



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

MOMENTO ESTÁTICO

Prof. Dr. Daniel Caetano

2014 - 1

Objetivos

- Conhecer a influência da forma na Resistência dos Materiais
- Compreender o conceito de Momento Estático
- Calcular Momento Estático





**ANTES DE
MAIS NADA...**

Para quem faltou...

Professor	Informações de Contato
Daniel Caetano	prof@caetano.eng.br

- Datas/critérios, apresent., exercícios, bibliog...

<http://www.caetano.eng.br/>



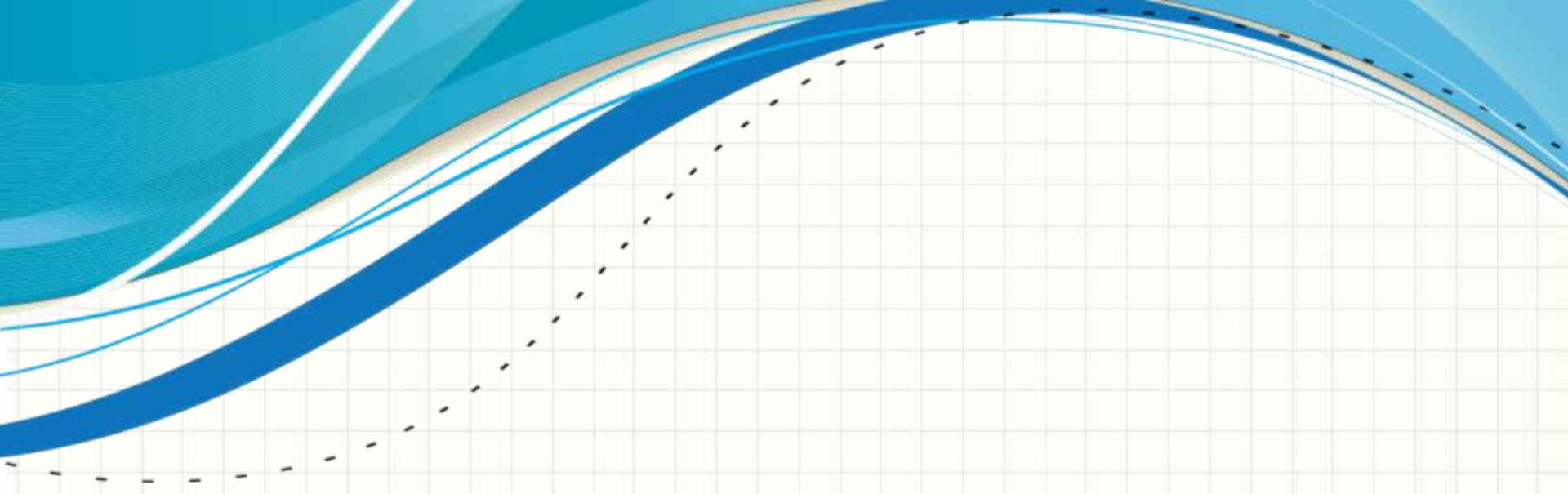
The screenshot shows the top section of a website. On the left is a faded image of a man (Prof. Caetano) in a classroom setting. To the right of the image, the name "Prof. Caetano" is written in a large, elegant, black cursive font. In the top right corner, the date and time "17/07/2012, 10:55" and the number "00021224" are displayed. Below the name, there are two small icons representing the flags of Brazil and the United Kingdom. At the bottom of the header, there is a horizontal navigation menu with six buttons: "Home", "Ensino" (which is highlighted in blue), "Pesquisa", "Publicações", "Software", and "Pessoal". Below the navigation menu, there is a paragraph of text in Portuguese.

17/07/2012, 10:55
00021224

Prof. Caetano

Home Ensino Pesquisa Publicações Software Pessoal

Nesta seção você encontra acesso ao material didático desenvolvido pelo Prof. Caetano para os cursos já ministrados. O material está dividido por períodos, visto que boa parte do material não está atualizado.

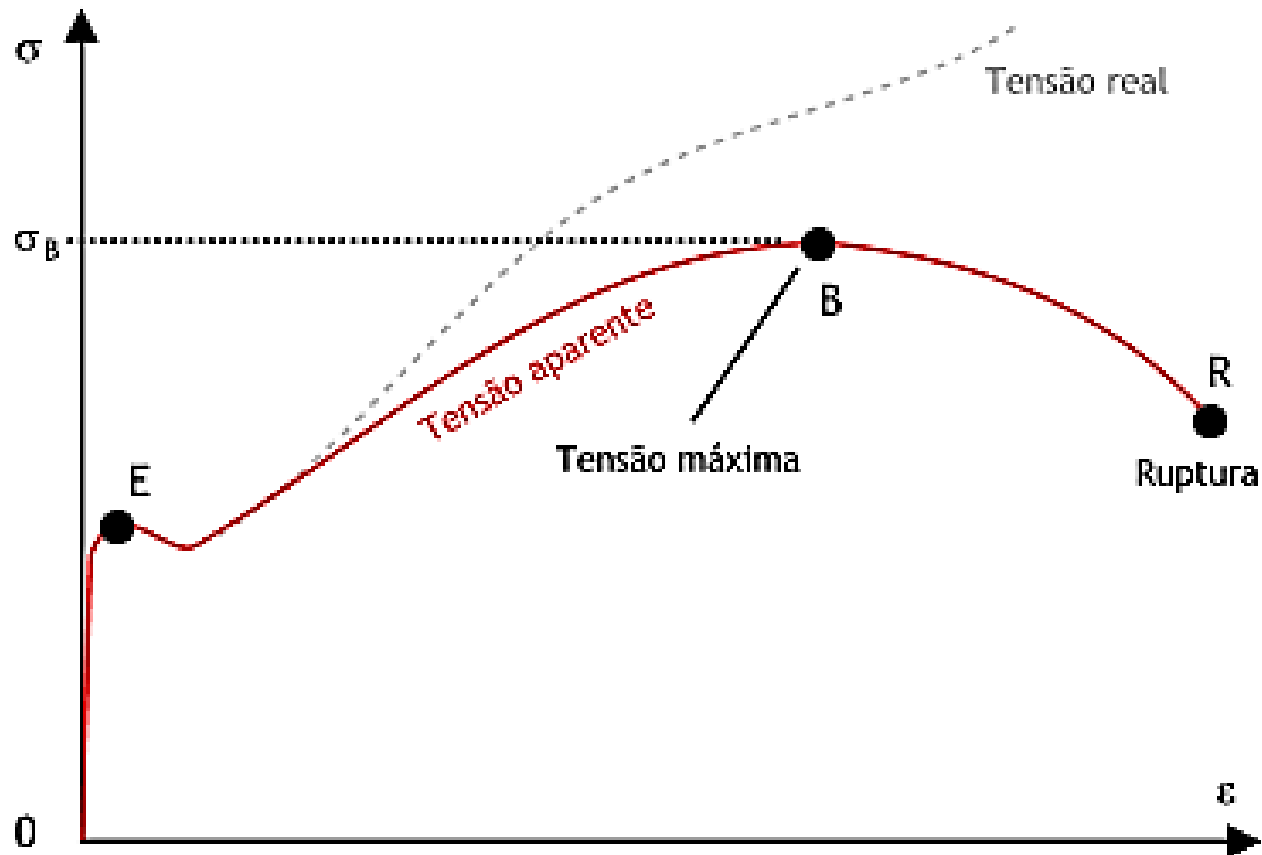


RETOMANDO:

RESISTÊNCIA E RIGIDEZ

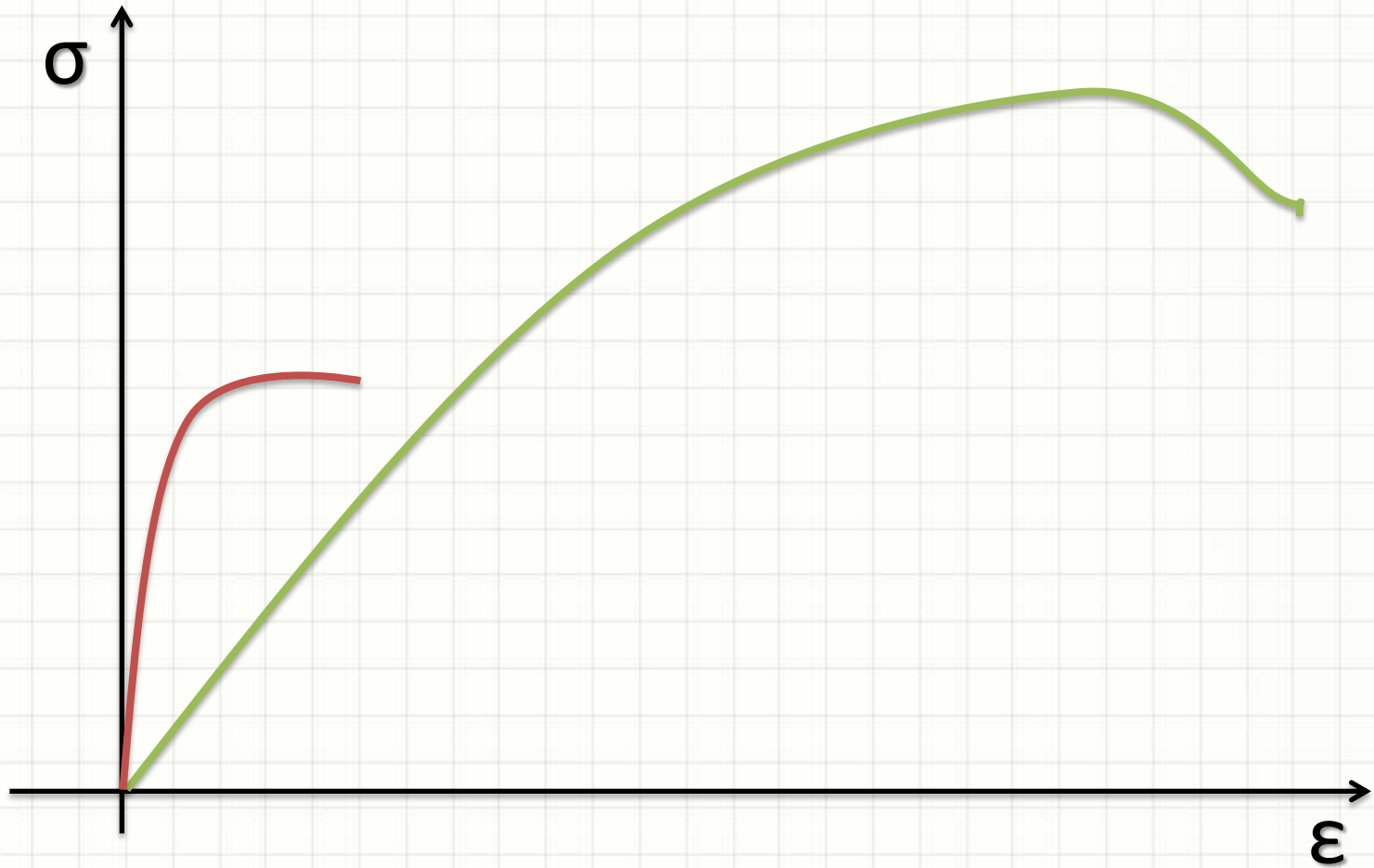
Resistência e Rigidez

- Tensão x Deformação



Resistência e Rigidez

- Resistência x Rigidez



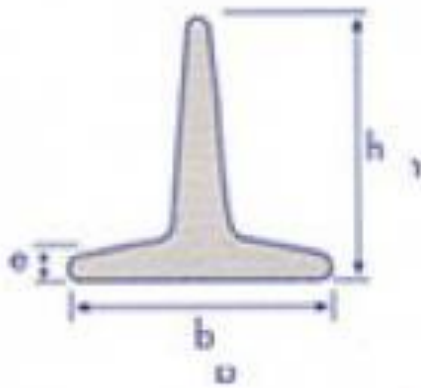
Forma x Resistência e Rigidez

- Tensão x Deformação

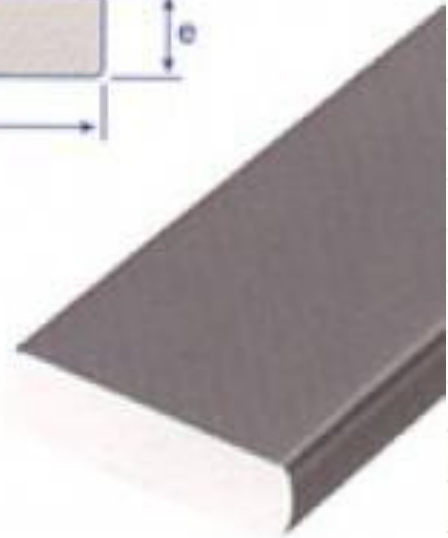
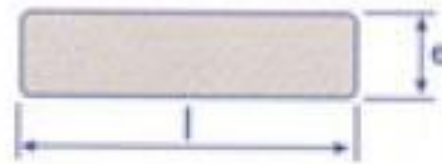


Forma x Resistência e Rigidez

- Formas diferentes: resistências diferentes



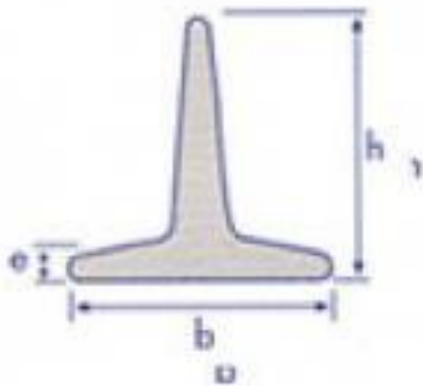
Perfil T



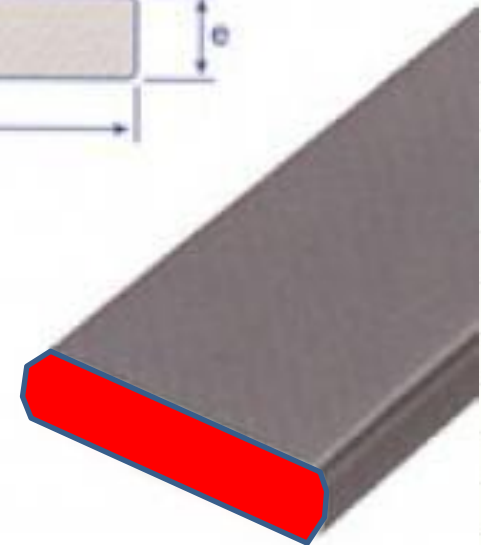
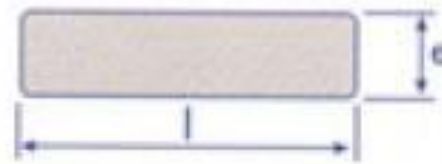
Barra Chata

Forma x Resistência e Rigidez

- Formas diferentes: resistências diferentes



Perfil T



Barra Chata

Seção Transversal



“MEDINDO” A FORMA

Caracterizando uma Forma Plana

- Perímetro

- Retângulo: $2 \cdot b + 2 \cdot h$

- Triângulo: $a + b + c$

- Círculo: $2 \cdot \pi \cdot r$

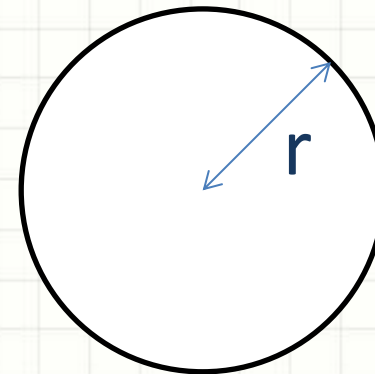
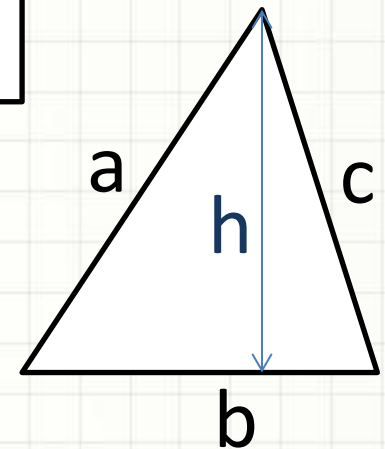
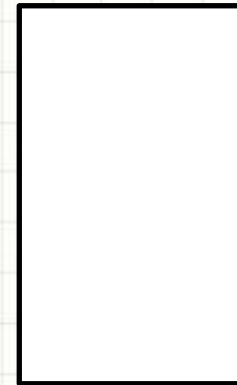
- Área

- Retângulo: $b \cdot h$

- Triângulo: $b \cdot h / 2$

- Círculo: $\pi \cdot r^2$

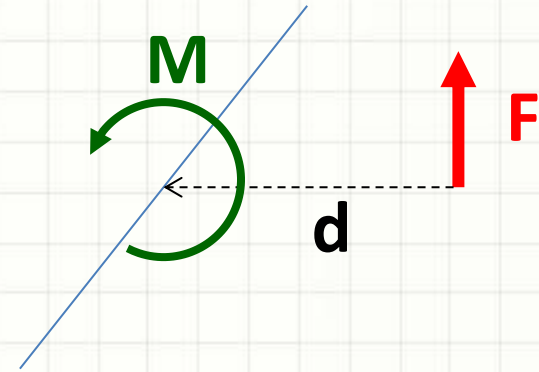
- Só isso?



Momento Estático

- Momento de uma Força

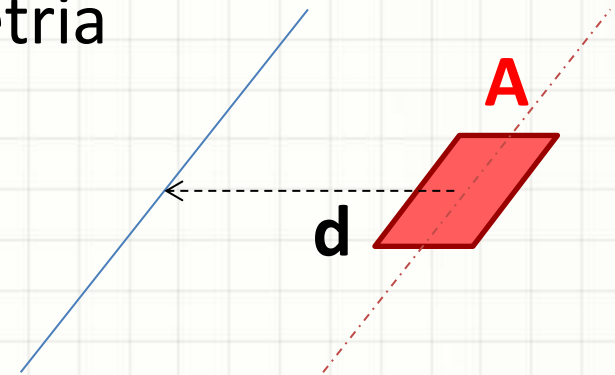
$$- \vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$$



- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)

$$- S = A \cdot d$$

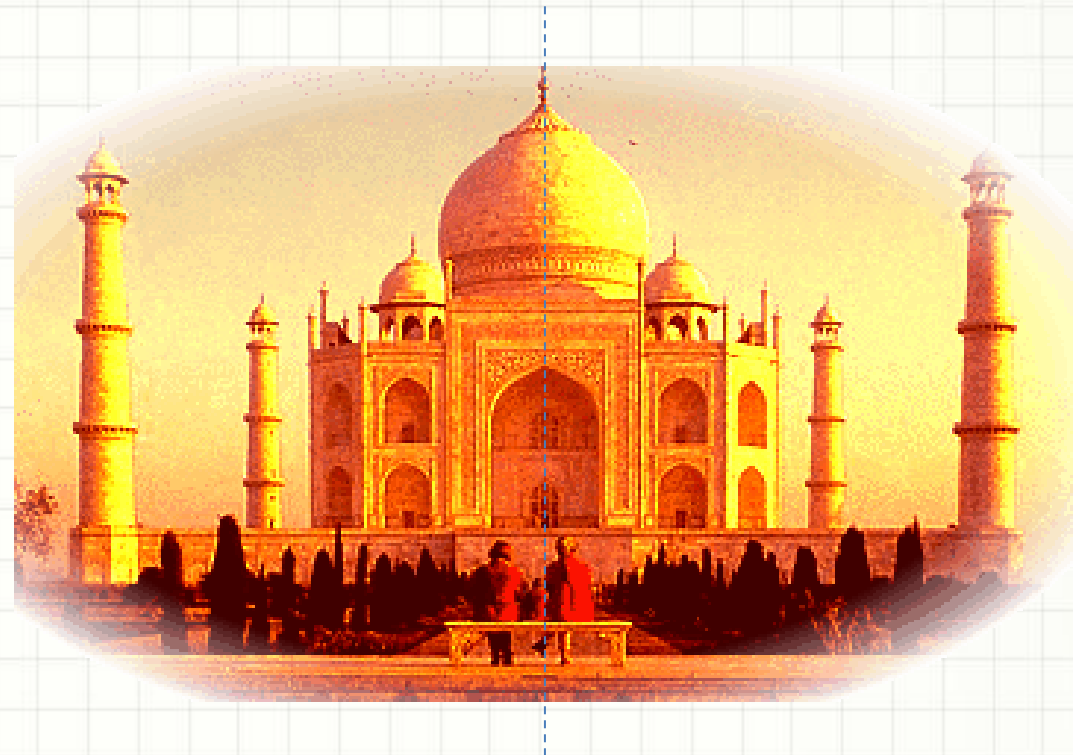
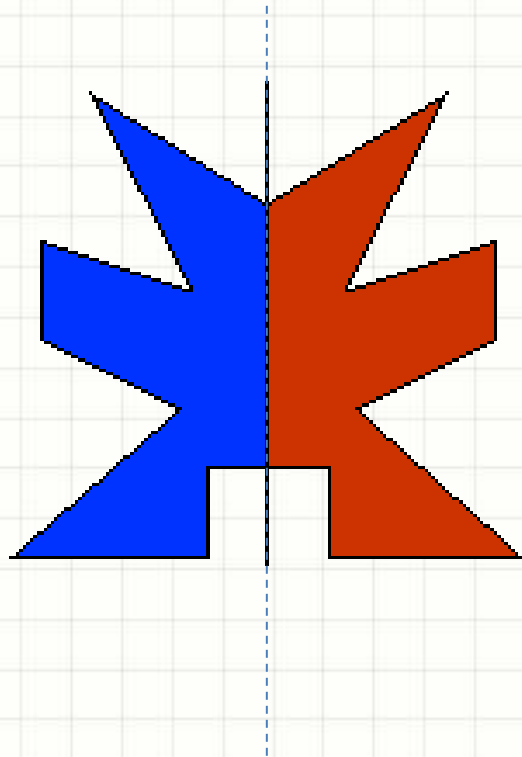
– d: a partir do eixo de simetria



- Maior simetria / antissimetria → menor S

Momento Estático

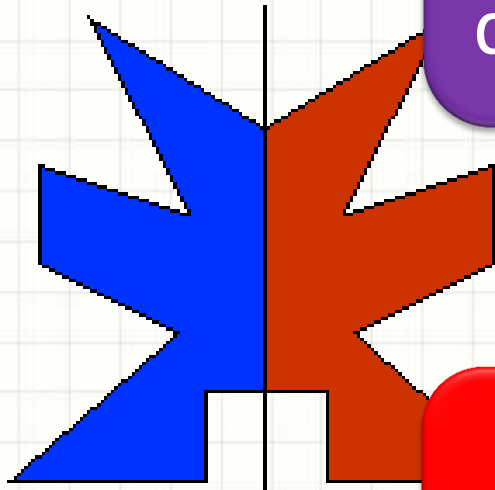
- Simetria - distribuição idêntica da área, relativamente a um eixo



Momento Estático

- Simetria - distância de cada ponto da área, relativamente

Momento Estático em Relação ao Eixo de Simetria é ZERO!

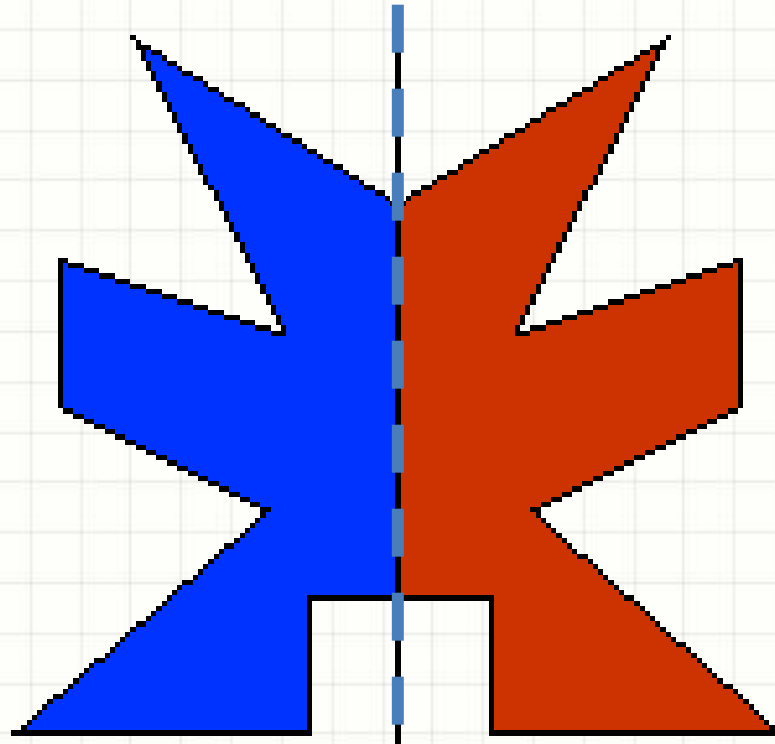


A distância tem SINAL!



Sinal da Distância

- Convenção

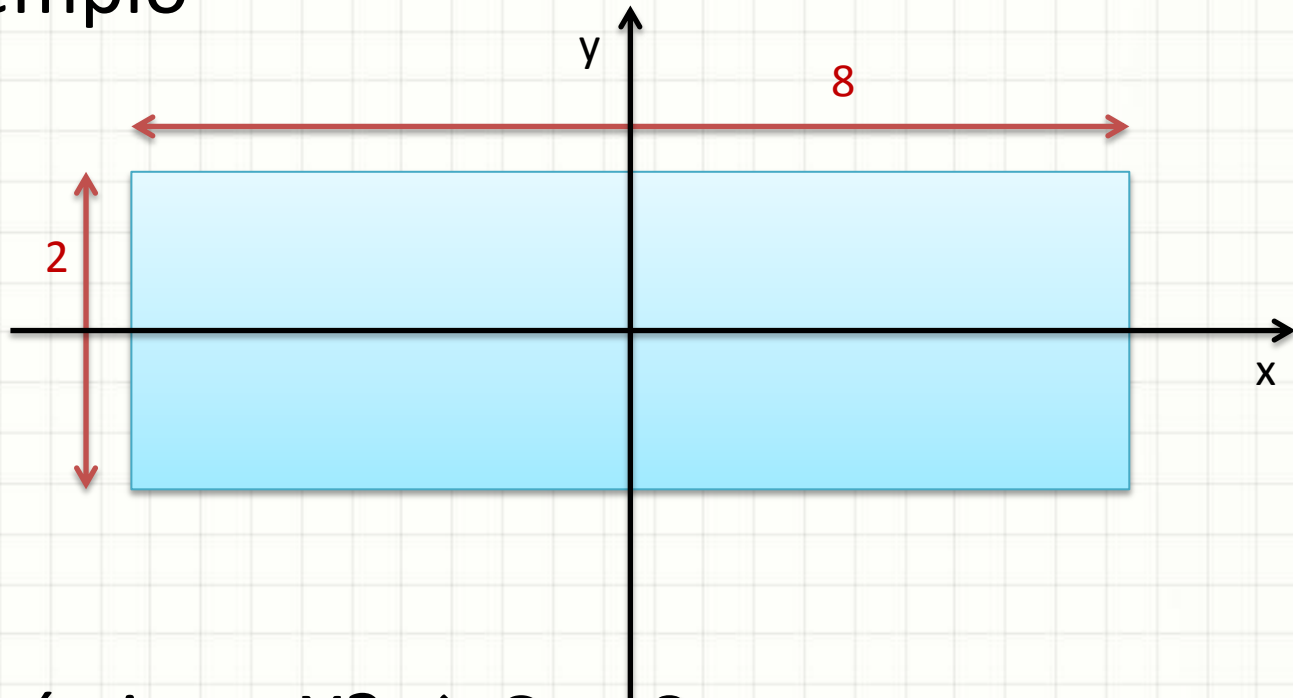




CÁLCULO DO MOMENTO ESTÁTICO

Momento Estático

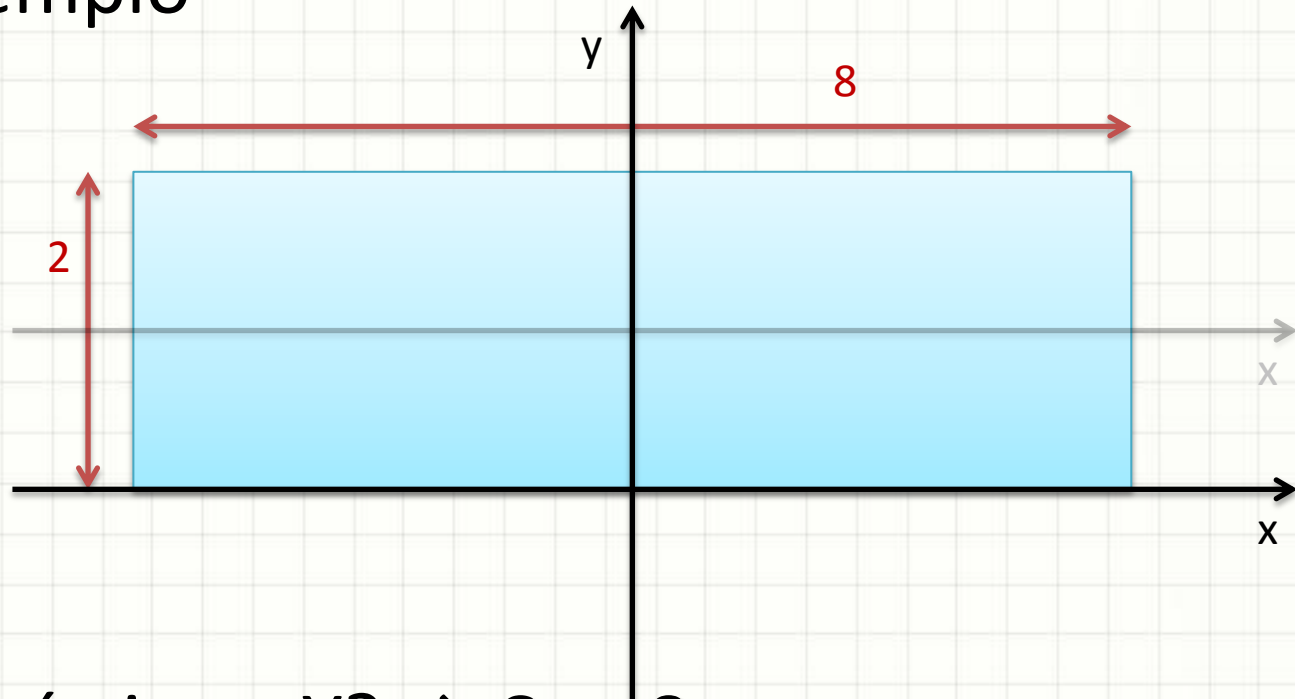
- Exemplo



- Simétrico a X? $\rightarrow S_x = 0$
- Simétrico a Y? $\rightarrow S_y = 0$

Momento Estático

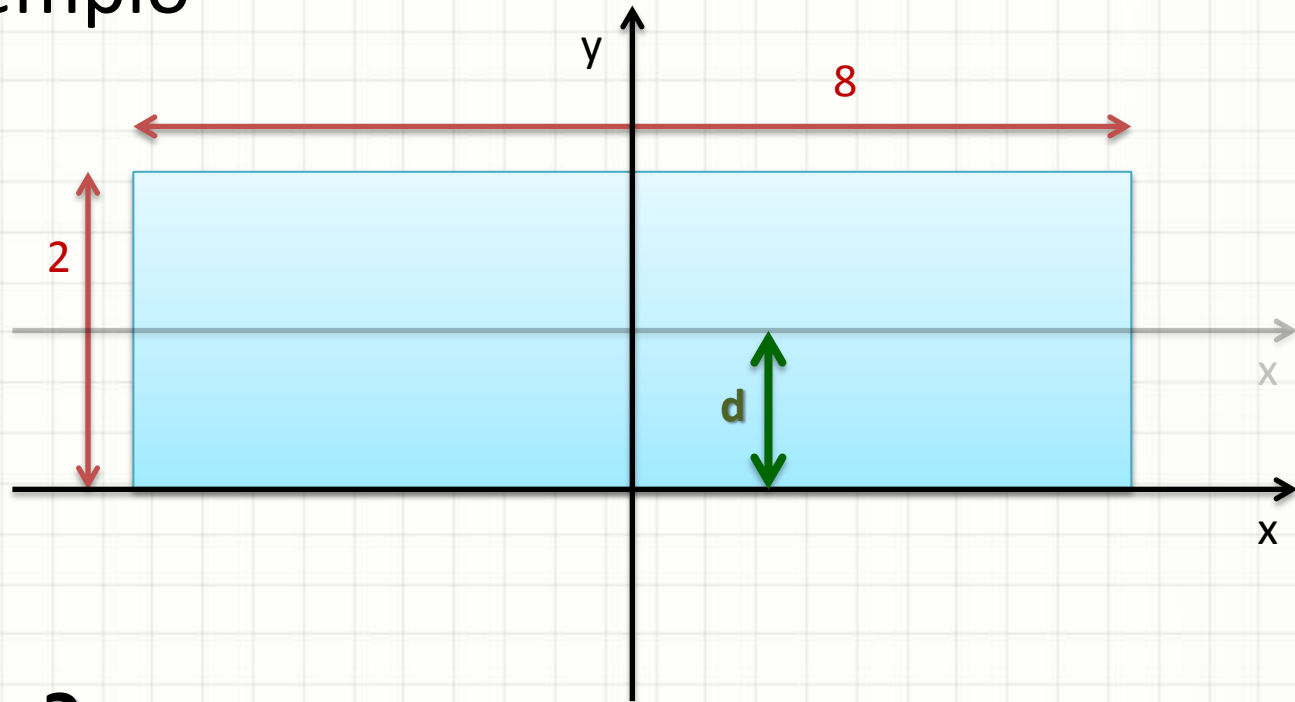
- Exemplo



- Simétrico a Y? $\rightarrow S_y = 0$
- Simétrico a X? \rightarrow Não!

Momento Estático

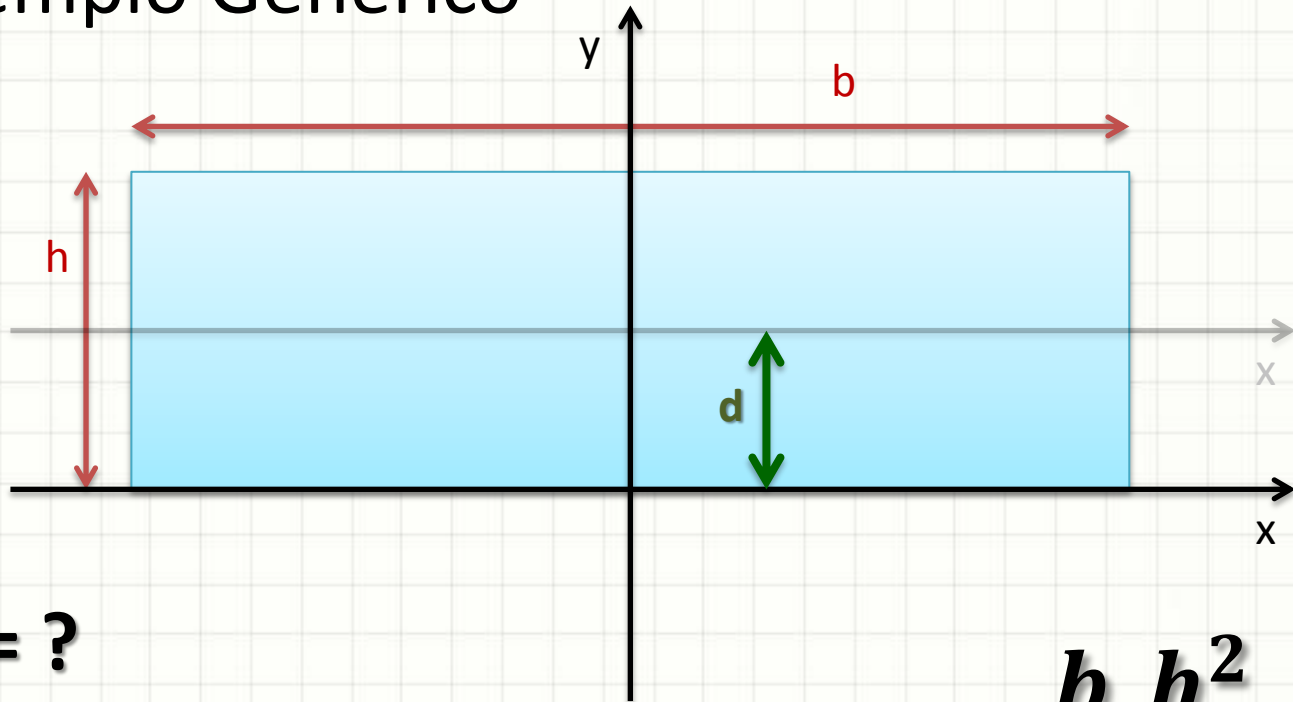
- Exemplo



- $S_x = ?$
- $S_x = A \cdot d = (2 \cdot 8) \cdot 1 = 16$

Momento Estático

- Exemplo Genérico



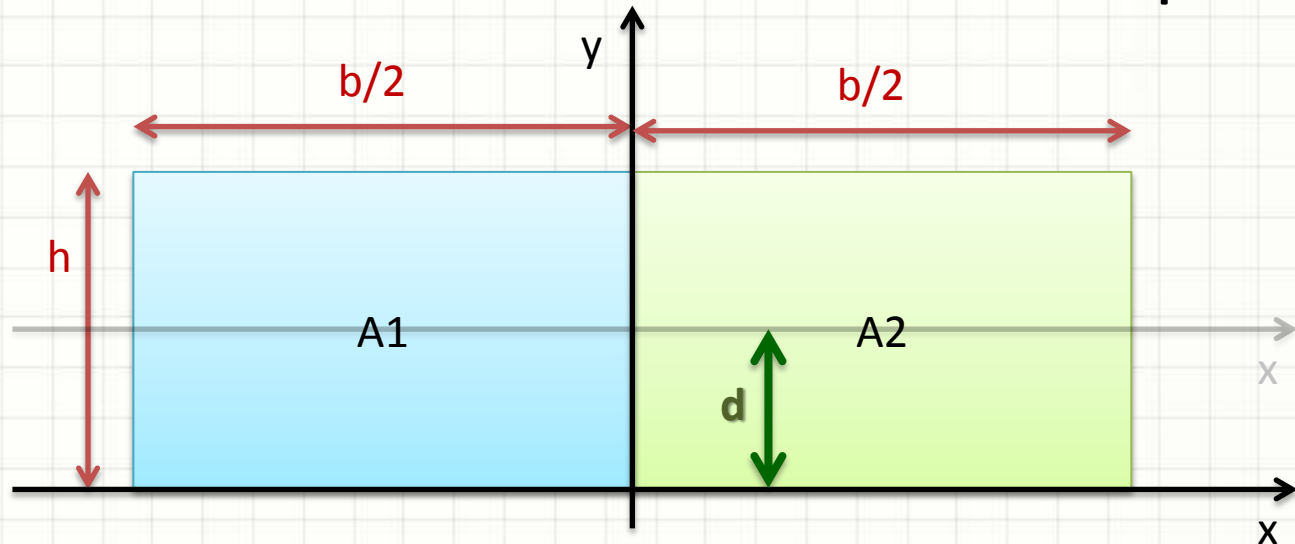
- $S_x = ?$
- $S_x = A \cdot d =$
- $S_x = (b \cdot h) \cdot h/2 =$

$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Anotem!

Momento Estático

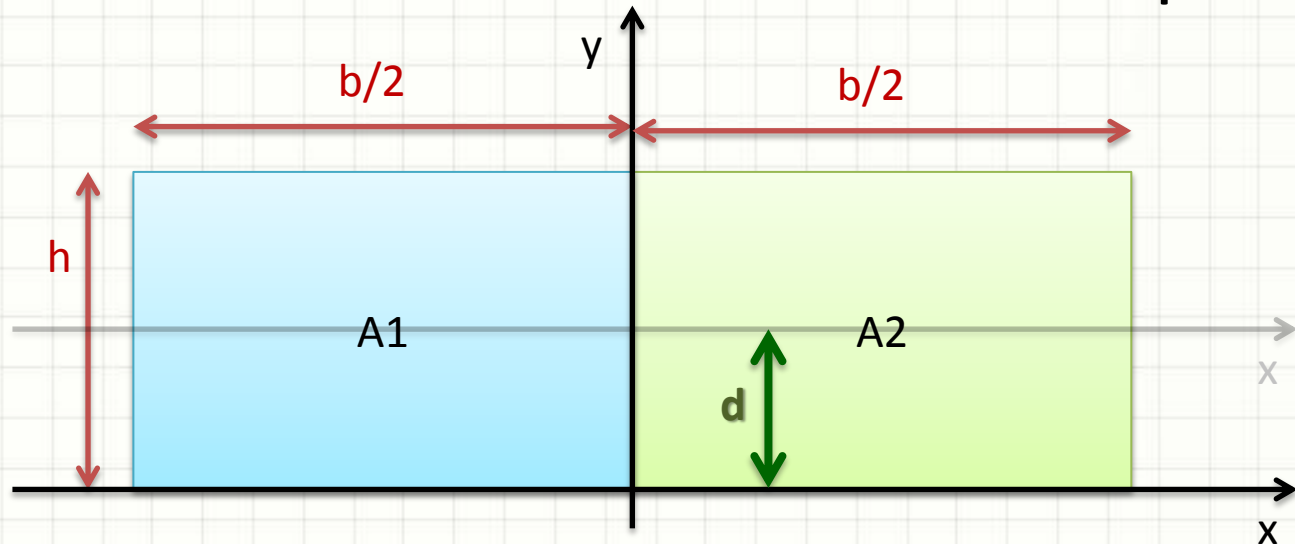
- E se a área for considerada em duas partes?



- $S_x = ?$
- $S_x = A1 \cdot d + A2 \cdot d =$
- $S_x = (b/2 \cdot h) \cdot h/2 + (b/2 \cdot h) \cdot h/2 =$
- $S_x = (b/4 \cdot h^2) + (b/4 \cdot h^2) =$

Momento Estático

- E se a área for considerada em duas partes?



- $S_x = ?$

- $S_x = (b/4 \cdot h^2) + (b/4 \cdot h^2) =$

$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

- $S_x = 2 \cdot (b/4 \cdot h^2) =$

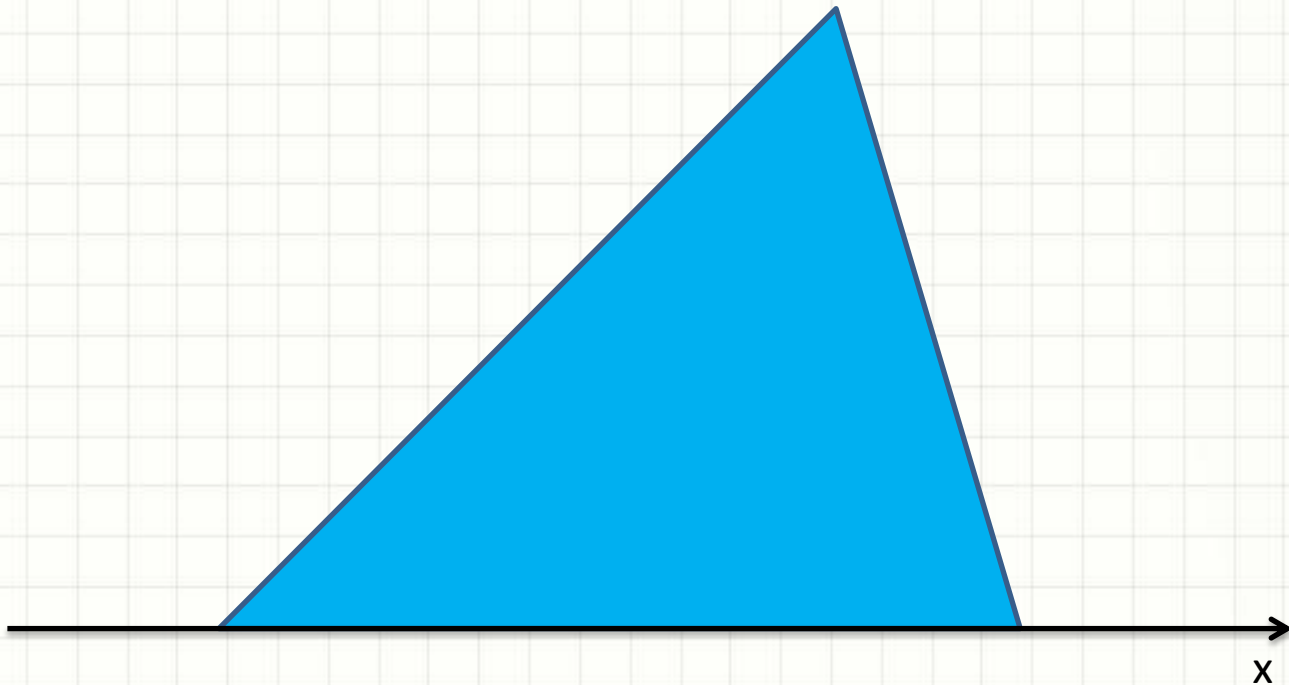
Comparem!



MOMENTO ESTÁTICO EM REGIÕES PLANAS GENÉRICAS

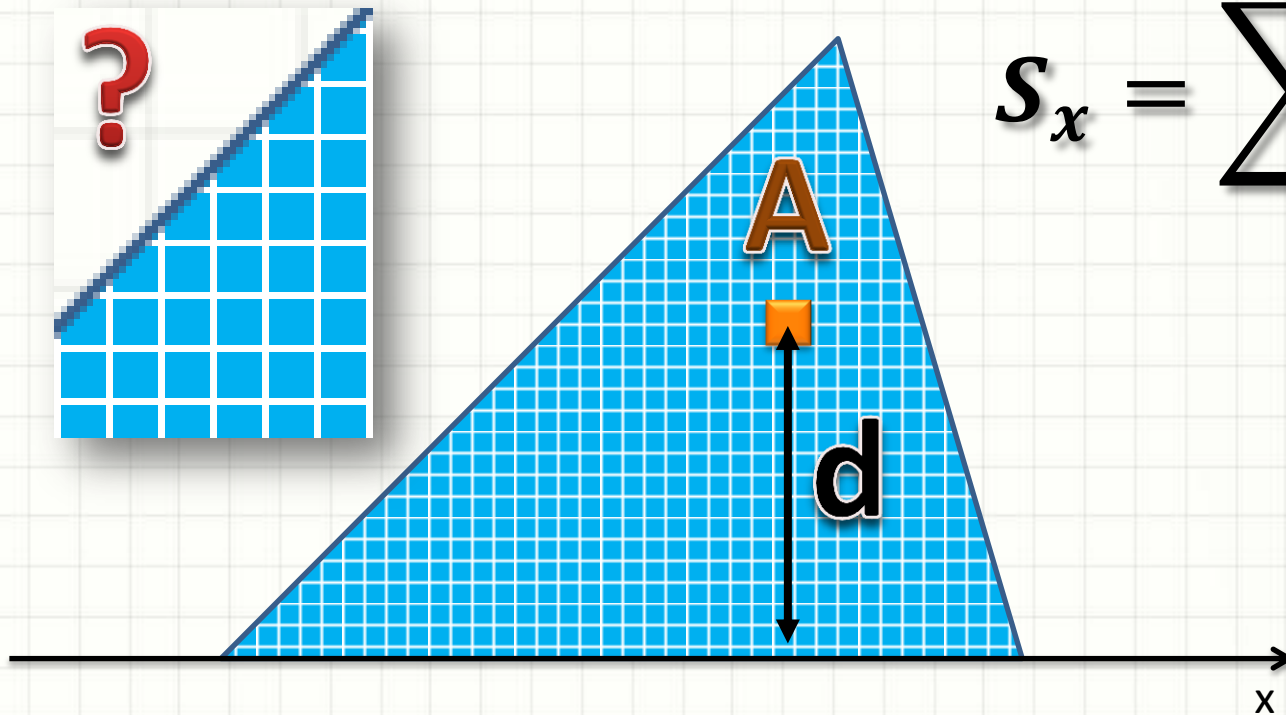
Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



Momento Estático

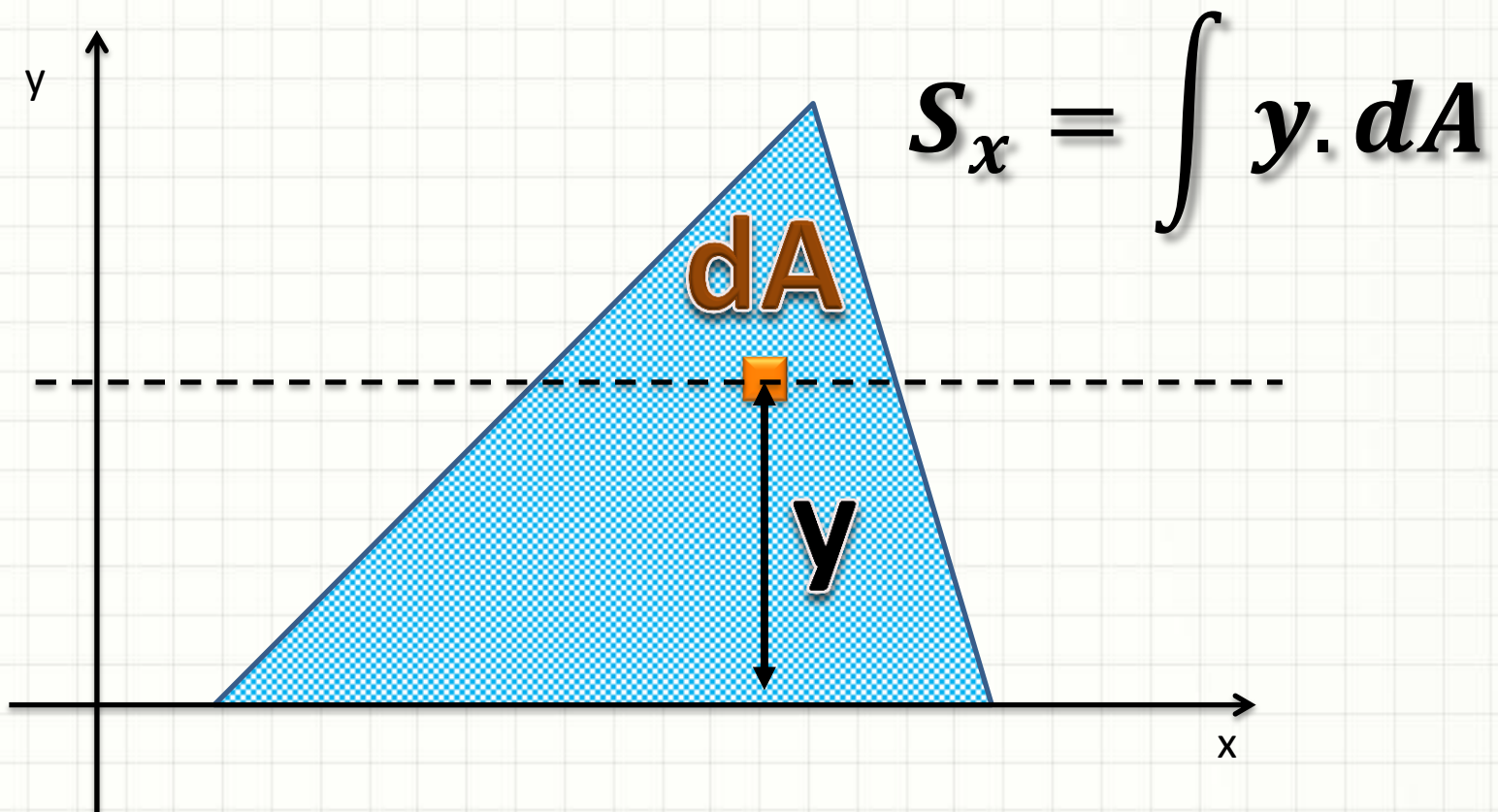
- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \sum d \cdot A$$

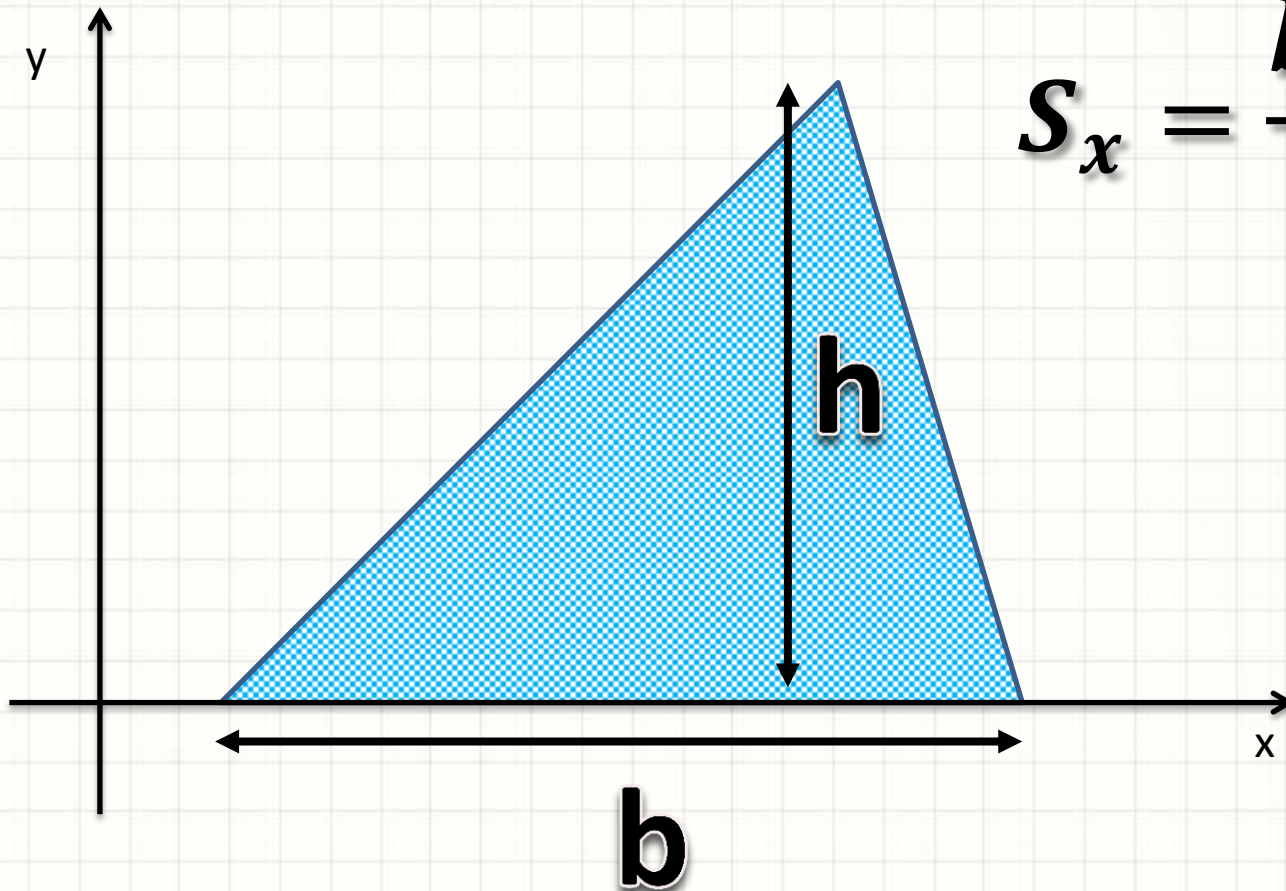
Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Momento Estático

- Cálculo genérico

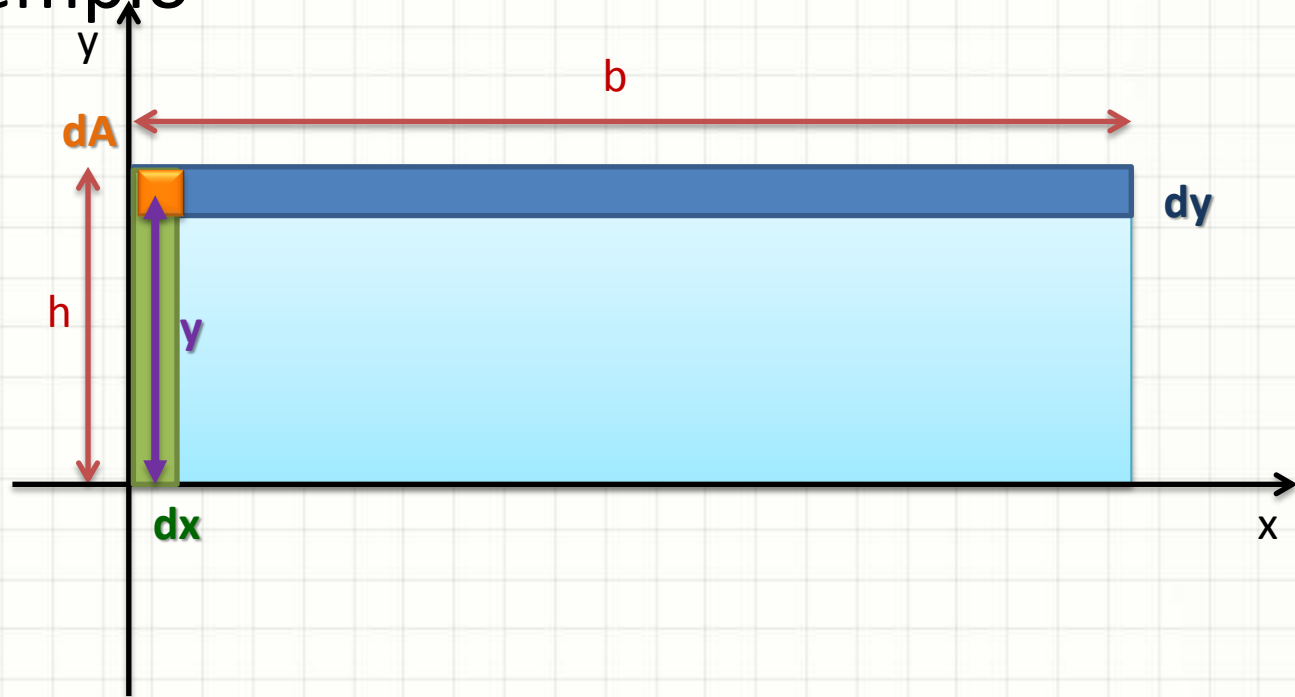
$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

- Unidade $S = [L^3]$

Momento Estático

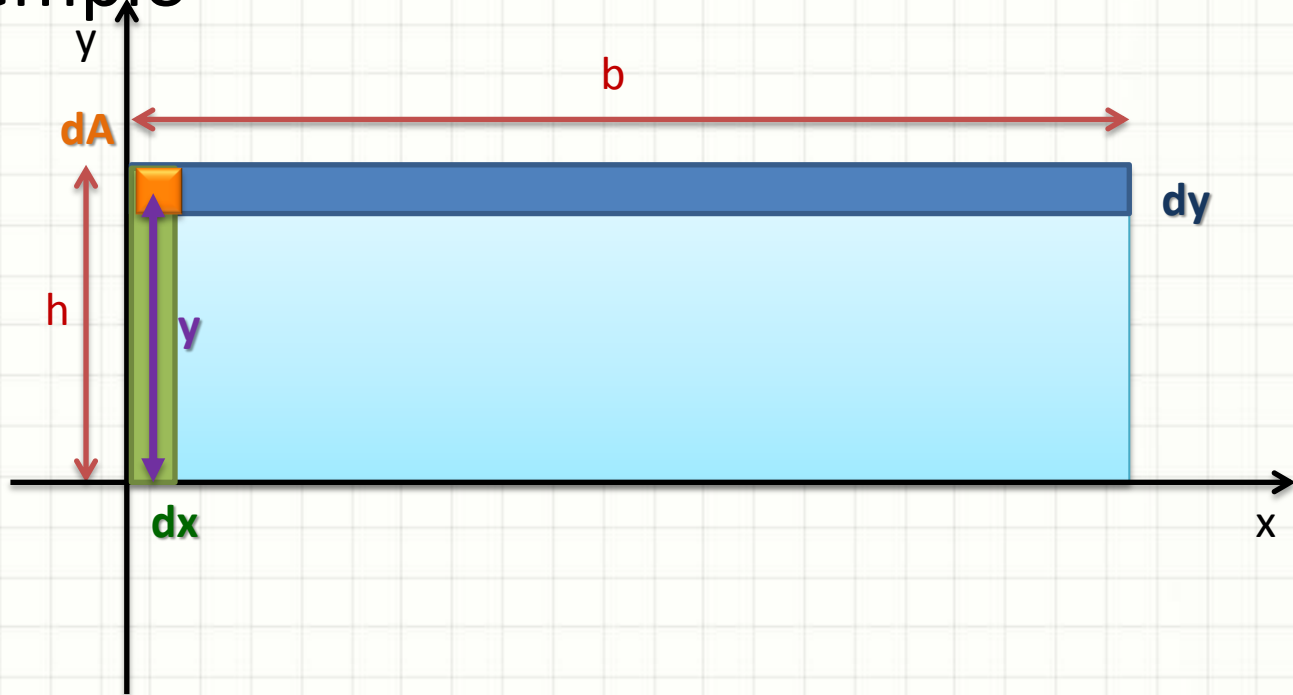
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx \cdot dy =$$

Momento Estático

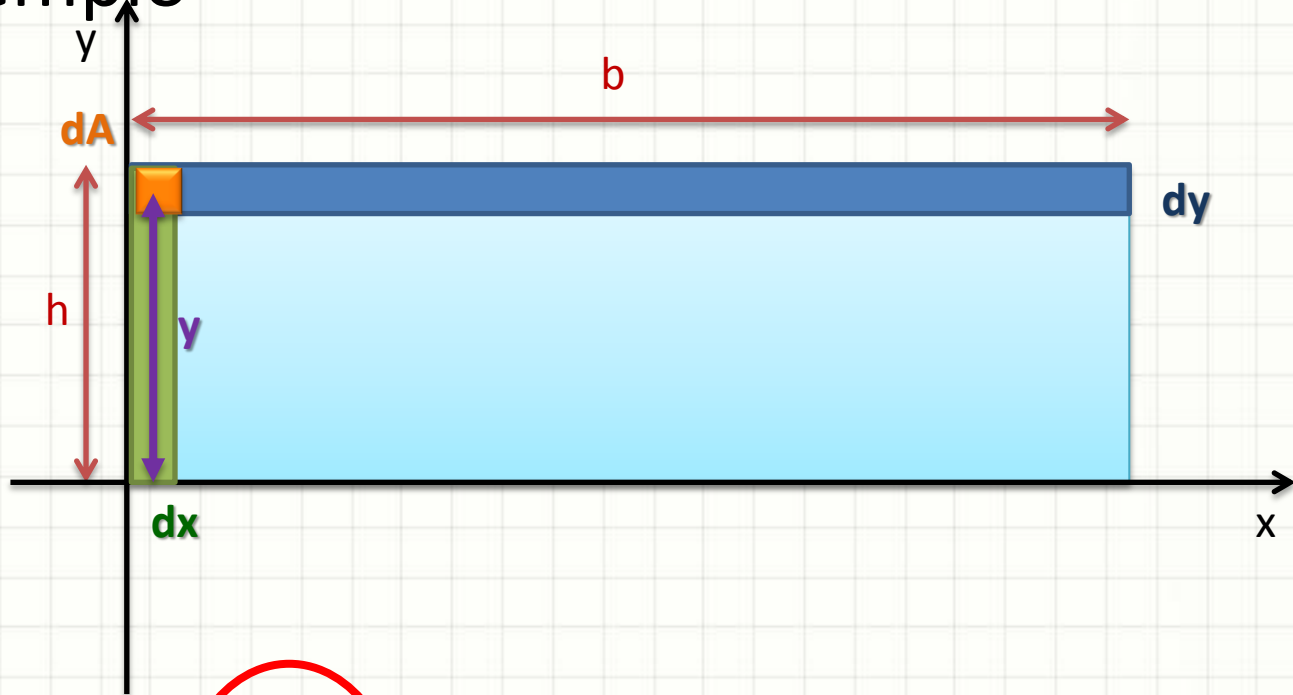
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx \cdot dy = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx \cdot dy =$$

Momento Estático

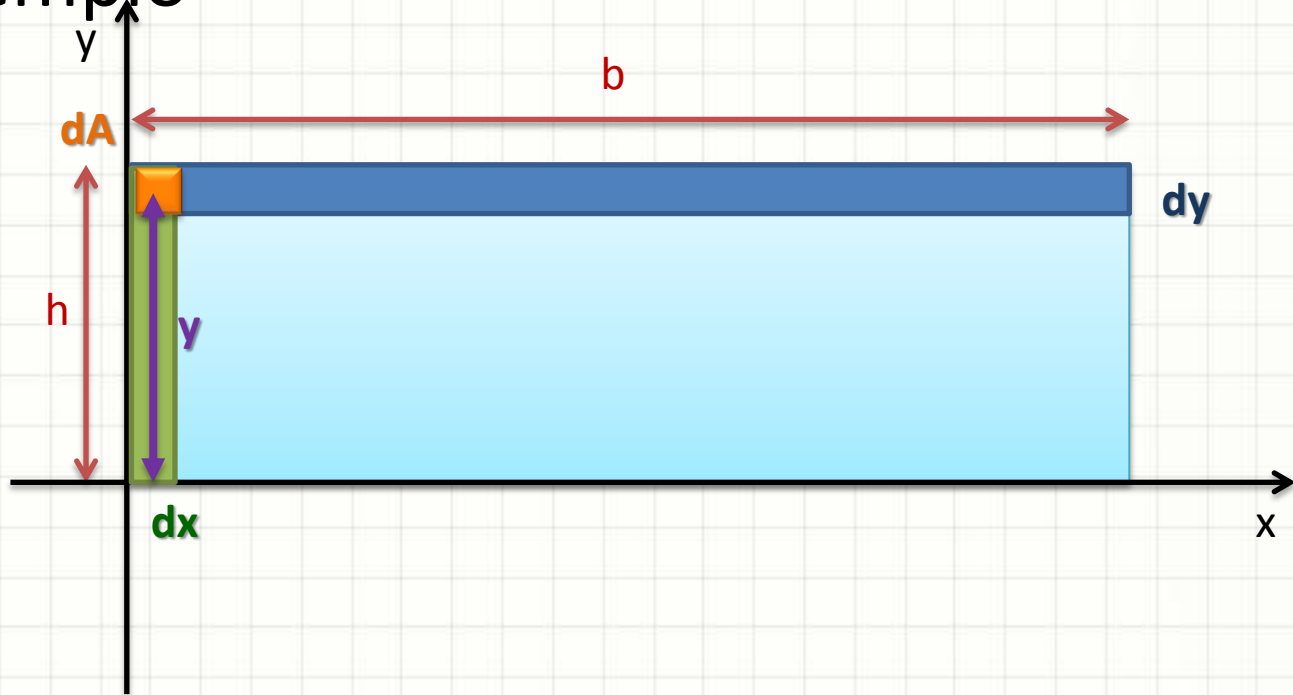
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx \cdot dy = \int_0^h y \cdot b \cdot dy =$$

Momento Estático

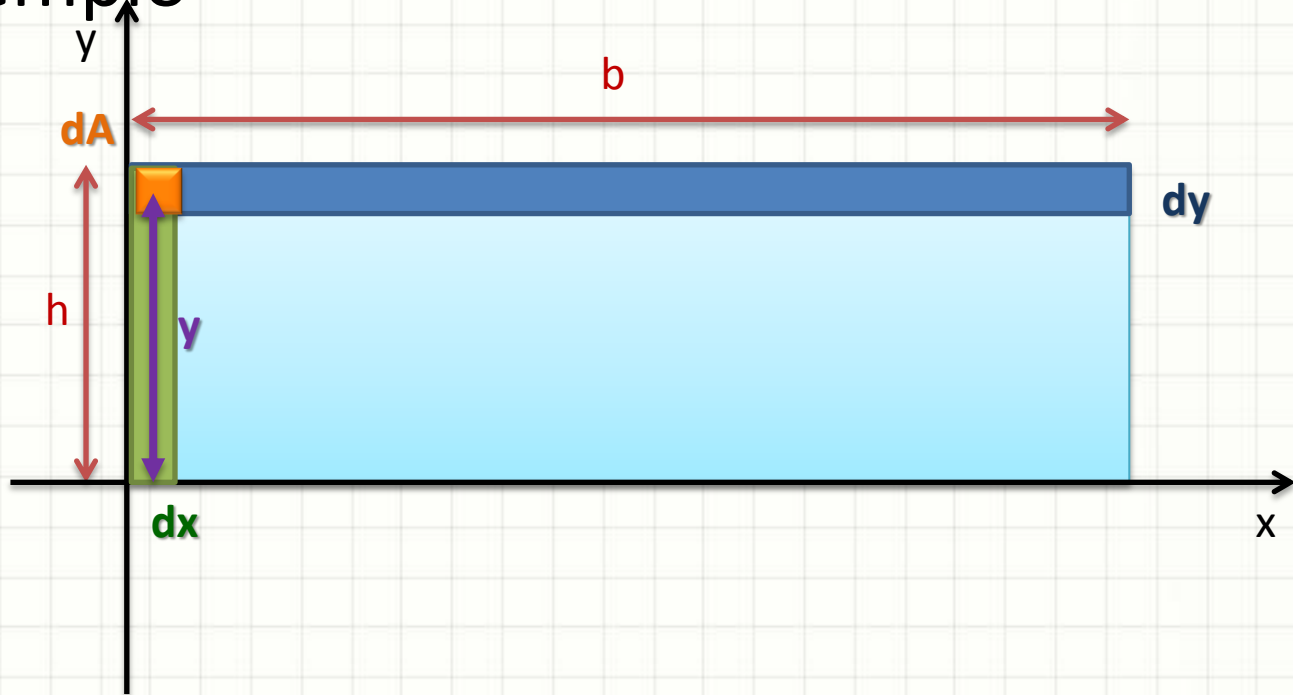
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y \cdot dy =$$

Momento Estático

- Exemplo



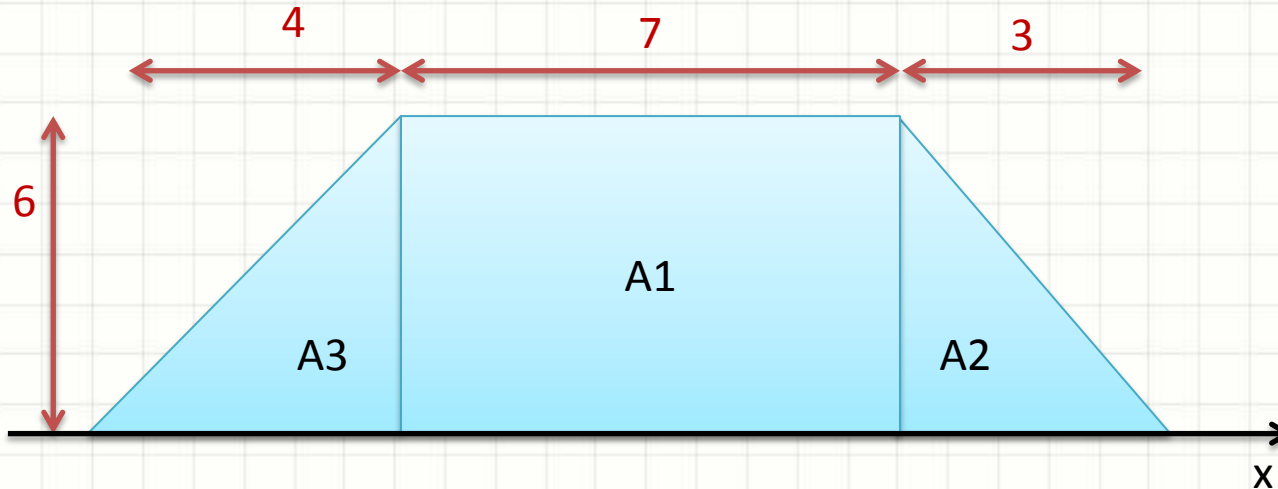
$$S_x = b \cdot \int_0^h y \cdot dy = b \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^h = \frac{b \cdot h^2}{2}$$



MOMENTO ESTÁTICO CALCULADO POR PARTES

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x :



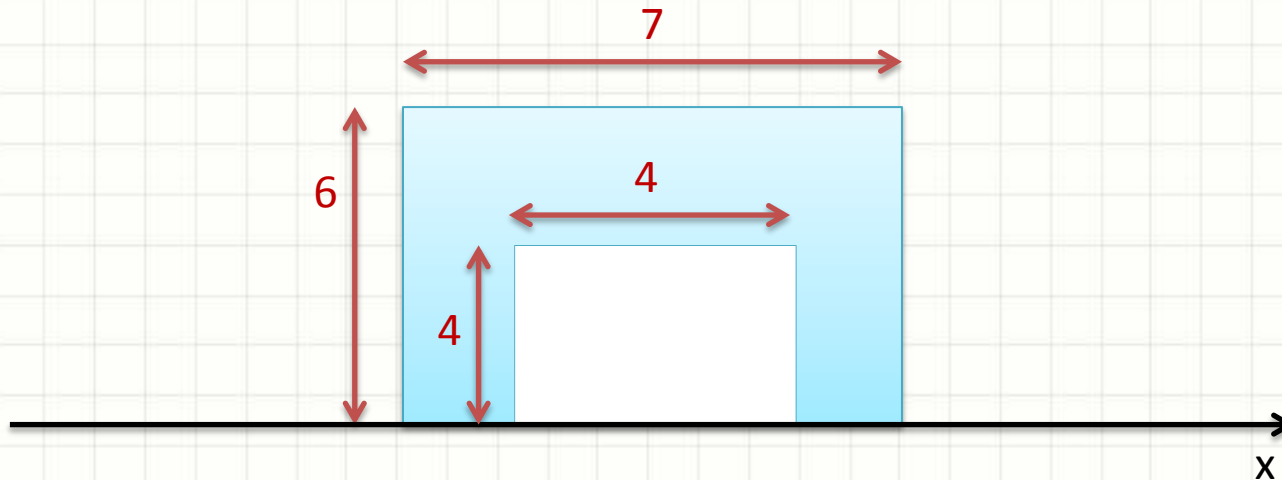
- $S_x = Sx_{A1} + Sx_{A2} + Sx_{A3}$

- $S_x = \frac{b1 \cdot h^2}{2} + \frac{b2 \cdot h^2}{6} + \frac{b3 \cdot h^2}{6} = \frac{(3 \cdot b1 + b2 + b3) \cdot h^2}{6}$

- $S_x = \frac{(3 \cdot 7 + 3 + 4) \cdot 36}{6} = 168$

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul



- $S_{xAzul} = S_{xRetAzul} - S_{xRetBranco}$
- $S_{xAzul} = \frac{b_1 \cdot h_1^2}{2} - \frac{b_2 \cdot h_2^2}{2} =$
- $S_{xAzul} = \frac{7 \cdot 36}{2} - \frac{4 \cdot 16}{2} = 126 - 32 = \mathbf{94}$



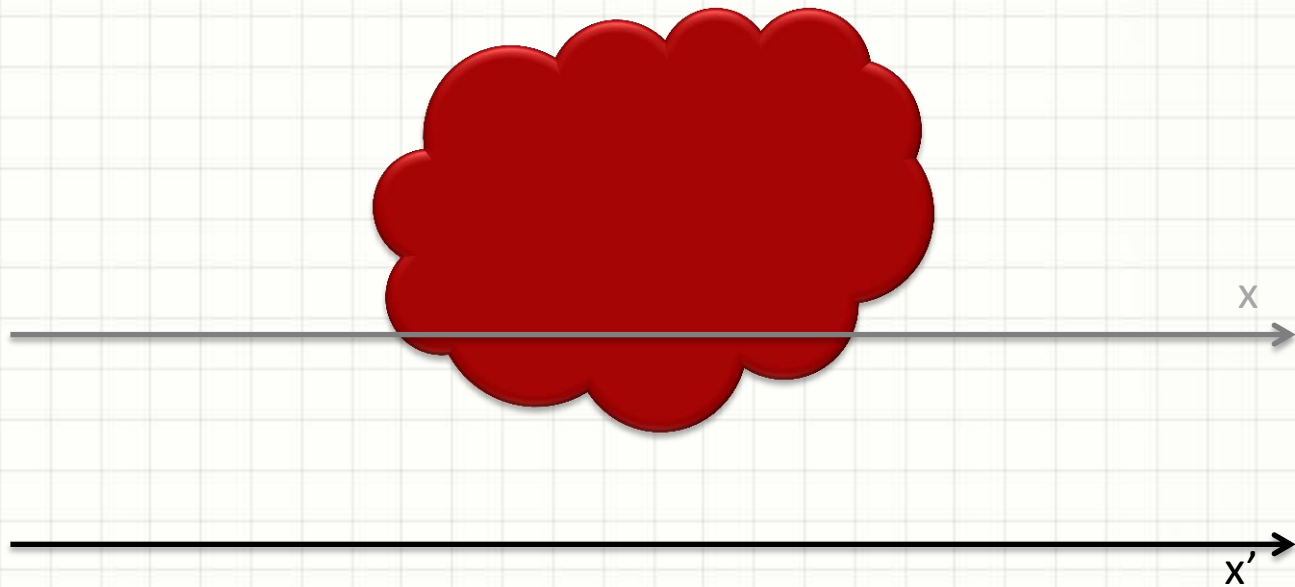
PAUSA PARA O CAFÉ!



TRANSLAÇÃO DE EIXO NO MOMENTO ESTÁTICO

Mudando o Eixo de Referência

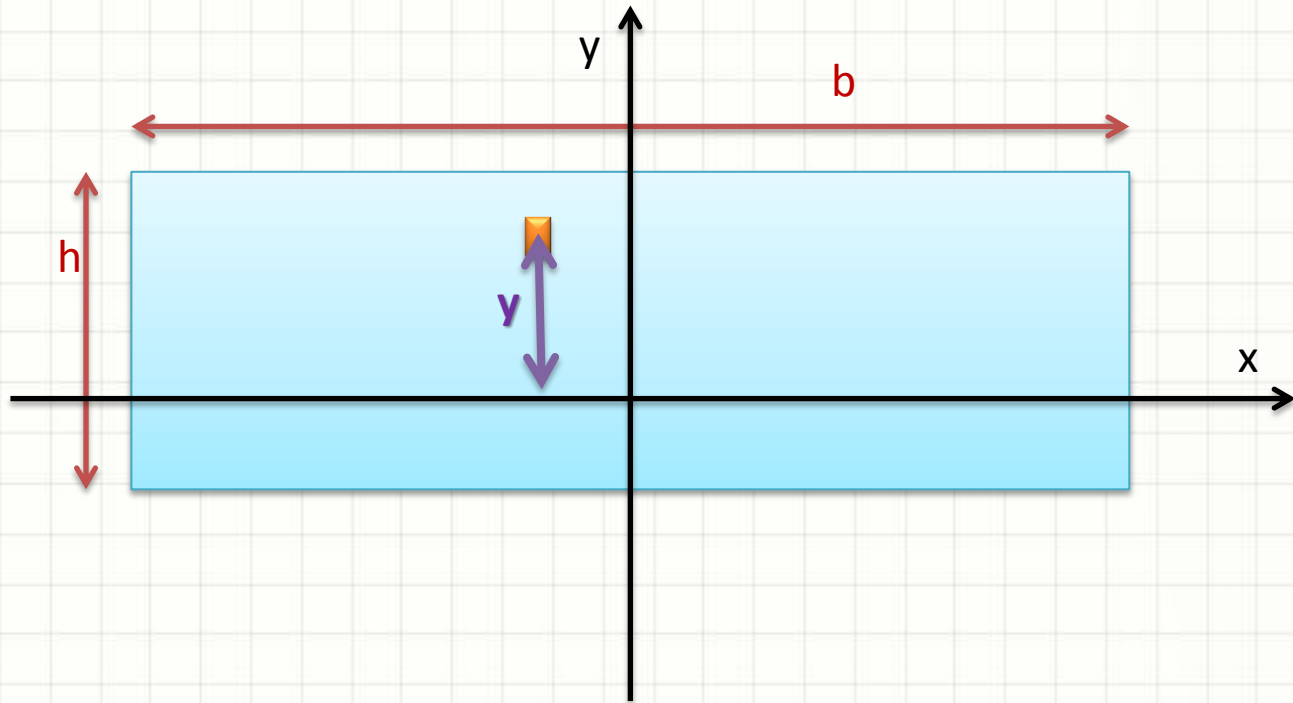
- Como calcular $S_{x'}$?



- Será que conhecer S_x ajuda?

Translação de Eixos

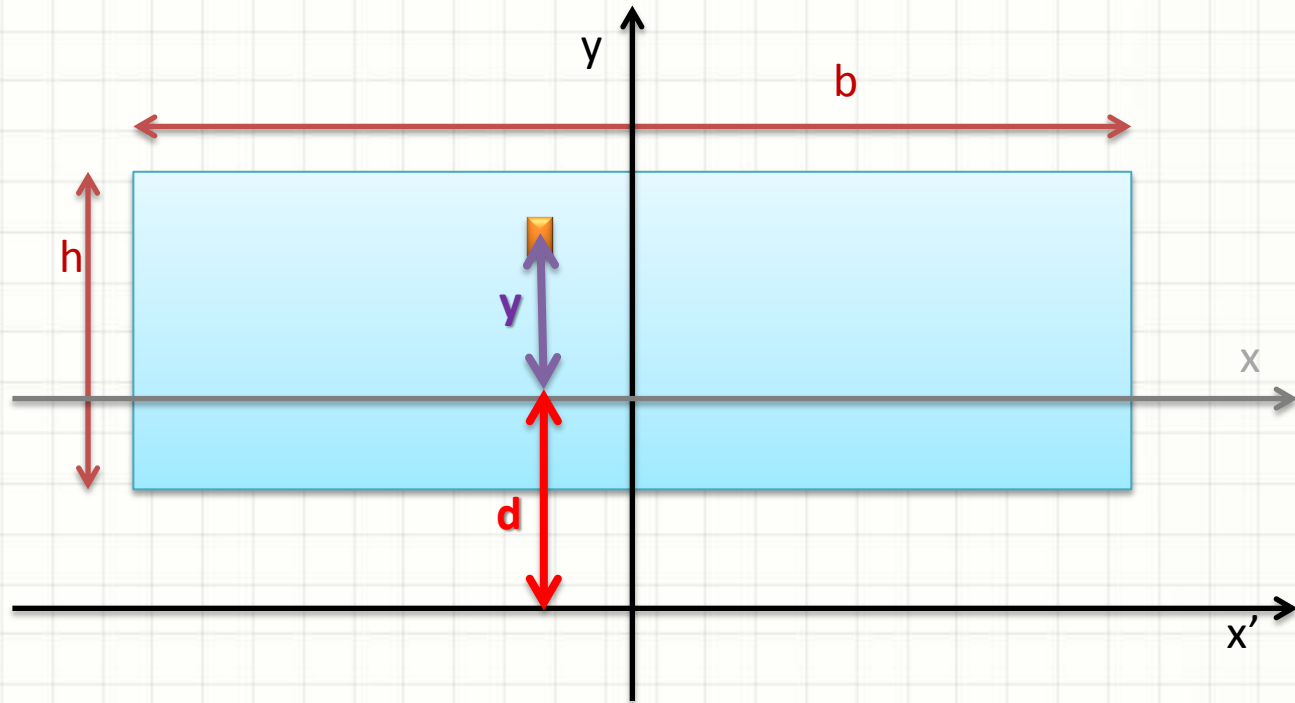
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

Translação de Eixos

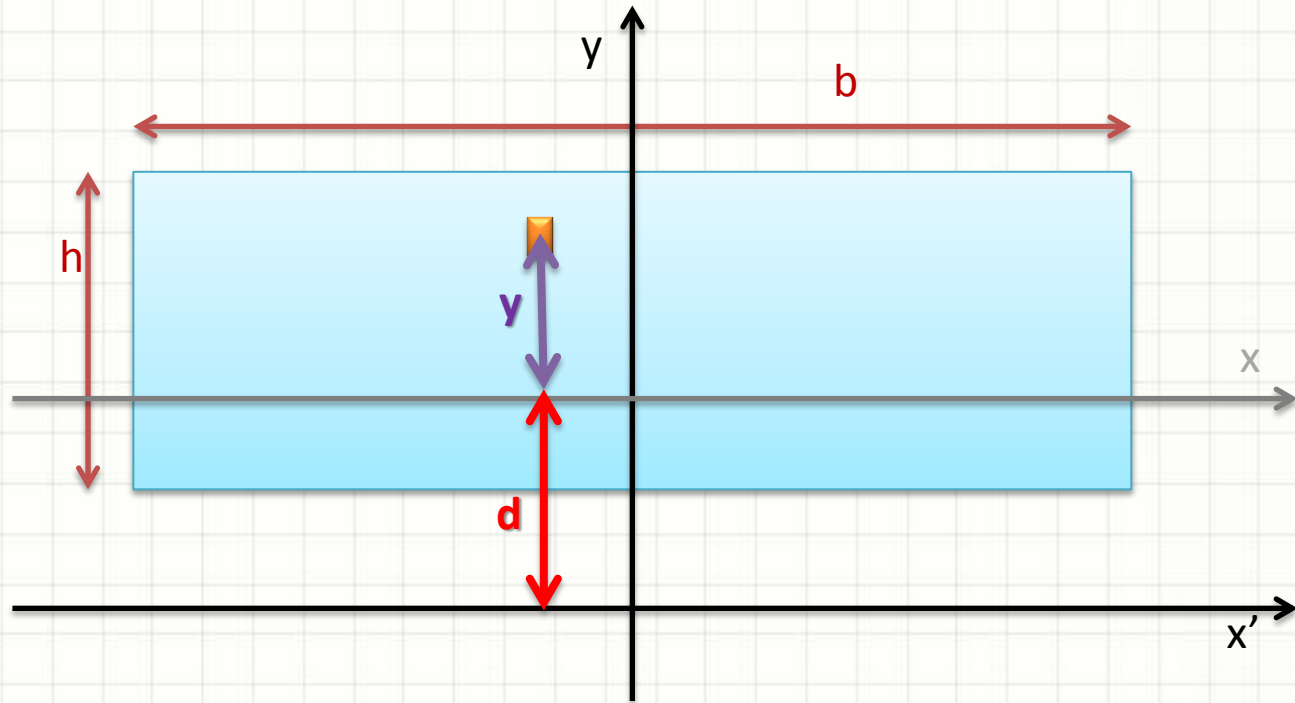
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_x = \int_A y \cdot dA \quad S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA$$

Translação de Eixos

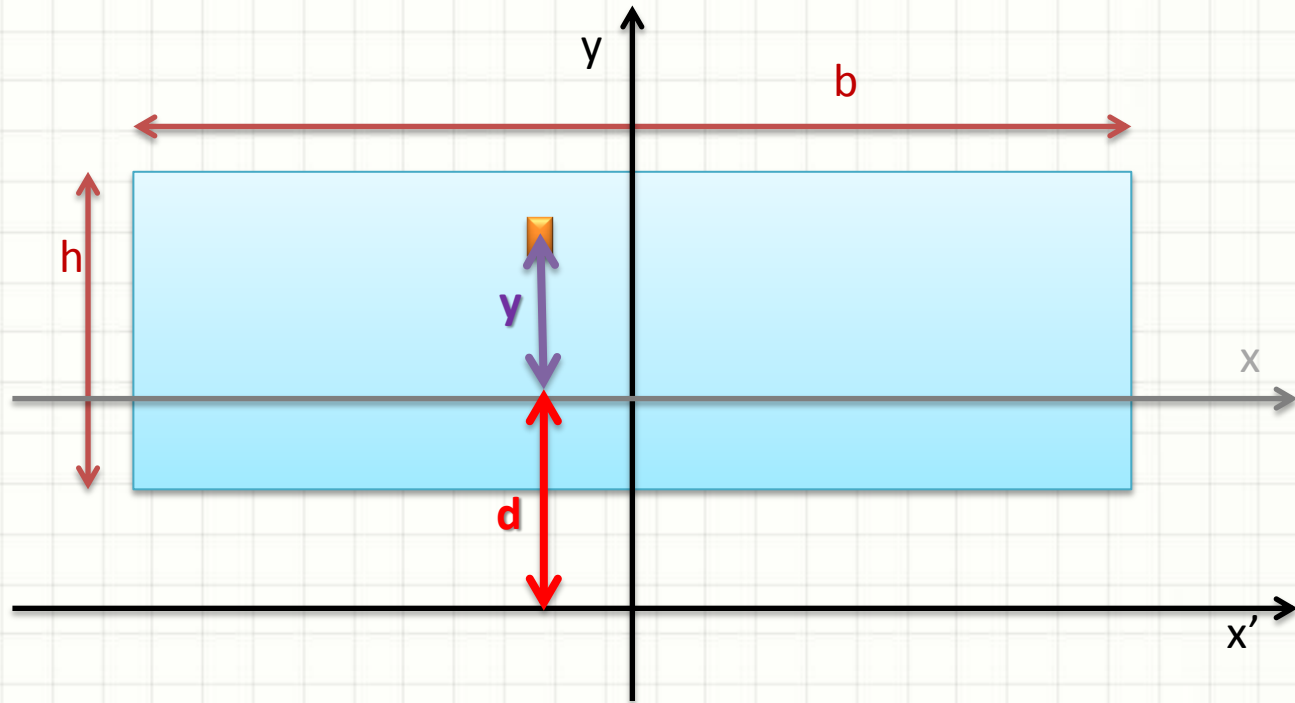
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA$$

Translação de Eixos

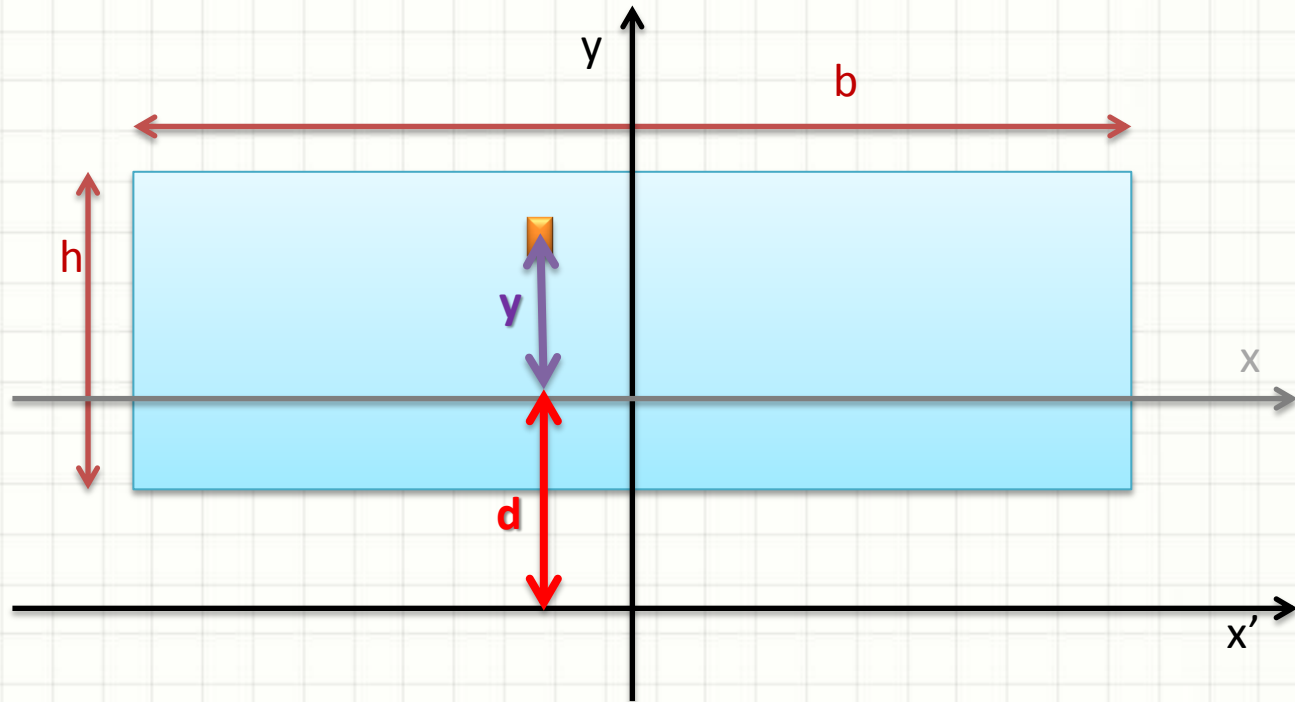
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_{x'} = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA = \int_A y \cdot dA + d \cdot \int_A dA$$

Translação de Eixos

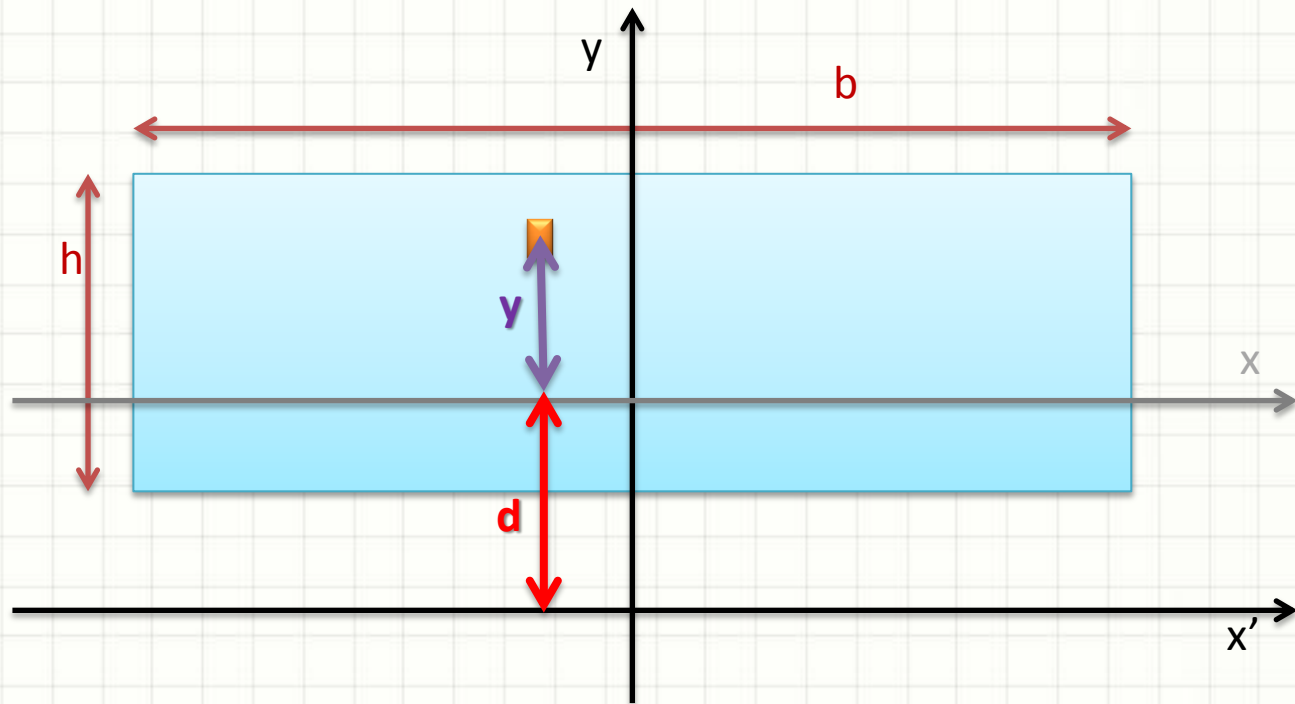
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_{x'} = \int_A y \cdot dA + d \cdot \int_A dA$$

Translação de Eixos

- Momento Estático (S_x conhecido)

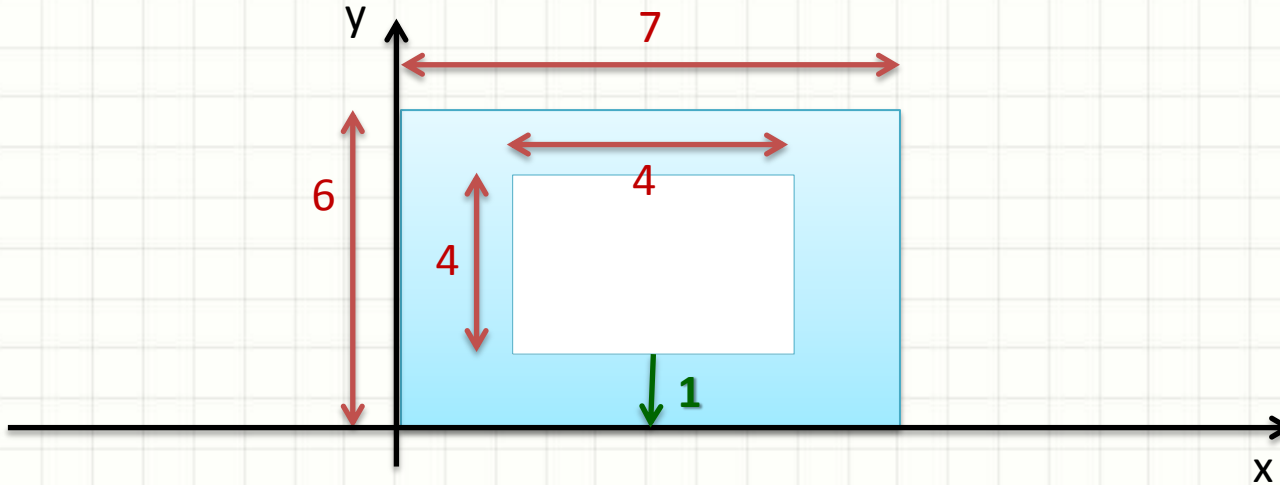


$$S_{x'} = S_x + d \cdot A$$



Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?

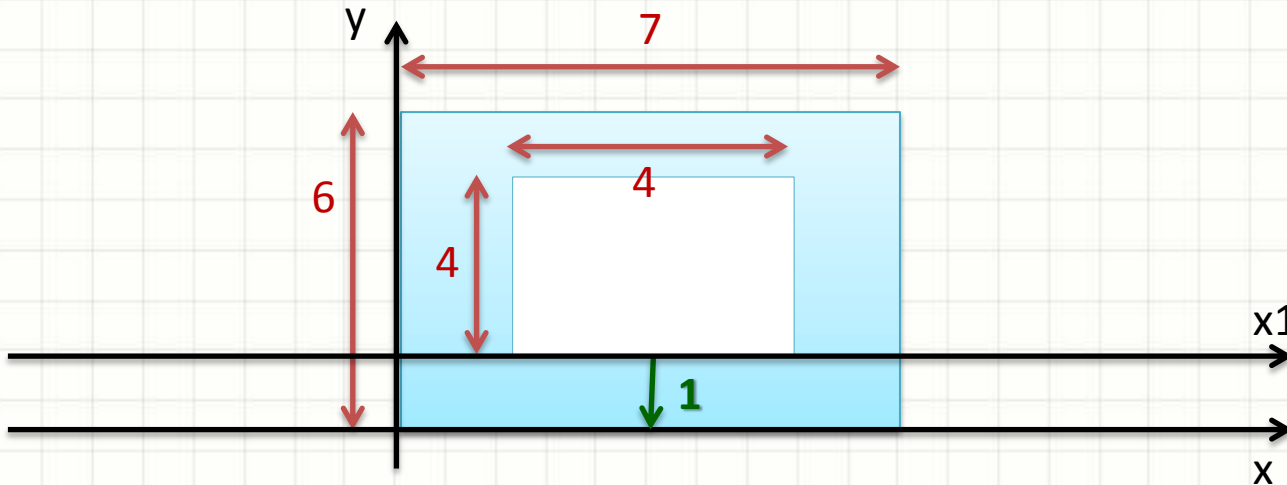


- $S_{x_{Azul}} = S_{x_{RA}} - S_{x_{RB}}$

- Só que $S_{x_{RB}} \neq \frac{b \cdot h^2}{2}$

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



- Se temos o momento estático de um eixo, podemos calcular em outro

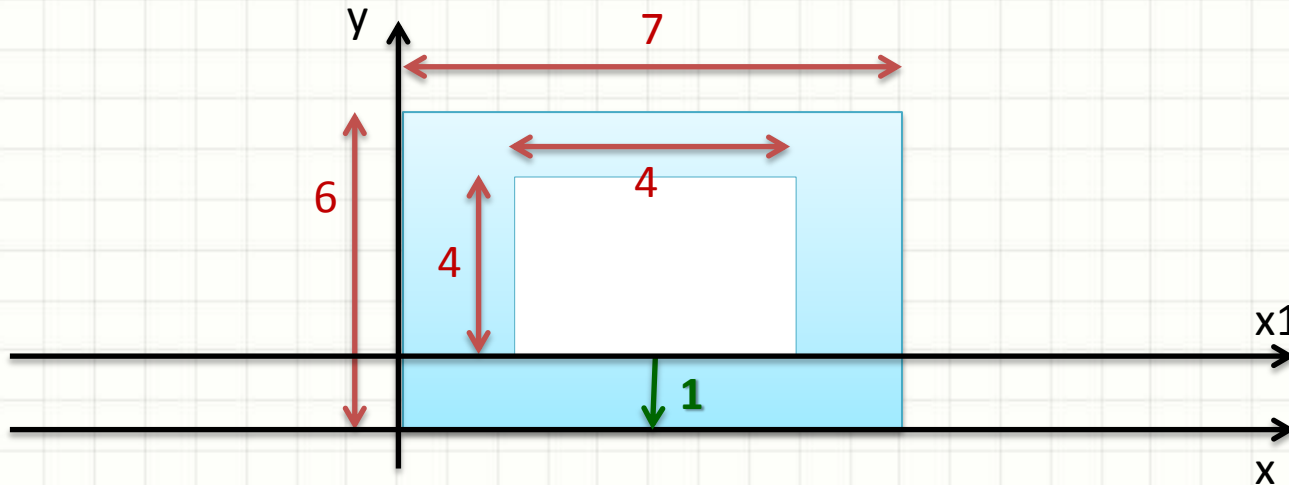
- $S_x = S_{x1} + d.A$

- $d \rightarrow$ Sinal?

$d \rightarrow +$ se distanciando do centro
 $d \rightarrow -$ se aproximando do centro

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



- Se temos o momento estático de um eixo, podemos calcular em outro

- $S_{xRB} = S_{x1RB} + d \cdot A$

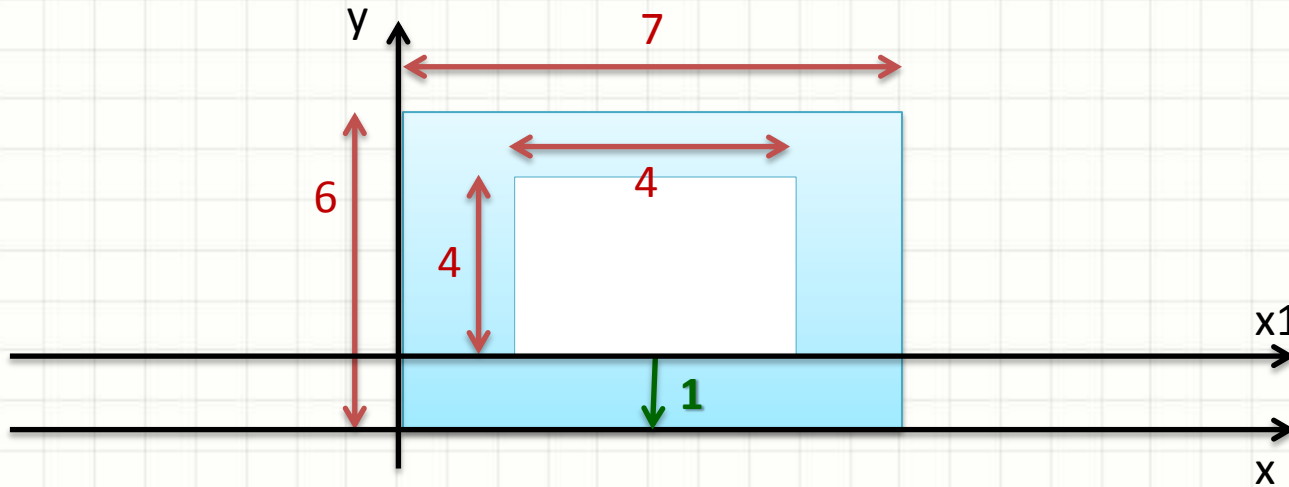
- $\Delta S = \Delta y \cdot A = 1 \cdot 16 = 16$

Sinal $S_{xRB} = ?$

Sinal $\Delta S = ?$

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



- Logo...

$$S_{x_{RB}} = S_{x_{1RB}} + d \cdot A = \frac{b \cdot h^2}{2} + 16 = \frac{4 \cdot 16}{2} + 16 = \mathbf{48}$$

$$S_{x_{Azul}} = S_{x_{RA}} - S_{x_{RB}} = 126 - 48 = \mathbf{78}$$



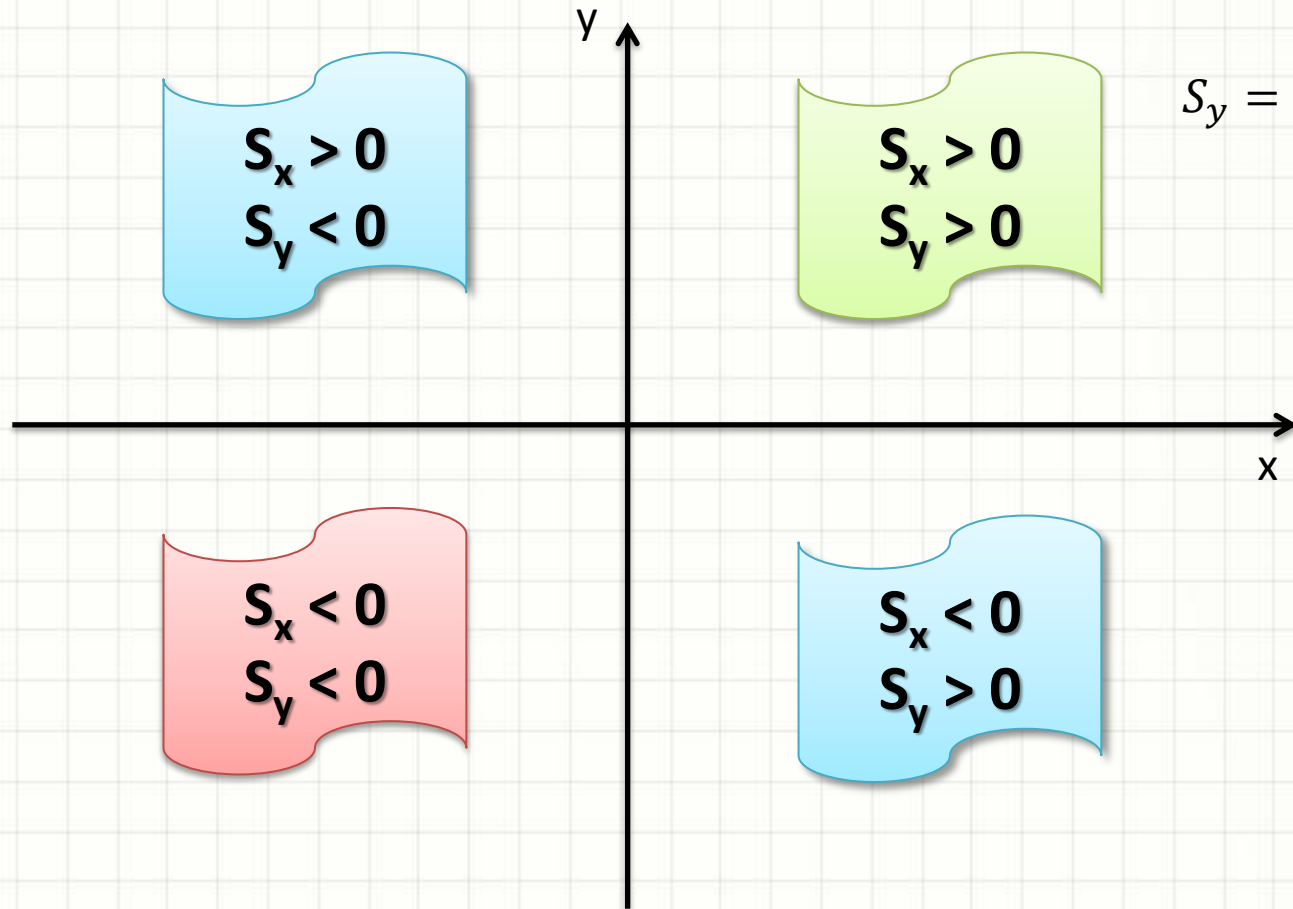
SINAL DO MOMENTO ESTÁTICO

Sinal do Momento Estático

- Depende do “quadrante” da área

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

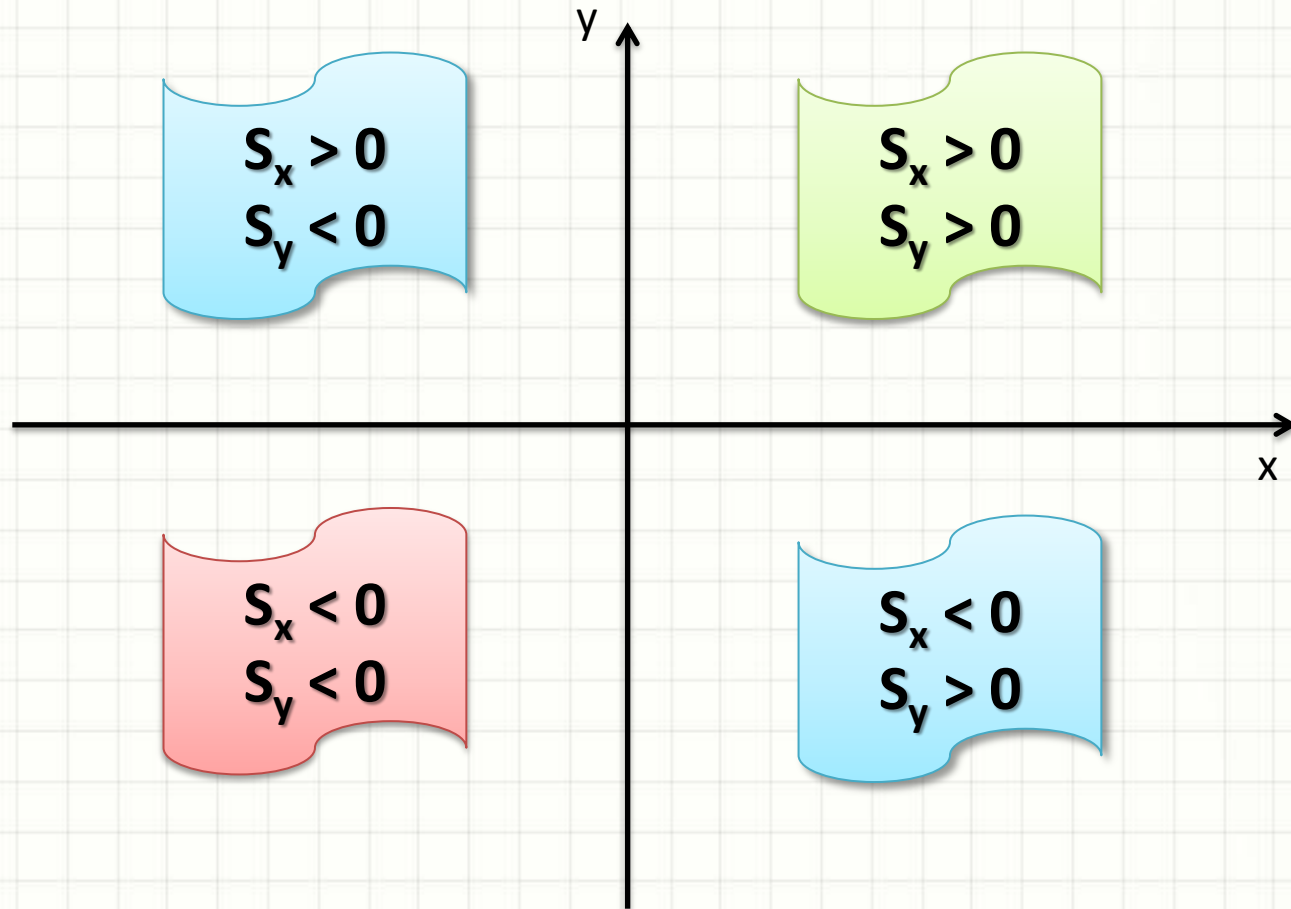




CONSEQUÊNCIAS DO SINAL DO MOMENTO ESTÁTICO

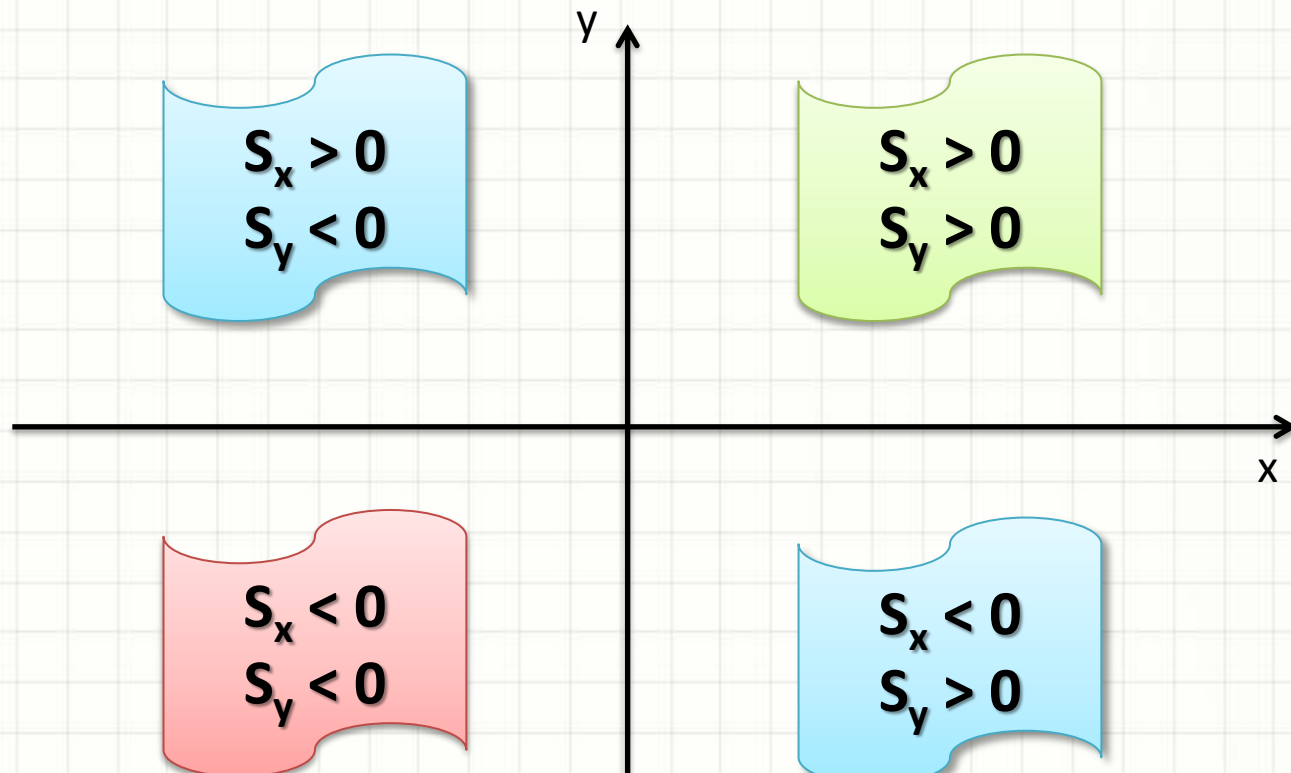
Consequências do Sinal no M.E.

- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Consequências do Sinal no M.E.

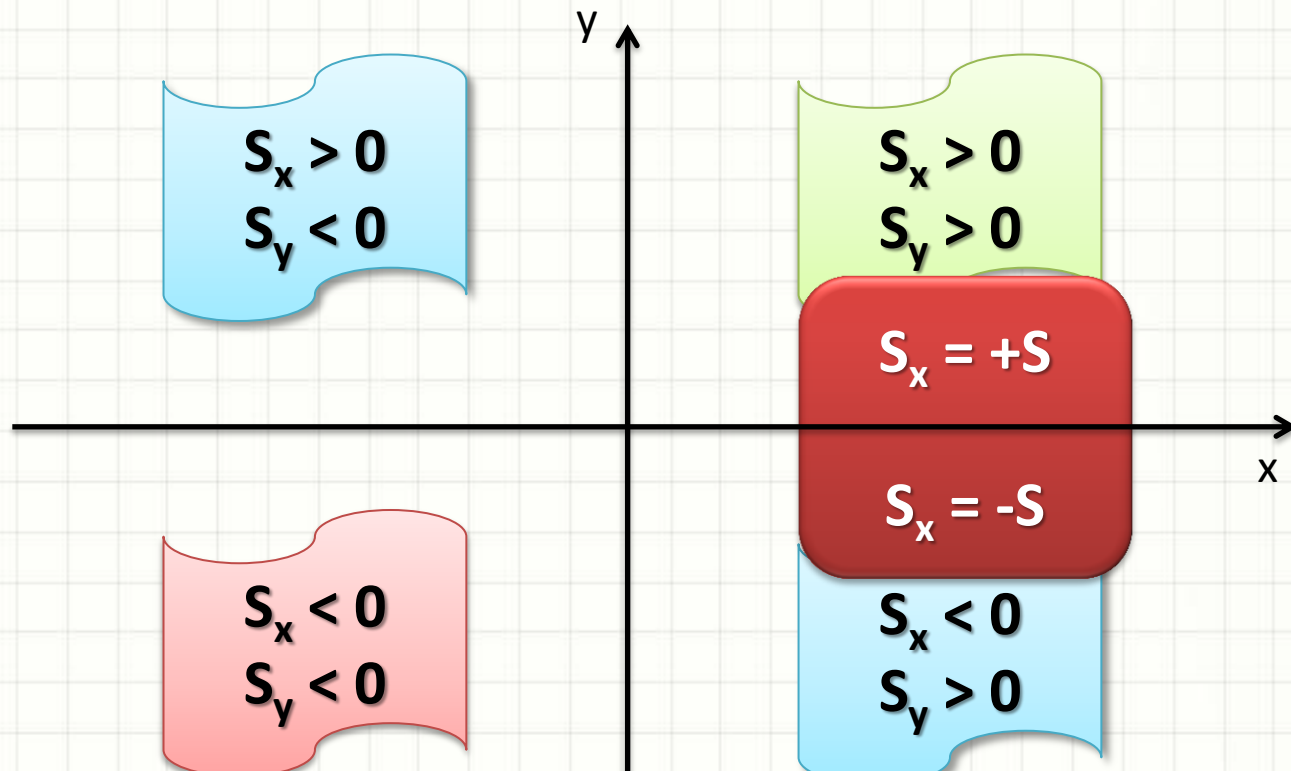
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Por isso a simetria leva a momento estático igual a zero!

Consequências do Sinal no M.E.

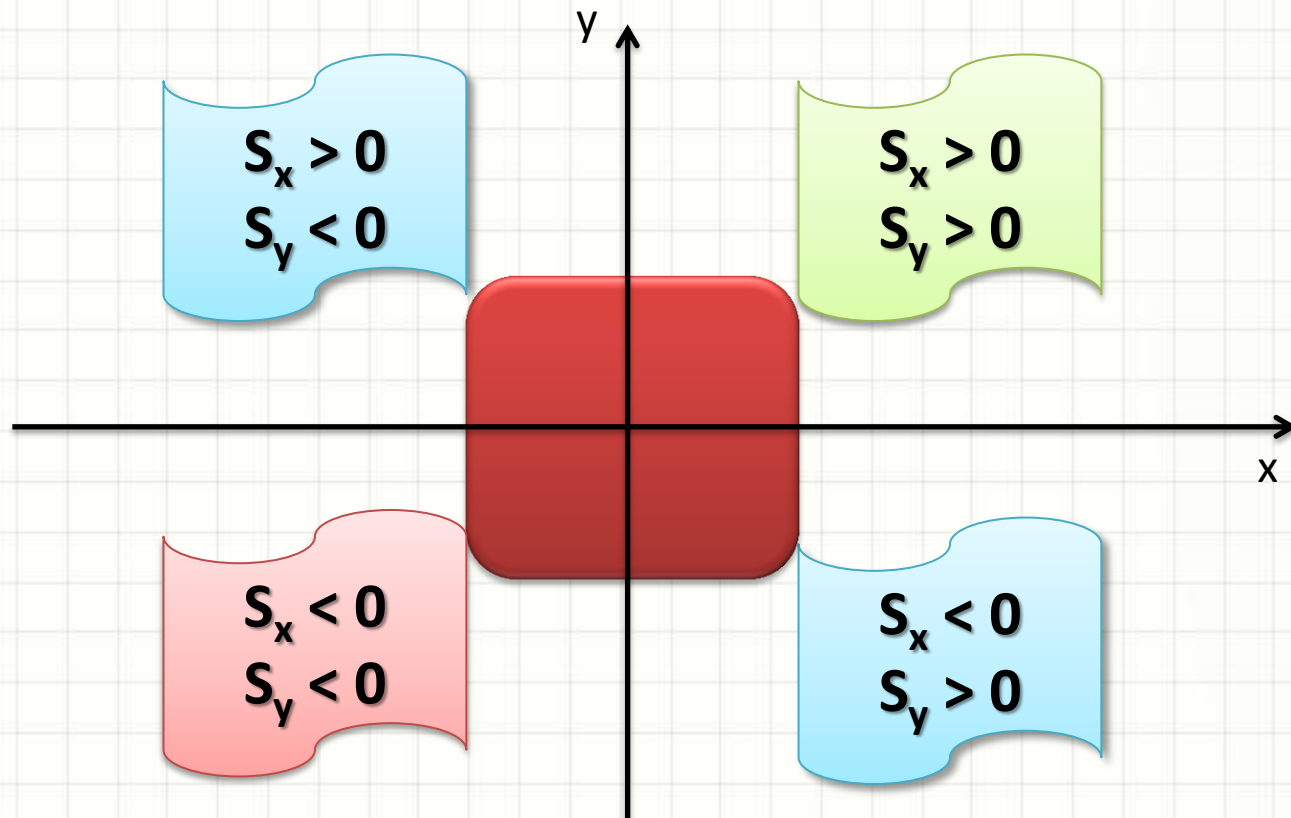
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Por isso a simetria leva a momento estático igual a zero!

Consequências do Sinal no M.E.

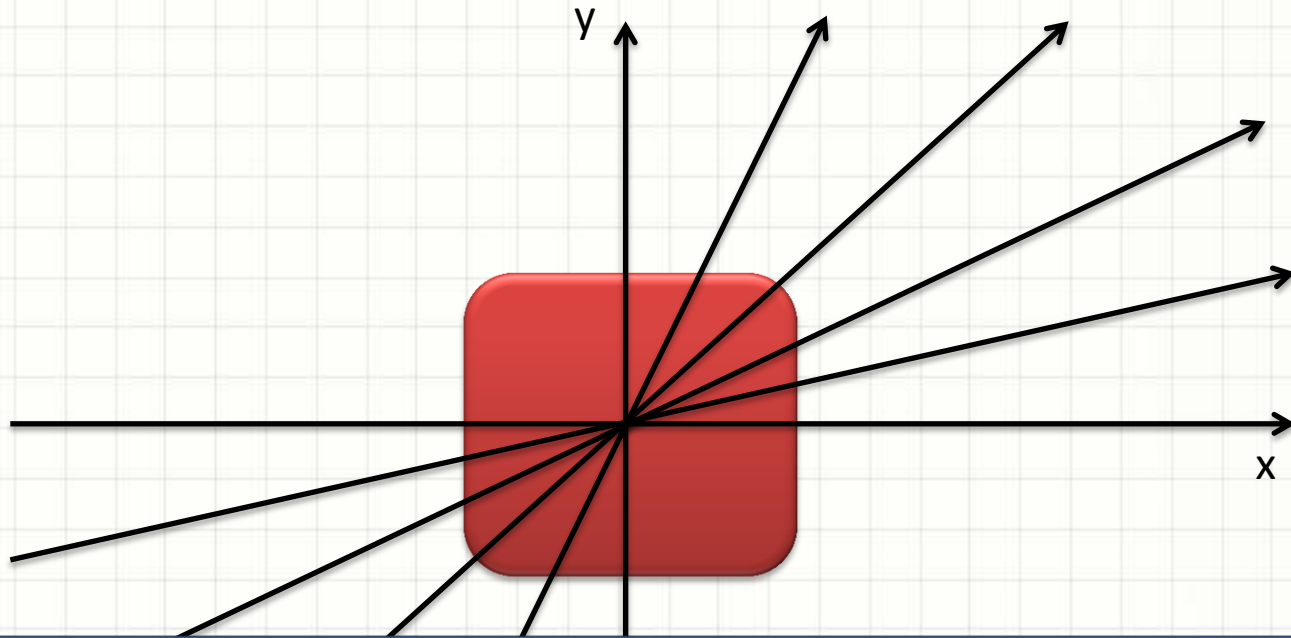
- O ponto em que S_x e S_y do corpo são zero...



É o centro da área: centróide

Consequências do Sinal no M.E.

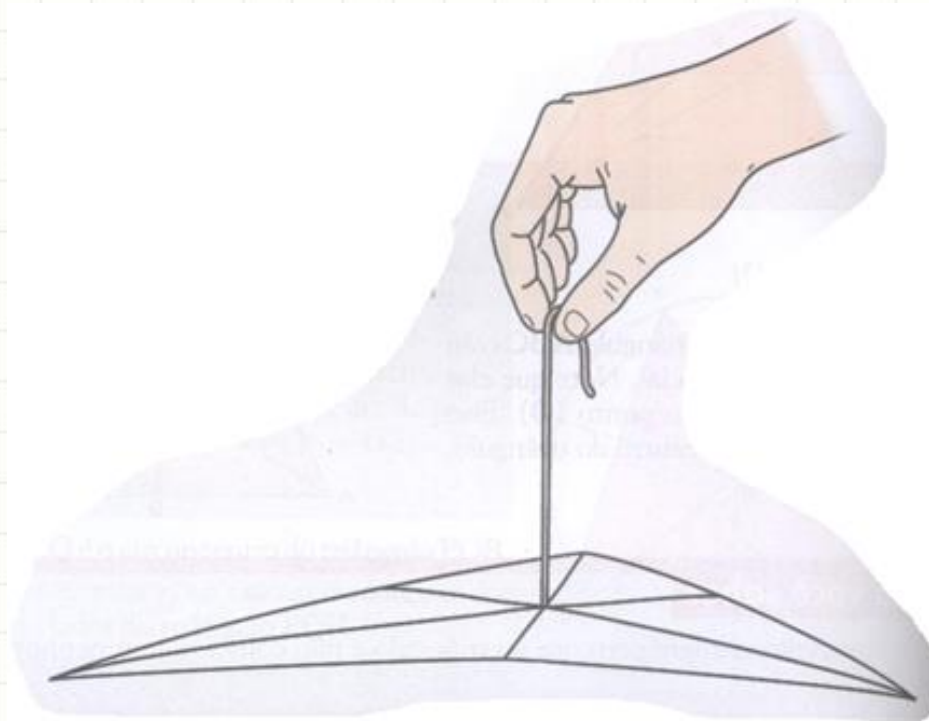
- O ponto em que S_x e S_y da região são zero...



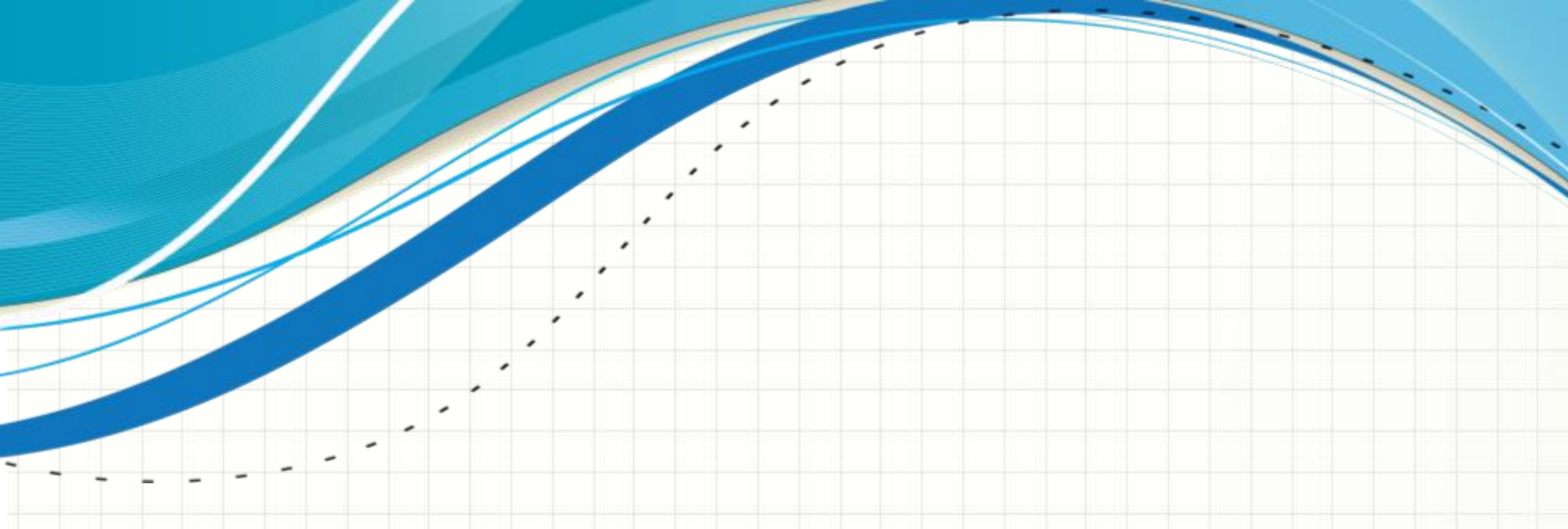
O Momento Estático da região será zero com relação a qualquer eixo que passe por esse ponto

Centroide x Baricentro

- Distribuição Idêntica da Área / Massa



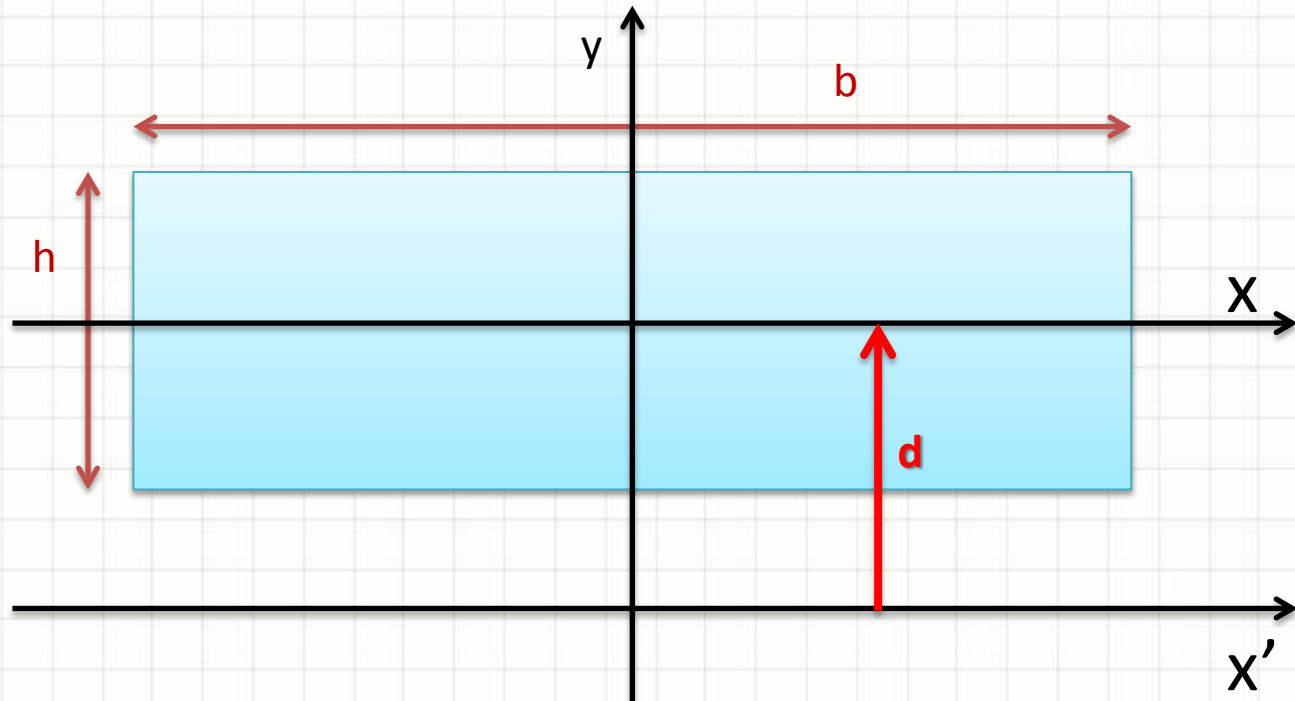
- Baricentro = Centro de Massa
 - Densidade uniforme: centroide = baricentro



ENCONTRANDO O CENTROIDE/BARICENTRO

Baricentro de Figuras Planas

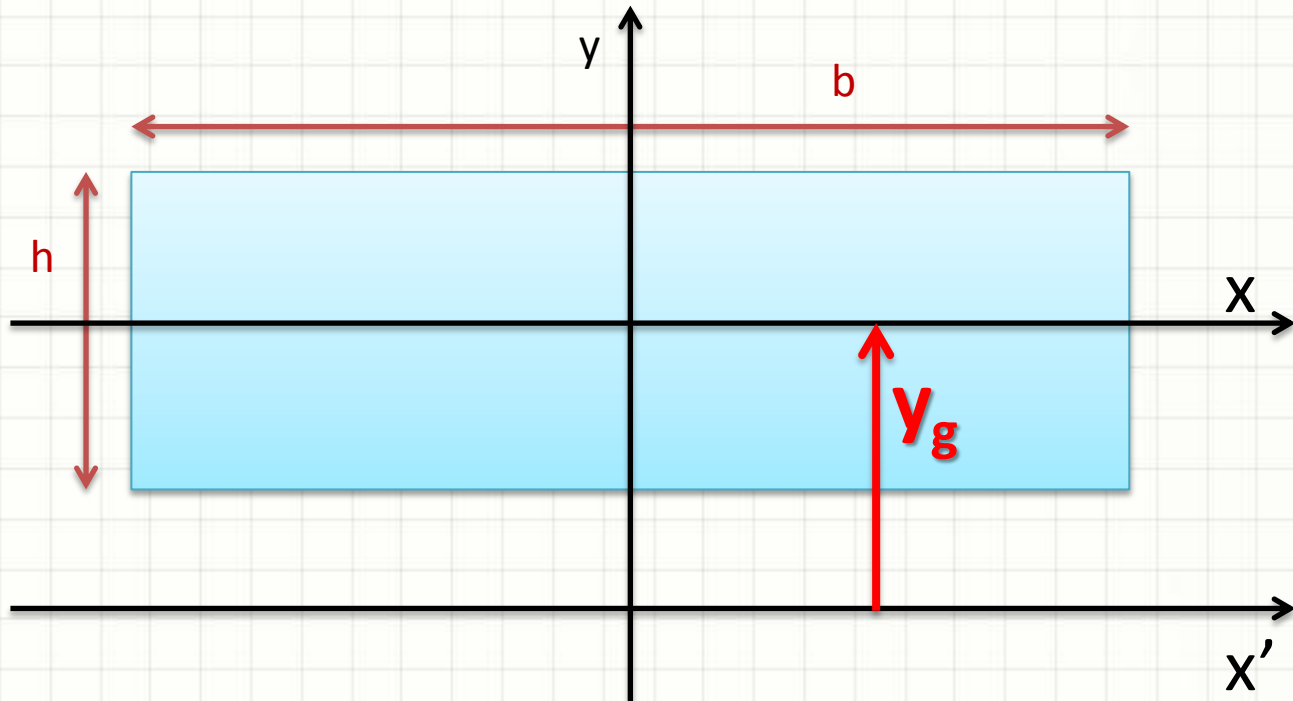
- Dados $S_{x'}$ e $S_{y'}$; baricentro $\rightarrow S_x = 0$ e $S_y = 0$



$$S_x = S_{x'} - d \cdot A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

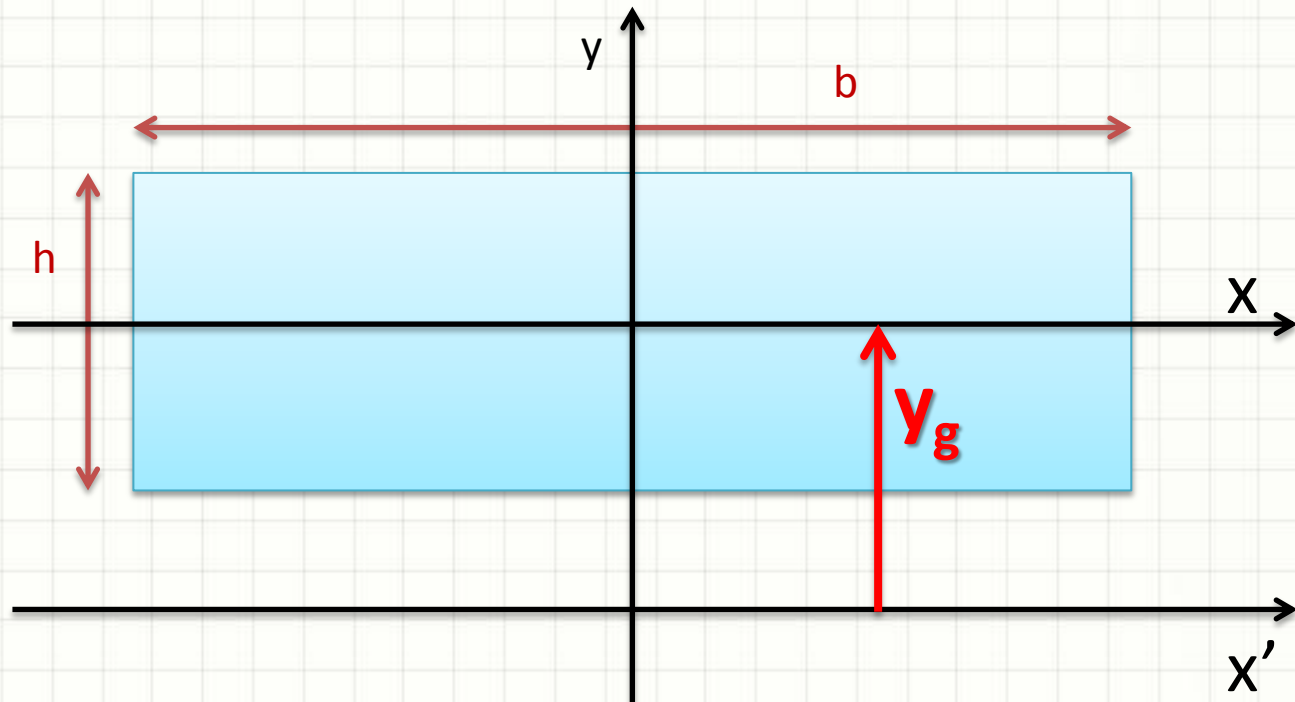
- Dados $S_{x'}$ e $S_{y'}$; baricentro $\rightarrow S_x = 0$ e $S_y = 0$



$$S_x = S_{x'} - y_g \cdot A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

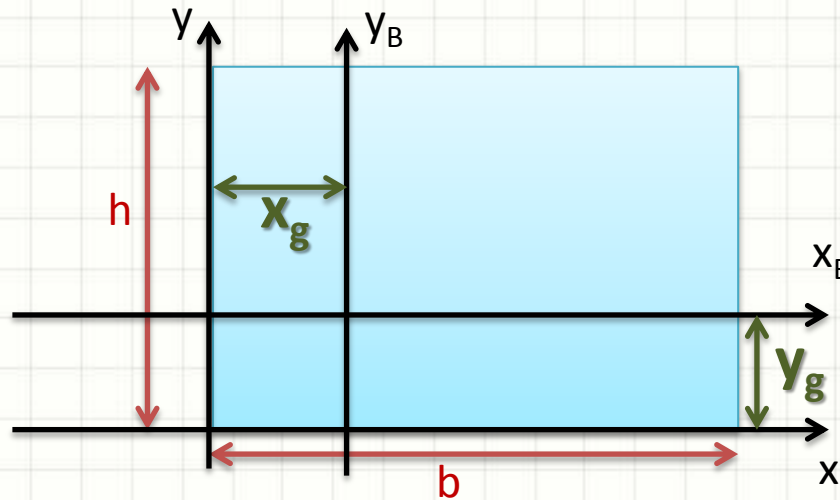
- Dados $S_{x'}$ e $S_{y'}$; baricentro $\rightarrow S_x = 0$ e $S_y = 0$



$$S_{x'} - y_g \cdot A = 0 \quad \rightarrow \quad y_g = \frac{S_{x'}}{A}$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Retângulo

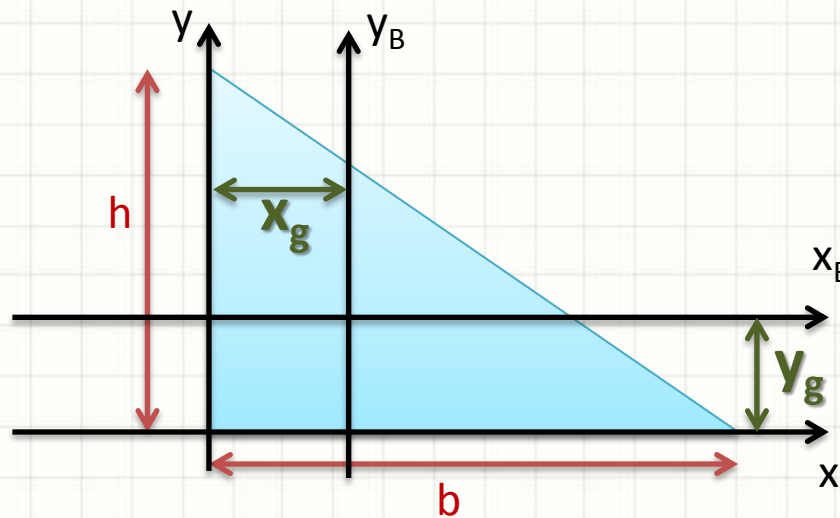


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = h/2$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = b/2$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Triângulo

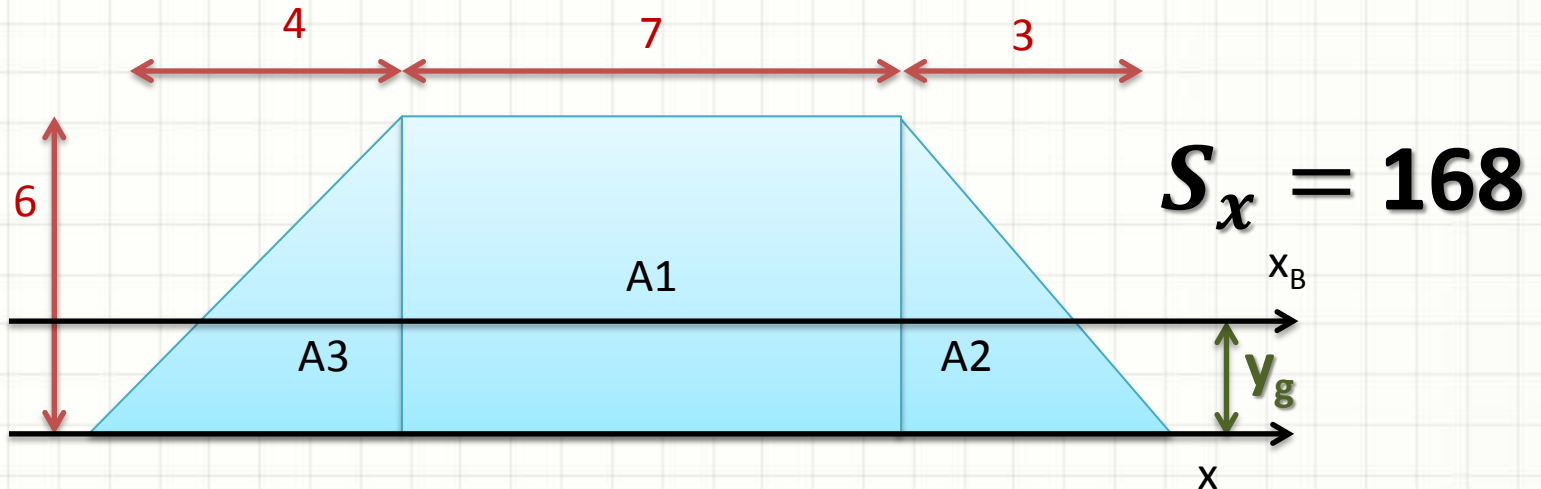


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = h/3$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = b/3$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o \bar{y} do baricentro da área abaixo

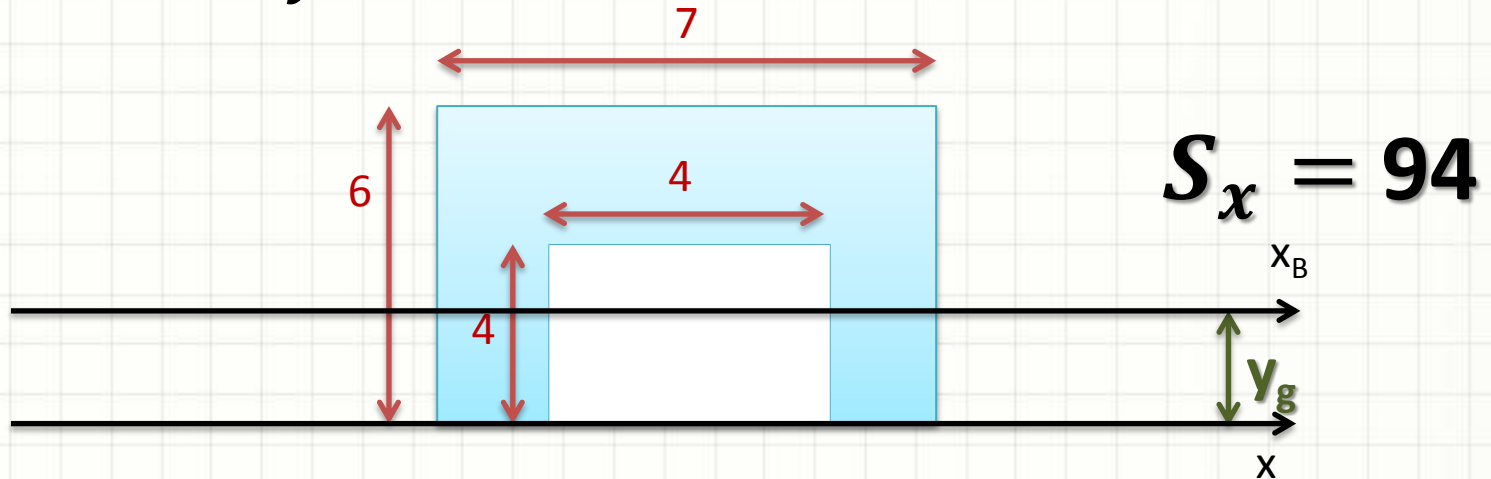


$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A1 + A2 + A3} = \frac{168}{7 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2}} =$$

$$y_g = 2,67$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o \bar{y} do baricentro da área abaixo



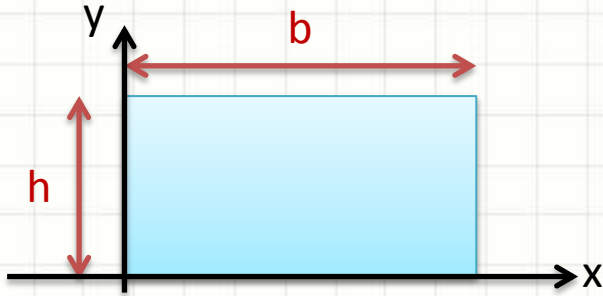
$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A_{ATotal} - A_B} = \frac{94}{7 \cdot 6 - 4 \cdot 4} =$$

$$y_g = 3,62$$



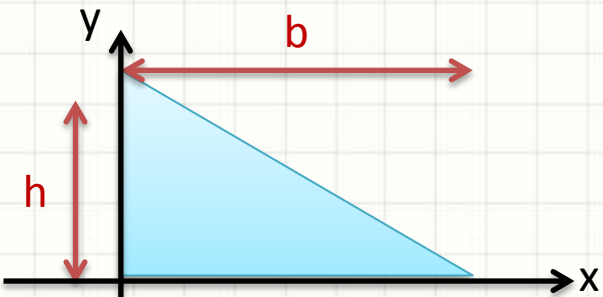
RESULTADOS IMPORTANTES

Momentos Estáticos



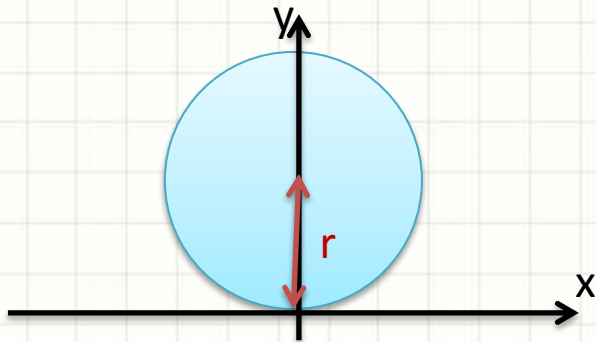
$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

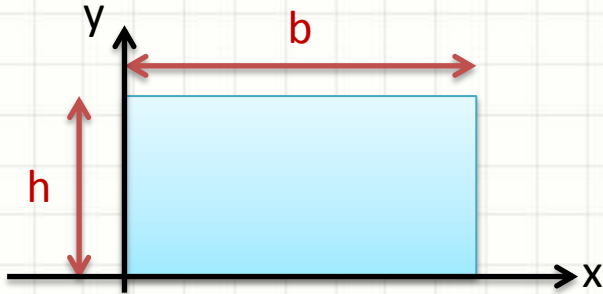
$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$



$$S_x = \pi \cdot r^3$$

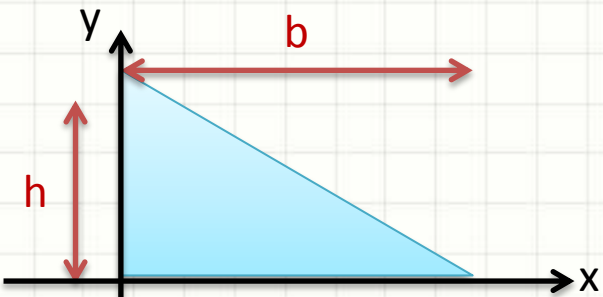
$$S_y = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



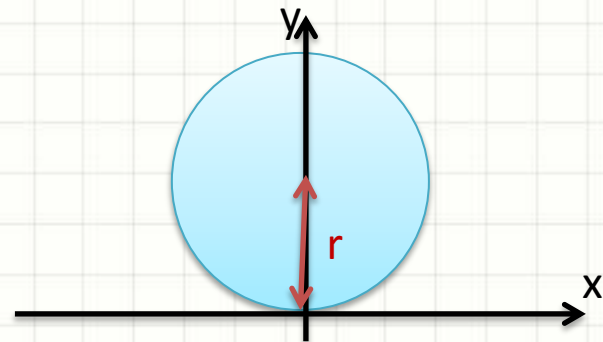
$$y_g = \frac{h}{2}$$

$$x_g = \frac{b}{2}$$



$$y_g = \frac{h}{3}$$

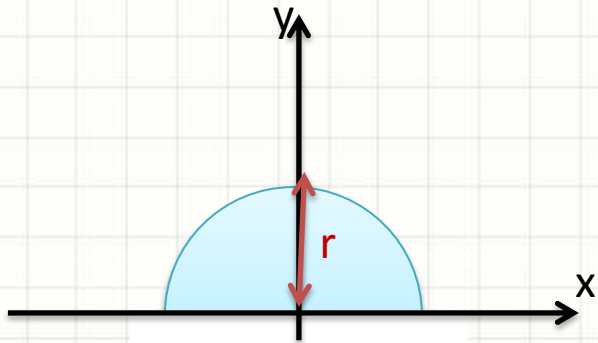
$$x_g = \frac{b}{3}$$



$$y_g = r$$

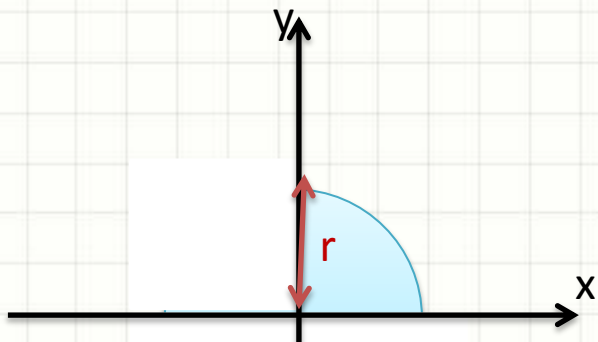
$$x_g = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_g = 0$$



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

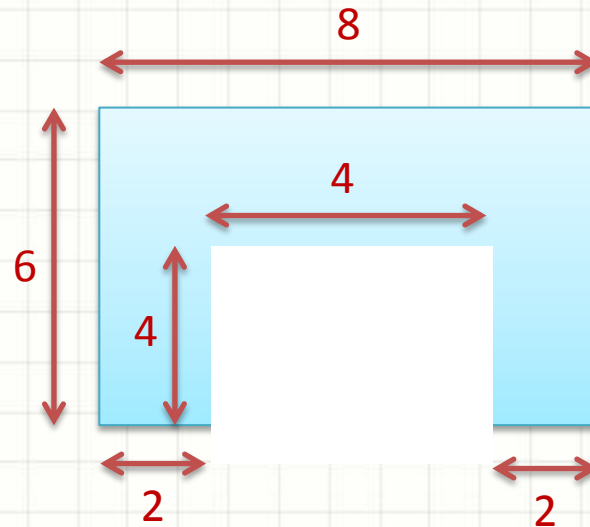
$$x_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$



EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- Calcule a posição do centroide da área azul





PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Material Didático, Pág. 578 e 579 (5ª. 622-623)
- 5ª Edição: Leitura págs 611 a 613
- Mínimos:
 - Exercício A.1 (5ª. A.1)
 - Exercícios A.2 a A.6 (5ª A.3 a A.6) - **Só localização do centroide**
- Extras:
 - Exercícios A.7 a A.12 (5ª A.8 a A.12) - **Só localização do centroide**



CONCLUSÕES

Resumo

- Importância da Forma na Resistência
 - Propriedades das Áreas Planas
 - Momento Estático
 - Localização do Centróide
 - **Exercitar: Material Didático**
-

- Momento de Inércia
 - Momento de Segunda Ordem
 - O que é isso?
 - Para quê serve?



PERGUNTAS?