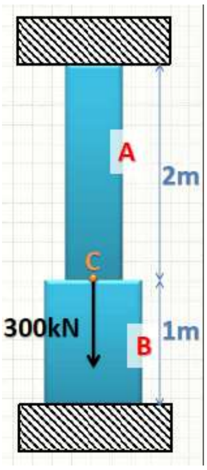
Exercício - Aula 3 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem a importância da relação entre as tensões e as deformações no cálculo de estruturas estaticamente indeterminadas. Nestas estruturas, as equações de equilíbrio não são suficientes, sendo necessárias as equações de compatibilidade de deslocamentos.

A proposta é fornecer um problema usual da engenharia civil para o cálculo de reações de apoio e deslocamentos. O problema é apresentado com a figura abaixo:



São fornecidos ainda:

$\phi_A = 0{,}5m$ $\phi_B = 0{,}5m$ $E_A = E_B = E = 50GPa$

Pede-se:

a) O deslocamento em C
b) As reações de apoio
c) Se não forem, calcular os eixos principais

Bem, por onde começar?

O problema começa solicitando o cálculo do deslocamento. Esse valor vai depender das cargas em cada trecho da barra (a descobrir), dos comprimentos (dados), dos módulos de elasticidade (dados) e das áreas das seções transversais (a descobrir, baseadas diretamente nos dados).

Antes de nos debruçarmos sobre o cálculo das reações de apoio, é conveniente complementas as informações fornecidas com as áreas das seções transversais. Como é fornecido o diâmetro, assume-se que os pilares sejam cilíndricos e, sendo assim:

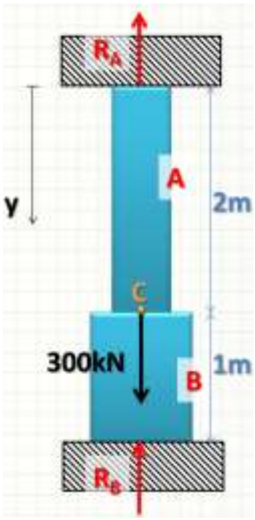
$A_A = \pi.\ \phi_A{}^2/4 = \pi * 0{,}5^2 / 4 = \pi * 0{,}25 / 4 = \pi /16\ m^2$

$A_B = \pi.\ \phi_A{}^2/4 = \pi * 1^2 / 4 = \pi * 1 / 4 = \pi /4\ m^2$

Assim, os dados completos para o cálculo são:

$\phi_A = 0{,}5m$ $\phi_B = 0{,}5m$ $E_A = E_B = E = 50GPa$ $\mathbf{A_A = \pi /16\ m^2}$ $\mathbf{A_B = \pi /4\ m^2}$

Cálculo do Equilíbrio Estático



Vamos agora verificar o equilíbrio estático da estrutura. Como a estrutura é vertical, vamos colocar um eixo Y conforme indicado na figura a seguir.

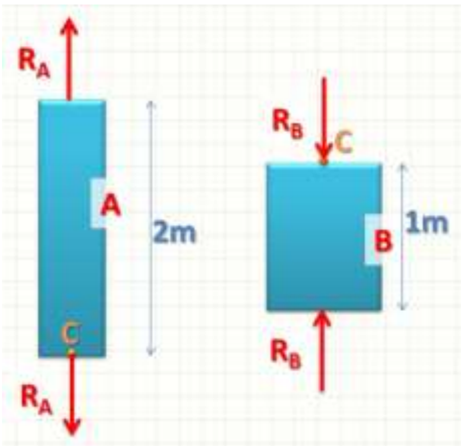
Com esse eixo **y** podemos escrever a equação de equilíbrio estático na vertical. Como o pilar está parado, é razoável afirmar que a resultante das forças que atuam nele, na direção **y**, seja igual a zero. Sendo assim, adotando as reações de apoio como indicadas na figura, calculamos:

$$300.000 - R_A - R_B = 0 \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{R_A = 300.000 - R_B}$$

Como já sabíamos, essa equação não seria suficiente para a determinação das reações. Sendo assim, prosseguimos para o cálculo do deslocamento do ponto **C** pelo ponto de vista de cada uma das barras: $\delta_{C,A}$ e $\delta_{C,B}$.

Cálculo da Compatibilidade dos Deslocamentos



Para determinar a compatibilidade dos deslocamentos, vamos usar o princípio da superposição de efeitos. Para isso, vamos desenhar as barras de maneira isolada, nos chamados "diagramas de corpo livre":

$\delta_{C,A} = P_A.L_A/(E_A.A_A) = R_A.L_A/(E.\pi/16) \rightarrow$

$\boldsymbol{\delta_{C,A} = R_A. 16.L_A/(E.\pi)}$ m **(para baixo)**

$\delta_{C,B} = P_B.L_B/(E_B.A_B) = R_B.L_B/(E.\pi/4) \rightarrow$

$\boldsymbol{\delta_{C,B} = R_B. 4.L_B/(E.\pi)}$ m **(para baixo)**

Entretanto, como o ponto C é o mesmo ponto, ele tem que tem que se deslocar da mesma quantidade em ambas as barras. Sendo assim, podemos usar a seguinte equação de compatibilidade de deslocamentos: $\delta_{C,A} = \delta_{C,B}$ ... que nos leva a:

$$\boldsymbol{\delta_{C,A}} = R_A.16.L_A/(E.\pi) = R_B.4.L_B/(E.\pi) = \boldsymbol{\delta_{C,B}}$$

Ou, simplesmente:

$$R_A .16.L_A/(E.\pi) = R_B .4.L_B/(E.\pi)$$

Que pode ser reescrita como:

$$R_A = (R_B. 4.L_B/(E.\pi)) . ((E.\pi)/16.L_A) \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{R_A = R_B. (L_B/4.L_A)}$$

Chegamos em uma outra equação relacionando R_A e R_B, agora pela compatibilidade de deslocamentos.

Cálculo das Reações que Compatibiliza os Resultados

Juntando com a equação obtida pelo equilíbrio estático:

$$\mathbf{R_A = 300.000 - R_B}$$

Teremos um sistema de equações com duas incógnitas, que só admite uma solução:

$\mathbf{R_A = R_B . (L_B/4.L_A)}$

$\mathbf{R_A = 300.000 - R_B}$

Podemos resolver esse sistema simples assim:

$$R_A = R_B . (L_B/4.L_A) = 300.000 - R_B = R_A$$

Ou seja...

$$R_B . (L_B/4.L_A) = 300.000 - R_B$$

Resolvendo esta equação:

$R_B . (L_B/4.L_A) + R_B = 300.000 \rightarrow$

$\rightarrow L_B.R_B + 4.L_A . R_B = 300.000 . 4.L_A \rightarrow$

$\rightarrow R_B . (L_B.+ 4.L_A) = 300.000 . 4.L_A \rightarrow$

$\rightarrow R_B = 300.000 . 4.L_A / (L_B.+ 4.L_A)$

Substituindo pelos valores numéricos, chegamos a:

$R_B = 300.000 . 4.2 / (1.+ 4.2) = 300.000 . 8/9 = 266.667$ N

Como, pelo equilíbrio estático, temos que:

$R_A = 300.000 - R_B = 300.000 - 266.667N = 33.333$ N

Logo: $\mathbf{R_A = 33.333}$ **N** $\mathbf{R_B = 266.667}$ **N**

Calculando os Deslocamentos

O deslocamento em C pode ser calculado com qualquer das equações de deslocamentos:

$\delta_{C,A} = R_A . 16.L_A/(E.\pi) = 33333.16.2/(50.10^9.3,141592) = 6,79.10^{-6}$ m

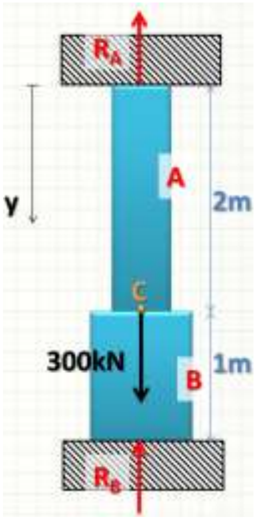
$\boldsymbol{\delta_{C,A} \approx 0,007}$ **mm**

Podemos verificar o cálculo todo, calculando o deslocamento pela outra equação:

$\delta_{C,B} = R_B . 4.L_B/(E.\pi) = 266667.4.1/(5.10^{10}.3,141592) = 6,79.10^{-6}$ m

$\boldsymbol{\delta_{C,B} \approx 0,007}$ **mm**

Exercício - Aula 3 – Solução (apenas Cálculos)



$A_A = \pi.\ \phi_A{}^2/4 = \pi * 0{,}5^2 / 4 = \pi * 0{,}25 / 4 = \pi/16\ m^2$ **$A_A = \pi/16\ m^2$**

$A_B = \pi.\ \phi_A{}^2/4 = \pi * 1^2 / 4 = \pi * 1 / 4 = \pi/4\ m^2$ **$A_B = \pi/4\ m^2$**

Cálculo do Equilíbrio Estático

$300.000 - R_A - R_B = 0 \rightarrow$ **$R_A = 300.000 - R_B$**

Cálculo da Compatibilidade dos Deslocamentos

$\delta_{C,A} = P_A.L_A/(E_A.A_A) = R_A.L_A/(E.\ \pi/16) \rightarrow$ **$\delta_{C,A} = R_A.\ 16.L_A/(E.\pi)$** m **(baixo)**

$\delta_{C,B} = P_B.L_B/(E_B.A_B) = R_B.L_B/(E.\pi/4) \rightarrow$ **$\delta_{C,B} = R_B.\ 4.L_B/(E.\pi)$** m **(baixo)**

$\delta_{C,A} = \delta_{C,B}$ $\rightarrow R_A\ .16.L_A/(E.\pi) = R_B\ .4.L_B/(E.\pi) \rightarrow$

$\rightarrow R_A = (R_B.\ 4.L_B/(E.\pi))\ .\ ((E.\pi)/16.L_A) \rightarrow$ **$R_A = R_B.\ (L_B/4.L_A)$**

Cálculo das Reações que Compatibiliza os Resultados

$R_A = R_B.\ (L_B/4.L_A)$

$R_A = 300.000 - R_B$

$R_A = R_B.\ (L_B/4.L_A) = 300.000 - R_B = R_A \rightarrow R_B.\ (L_B/4.L_A) = 300.000 - R_B \rightarrow$

$\rightarrow R_B.\ (L_B/4.L_A) + R_B = 300.000 \rightarrow L_B.R_B + 4.L_A\ .\ R_B = 300.000\ .\ 4.L_A \rightarrow$

$\rightarrow R_B\ .\ (L_B.+ 4.L_A) = 300.000\ .\ 4.L_A \rightarrow R_B = 300.000\ .\ 4.L_A / (L_B.+ 4.L_A)$

$R_B = 300.000\ .\ 4.2 / (1.+ 4.2) = 300.000\ .\ 8/9 = 266.667$ N **$R_B = 266.667$ N**

$R_A = 300.000 - R_B = 300.000 - 266.667N = 33.333$ N **$R_A = 33.333$ N**

Calculando os Deslocamentos

$\delta_{C,A} = R_A.\ 16.L_A/(E.\pi) = 33333.16.2/(50.10^9.3{,}141592) = 6{,}79.10^{-6}$ m **$\delta_{C,A} \approx 0{,}007$ mm**

$\delta_{C,B} = R_B.\ 4.L_B/(E.\pi) = 266667.4.1/(5.10^{10}.3{,}141592) = 6{,}79.10^{-6}$ m **$\delta_{C,B} \approx 0{,}007$ mm**