



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

CISALHAMENTO TRANSVERSAL

PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

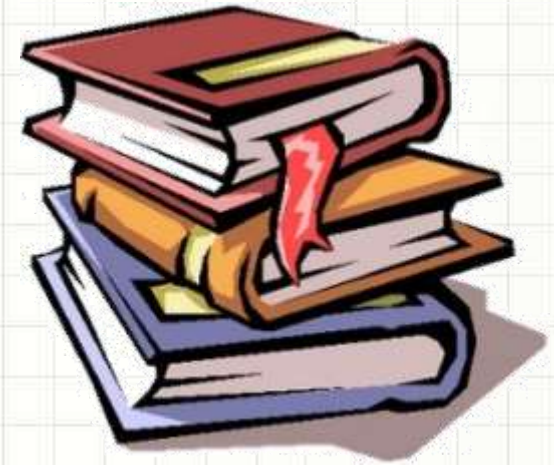
2012 - 2

Objetivos

- Conceituar cisalhamento transversal
- Compreender quando ocorre o cisalhamento transversal
- Determinar a distribuição de tensões cisalhantes em barras sob cortante
- Compreender as limitações da teoria



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Aula 13)

Biblioteca Virtual

Resistência dos Materiais (Hibbeler) – 5ª Edição
Páginas 283 a 298.

Livro

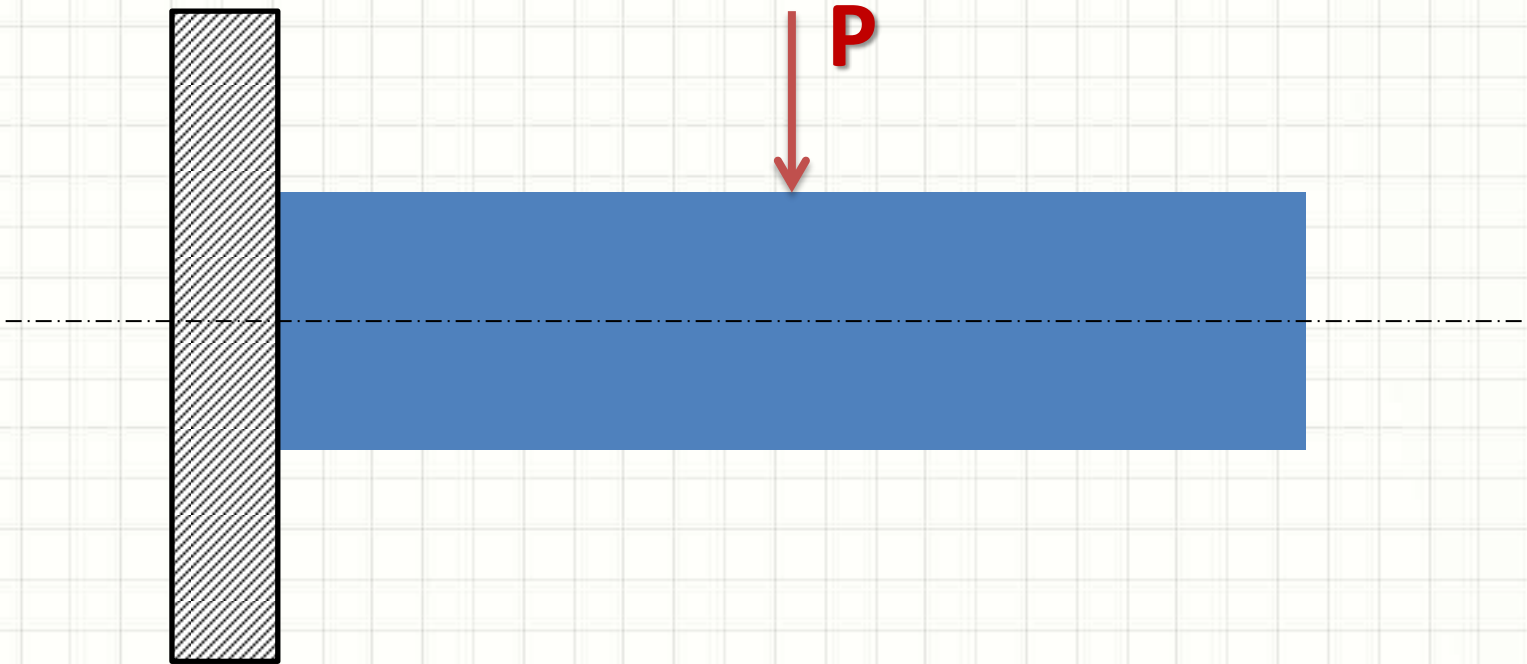
Resistência dos Materiais (Hibbeler) – 7ª Edição
Páginas 262 a 276.



REVENDO...

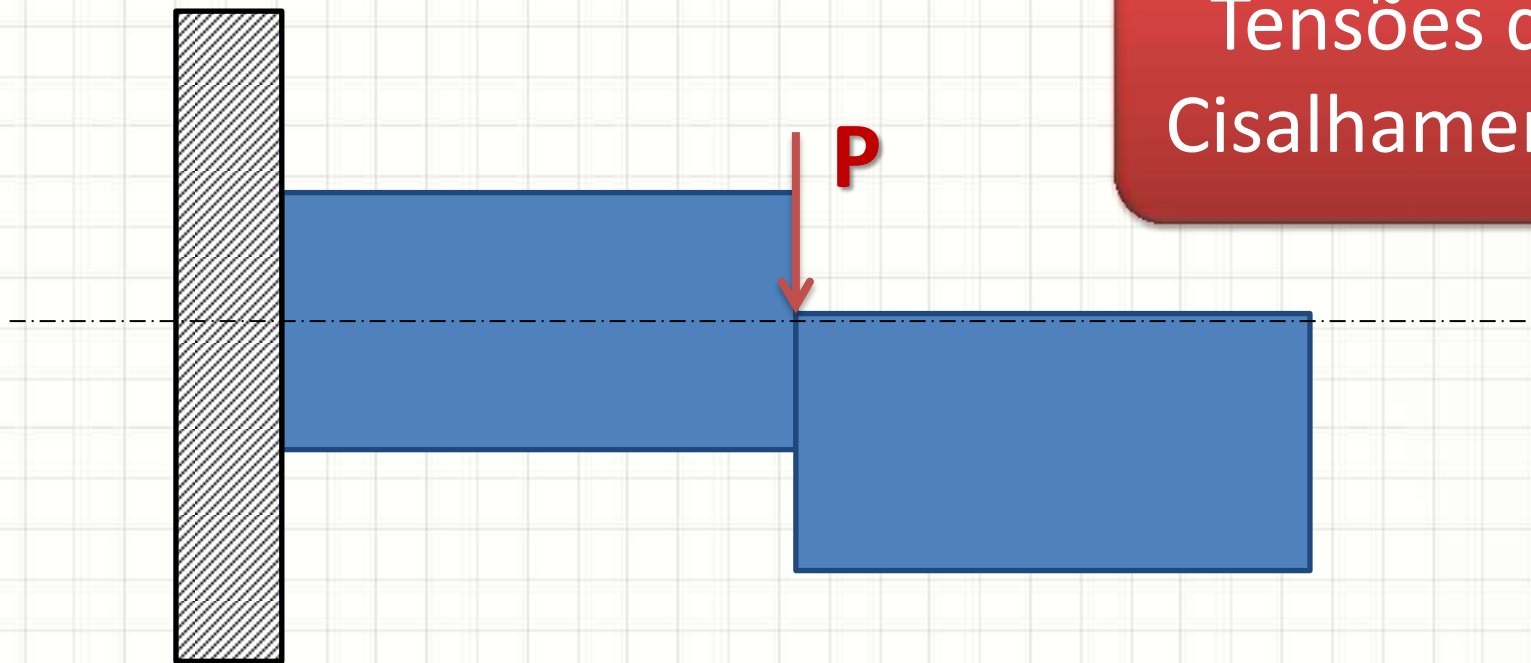
Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Perpendicular ao eixo da barra



Força Cortante

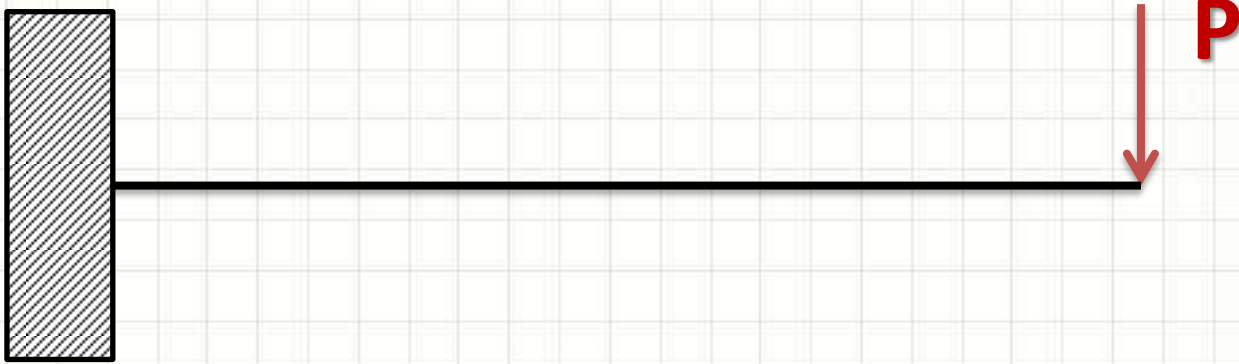
- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Perpendicular ao eixo da barra



Tensões de
Cisalhamento

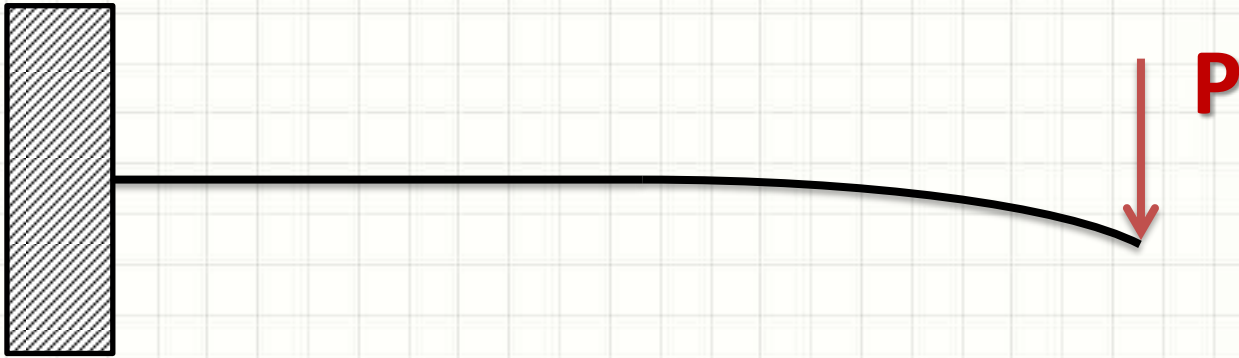
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



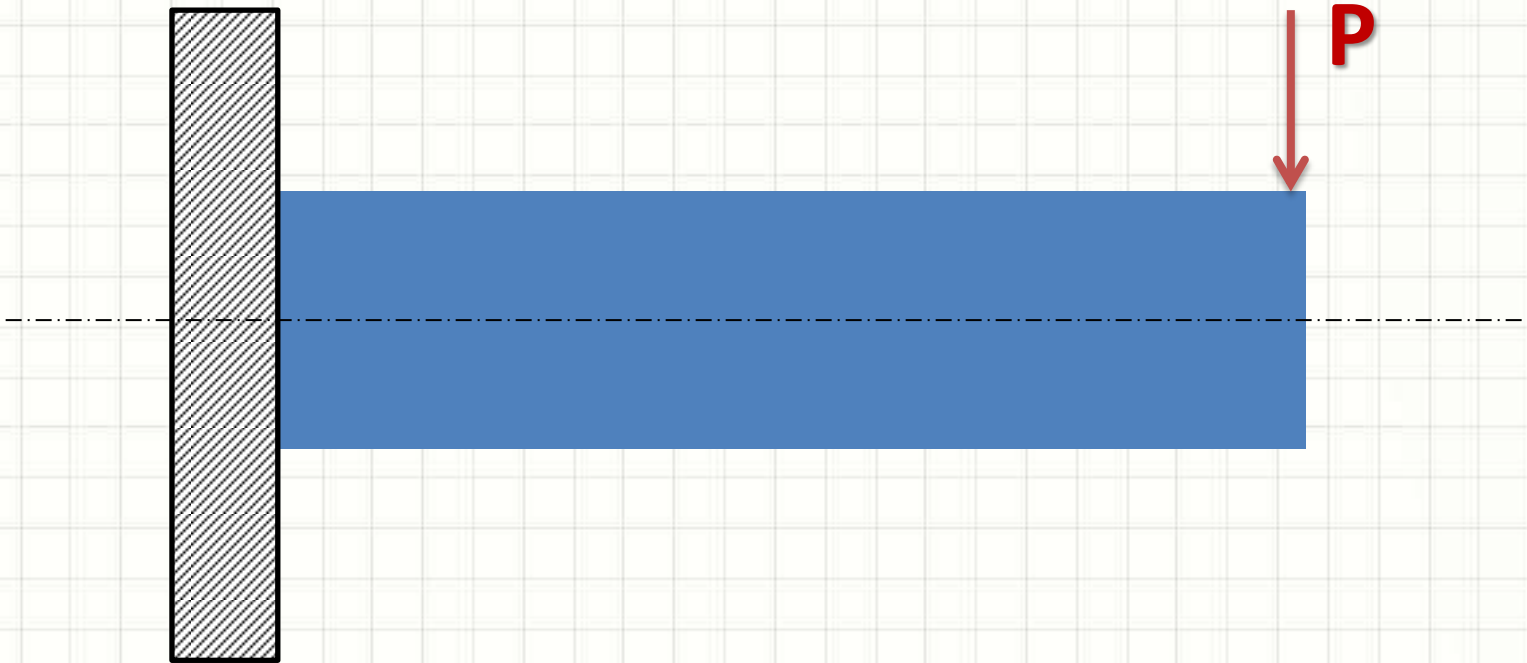
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



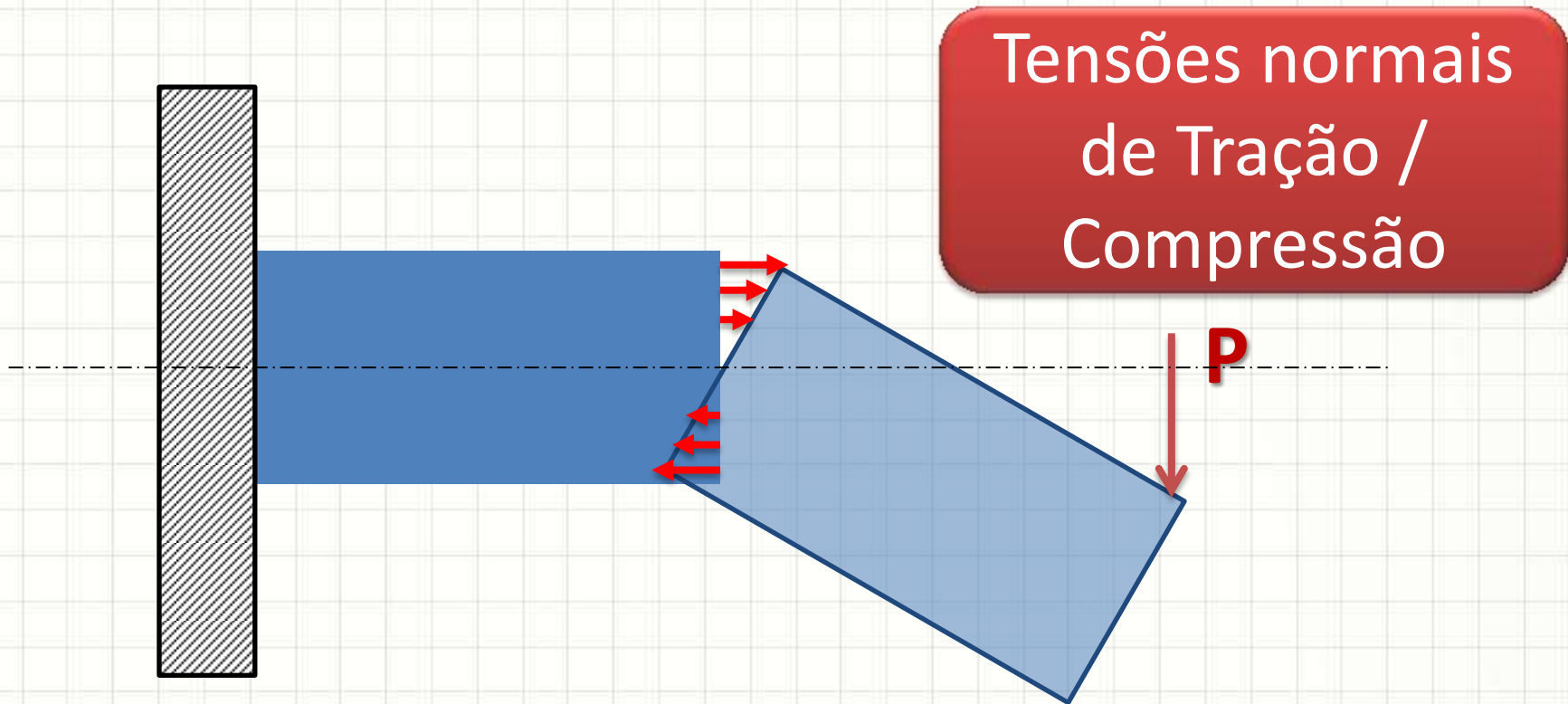
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes

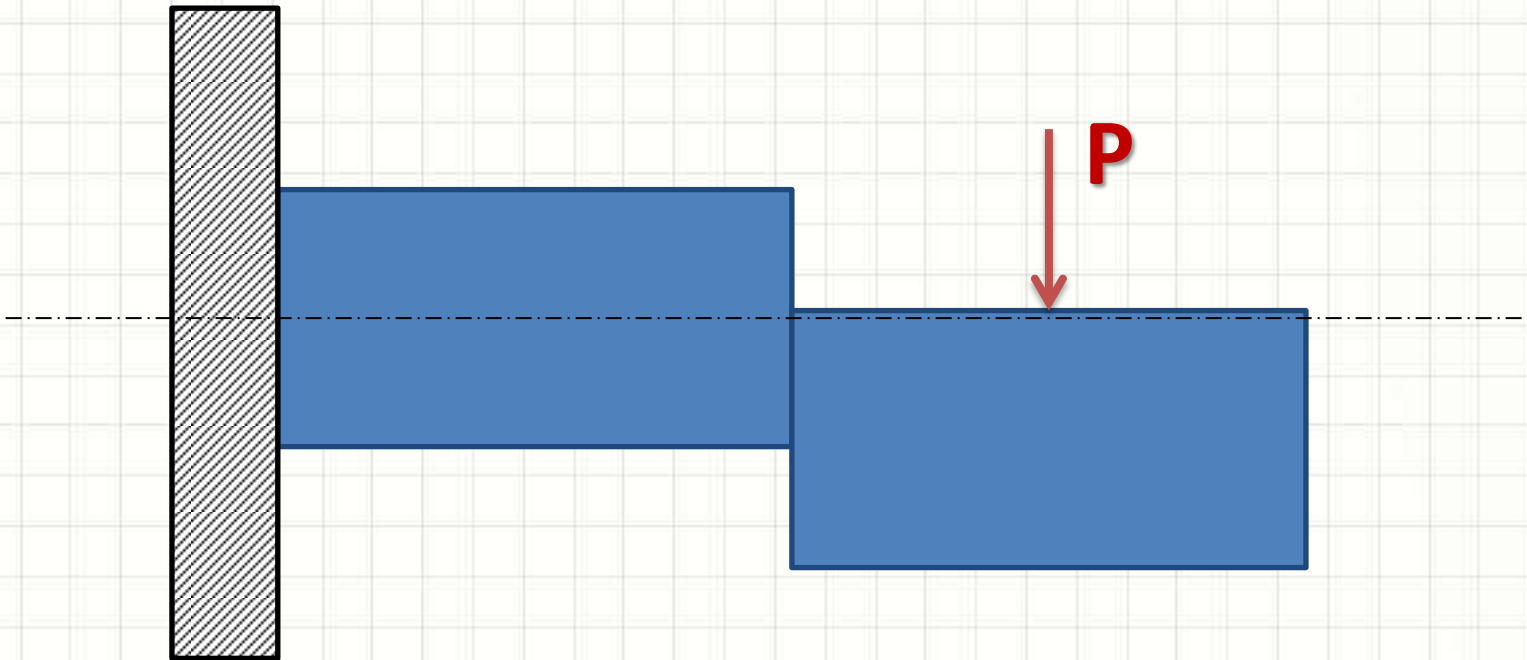




CISALHAMENTO EM ELEMENTOS RETOS

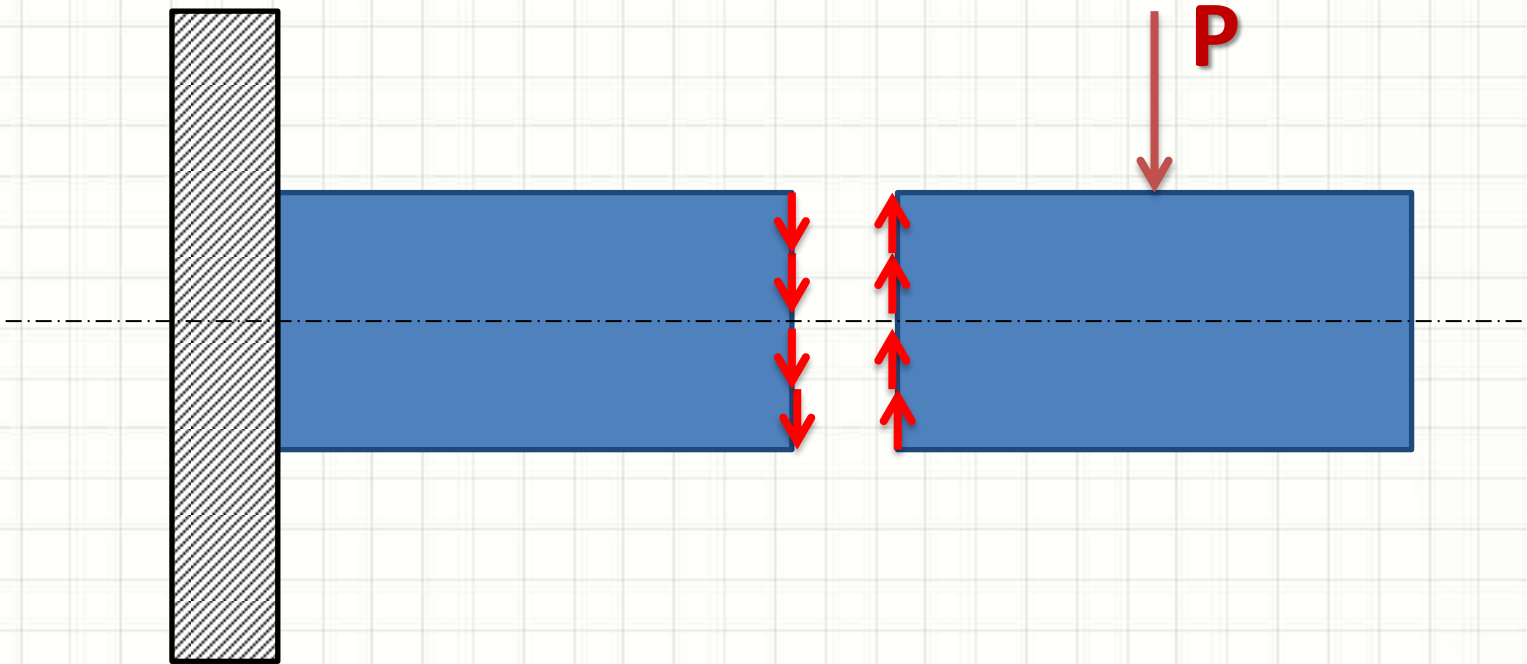
Cisalhamento Transversal

- Para resistir à cortante...



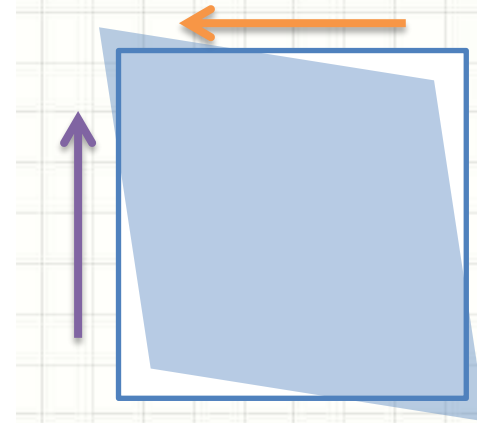
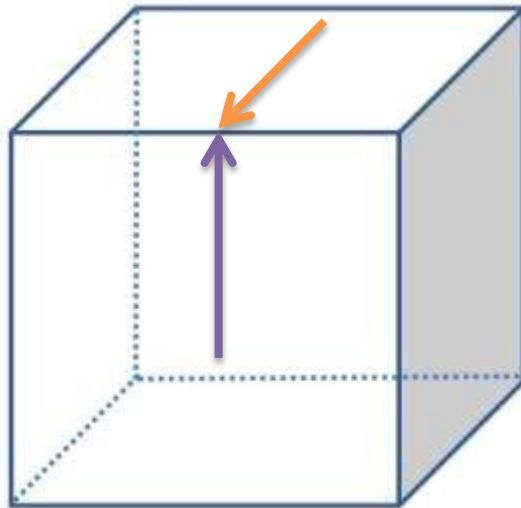
Cisalhamento Transversal

- Para resistir à cortante...
 - Deve ocorrer cisalhamento



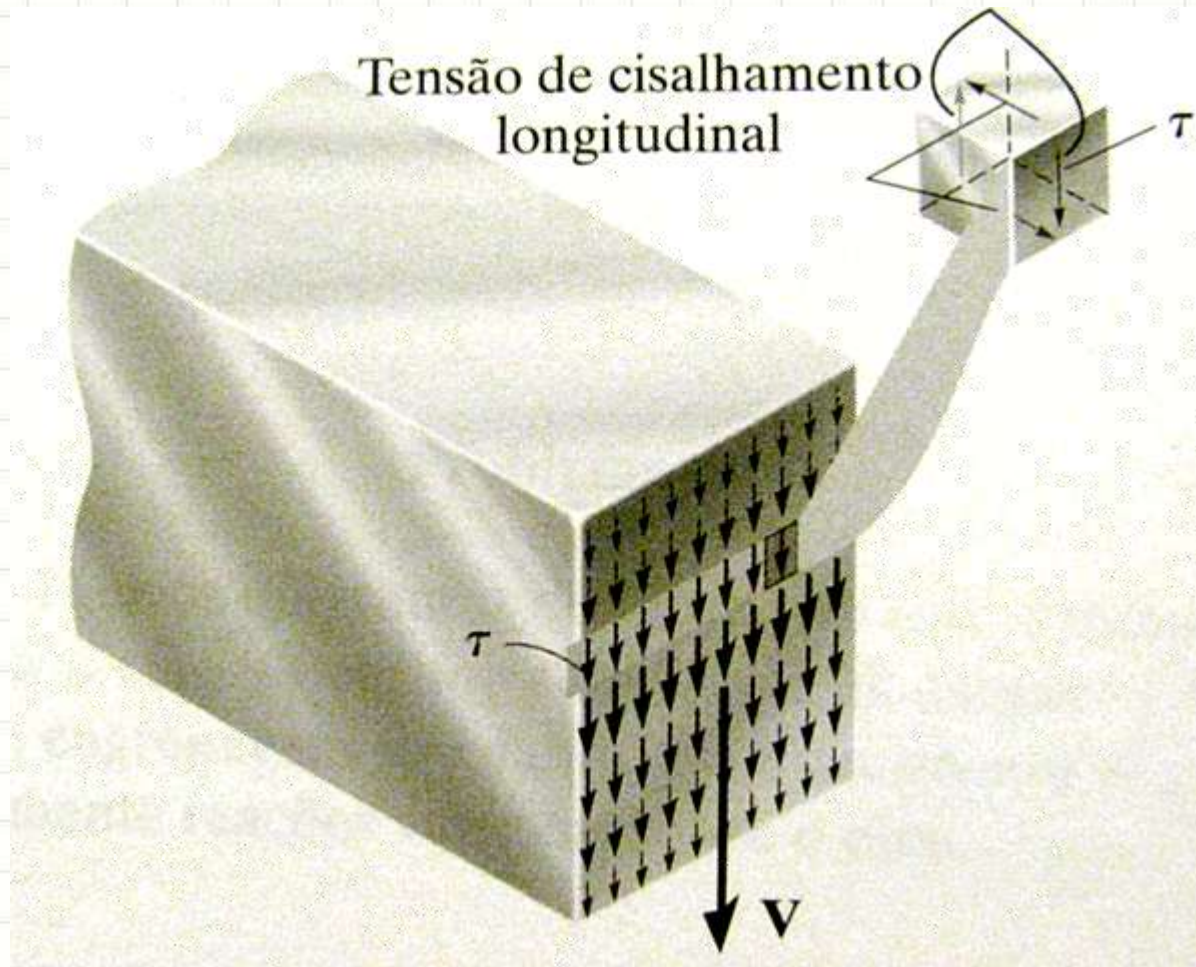
Cisalhamento Longitudinal

- Ocorre que, como já vimos....



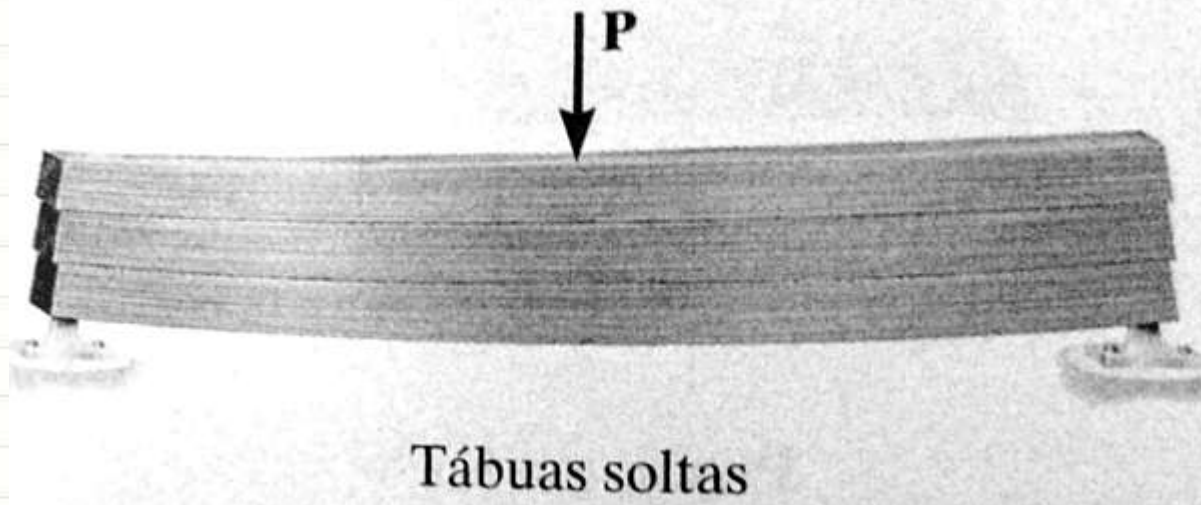
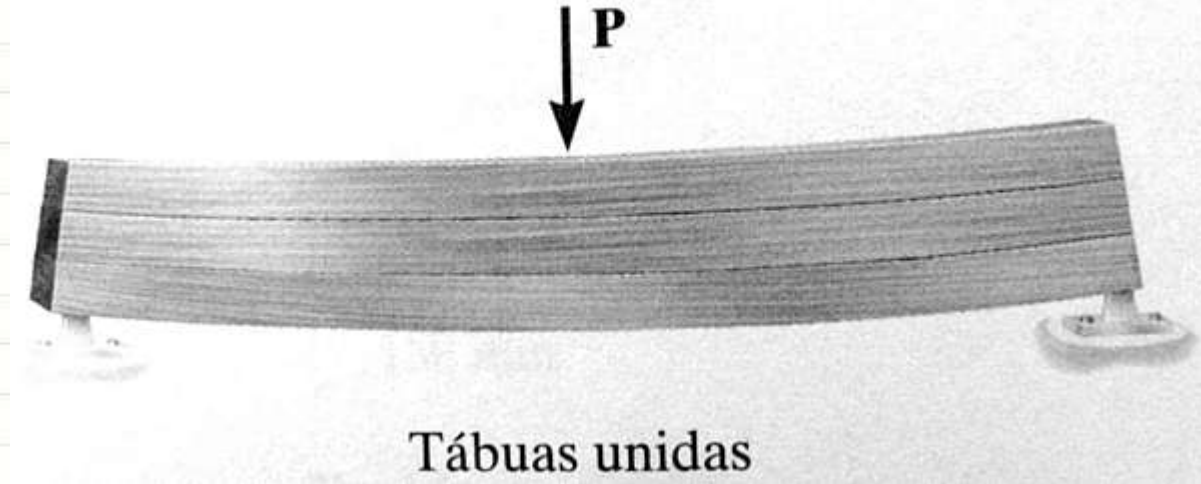
Cisalhamento Longitudinal

- Logo, isso vale neste caso: Tensão de cisalhamento transversal



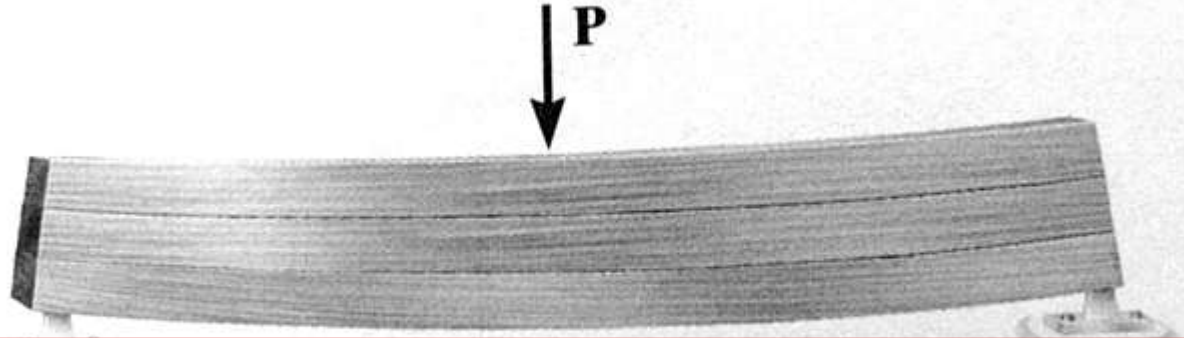
Cisalhamento Longitudinal

- Podemos observar isso no dia-a-dia

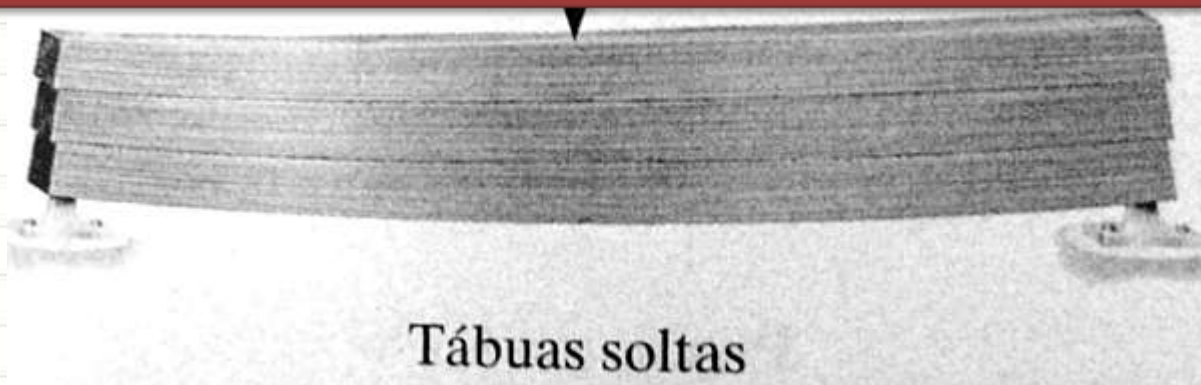


Cisalhamento Longitudinal

- Podemos observar isso no dia-a-dia

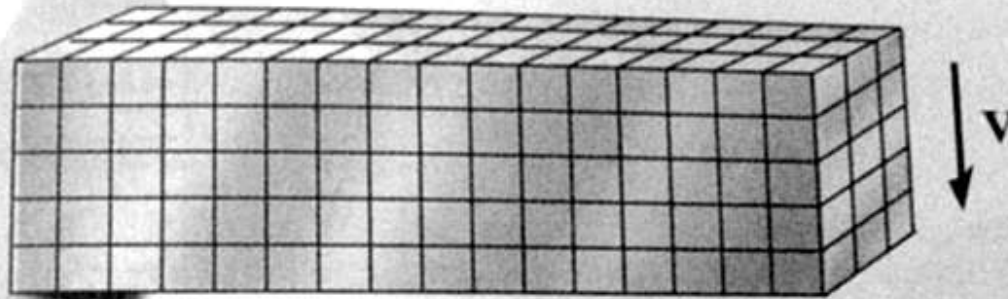


O que mantém as tábuas unidas é o cisalhamento longitudinal

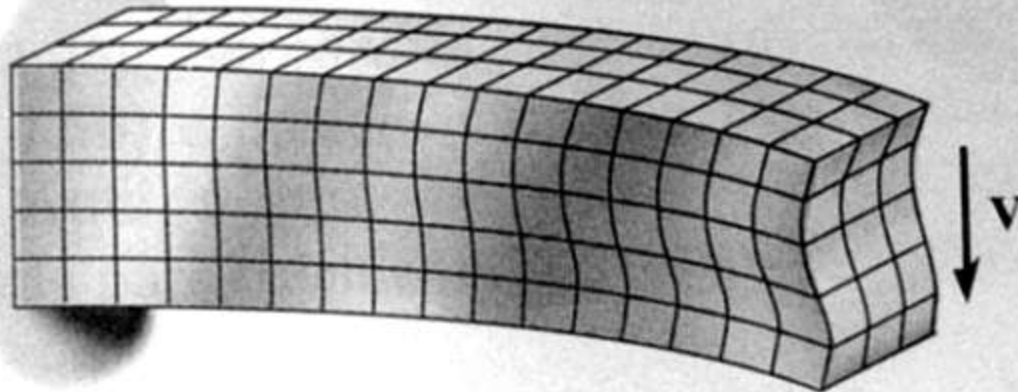


Cisalhamento Longitudinal

- Isso é um problema?



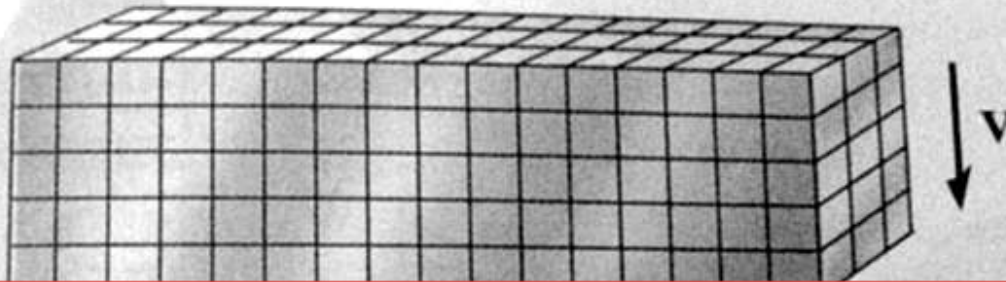
(a) Antes da deformação



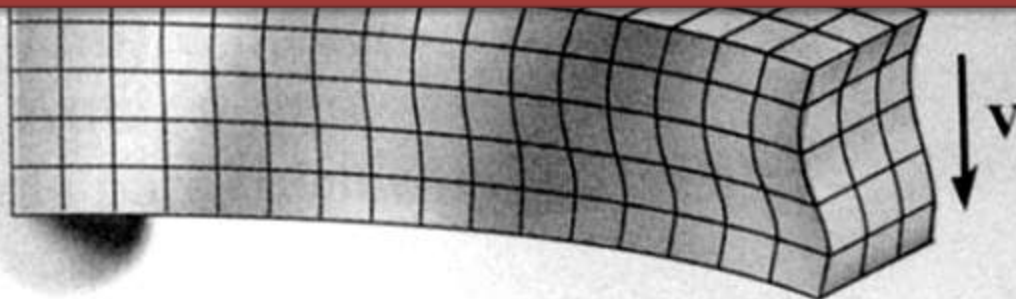
(b) Após a deformação

Cisalhamento Longitudinal

- Isso é um problema?



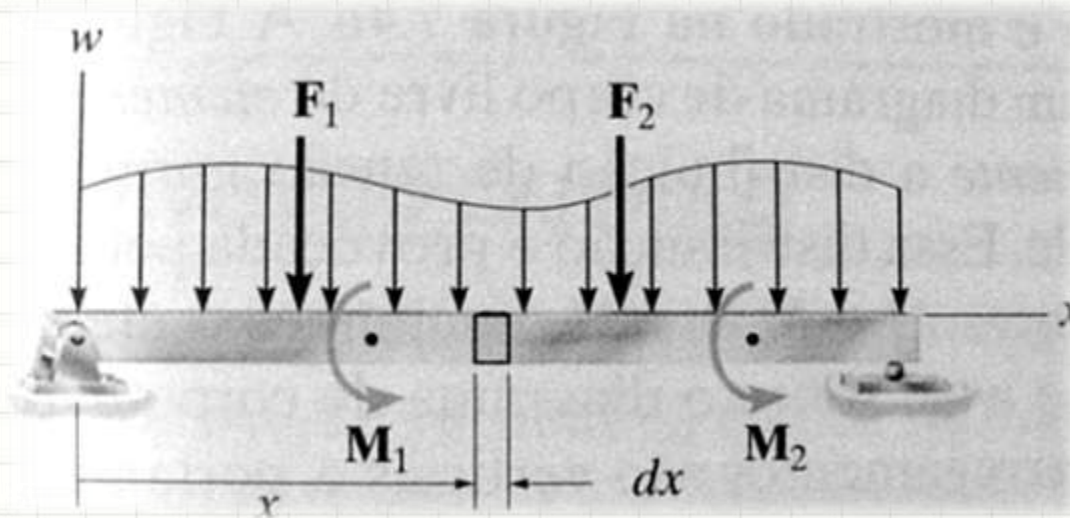
Mas a equação da flexão não depende de uma seção indeformada?




(b) Após a deformação

Cisalhamento Longitudinal

- A deformação não é um problema?
- Se for muito pequena, não
- Em barras esbeltas, é bem pequena
- Mas... Como calculamos o cisalhamento?





A FÓRMULA DO CISALHAMENTO

A Fórmula do Cisalhamento

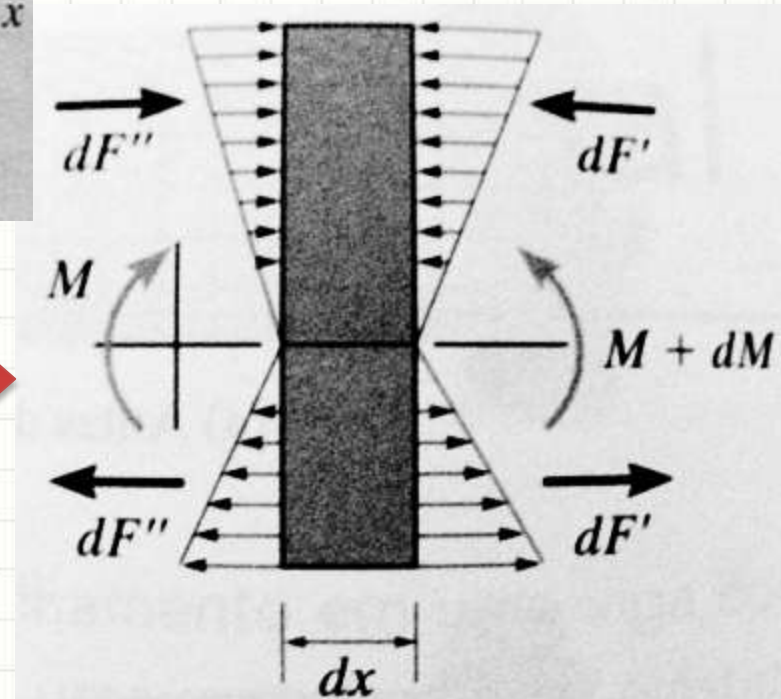
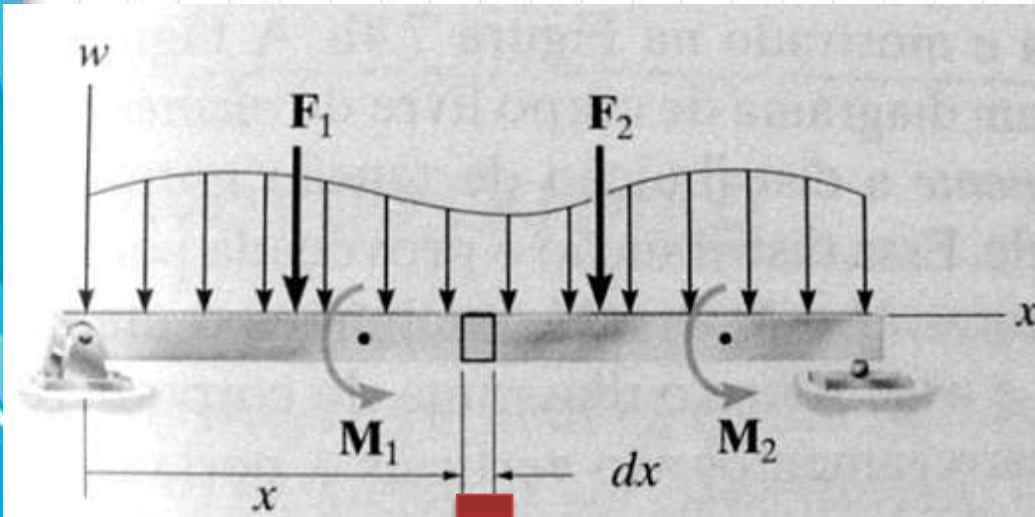
- Cisalhamento não é o uniforme



Nas superfícies superior e inferior, tem que ser zero!

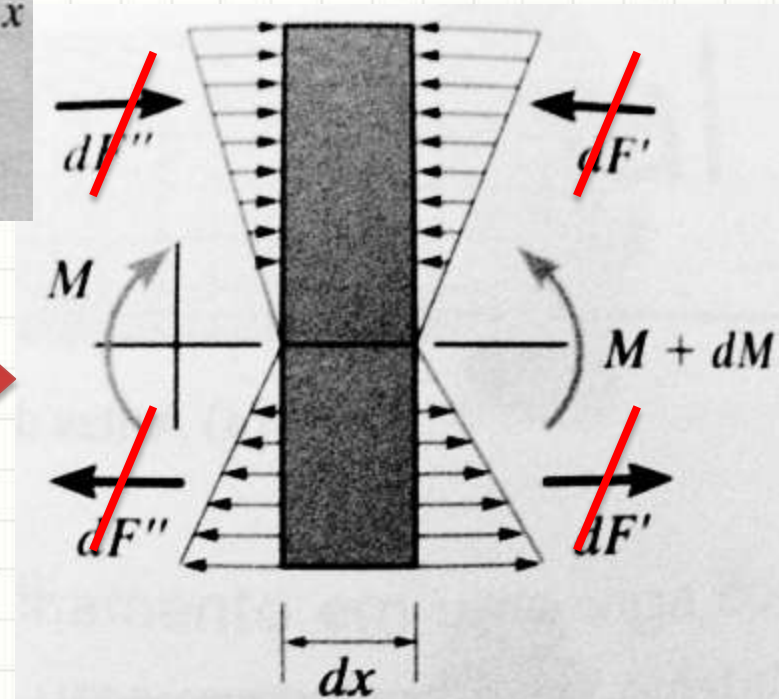
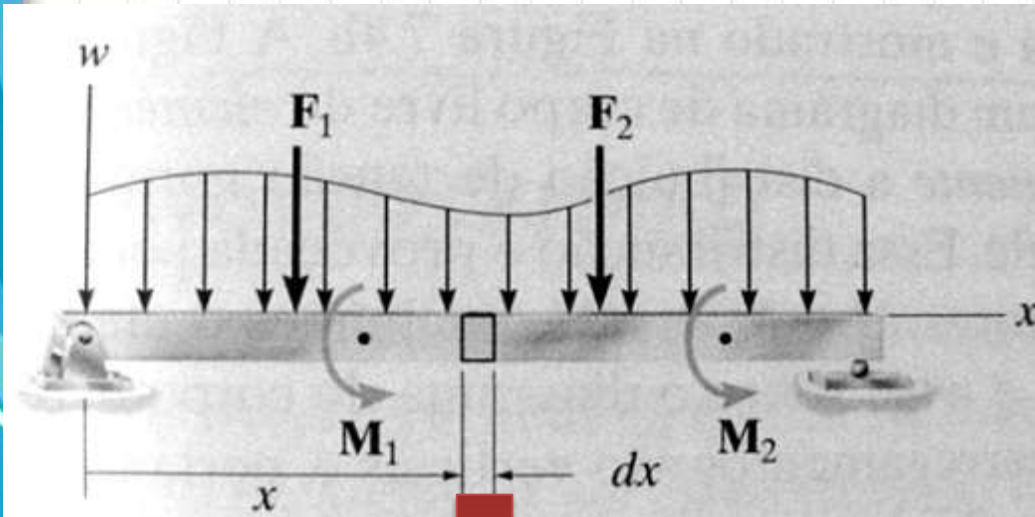
A Fórmula do Cisalhamento

- Vamos calcular pelo cisalhamento longitudinal



A Fórmula do Cisalhamento

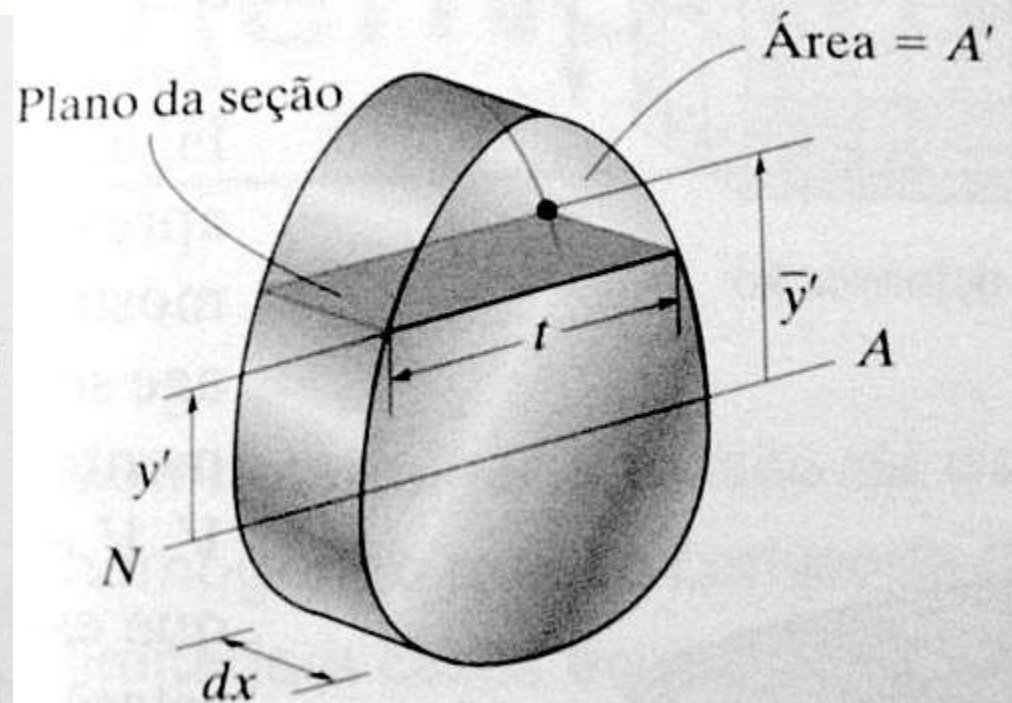
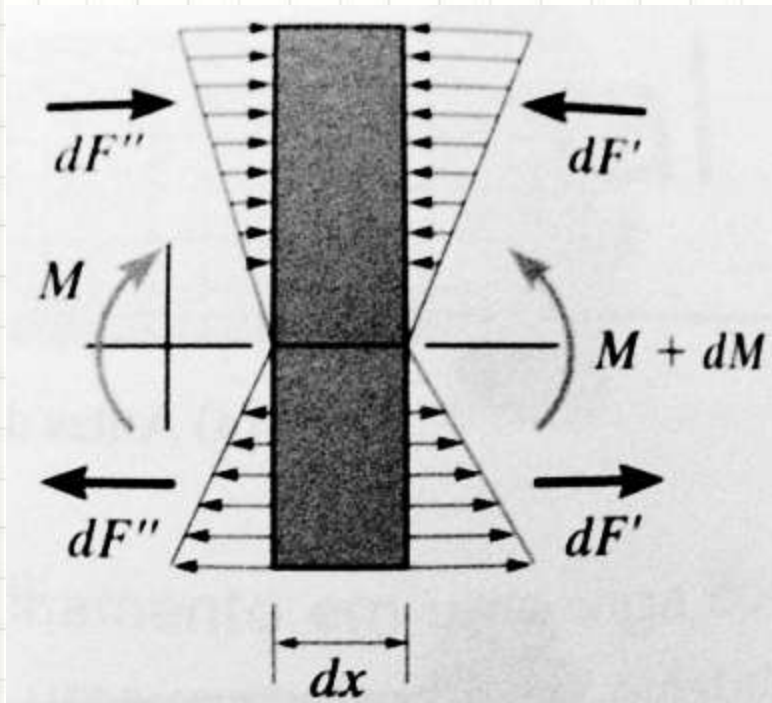
- Vamos calcular pelo cisalhamento longitudinal



Equilíbrio em F_x ?

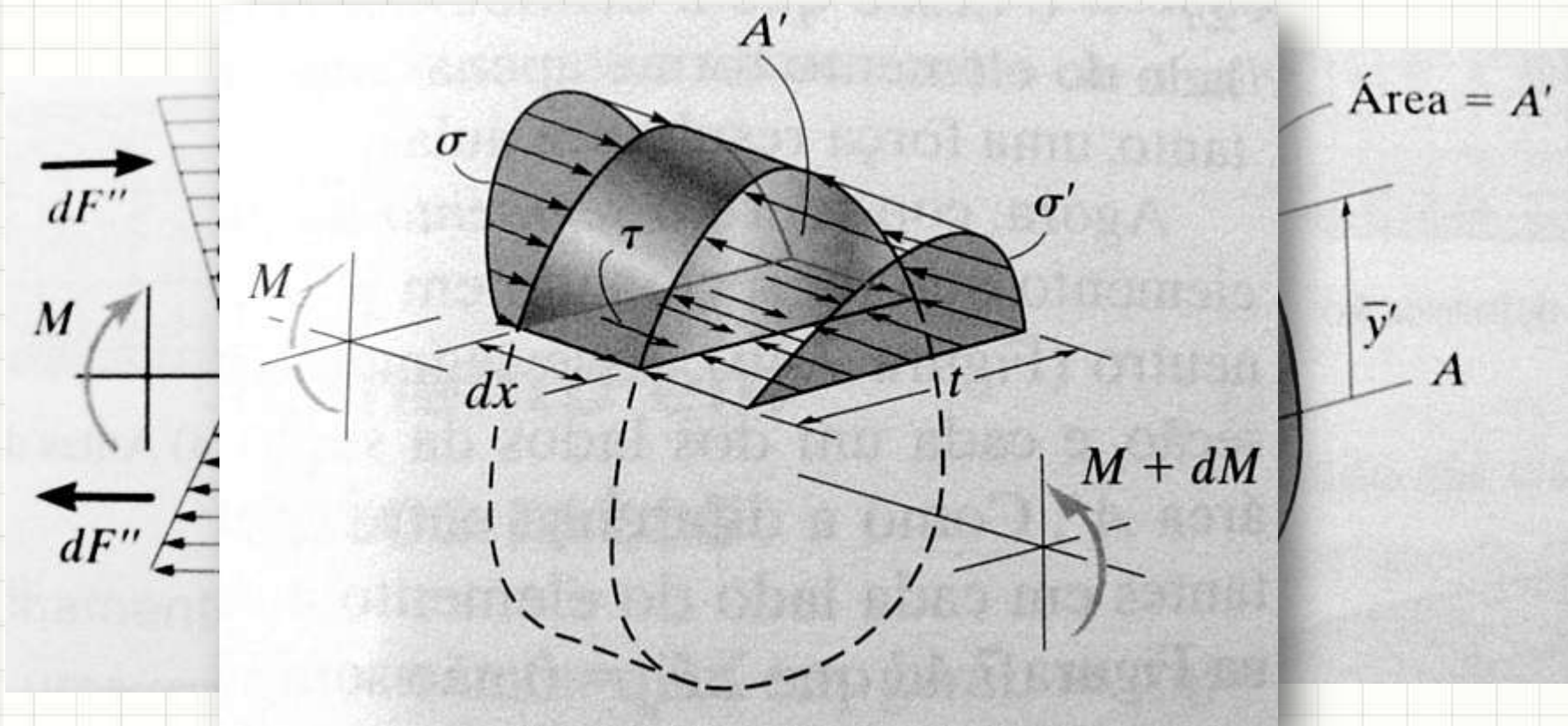
A Fórmula do Cisalhamento

- Mas e se pegarmos só um “teco” da barra?



A Fórmula do Cisalhamento

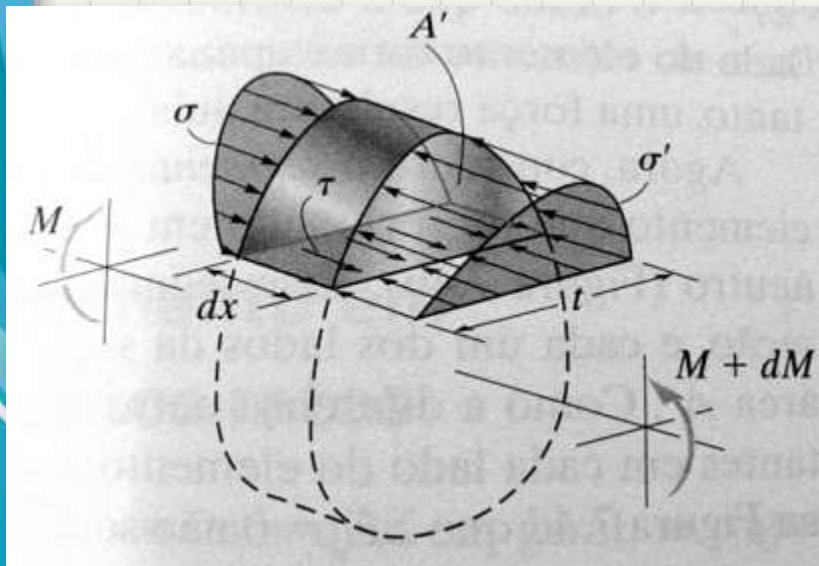
- Mas e se pegarmos só um “teco” da barra?



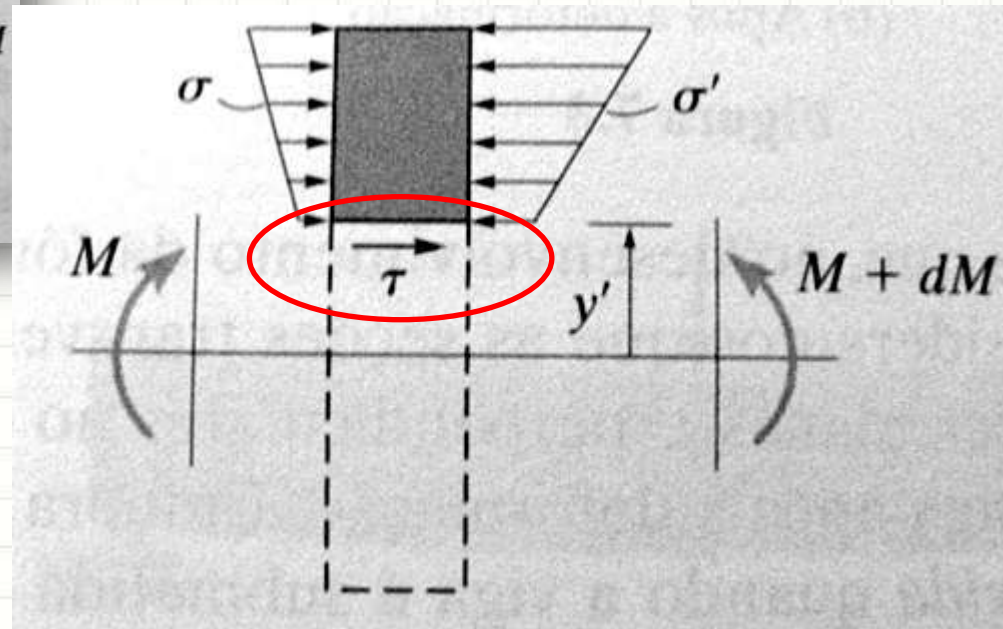
Equilíbrio em F_x ?

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

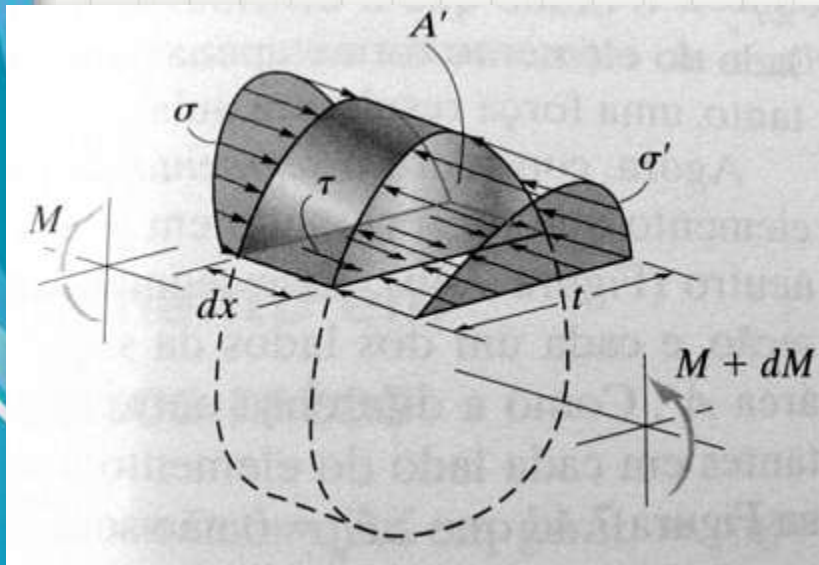


Consideremos τ
constante na área
 $t \cdot dx$

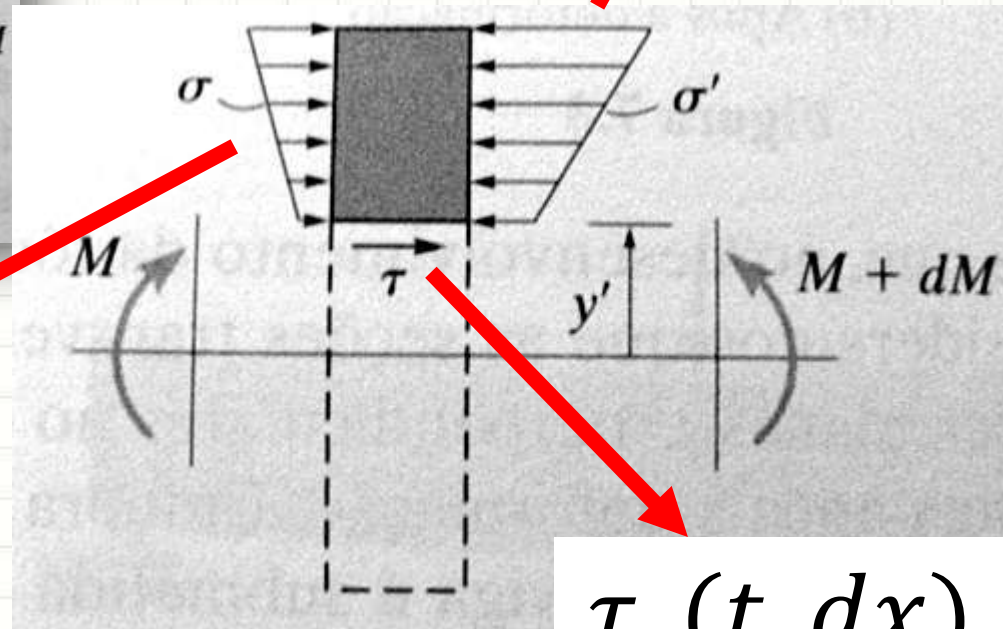


A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!



$$\int_{A'} \sigma' \cdot dA'$$

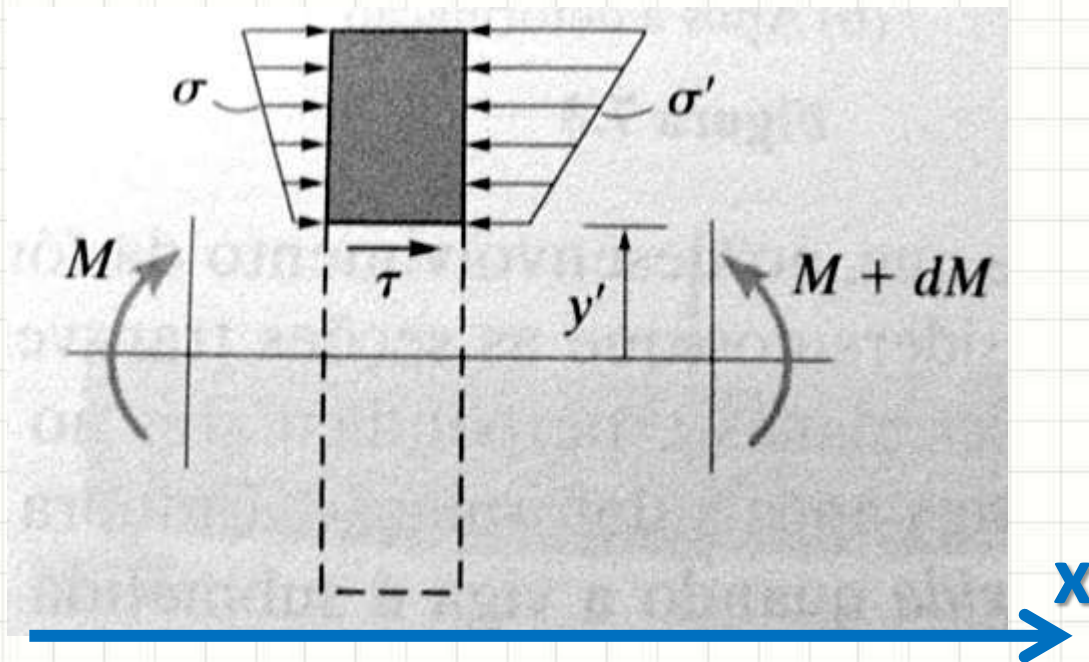


$$\int_{A'} \sigma \cdot dA'$$

$$\tau \cdot (t \cdot dx)$$

A Fórmula do Cisalhamento

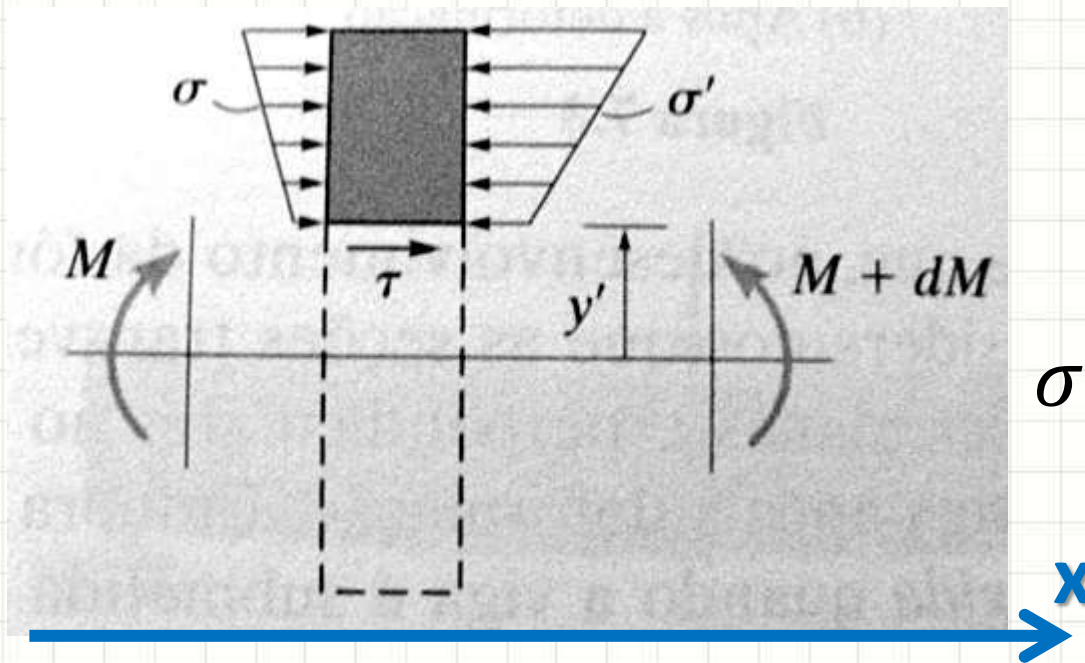
- Tem que ter equilíbrio!



$$\int_{A'} \sigma \cdot dA' - \int_{A'} \sigma' \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!



$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

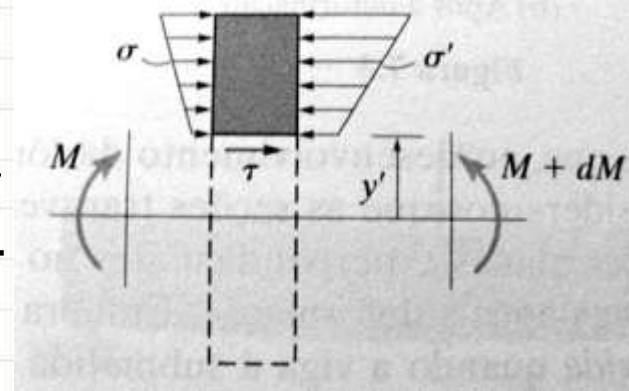
$$\sigma' = \frac{(M + dM) \cdot y}{I}$$

$$\int_{A'} \sigma \cdot dA' - \int_{A'} \sigma' \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad \sigma' = \frac{(M + dM) \cdot y}{I}$$



$$\int_{A'} \sigma \cdot dA' - \int_{A'} \sigma' \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

$$\int_{A'} \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA' - \int_{A'} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\int_{A'} \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA' - \int_{A'} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

$$\frac{M}{I} \cdot \int_{A'} y \cdot dA' - \frac{(M + dM)}{I} \cdot \int_{A'} y \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

Momento estático da área A' com relação ao CG da seção transversal

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\int_{A'} \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA' - \int_{A'} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

$$\frac{M}{I} \cdot \int_{A'} y \cdot dA' - \frac{(M + dM)}{I} \cdot \int_{A'} y \cdot dA' + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

$$\frac{M}{I} \cdot S_{x,A'} - \frac{(M + dM)}{I} \cdot S_{x,A'} + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\frac{M}{I} \cdot S_{x,A'} - \frac{(M + dM)}{I} \cdot S_{x,A'} + \tau \cdot (t \cdot dx) = 0$$

$$\tau \cdot (t \cdot dx) = \frac{(M + dM)}{I} \cdot S_{x,A'} - \frac{M}{I} \cdot S_{x,A'}$$

$$\tau \cdot (t \cdot dx) = \cancel{\frac{M}{I} \cdot S_{x,A'}} + \frac{dM}{I} \cdot S_{x,A'} - \cancel{\frac{M}{I} \cdot S_{x,A'}}$$

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\tau \cdot (t \cdot dx) = \frac{dM}{I} \cdot S_{x,A'}$$

$$\tau = \frac{dM}{I \cdot t \cdot dx} \cdot S_{x,A'}$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\tau \cdot (t \cdot dx) = \frac{dM}{I} \cdot S_{x,A'}$$

$$\tau = \frac{dM}{I \cdot t \cdot dx} \cdot S_{x,A'}$$

$$\tau = \frac{V \cdot S_{x,A'}}{I \cdot t}$$

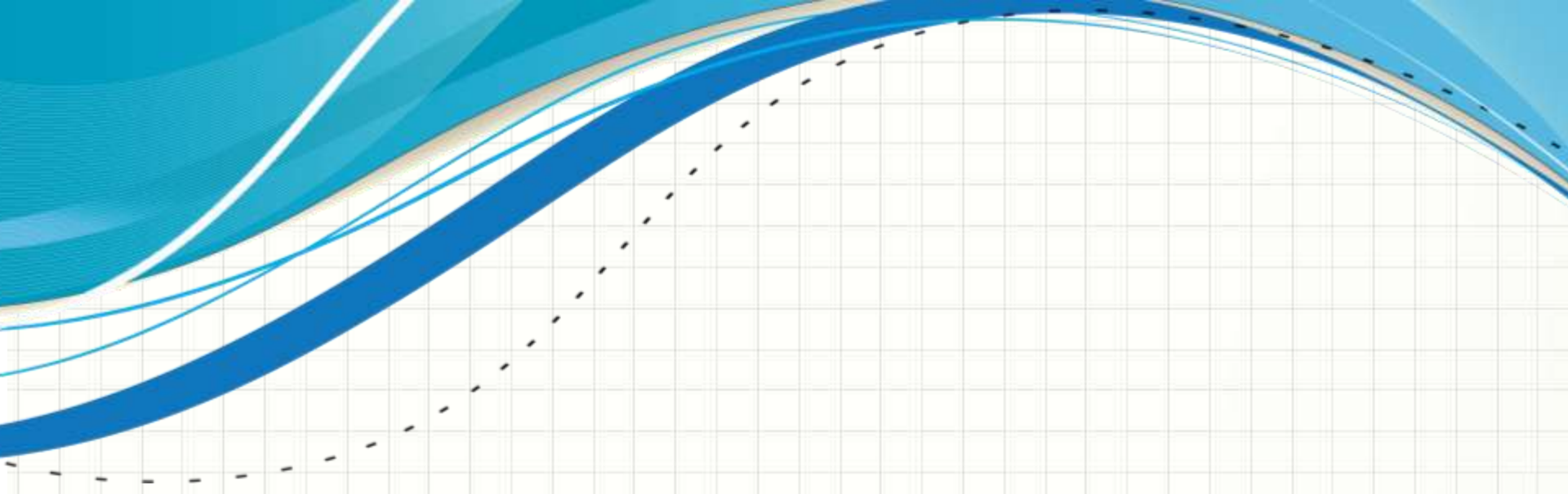
A Fórmula do Cisalhamento

- Tem que ter equilíbrio!

$$\tau = \frac{V \cdot S_{x,A'}}{I \cdot t}$$

$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot t}$$

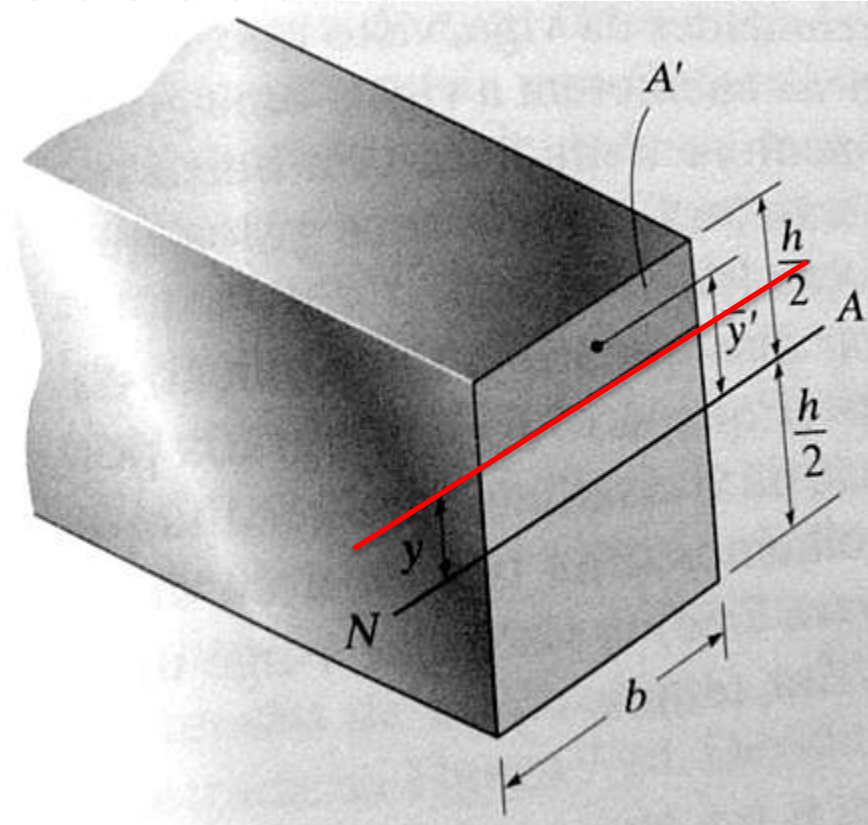
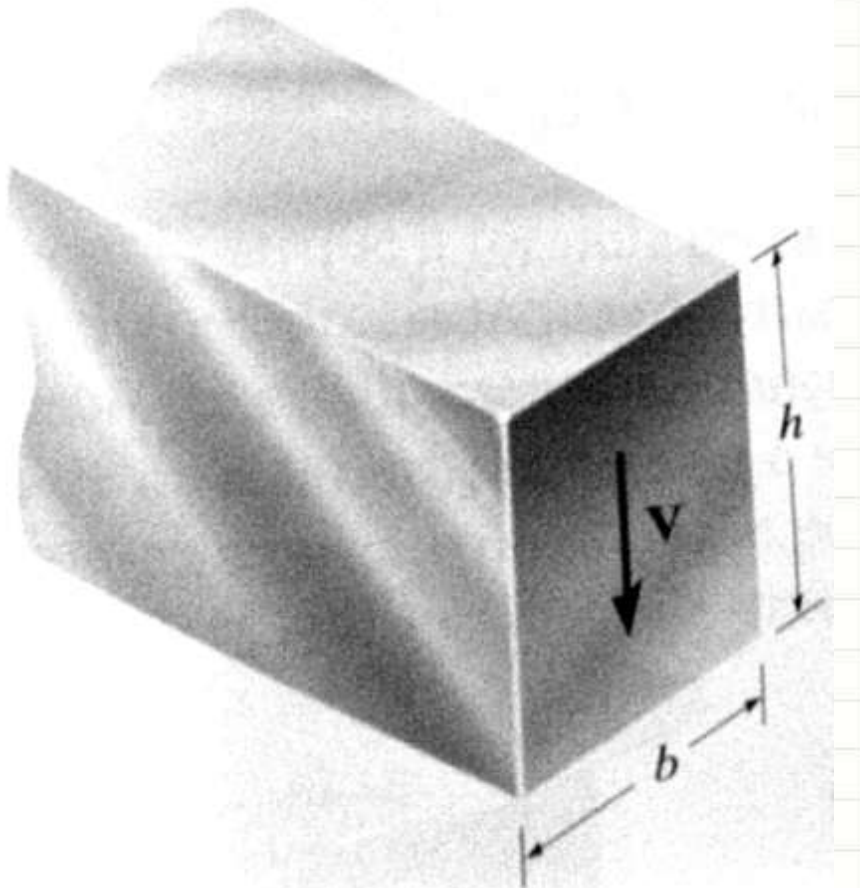
Cuidado
com esse S!



EXEMPLO

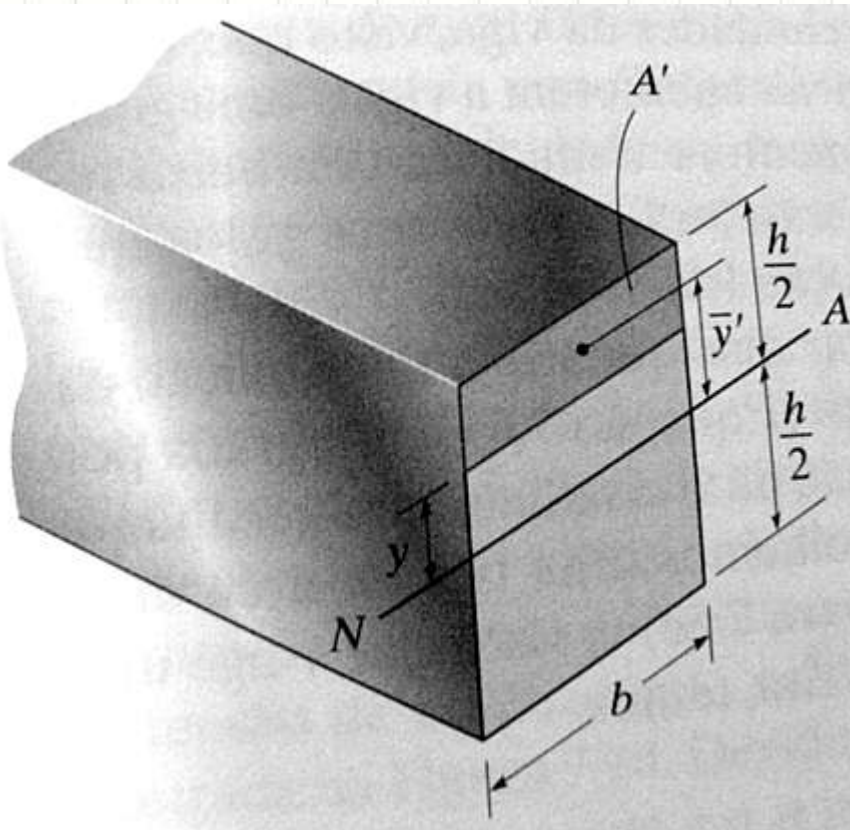
Exemplo

- Distribuição do Cisalhamento Transversal em Vigas Retangulares



Exemplo

- Distribuição do Cisalhamento Transversal em Vigas Retangulares



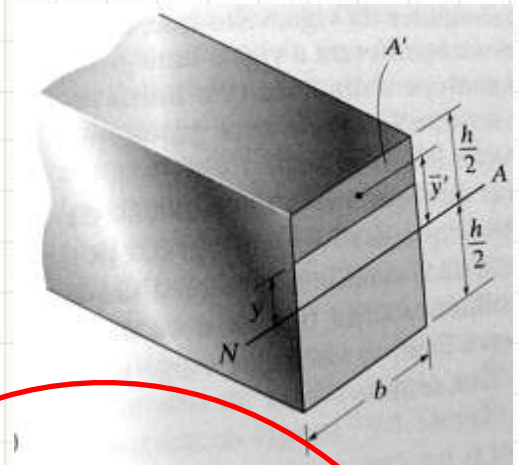
$$\bar{y}' = \left[y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \right]$$

$$A' = \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot b$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot b$$

Exemplo

Cisalhamento Transversal em Vigas Retangulares



$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot t}$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y'^2 \right) \cdot b$$

$$\tau = \frac{6 \cdot V}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y'^2 \right)$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$t = b$$

Distribuição de τ é parabólica!

Exemplo

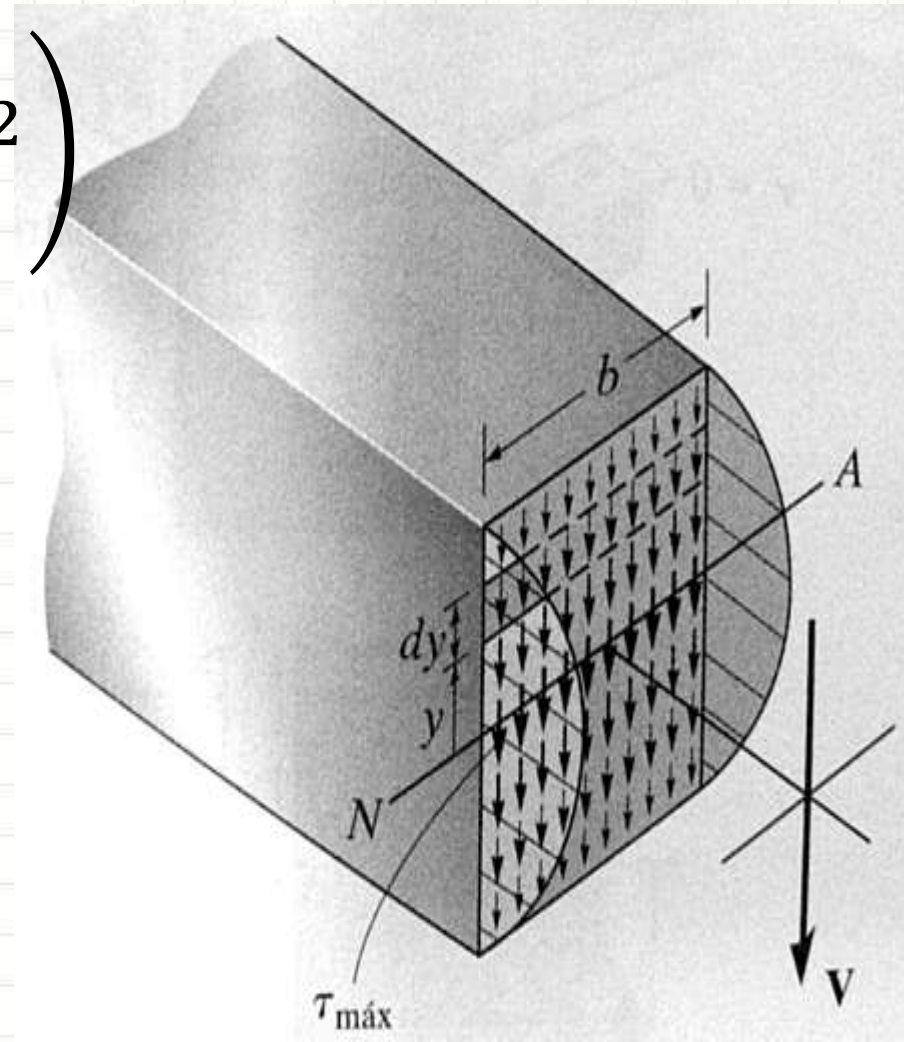
Cisalhamento Transversal em Vigas Retangulares

$$\tau = \frac{6.V}{b.h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} \Rightarrow y = 0$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1,5.V}{A}$$

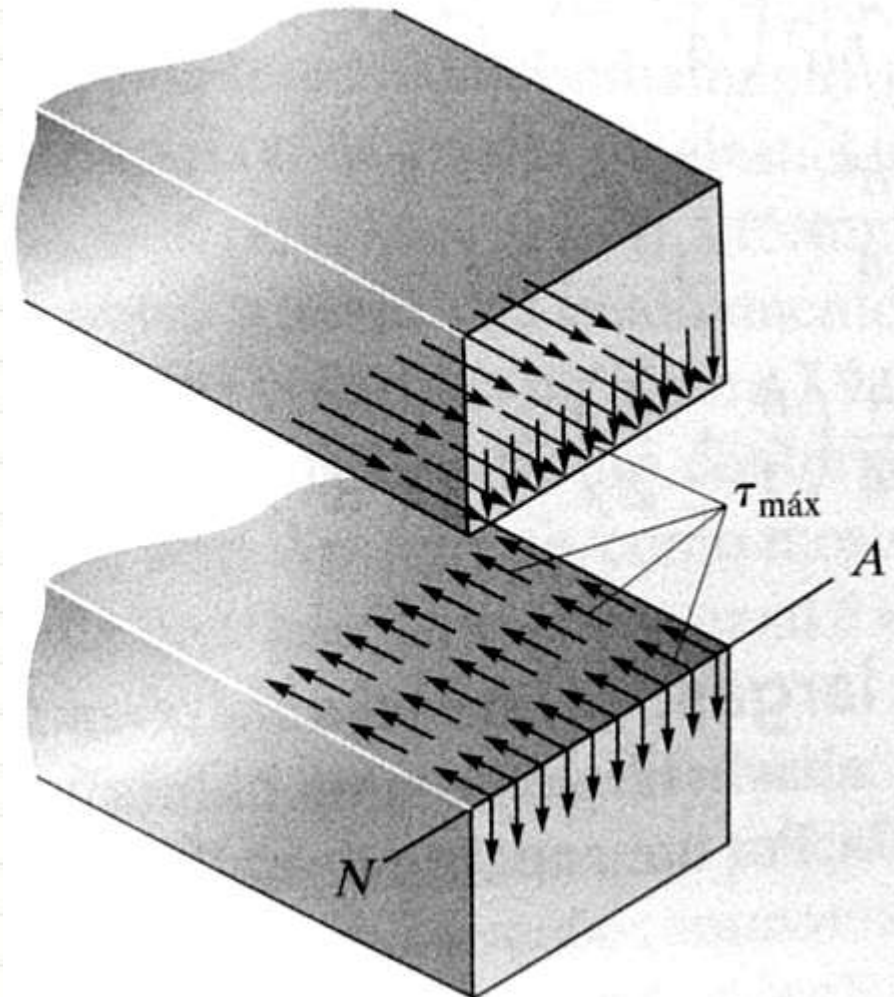
$\tau_{m\acute{a}x}$ ocorre onde
S é maior



Exemplo

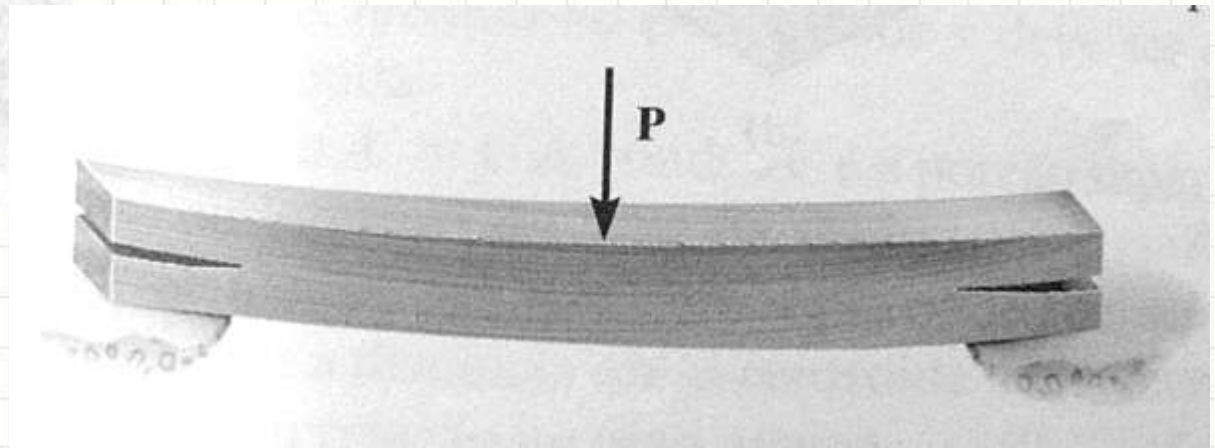
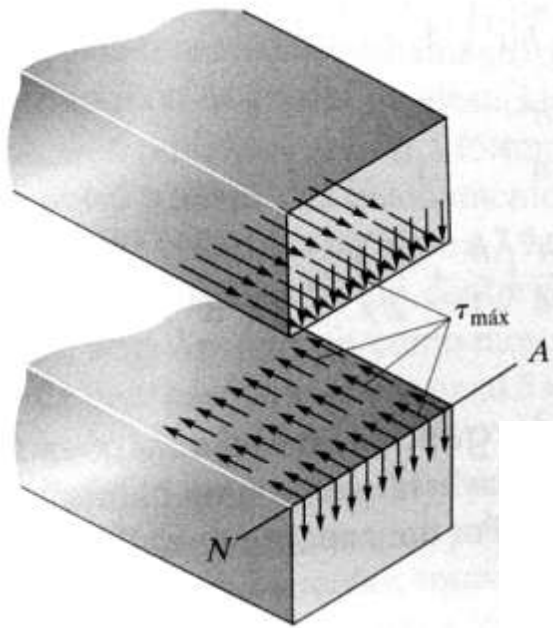
Cisalhamento Transversal em Vigas Retangulares

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1,5 \cdot V}{A}$$



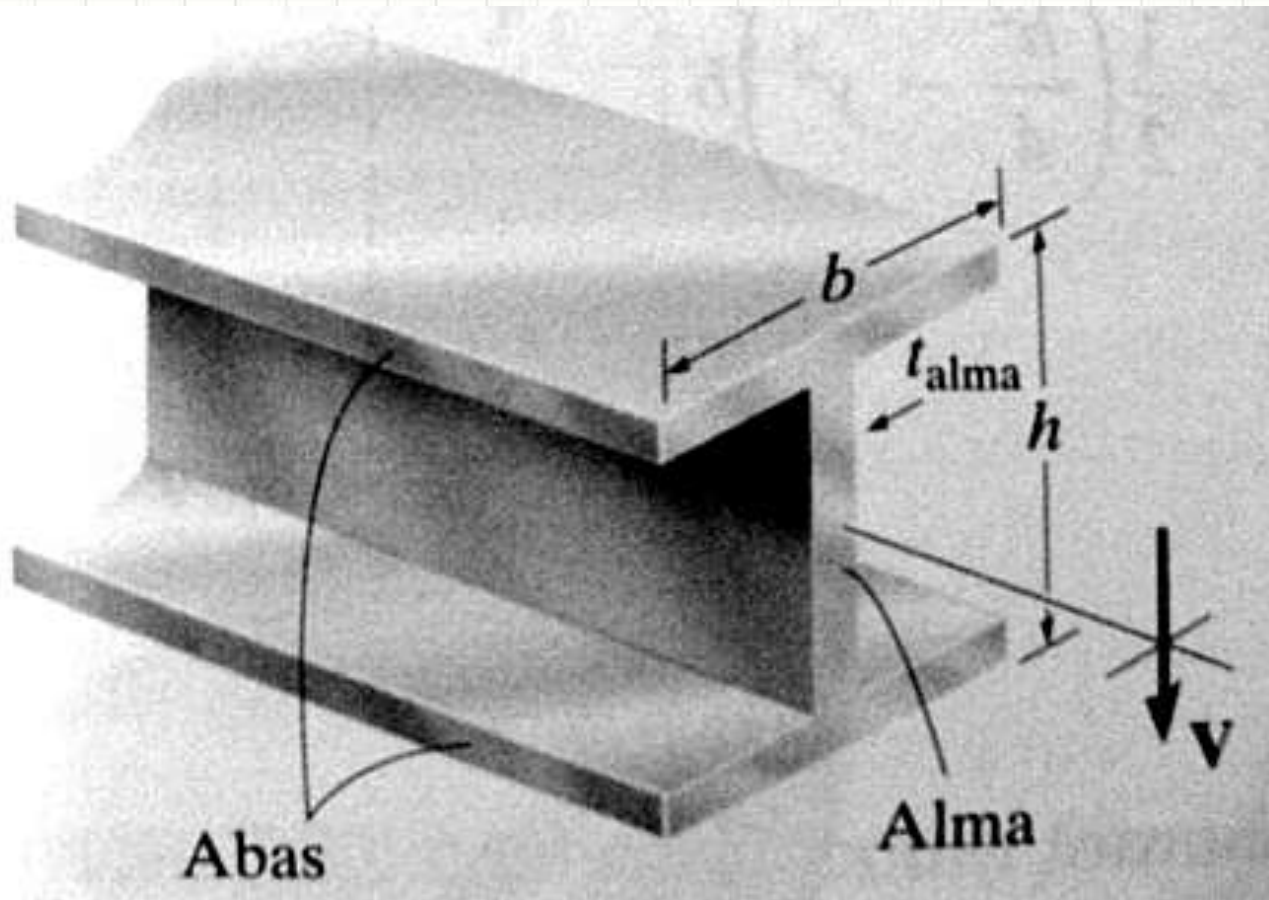
Exemplo

Cisalhamento Transversal em Vigas Retangulares



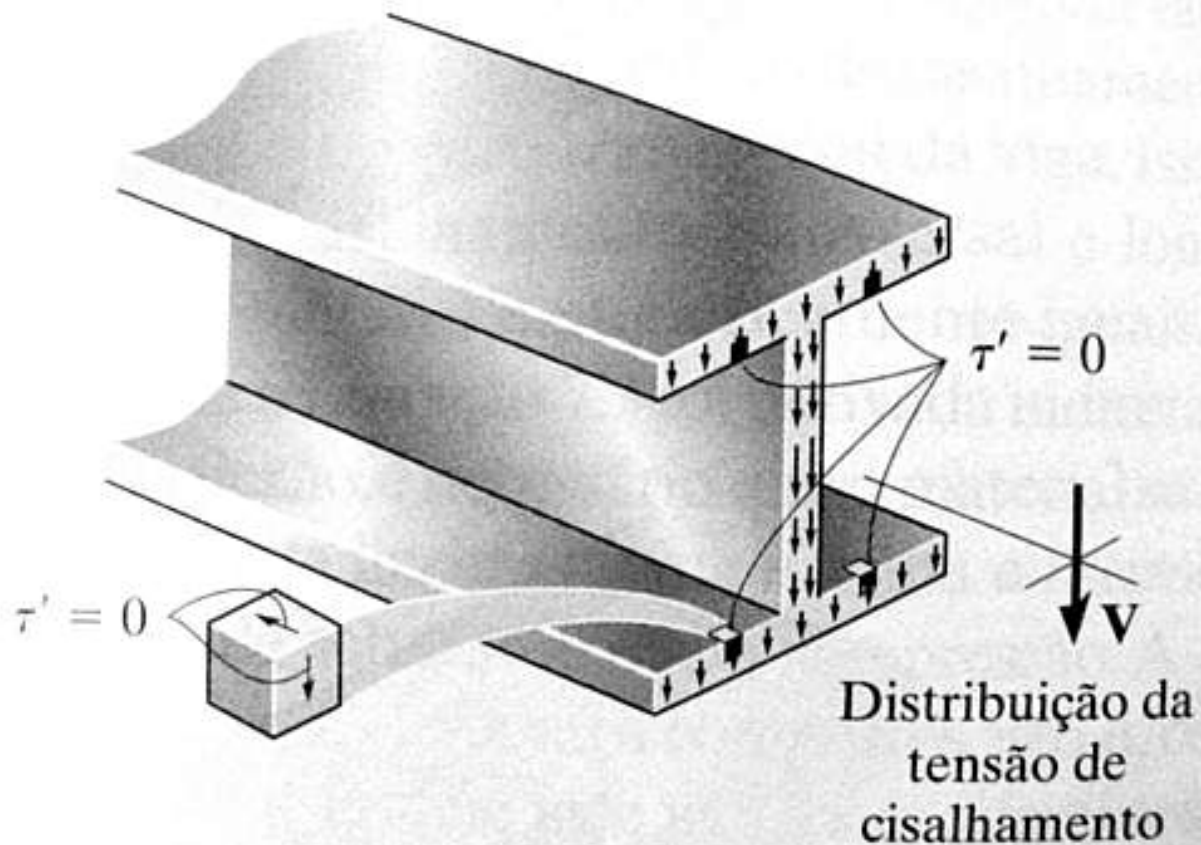
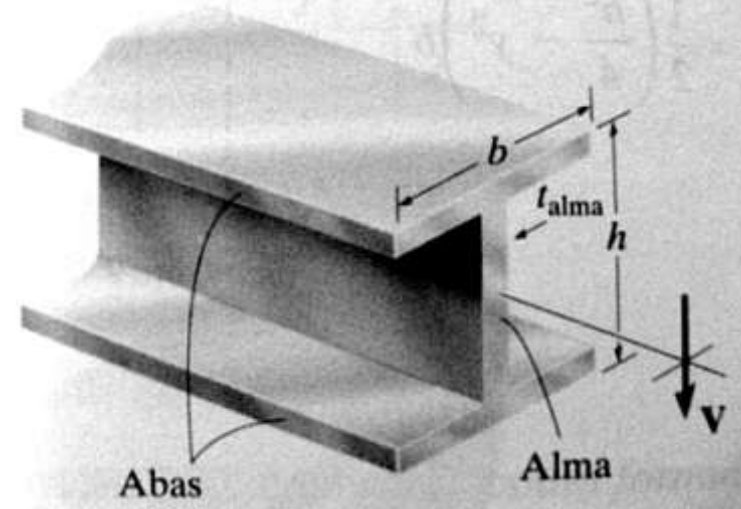
Exemplo

E em seção **I**?



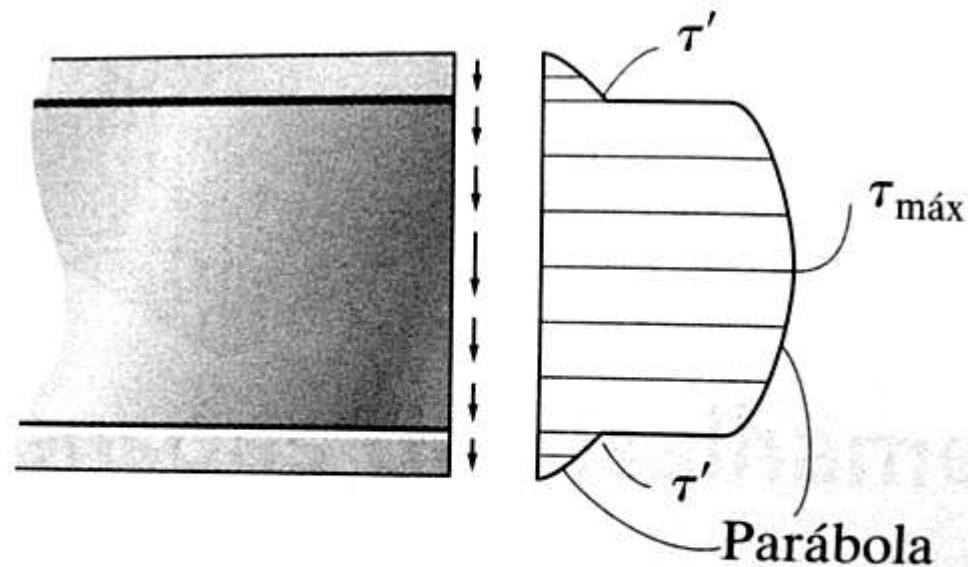
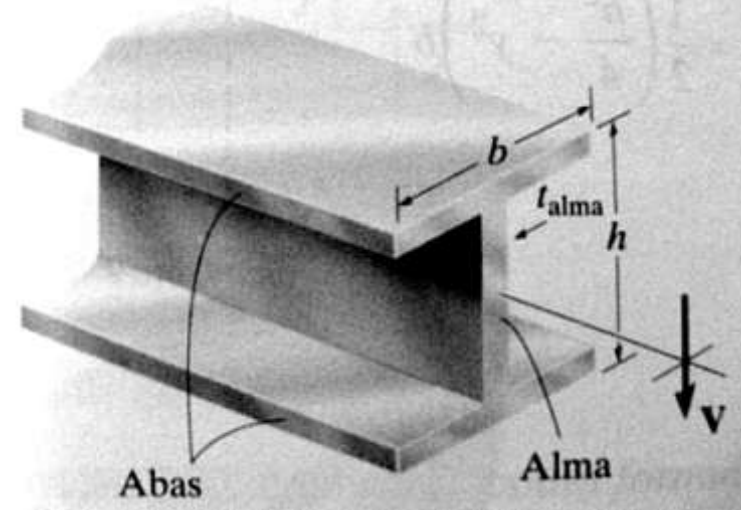
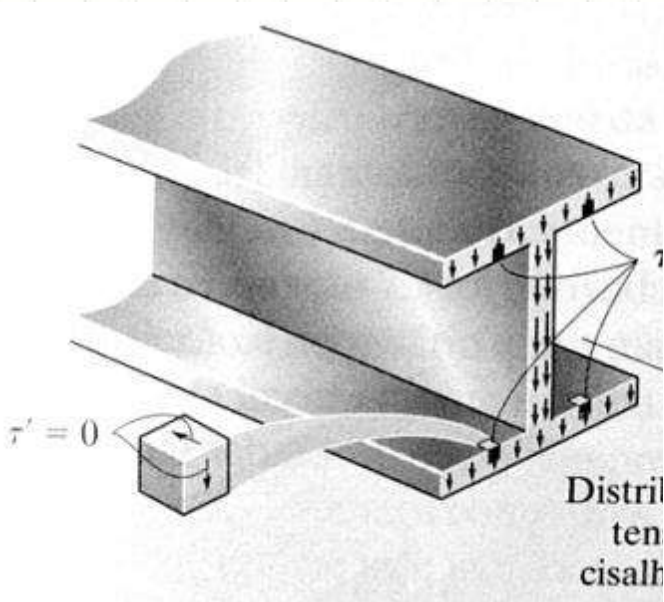
Exemplo

E em seção **I**?



Exemplo

E em seção **I**?



Ex. 7.2 (5ª)

Ex. 7.3 (6ª)

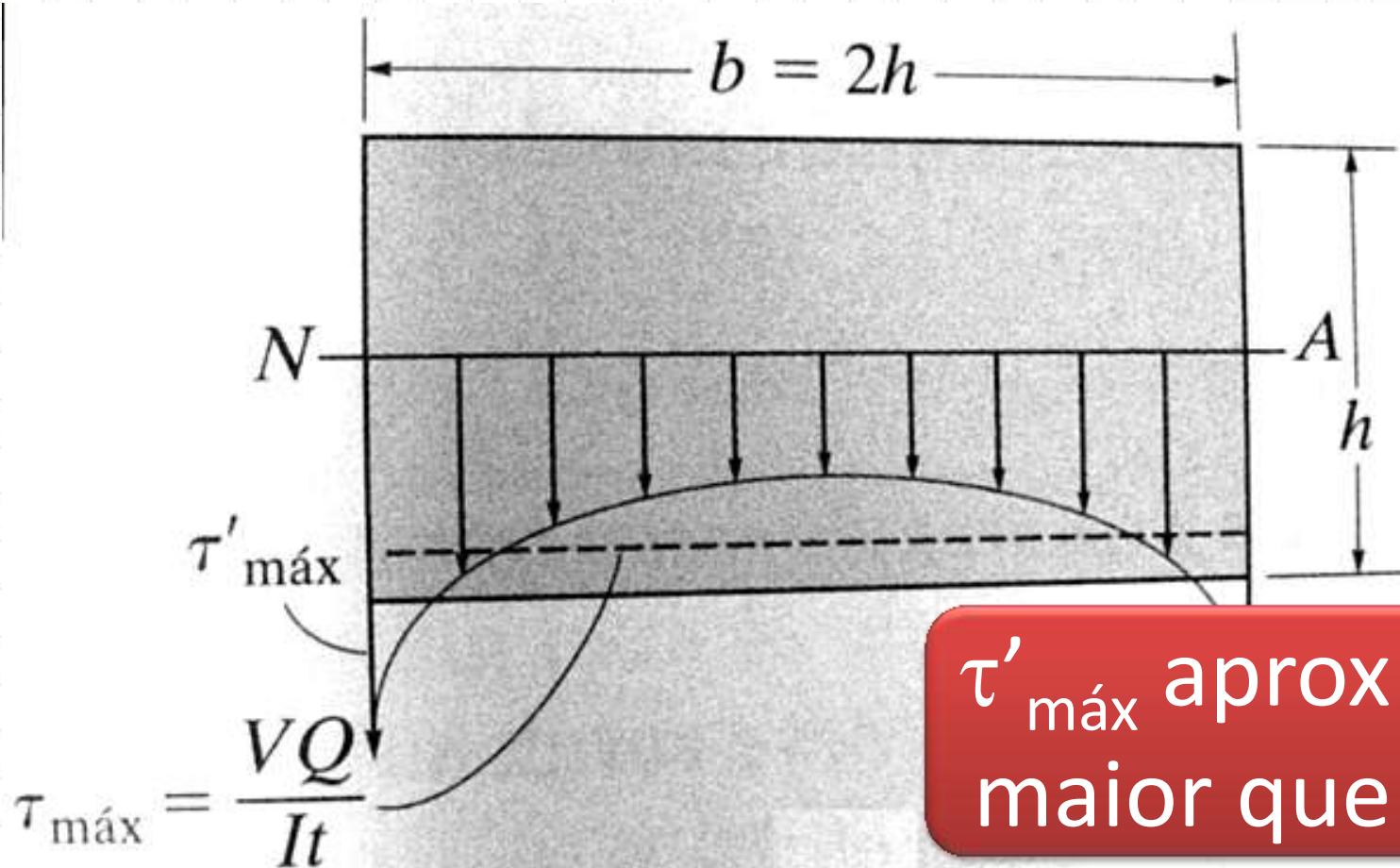
Intensidade da distribuição da
tensão de cisalhamento
(vista lateral)



LIMITAÇÕES DA TEORIA

Limitações da Teoria

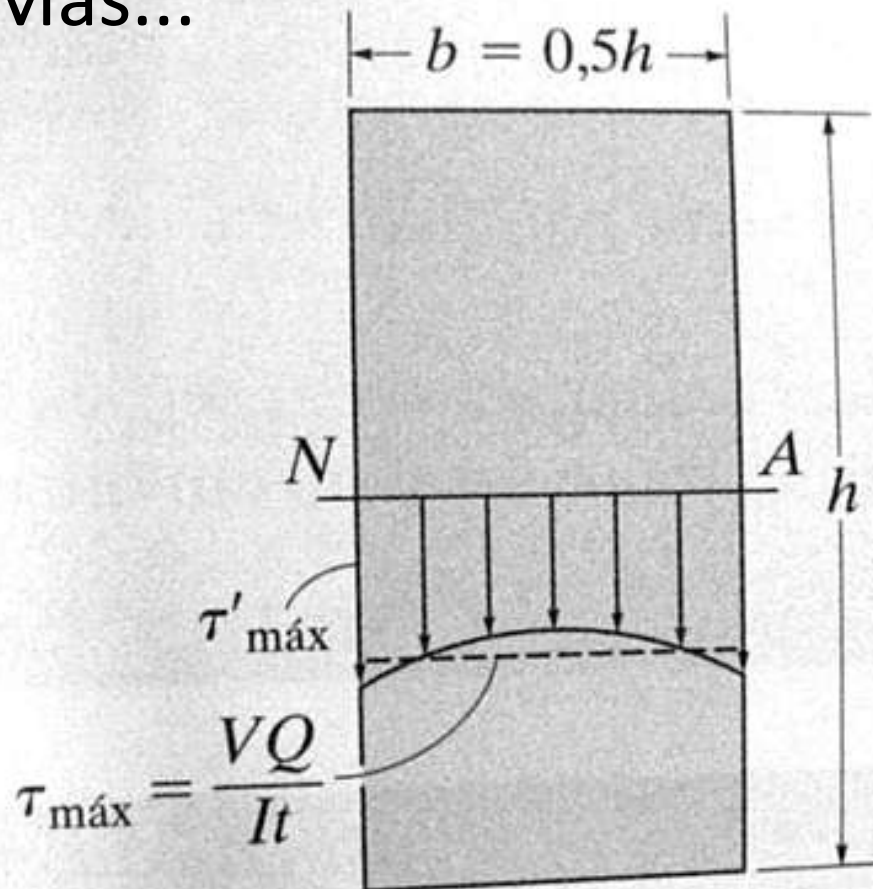
- Consideramos τ' constante na largura da seção
- Mas...



$\tau'_{\text{máx}}$ aprox 40%
maior que $\tau_{\text{máx}}$

Limitações da Teoria

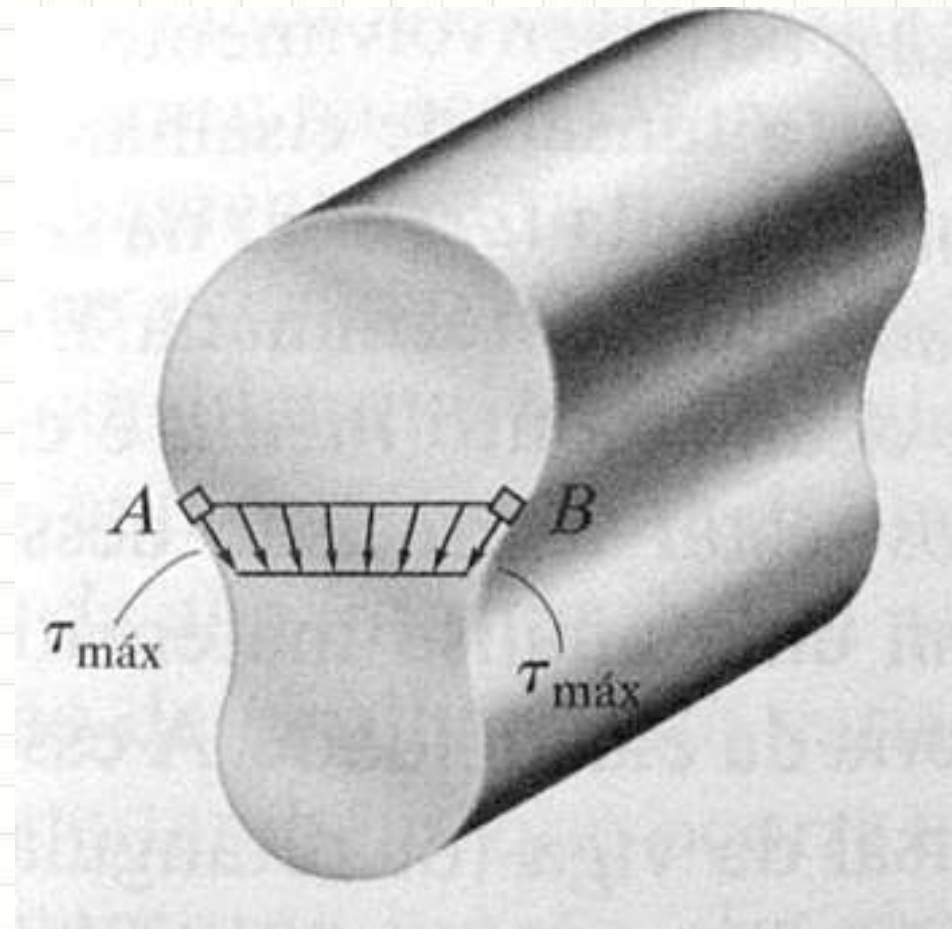
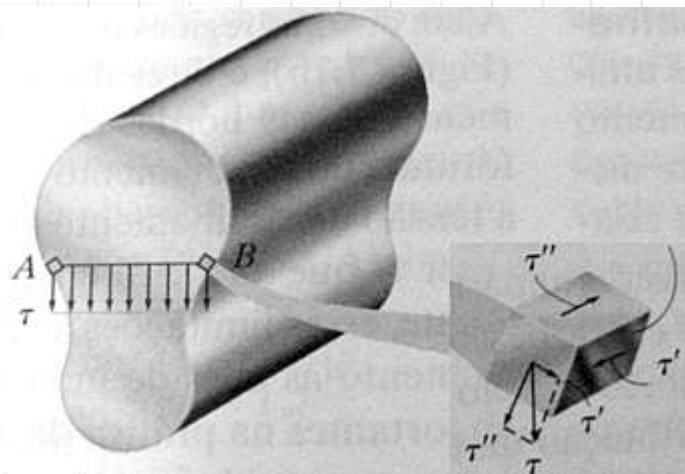
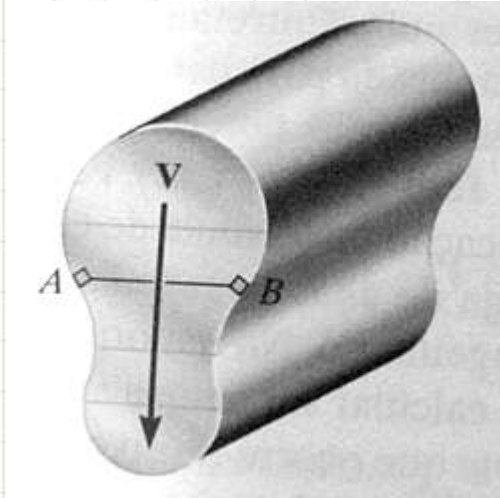
- Consideramos τ' constante na largura da seção
- Mas...



$\tau'_{\text{máx}}$ aprox 3%
maior que $\tau_{\text{máx}}$

Limitações da Teoria

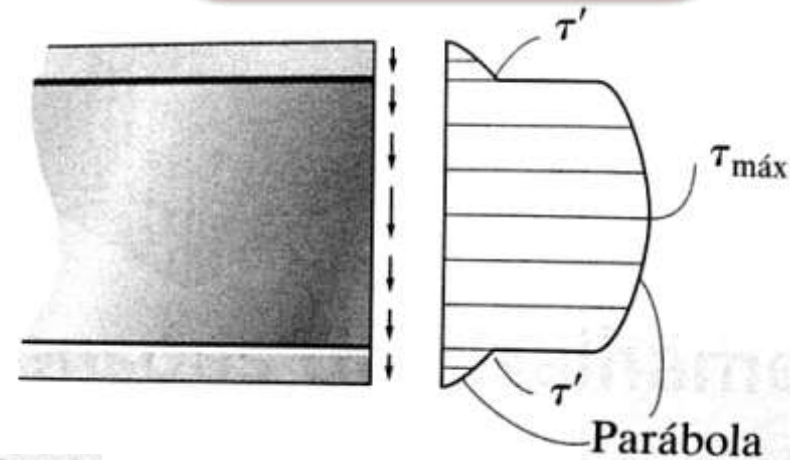
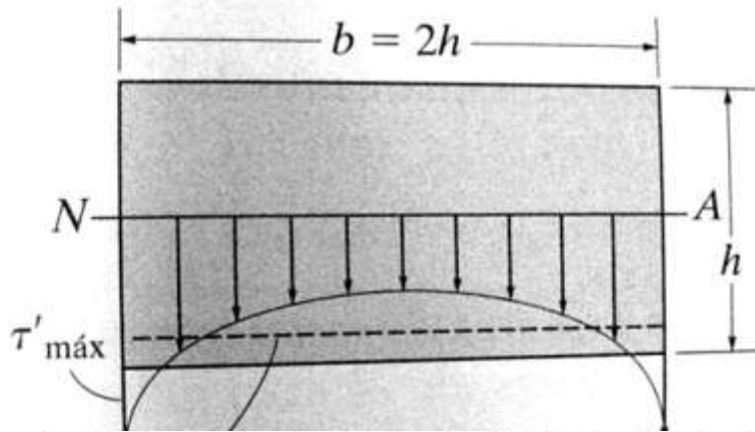
- Consideramos τ' constante na largura da seção



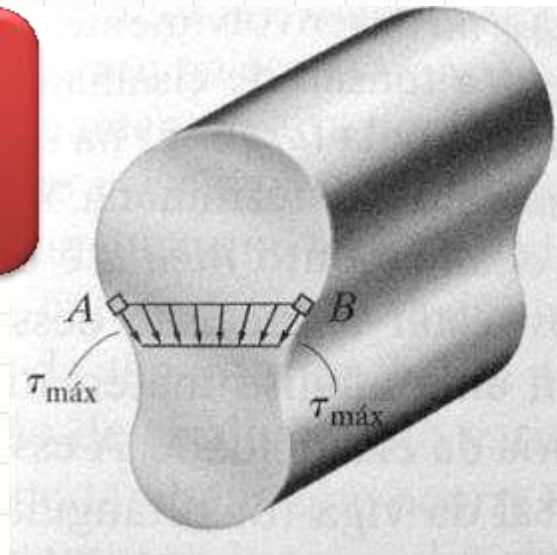
Limitações da Teoria

- Não usar quando:

Mudanças
Abruptas
de Seção



Seções
Achatadas



Contorno não
perpendicular
ao eixo



PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 245 a 246
- Mínimos:
 - Exercícios 7.1, 7.2, 7.7
- Extras:
 - Exercícios 7.12, 7.13, 7.14

Para Treinar em Casa

Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

| Materiais | | Densidade (mg/m ³) | Módulo de elasticidade | | Tensão de escoamento (MPa) | | | Tensão última (MPa) | | | Alongamento % em corpo de prova de 50mm | Coeficiente de Poisson | coeficiente de expansão termica $\times 10^{-6}$ |
|---------------------------|-----------------------|--------------------------------|------------------------|---------------------|----------------------------|------------|--------------|---------------------|------------|--------------|---|------------------------|--|
| | | | E (GPa) | transversal G (GPa) | tração | compressão | cisalhamento | tração | compressão | cisalhamento | | | |
| Ligas de Alumínio Forjado | 2014-T6 | 2,79 | 73,1 | 27 | 414 | 414 | 172 | 469 | 469 | 290 | 10 | 0,35 | 23 |
| | 6061-T6 | 2,71 | 68,9 | 26 | 255 | 255 | 131 | 290 | 290 | 186 | 12 | 0,35 | 24 |
| Ligas de Ferro Fundido | cinza ASTM 20 | 7,19 | 67,0 | 27 | - | - | - | 179 | 669 | - | 0,6 | 0,28 | 12 |
| | Maleável ASTM A-197 | 7,28 | 172 | 68 | - | - | - | 276 | 572 | - | 5 | 0,28 | 12 |
| Ligas de Cobre | Latão vermelho C83400 | 8,74 | 101 | 37 | 70,0 | 70,0 | - | 241 | 241 | - | 35 | 0,35 | 18 |
| | Bronze C86100 | 8,83 | 103 | 38 | 345 | 345 | - | 655 | 655 | - | 20 | 0,34 | 17 |
| Ligas de Magnésio | Am 1004-T61 | 1,83 | 44,7 | 18 | 152 | 152 | - | 276 | 276 | 152 | 1 | 0,30 | 26 |
| Ligas de Aço | Estrutural A-36 | 7,85 | 200 | 75 | 250 | 250 | - | 400 | 400 | - | 30 | 0,32 | 12 |
| | Inoxidável 304 | 7,86 | 193 | 75 | 207 | 207 | - | 517 | 517 | - | 40 | 0,27 | 17 |
| | Aço-ferramenta L2 | 8,16 | 200 | 75 | 703 | 703 | - | 800 | 800 | - | 22 | 0,32 | 12 |
| Ligas de Titânio | Ti-6Al-4V | 4,43 | 120 | 44 | 924 | 924 | - | 1000 | 1000 | - | 16 | 0,36 | 9,4 |

| Materiais | | Densidade (mg/m ³) | Módulo de elasticidade | | Tensão de escoamento (MPa) | | | Tensão última (MPa) | | | Alongamento % em corpo de prova de 50mm | Coeficiente de Poisson | coeficiente de expansão termica |
|--------------------------------------|-------------------|--------------------------------|------------------------|---------------------|----------------------------|------------|--------------|---------------------|------------|--------------|---|------------------------|---------------------------------|
| | | | E (GPa) | transversal G (GPa) | tração | compressão | cisalhamento | tração | compressão | cisalhamento | | | |
| Concreto | Baixa resistência | 2,38 | 22,1 | - | - | - | 12 | - | - | - | - | 0,15 | 11 |
| | Alta resistência | 2,38 | 29,0 | - | - | - | 38 | - | - | - | - | 0,15 | 11 |
| Plástico Reforçado | Kevlar 49 | 1,45 | 131 | - | - | - | - | 717 | 483 | 20,3 | 2,8 | 0,34 | - |
| | 30% de vidro | 1,45 | 72,4 | - | - | - | - | 90 | 131 | - | - | 0,34 | - |
| Madeira Estrutural de Alta Qualidade | Abeto Douglas | 0,47 | 13,1 | - | - | - | - | 2,1 | 26 | 6,2 | - | 0,29 | - |
| | Abeto Branco | 3,60 | 9,65 | - | - | - | - | 2,5 | 36 | 6,7 | - | 0,31 | - |

Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**



CONCLUSÕES

Resumo

- O cisalhamento transversal
 - Pode ser calculado pelo longitudinal...
 - ... calculado por diferencial de momento fletor
- Distribuição de cisalhamento transversal
 - Não é uniforme
- Cisalhamento máximo: S Máximo
- A aplicação da fórmula tem limitações
 - Seções “achatadas”
 - Mudanças abruptas na largura
 - Contorno lateral não perpendicular ao eixo
- **Exercitar**
 - **Exercícios Hibbeler**

Próxima Aula



THE END!



PERGUNTAS?



**BOM DESCANSO
A TODOS!**