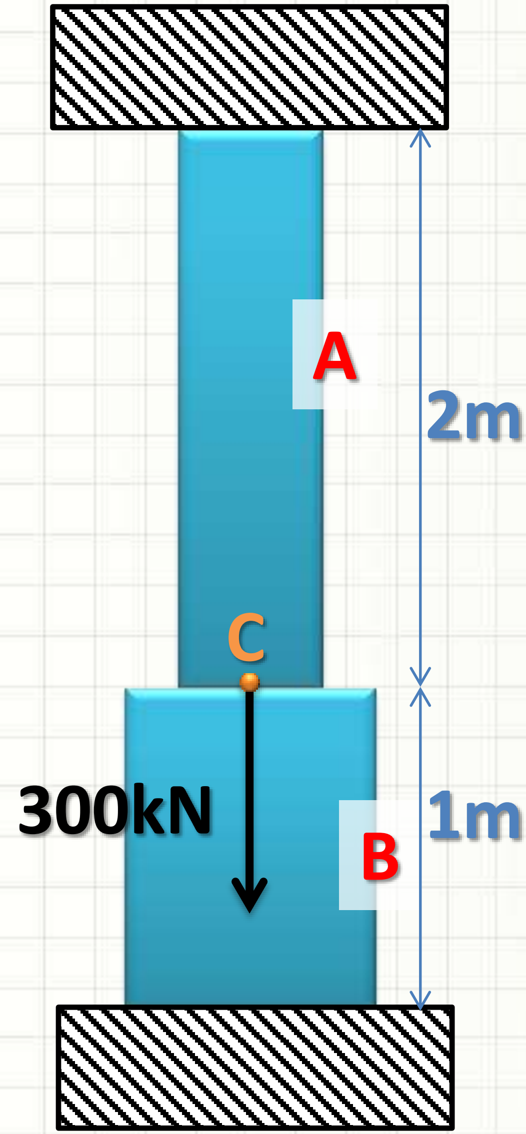
$$R_B = 20kN - 16{,}6kN$$

$$R_B = 3{,}4kN$$

Exercício

Exercício (Em Dupla)

- Calcule:
  - O deslocamento em C
  - As reações de apoio
- $\phi_A = 0{,}5m$ $\phi_B = 1m$
- $E_A = E_B = 50GPa$



Para Treinar

Para Treinar em Casa

- Aço A-36: E = 200GPa
- Concreto de Alta Resistência: E = 35GPa
- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 91 a 106
- Mínimos:
  - Exercícios 4.1, 4.5, 4.10, 4.29
  - Exercícios 4.31, 4.33
- Extras:
  - Exercícios 4.2 a 4.4, 4.6, 4.7, 4.21, 4.30
  - Exercícios: 4.34, 4.36, 4.37

Conclusões

Resumo

- Existe relação entre carga e deslocamento
- Influenciam
  - Rigidez (E)
  - Área (A)
  - Comprimento (L)
- Podemos “decompor” problemas (superposição)
- Estaticamente Indeterminados?
  - Compatibilidade de deslocamentos

- **Exercitar**
  - **Exercícios Hibbeler**

Próxima Aula

- Únicas cargas axiais?
  - Temperatura
  - Concentração de tensão
  - Deformação Inelástica

Perguntas?

Bom Descanso a Todos!