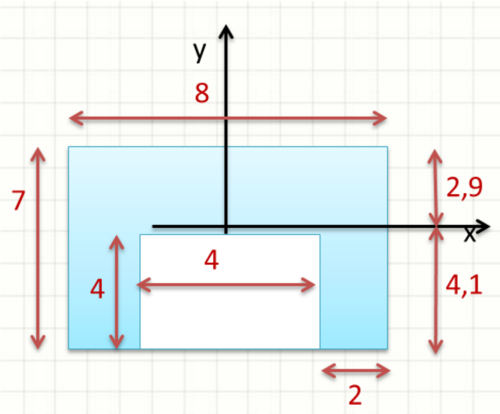
Exercício - Aula 2 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos percebam a importância de organizar a solução antes de iniciar a resolver um problema de cálculo, que usualmente se inicia pela determinação do centroide ou do momento de inércia. Existem sempre muitos caminhos, alguns são substancialmente mais longos que outros.

O problema é apresentado com a figura abaixo:



Pede-se:

a) Ix, Iy e Ixy dos eixos representados, que passam pelo centroide
b) Determinar se esses são os eixos principais
c) Se não forem, calcular os eixos principais

Bem, por onde começar?

Dado que o problema pede o cálculo dos momentos de inércia e do produto de inércia, a primeira pergunta que precisa ser respondida é: com relação a quais eixos?

O problema sugere a direção dos eixos e já fornece o centroide. Sendo assim, podemos partir para o cálculo dos momentos de inércia. Caso contrário, deveríamos iniciar pela determinação do centroide (veja no exercício da Aula 1).

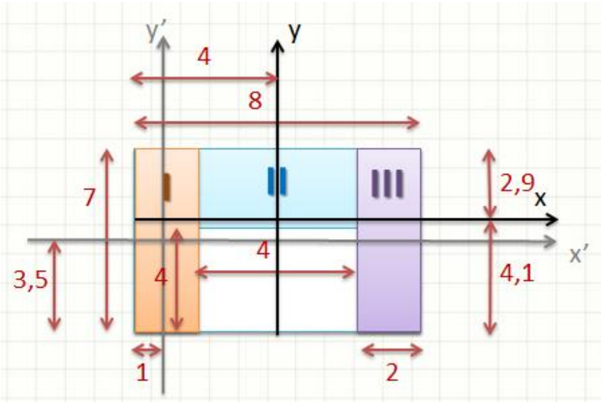
Cálculo dos Momentos de Inércia

Como não sabemos calcular o momento de inércia da figura como um todo (ao menos não sem usar uma integral complicada), podemos recorrer ao mesmo artifício de "picotar a figura".

Entretanto, os eixos não estão em posições que saibamos, de antemão, a fórmula de cálculo... precisaremos transladar os eixos. Sendo assim, para facilitar, **vamos partir dos eixos centrais de cada um dos pedaços** (podendo, assim, usar a fórmula de translação simplificada Ix' = Ix + d^2 * A) e transladar cada um destes eixos para o centroide da figura.

A soma dos valores dos momentos de inércia calculados desta forma será o momento de inércia da figura como um todo.

Comecemos pela figura I. Observe:



O momento de inércia Ix' para a figura I é:

$I_{x'I} = (b * h^3) / 12 = (2 * 7^3) / 12 = 343 / 6 = 57{,}17$

Transladando para o eixo **x**, que está a uma distância (4,1-3,5) = 0,6 de **x':**

$I_{xI} = I_{x'I} + d^2 * A = 57{,}17 + 0{,}6^2 * 14 = 62{,}21$

$\mathbf{I_{xI} = 62{,}21}$

Observe que, com relação ao eixo X, não há diferença entre as figuras I e III... logo...

$\mathbf{I_{xIII} = 62{,}21}$

Já o momento de inércia $\mathbf{I_{y'}}$ para a figura I é:

$I_{y'I} = (b * h^3) / 12 = (7 * 2^3) / 12 = 14 / 3 = 4{,}67$

Transladando para o eixo y, que está a uma distância (4-1) = 3 de **y':**

$I_{yI} = I_{y'I} + d^2 * A = 4{,}67 + 3^2 * 14 = 130{,}67$

$\mathbf{I_{yI} = 130{,}67}$

Observe que, por simetria... $I_{yIII} = I_{yI}$

$\mathbf{I_{yIII} = 130{,}67}$

O produto de inércia também é simples:

$I_{x'y'I} = 0$

$I_{xyI} = I_{x'y'I} + dx * dy * A = 0 + (-3) * (-0{,}6) * 14 = 25{,}2$

$\mathbf{I_{xyI} = 25{,}2}$

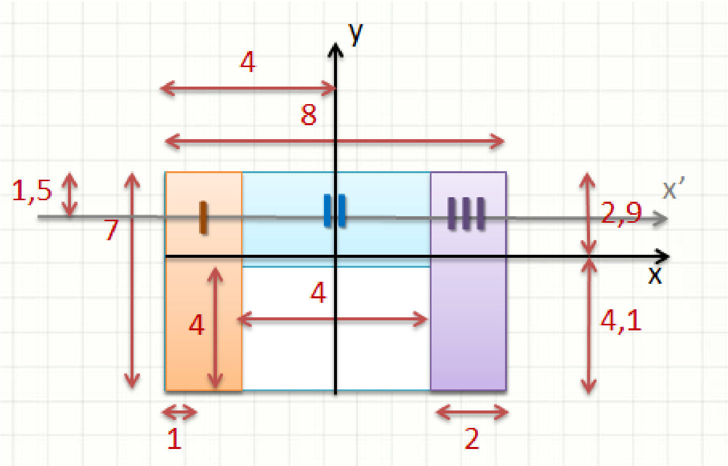
No caso do I_{xyIII}... colocando o eixo convenientemente em seu centro de gravidade....

$I_{x'y'III} = 0$

$I_{xyIII} = I_{x'y'III} + dx * dy * A = 0 + 3 * (-0{,}6) * 14 = -25{,}2$

$\mathbf{I_{xyIII} = -25{,}2}$

Faltam agora os momentos de inércia da figura II, que precisam de eixos mais interessantes (o eixo y já é o eixo central da figura II, então ele é o que será usado!):



Com relação ao eixo X, podemos calcular Ix'II:

$I_{x'II} = (b * h^3) / 12 = (4 * 3^3) / 12 = 108 / 12 = 9$

Transladando para o eixo **x**, que está a uma distância (2,9-1,5) = 1,4 de **x'**:

$I_{xII} = I_{x'II} + d^2 * A = 9 + 1{,}4^2 * 12 = 32{,}52$

$\mathbf{I_{xII} = 32{,}52}$

O eixo y já é o eixo de simetria... logo

$I_{yII} = (b * h^3) / 12 = (3 * 4^3) / 12 = 192 / 12 = 16$

$\mathbf{I_{yII} = 16}$

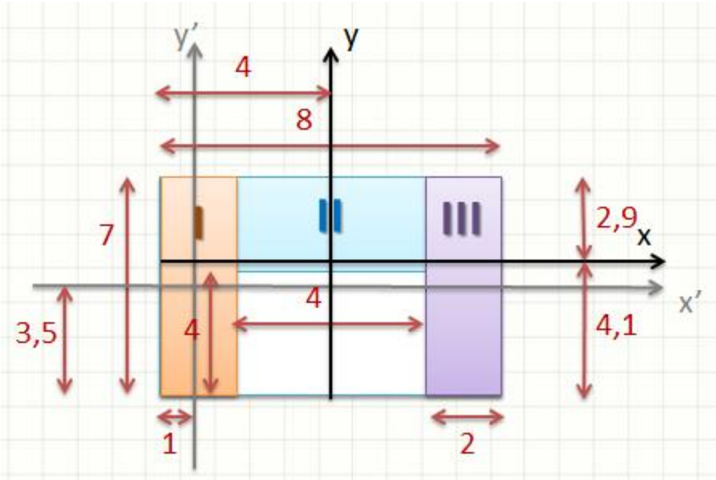
Com relação ao produto de inércia...

$I_{x'yII} = 0$

$I_{xyI} = I_{x'yI} + dx * dy * A = 0 + 0 * 1{,}4 * 12 = 0$

$\mathbf{I_{xyI} = 0}$

Quadro Resumo dos Momentos de Inércia



$\mathbf{I_{xI} = 62,21}$	$\mathbf{I_{yI} = 130,67}$	$\mathbf{I_{xyI} = 25,2}$
$\mathbf{I_{xII} = 32,52}$	$\mathbf{I_{yII} = 16}$	$\mathbf{I_{xyIII} = -25,2}$
$\mathbf{I_{xIII} = 62,21}$	$\mathbf{I_{yIII} = 130,67}$	$\mathbf{I_{xyI} = 0}$

Logo..

$I_x = 62,21 + 32,52 + 62,21 = 156,94$	$\mathbf{I_x = 156,94}$
$I_y = 130,67 + 16 + 130,67 = 156,94$	$\mathbf{I_y = 277,34}$
$I_{xy} = 25,2 - 25,2 + 0$	$\mathbf{I_{xy} = 0}$

Como $I_{xy} = 0$, estes são os eixos principais de inércia! I_y é o momento máximo e I_x é o momento mínimo... ainda que a figura não seja simétrica em relação ao eixo X!

Parece muita coisa? Nem tanto: na página a seguir, apenas os cálculos estão apresentados.

Exercício - Aula 2 – Solução (apenas Cálculos)

$I_{x'I} = (b * h^3) / 12 = (2 * 7^3) / 12 = 343 / 6 = 57{,}17$

$I_{xI} = I_{x'I} + d^2 * A = 57{,}17 + 0{,}6^2 * 14 = 62{,}21$ **$I_{xI} = 62{,}21$** **$I_{xIII} = 62{,}21$**

$I_{y'I} = (b * h^3) / 12 = (7 * 2^3) / 12 = 14 / 3 = 4{,}67$

$I_{yI} = I_{y'I} + d^2 * A = 4{,}67 + 3^2 * 14 = 130{,}67$ **$I_{yI} = 130{,}67$** **$I_{yIII} = 130{,}67$**

$I_{x'y'I} = 0$

$I_{xyI} = I_{x'y'I} + dx * dy * A = 0 + (-3) * (-0{,}6) * 14 = 25{,}2$ **$I_{xyI} = 25{,}2$**

$I_{x'y'III} = 0$

$I_{xyIII} = I_{x'y'III} + dx * dy * A = 0 + 3 * (-0{,}6) * 14 = -25{,}2$ **$I_{xyIII} = -25{,}2$**

$I_{x'II} = (b * h^3) / 12 = (4 * 3^3) / 12 = 108 / 12 = 9$

$I_{xII} = I_{x'II} + d^2 * A = 9 + 1{,}4^2 * 12 = 32{,}52$ **$I_{xII} = 32{,}52$**

$I_{yII} = (b * h^3) / 12 = (3 * 4^3) / 12 = 192 / 12 = 16$ **$I_{yII} = 16$**

$I_{x'yII} = 0$

$I_{xyI} = I_{x'yI} + dx * dy * A = 0 + 0 * 1{,}4 * 12 = 0$ **$I_{xyI} = 0$**