



# RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

## TORÇÃO PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

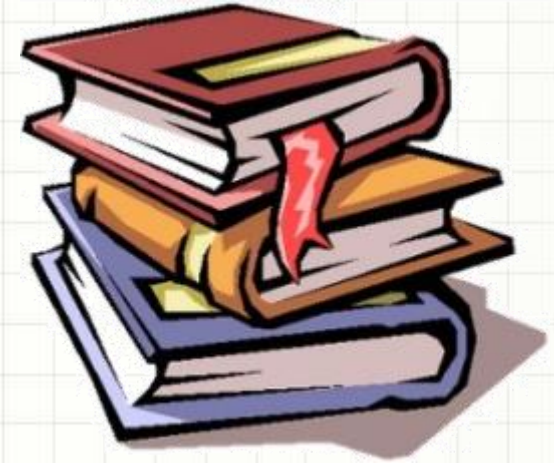
2014 - 1

# Objetivos

- Compreender a deformação por torção
- Compreender os esforços de torção
- Determinar distribuição de tensões de cisalhamento por torção
- Determinar cisalhamento pela transmissão de potência



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

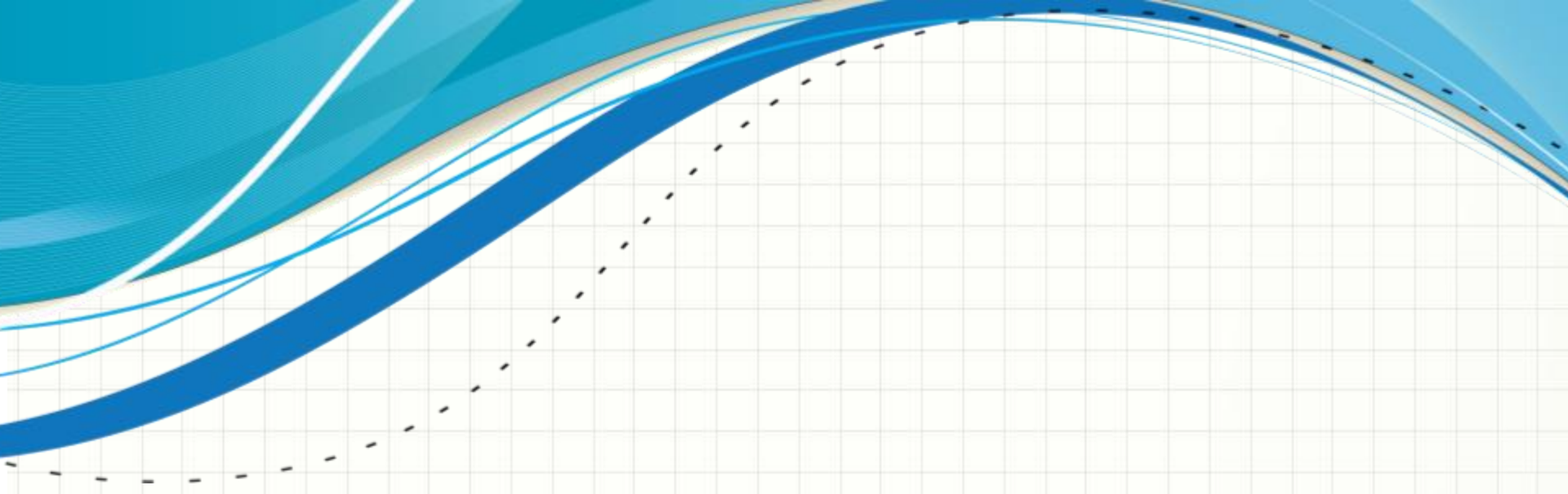
<http://www.caetano.eng.br/>

(Resistência dos Materiais II – Aula 5)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler) – Parte 1 / 2  
Páginas 137 a 153.

---



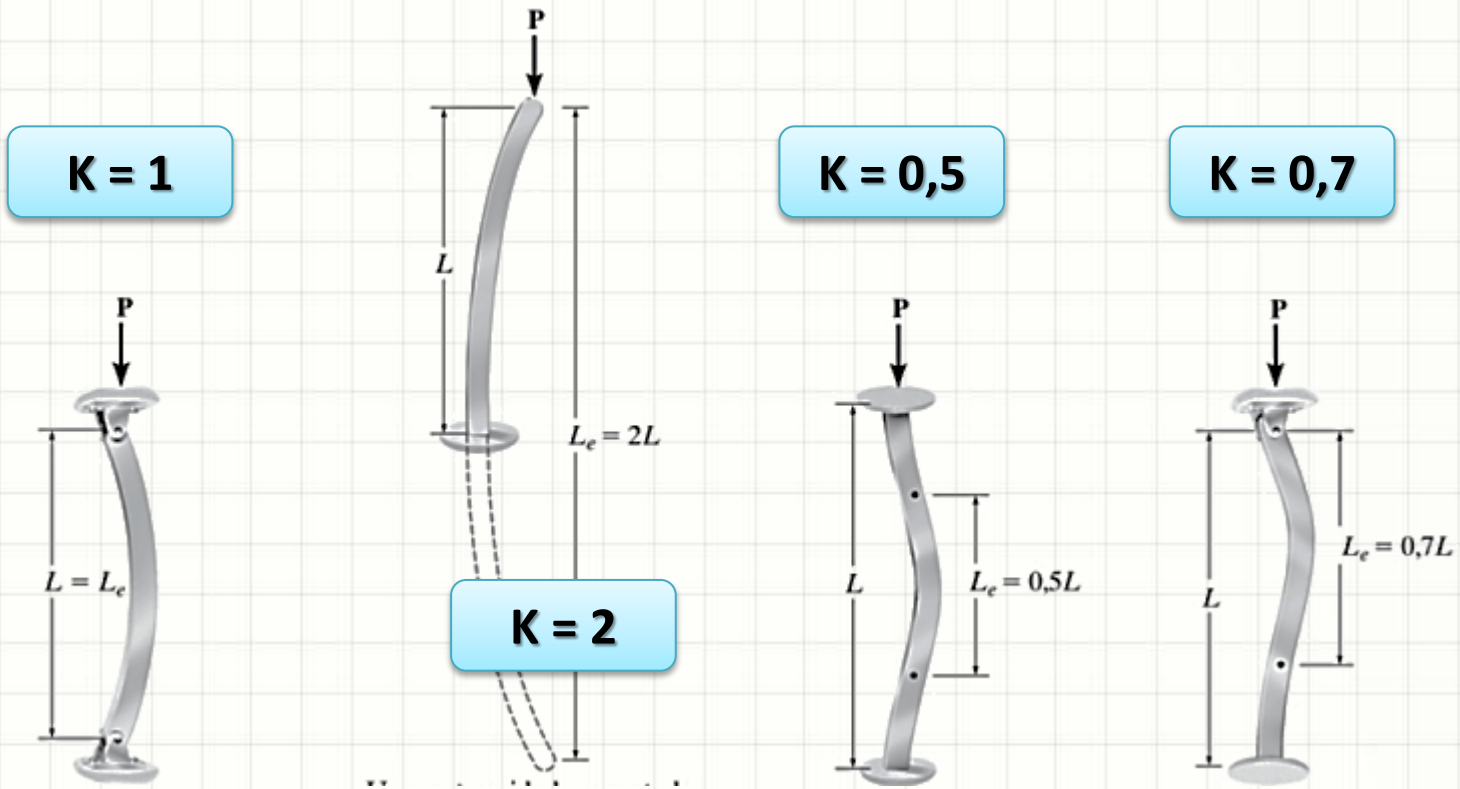
**RELEMBRANDO:**

# **CARREGAMENTOS AXIAIS**

# Flambagem

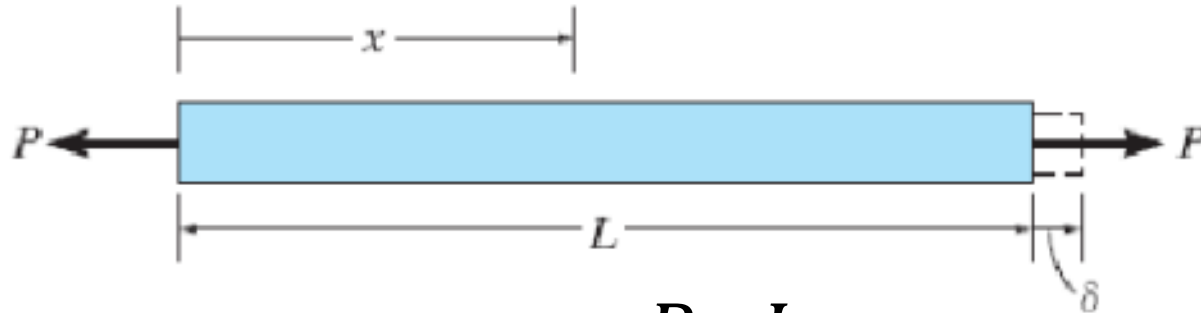
- Determinação da Carga Crítica  $P_{cr}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2}$$

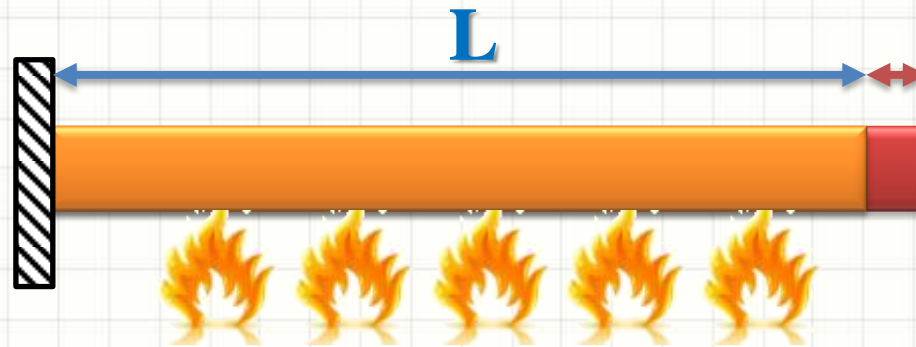




# Carregamentos e Deformações Axiais



$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$



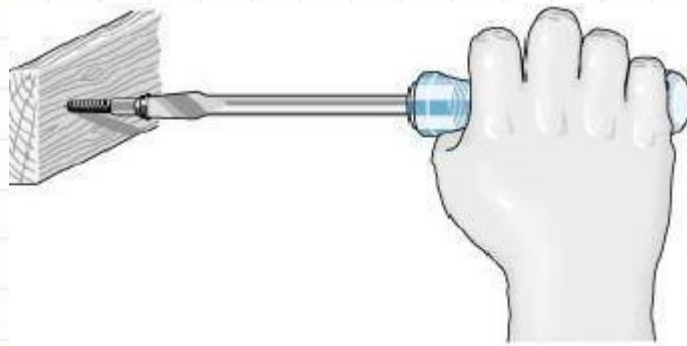
$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$



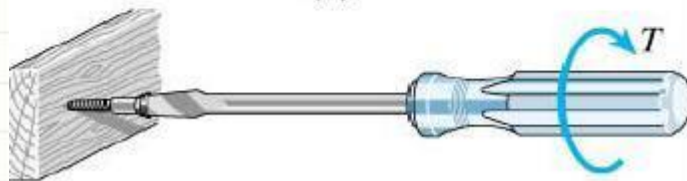
# **DEFORMAÇÃO DE EIXO CIRCULAR POR TORÇÃO**

# Deformação por Torção

- O que é torção?



(a)



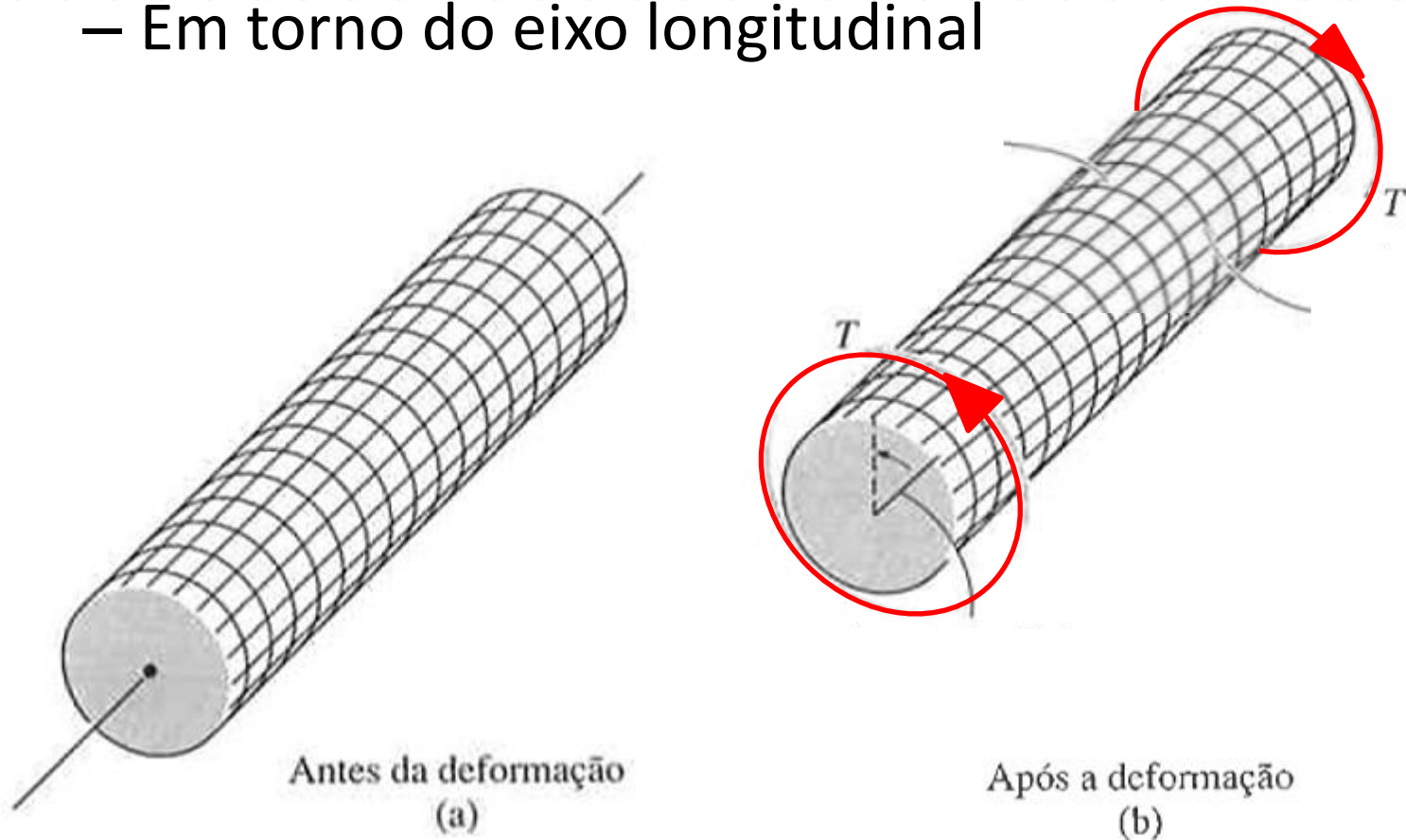
(b)





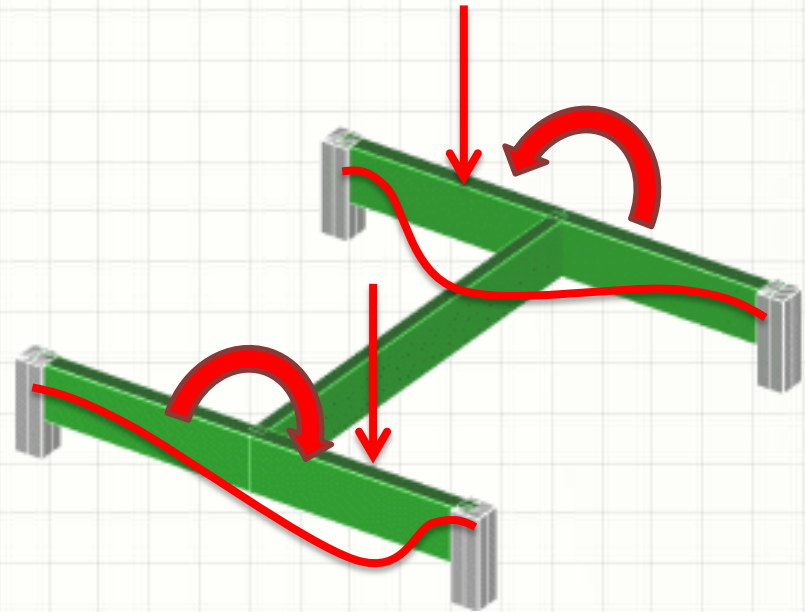
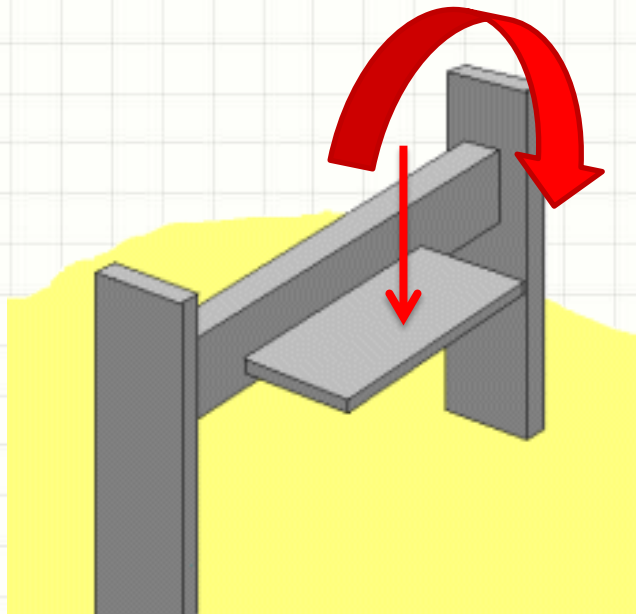
# Deformação por Torção

- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - Em torno do eixo longitudinal



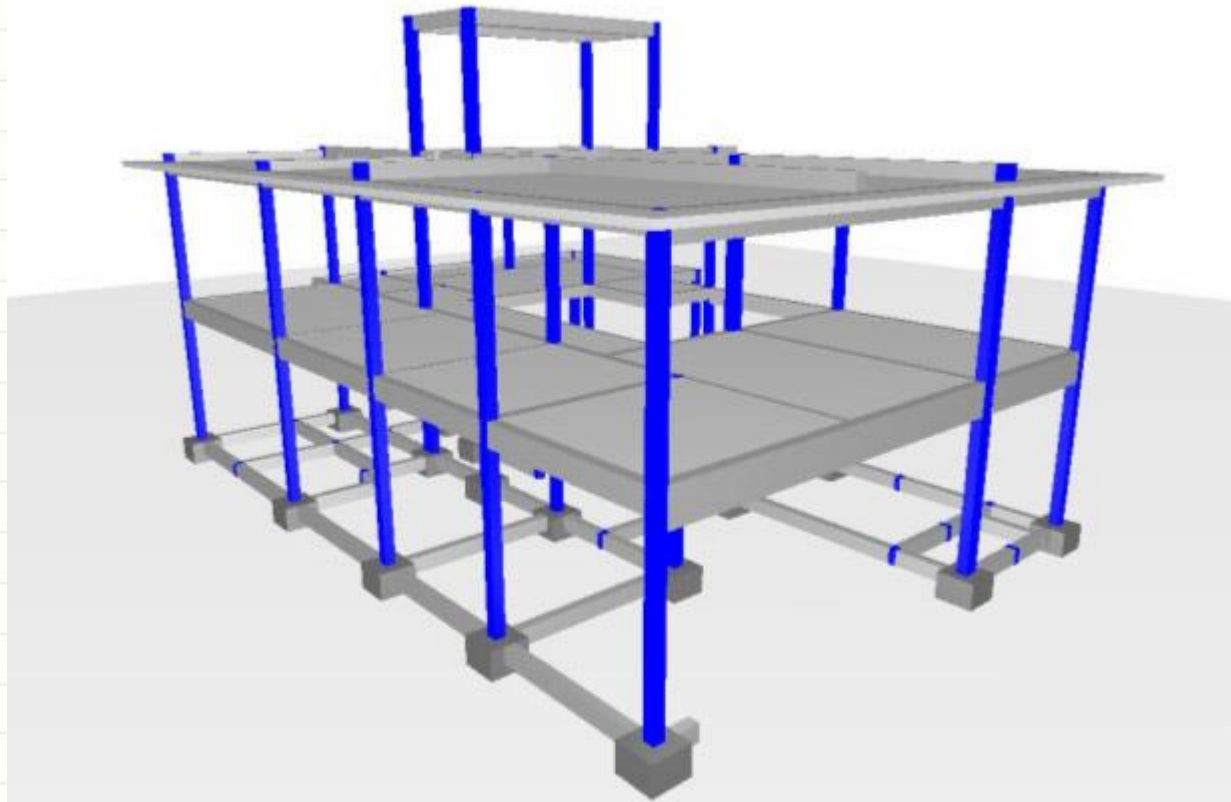
# Deformação por Torção

- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



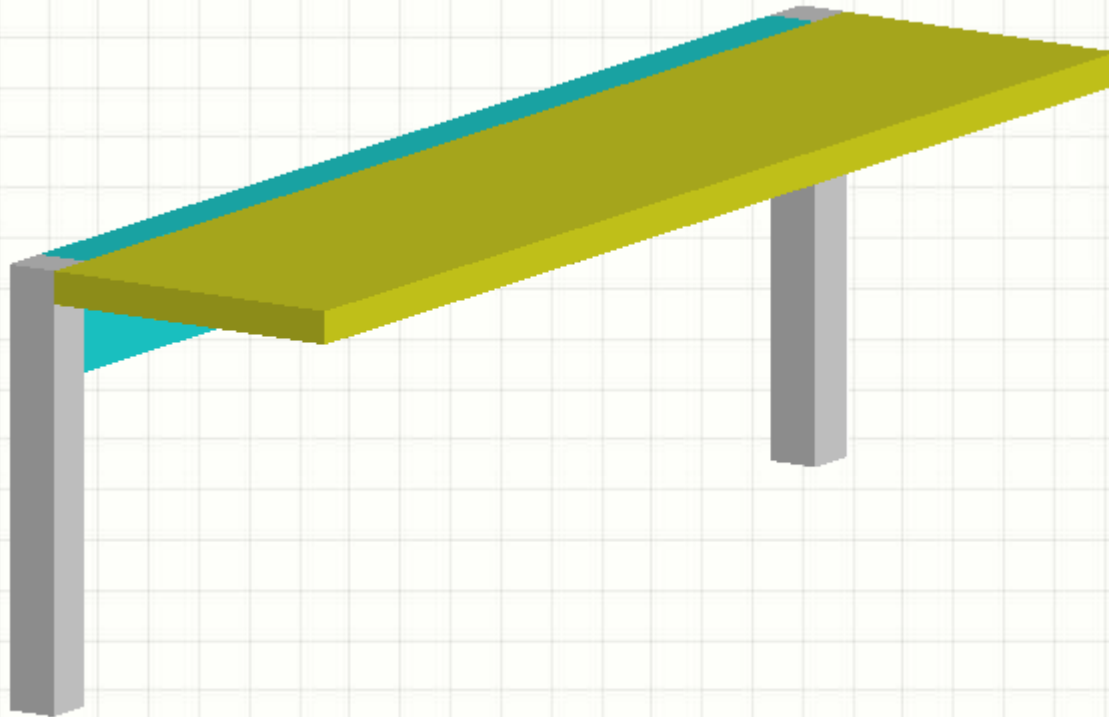
# Deformação por Torção

- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



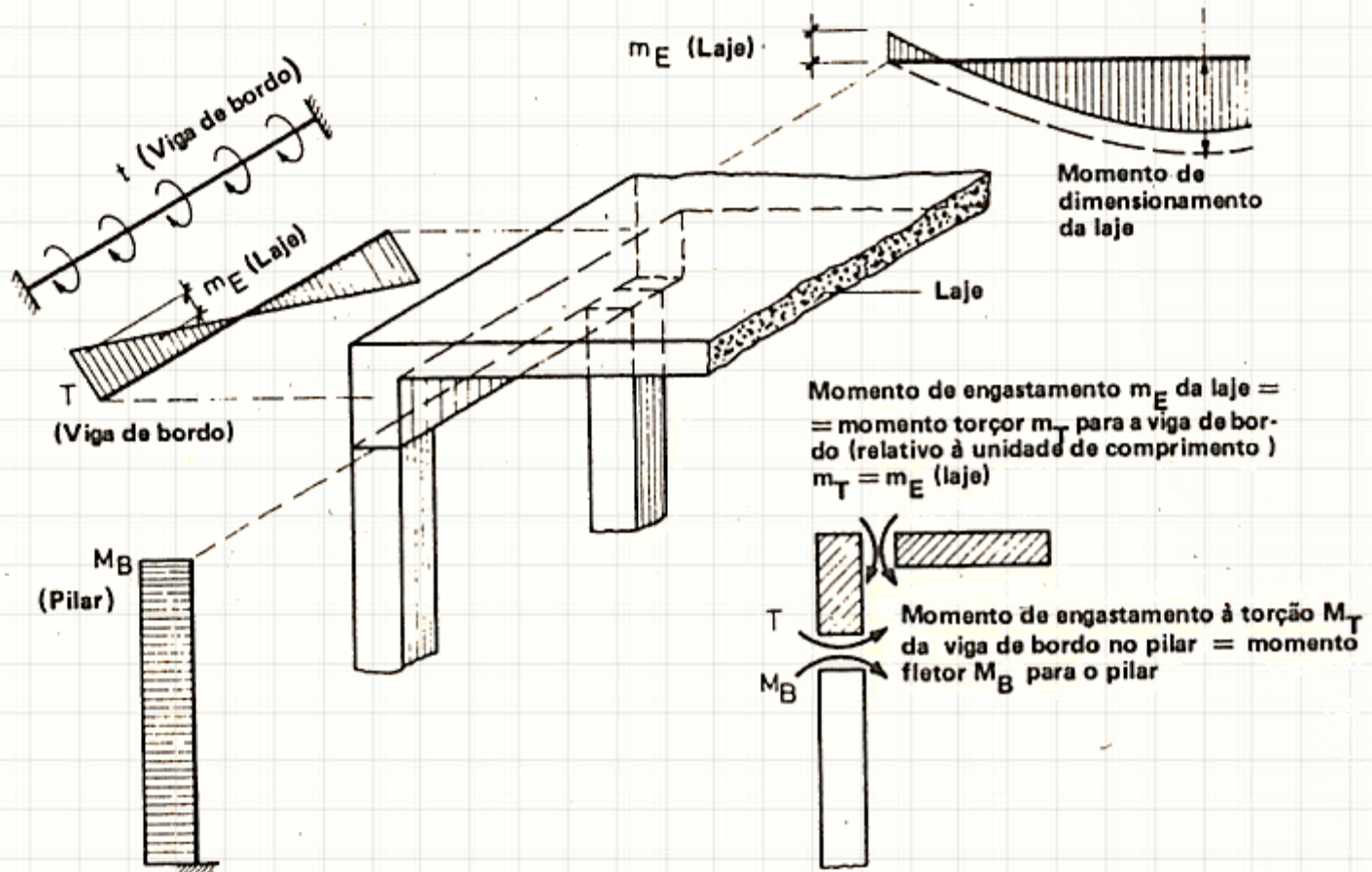
# Deformação por Torção

- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



# Deformação por Torção

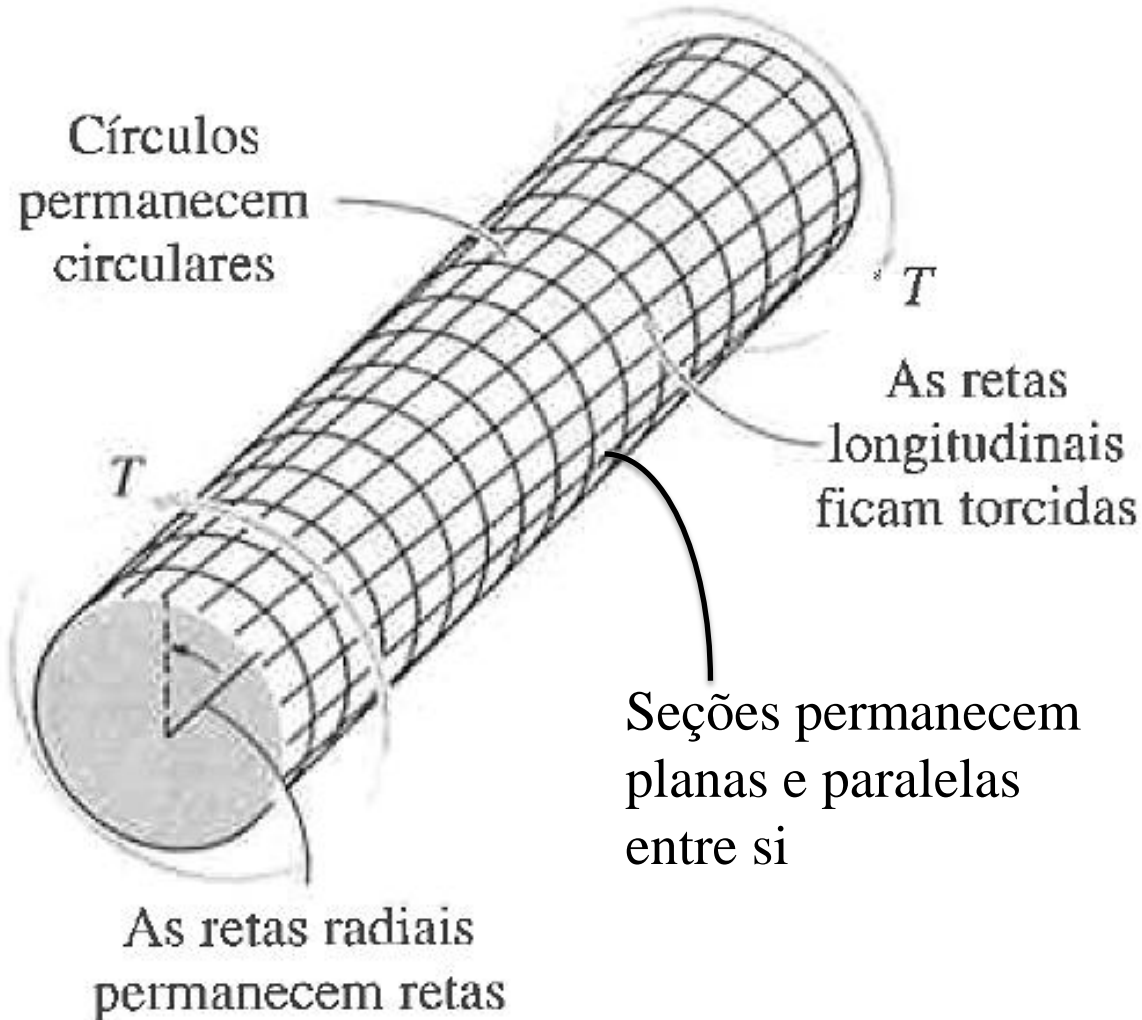
- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?





# Deformação por Torção

- Vamos observar a deformação de perto



# Deformação por Torção

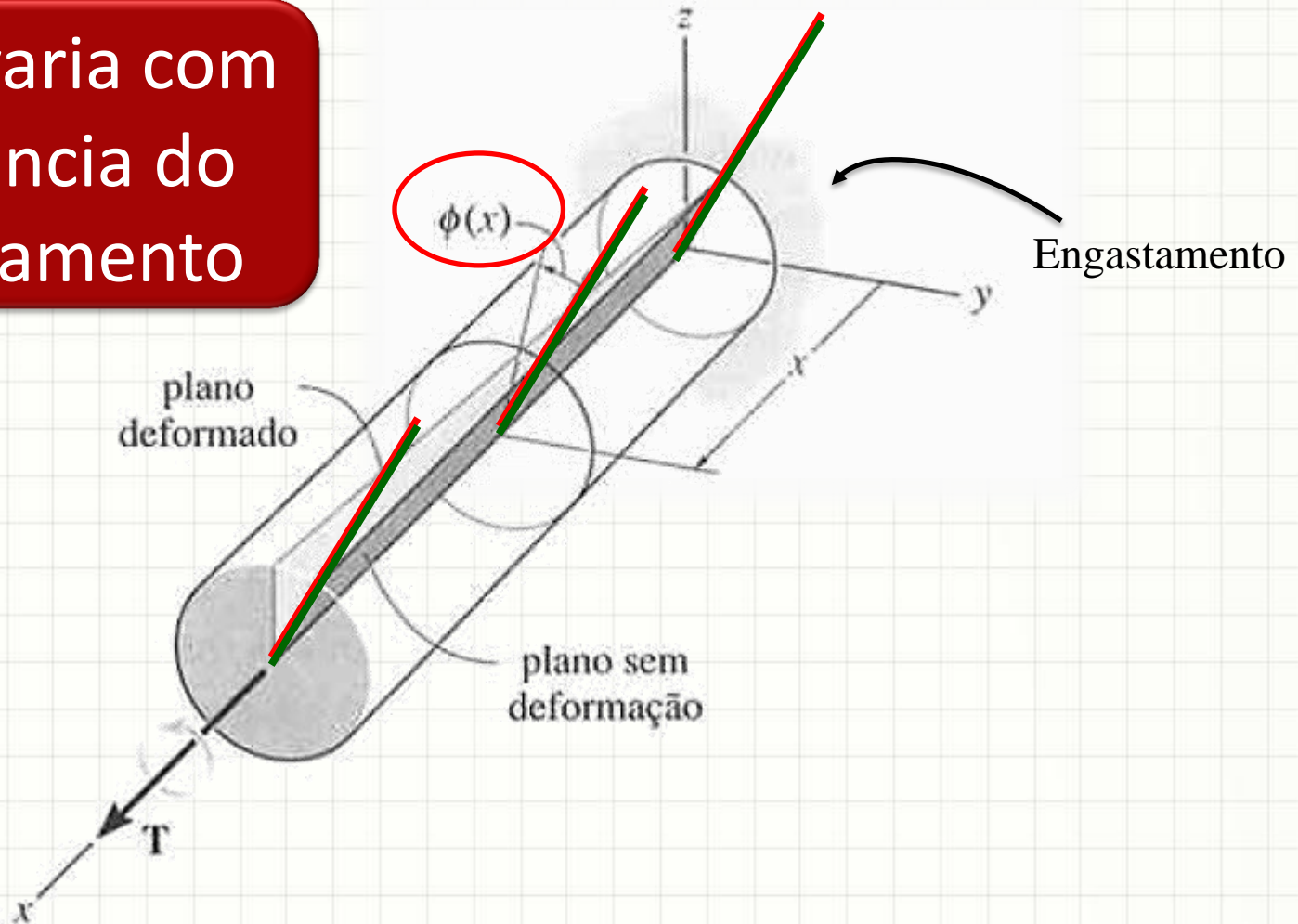
- Vamos observar a deformação de perto



# Ângulo de Torção

- Pode-se definir a deformação por ângulo  $\phi(x)$

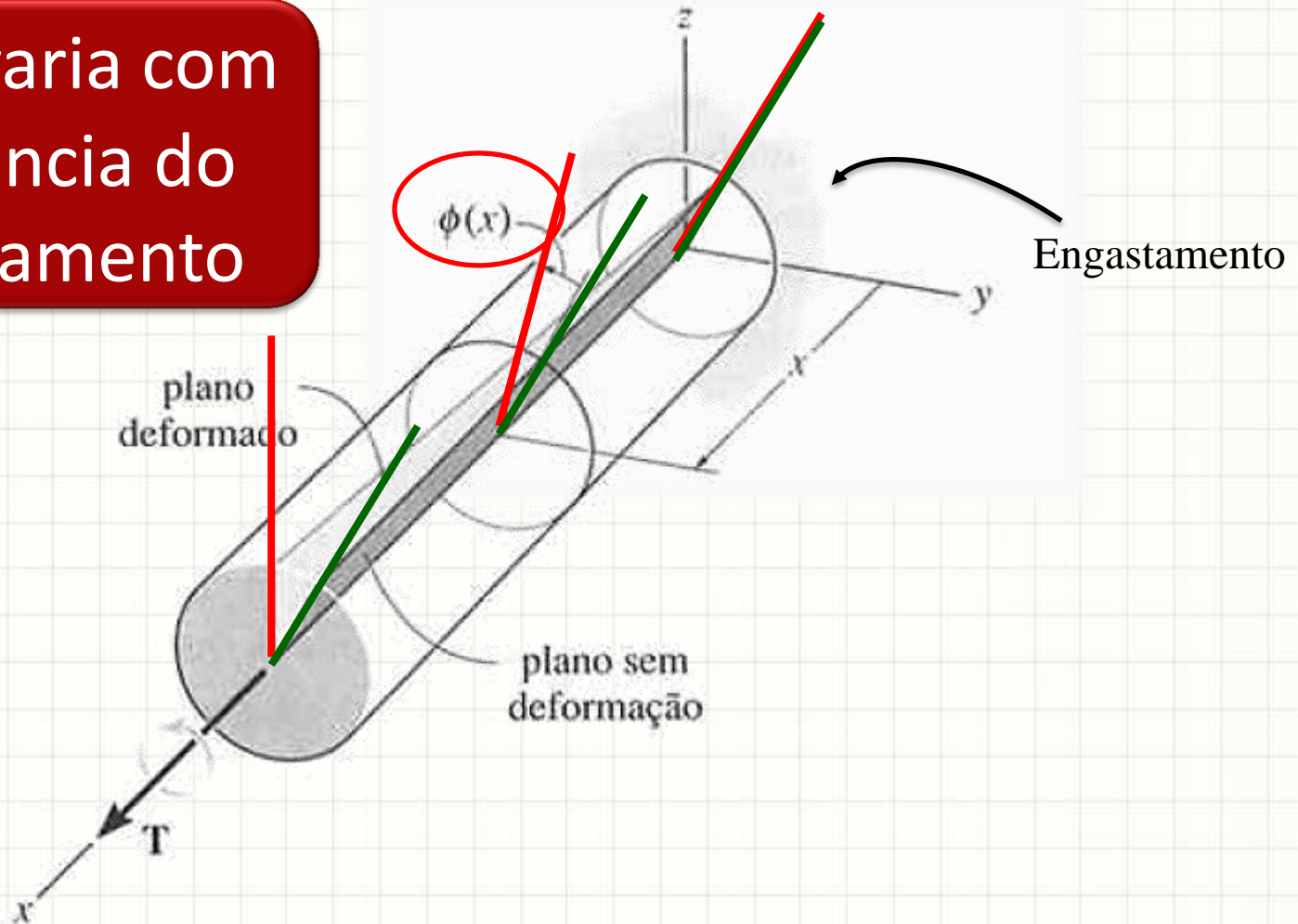
$\phi(x)$  : varia com a distância do engastamento



# Ângulo de Torção

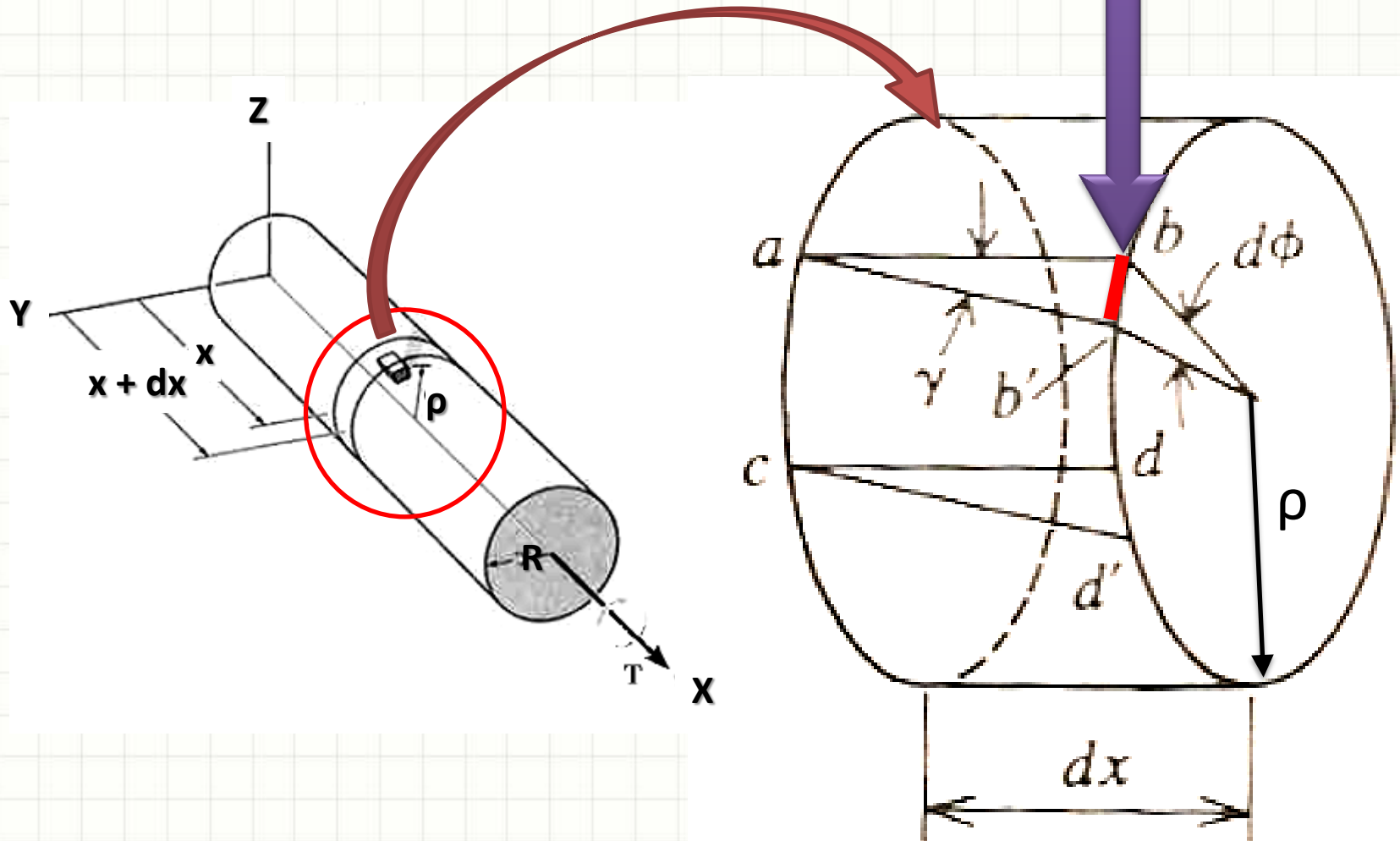
- Pode-se definir a deformação por ângulo  $\phi(x)$

$\phi(x)$  : varia com a distância do engastamento



# Ângulo de Torção

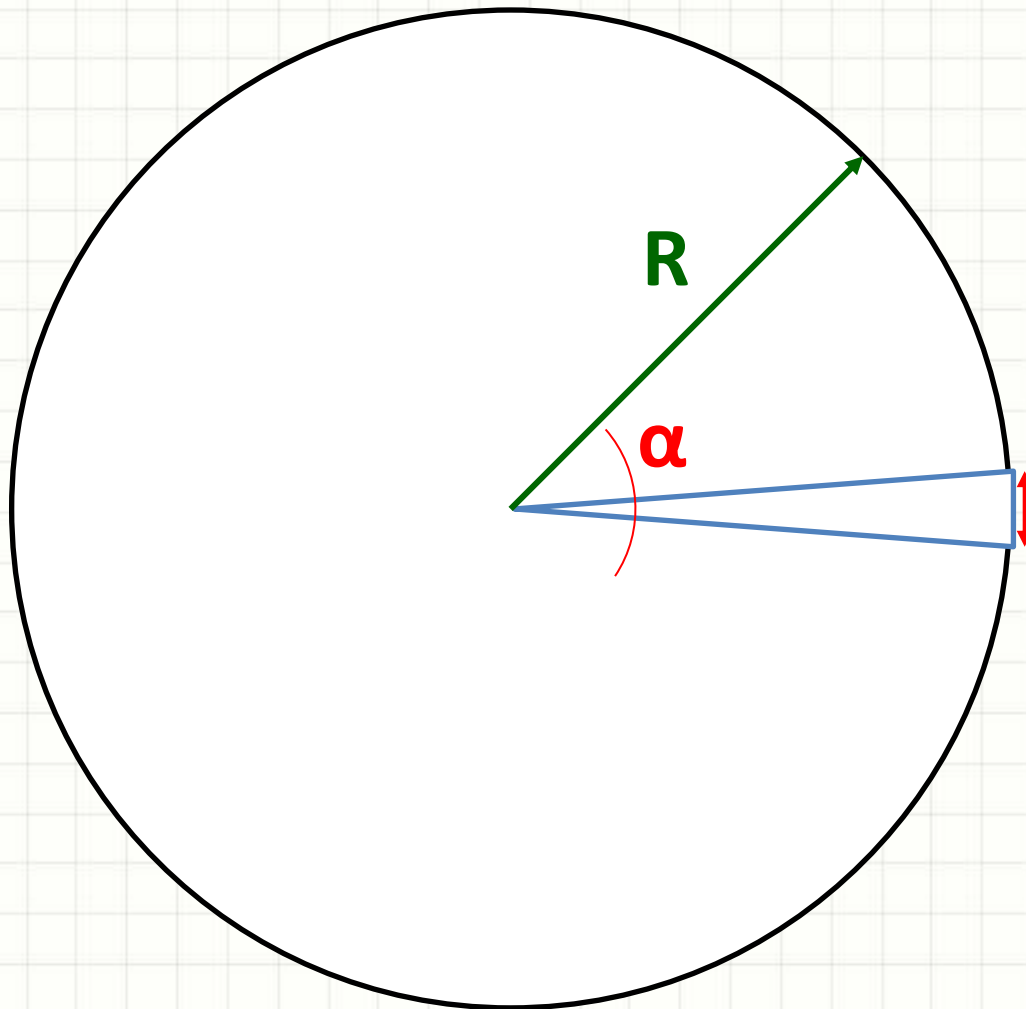
- Vamos entender melhor esse  $\phi(x)$





# Ângulo de Torção

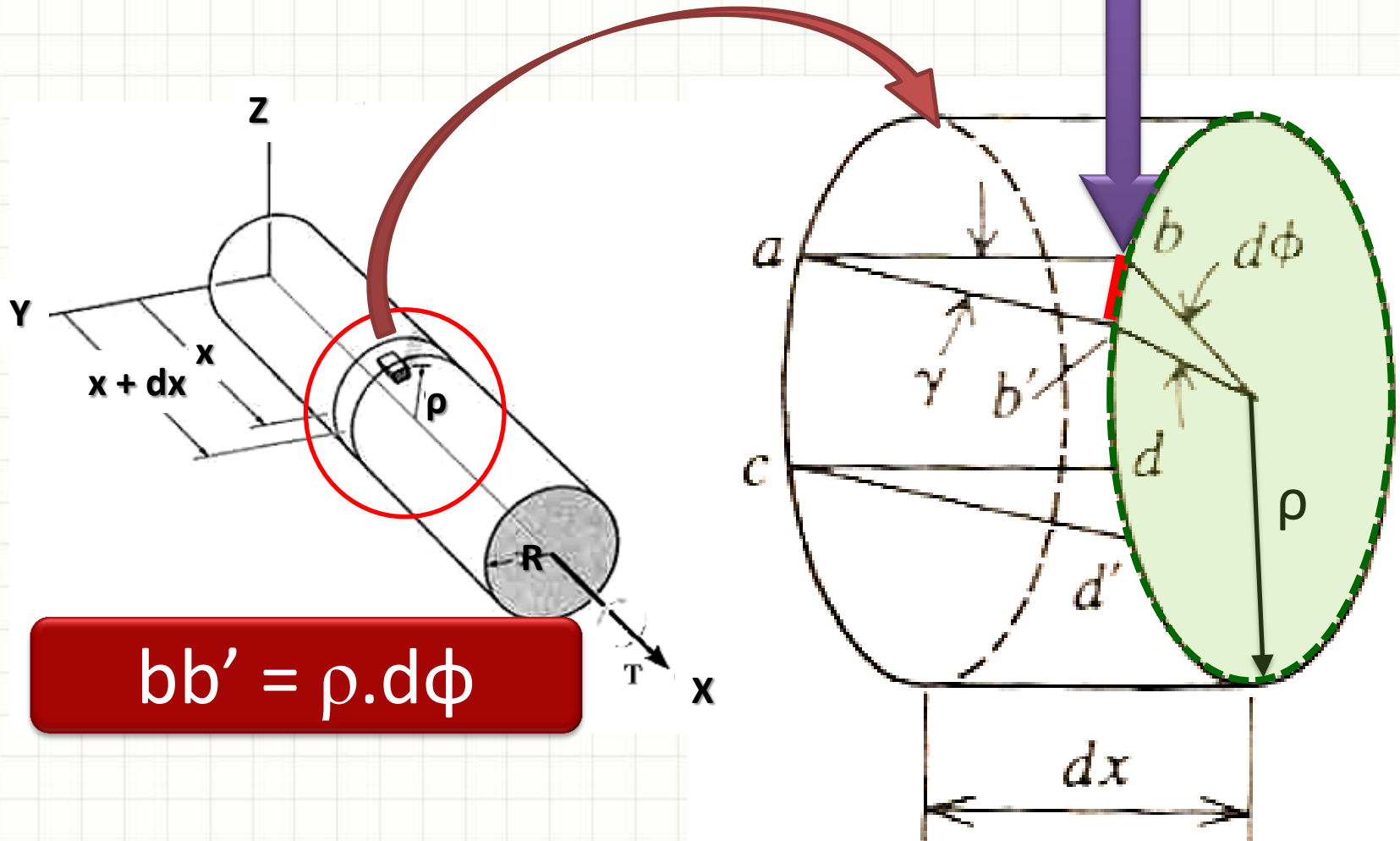
- Relembremos a relação trigonométrica



- Perímetro?  
–  $2 \cdot \pi \cdot R$
- E do arco?  
–  $\alpha \cdot R$

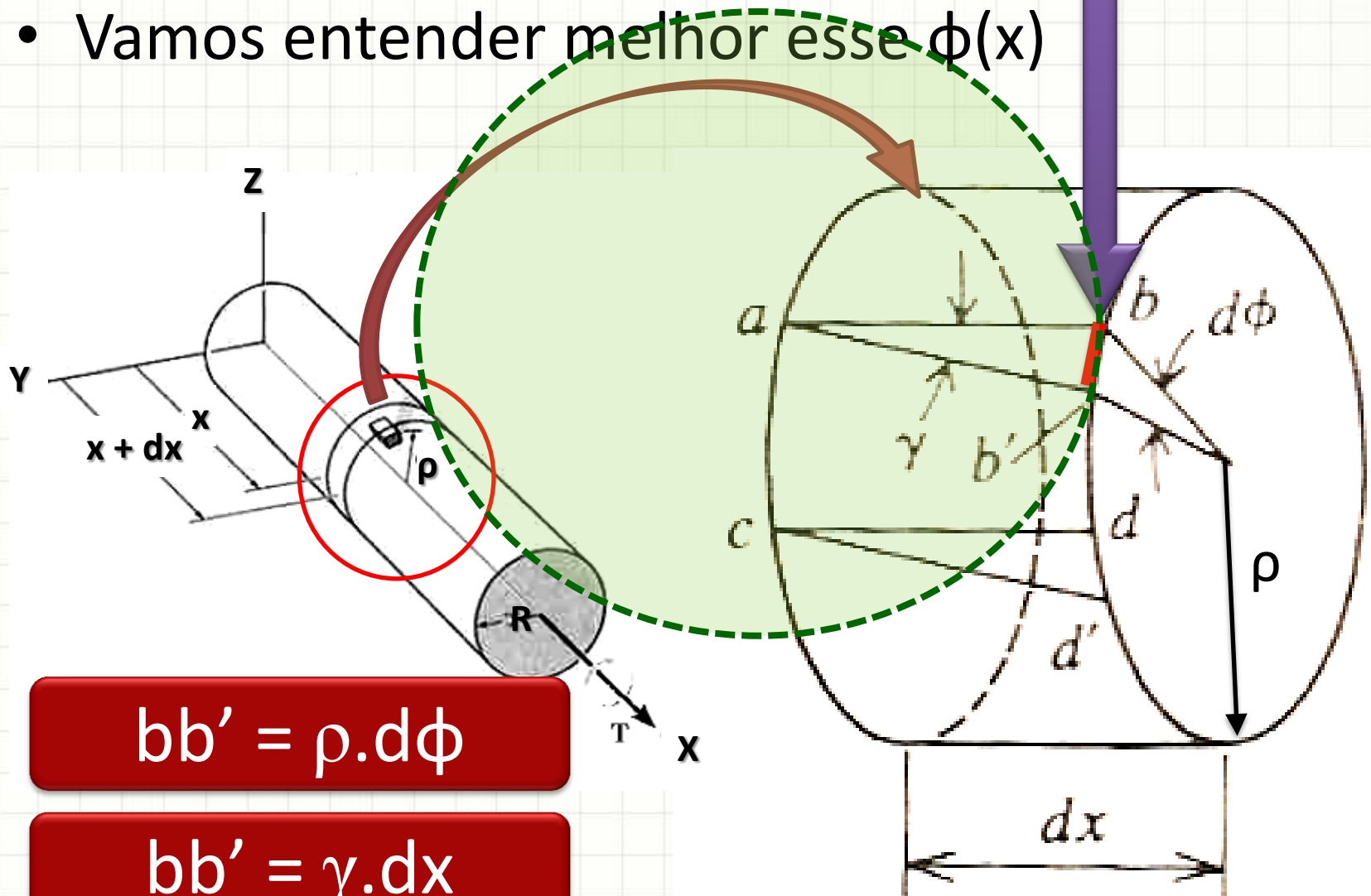
# Ângulo de Torção

- Vamos entender melhor esse  $\phi(x)$



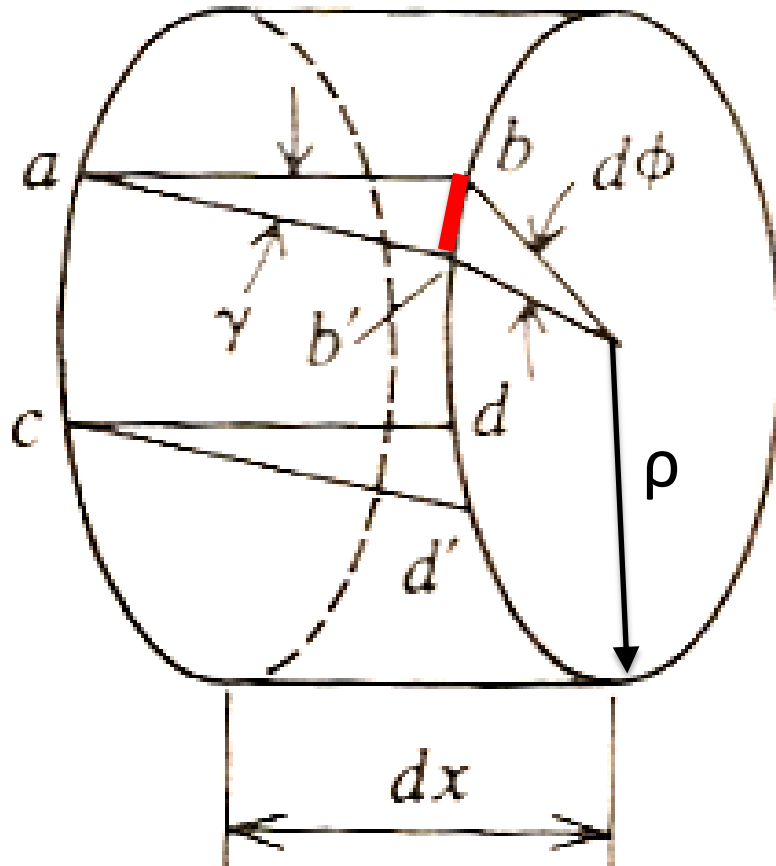
# Ângulo de Torção

- Vamos entender melhor esse  $\phi(x)$



# Ângulo de Torção

- Portanto...



$$bb' = \rho \cdot d\phi$$

$$bb' = \gamma \cdot dx$$

$$\rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

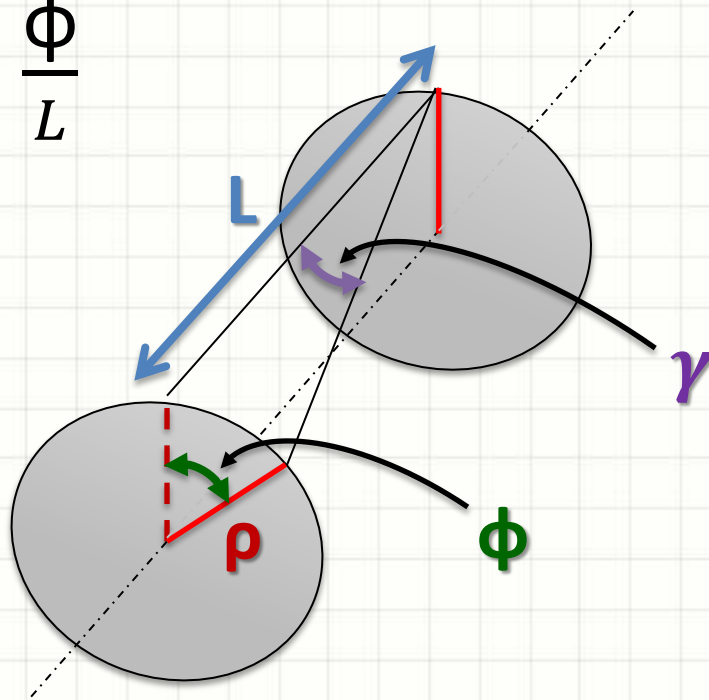
$\gamma$ : deformação de cisalhamento

# Ângulo de Torção

- Considerando torção pura...  $d\phi/dx = \text{cte.} = \theta$
- $\theta$  : âng. de torção por un. de comp. =  $\phi/L$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx} = \rho \cdot \frac{\phi}{L}$$

$$\gamma = \rho \cdot \theta$$



Quanto maior  
o raio...  
Maior o  $\gamma$





# A FÓRMULA DA TORÇÃO

# A Fórmula Torção

- Pela lei de Hooke, para material linear elástico

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

- Para a torção...

$$\tau = G \cdot \gamma$$

- No entanto...

$$\gamma = \rho \cdot \theta$$

- Logo...

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta$$

$\tau$  : tensão de cisalhamento  
 $G$  : módulo de elasticidade  
ao cisalhamento

O valor de  $\tau$  cresce com o  
raio...  $\tau = 0$  se  $\rho = 0$

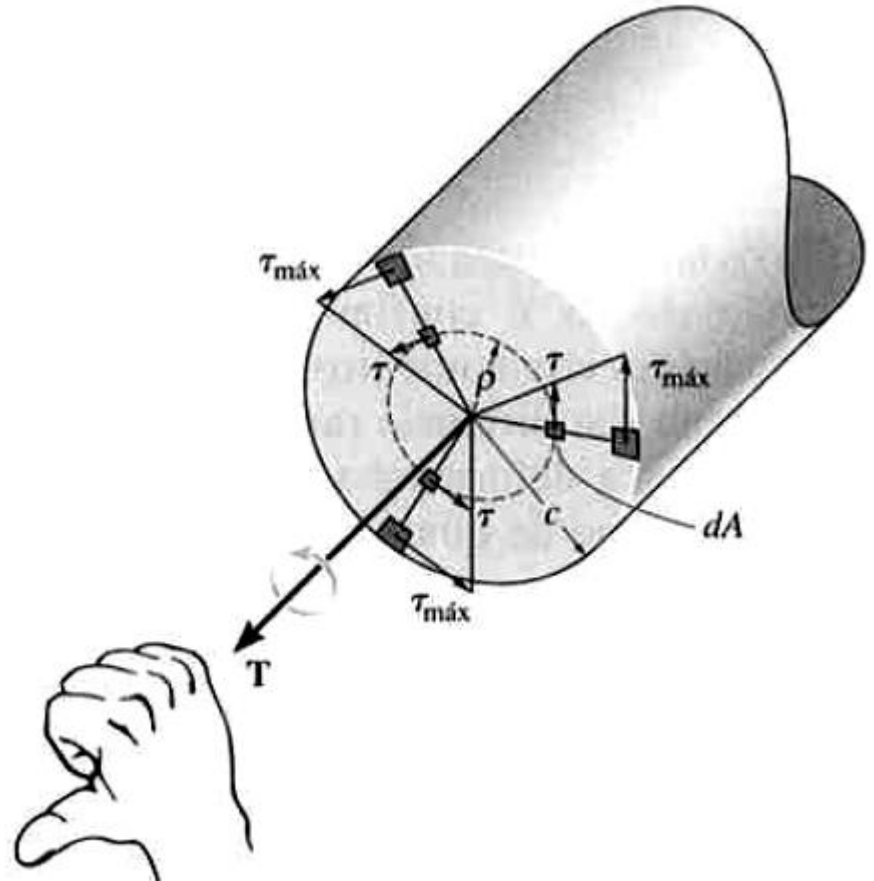
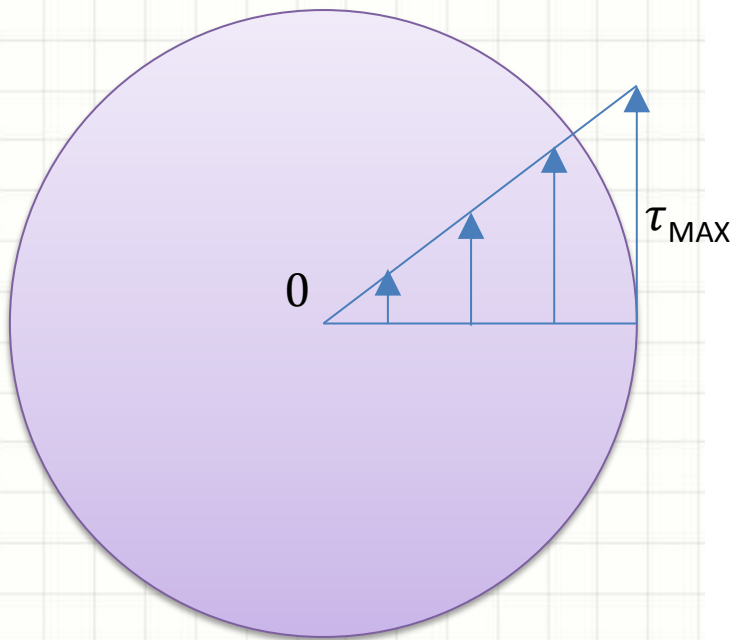
# A Fórmula Torção

- Visualizando a equação:

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta$$

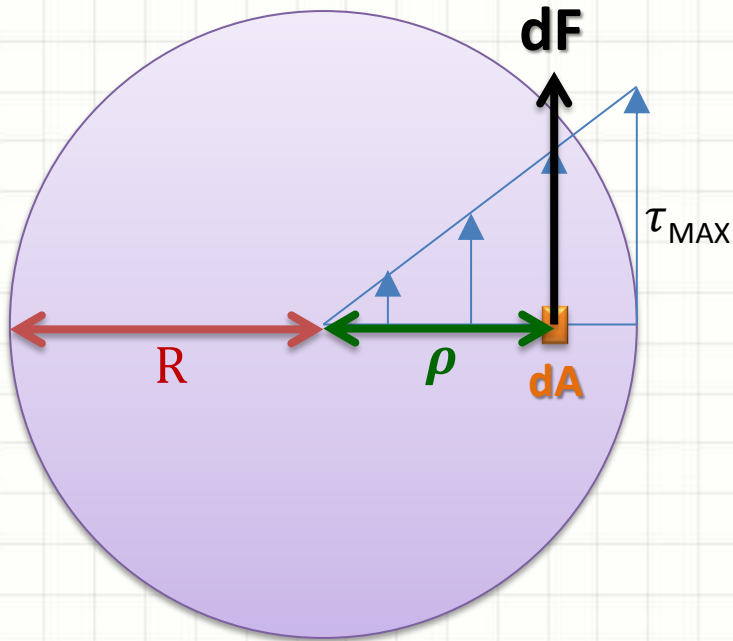
$$\rho = 0 \rightarrow \tau = 0$$

$$\rho = \text{máx} \rightarrow \tau = \text{máx}$$



# A Fórmula Torção

- Considerando que cada esforço age sobre  $dA$



$$dF = \tau \cdot dA$$

$$dT = \rho \cdot dF = \rho \cdot \tau \cdot dA$$

- Integrando...

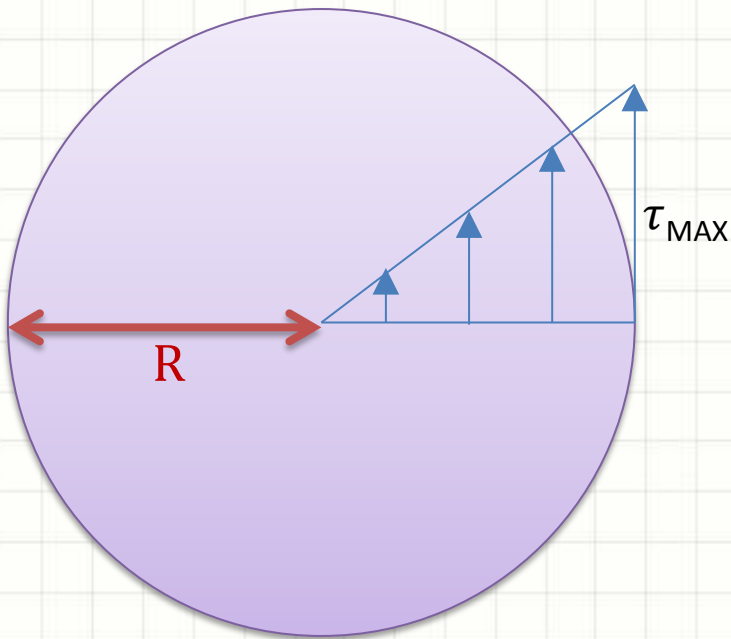
$$T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA$$

- Ocorre que...

$$\tau = \tau_{MAX} \cdot \frac{\rho}{R}$$

# A Fórmula Torção

- Ou seja... Podemos definir T como...



$$T = \int_A \rho \cdot \tau_{MAX} \cdot \frac{\rho}{R} \cdot dA$$

- Que resulta em...

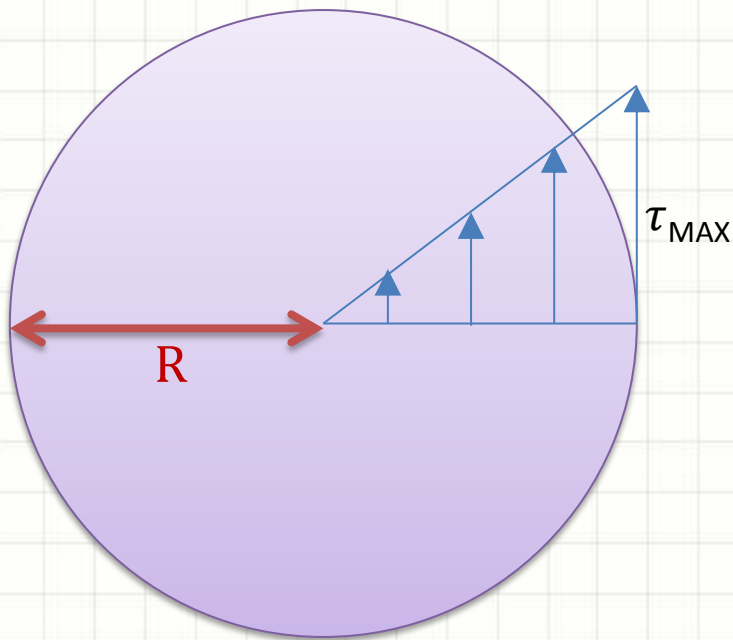
$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R} \cdot J$$



# A Fórmula Torção

- Define-se a fórmula da torção



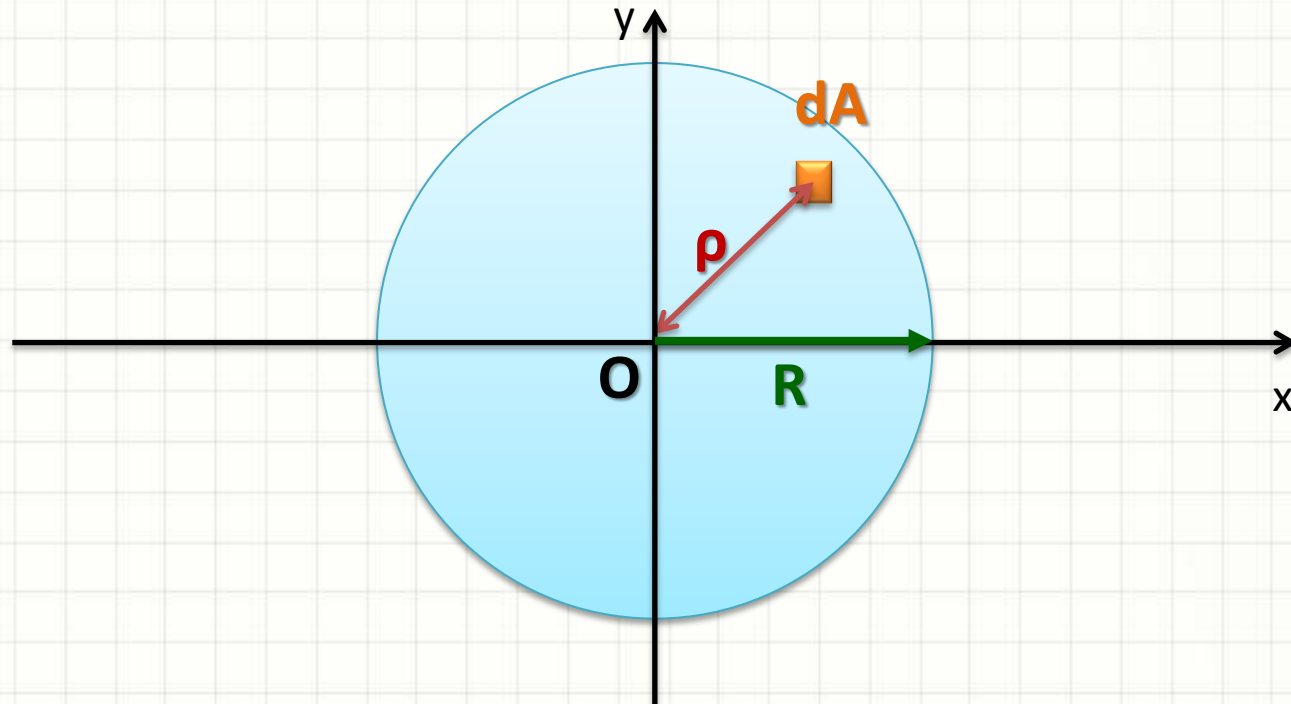
$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R} \cdot J$$

Ou...

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$

# Exemplo para Eixo Maciço

- Lembrando que  $J$ , para um eixo maciço...



$$J_o = \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

# Exemplo para Eixo Maciço

- Lembrando que para um eixo maciço

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot R^4} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

# Exemplo para Eixo Tubular

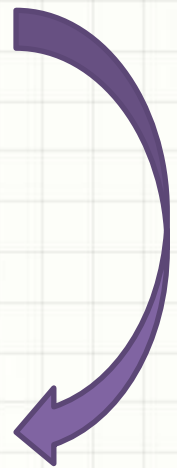
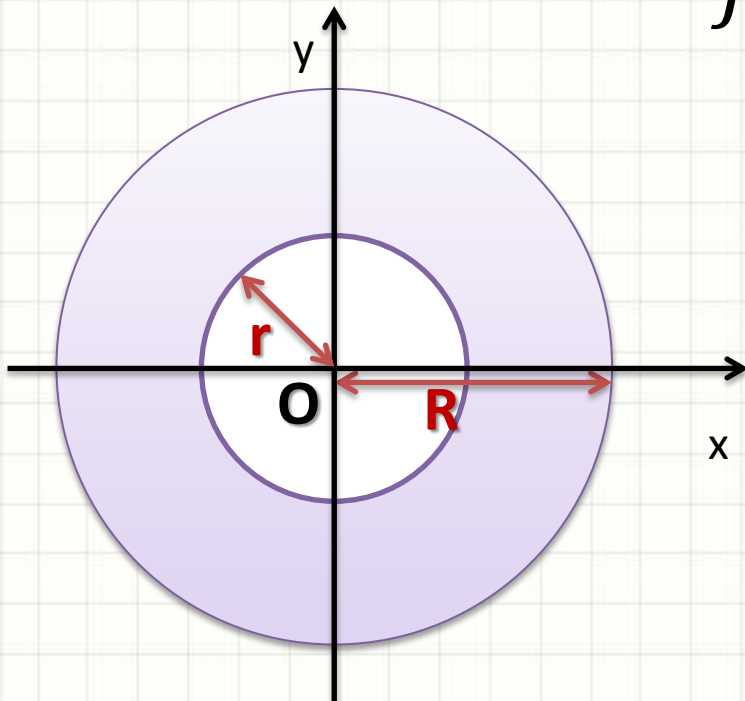
- No eixo tubular, há uma região vazia...  $J = ?$

$$J = J_{cheio} - J_{vazio}$$

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} - \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

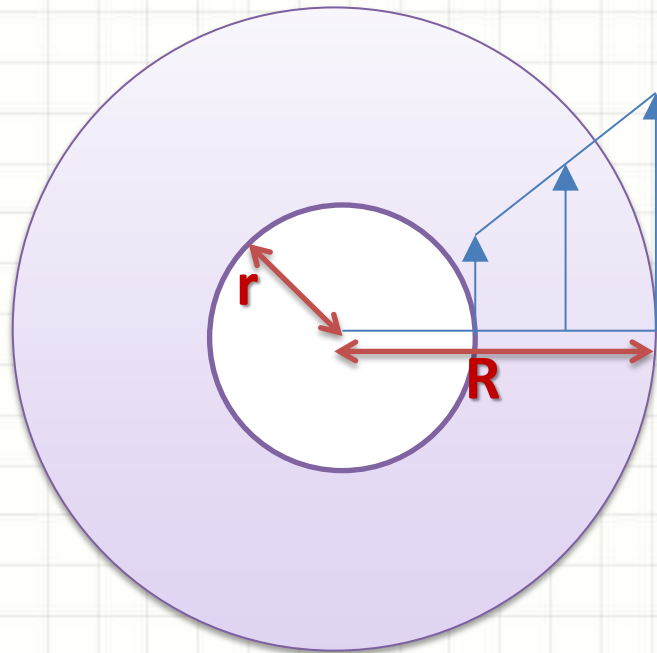
$$J = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$



# Exemplo para Eixo Tubular

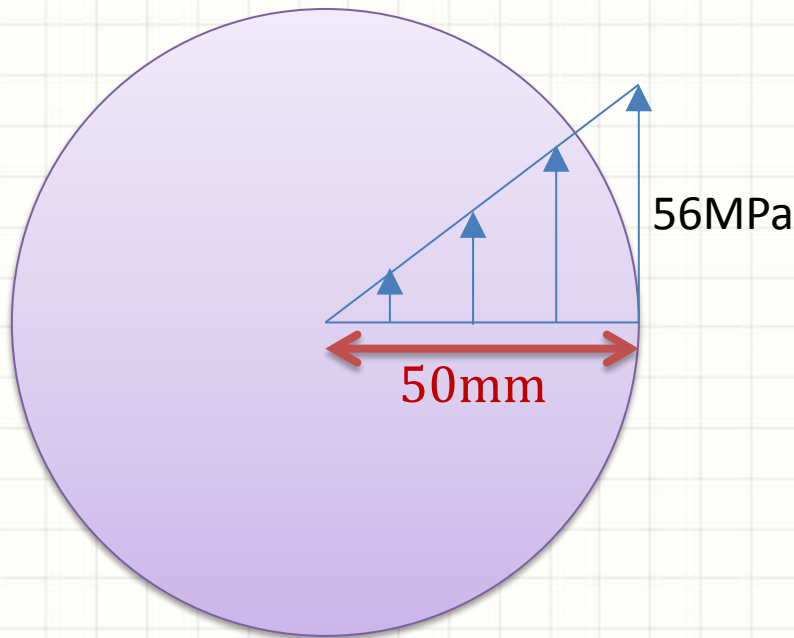
- Distribuição de cisalhamento





# Exemplo

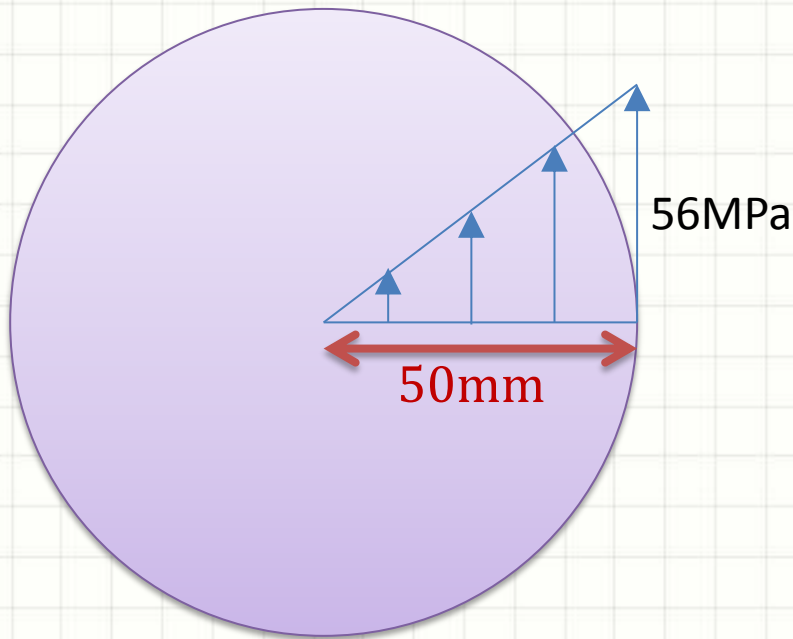
- Uma barra engastada de comprimento 10m e  $R=50\text{mm}$  está submetida à seguinte distribuição de cisalhamento



- Calcule o torque total agindo sobre a barra

# Exemplo

- $L=10\text{m}$      $R=50\text{mm}$      $T=?$



- Sabemos que...

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$

- Logo...

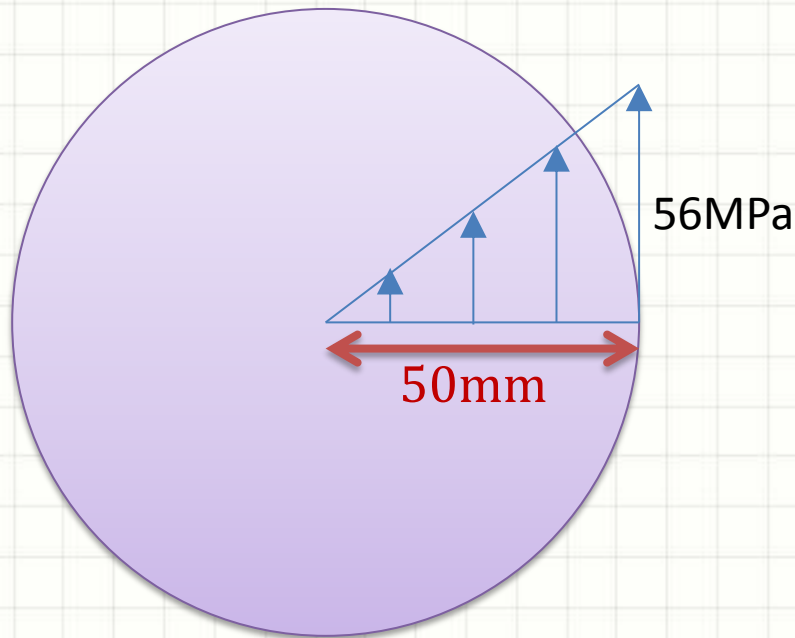
$$T = \frac{\tau_{MAX} \cdot J}{R}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX} \cdot \pi \cdot R^4}{R \cdot 2}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX} \cdot \pi \cdot R^3}{2}$$

# Exemplo

- $L=10\text{m}$      $R=50\text{mm}$      $T=?$



- Então...

$$T = \frac{\tau_{MAX} \cdot \pi \cdot R^3}{2}$$
$$T = \frac{56 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3}{2}$$

$$T = 28 \cdot \pi \cdot 125$$

$$T = 10995,572 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$\cong 11 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



**PAUSA PARA O CAFÉ!**



# **TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA POR TORÇÃO**



# A Potência e o Torque

- **Potência:** trabalho / unidade de tempo
- **Trabalho:** força x deslocamento
- **Potência** = força x deslocamento / tempo
- A potência pelo torque fica

$$P = T \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

- Logo...

$$P = T \cdot \omega$$

P : potência, em watts  
T : torque, em N.m  
 $\omega$  : vel. angular, em rad/s

# A Potência e o Torque

- Cisalhamento máximo?

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$

- Mas... Tirando T da fórmula da potência...

$$P = T \cdot \omega \Rightarrow T = \frac{P}{\omega}$$

- Logo...

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot R}{\omega \cdot J}$$

# A Potência e o Torque

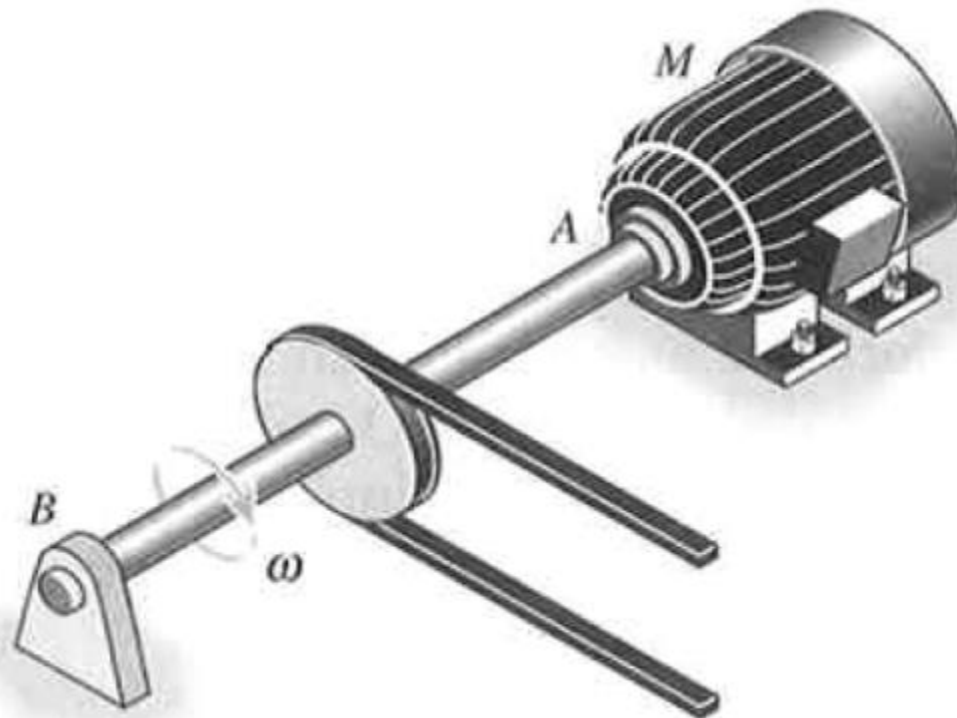
- Como  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  (com  $f$  em Hz)
  - Logo...

$$P = T \cdot \omega \Rightarrow P = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot J}$$

# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750\text{W}$
- Se  $\omega = 175\text{ rpm}$ ,  $\tau_{ADM} = 100\text{MPa}$ , calcule  $D$



# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750W$
- Se  $\omega = 175 \text{ rpm}$ ,  $\tau_{ADM} = 100MPa$ , calcule  $D$
- Convertendo  $\omega$  para o S.I.:

$$\omega = \frac{175 \text{ rot}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rot}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 18,33 \text{ rad/s}$$



# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750\text{W}$
- Se  $\omega = 175 \text{ rpm}$ ,  $\tau_{\text{ADM}} = 100\text{MPa}$ , calcule  $D$
- Pela fórmula da potência:

$$P = T \cdot \omega \Rightarrow$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{3750}{18,33} = 204,6 \text{ N.m}$$

# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750W$
- Se  $\omega = 175 \text{ rpm}$ ,  $\tau_{ADM} = 100MPa$ , calcule  $D$
- Com  $T$ , podemos calcular  $\tau_{MAX}$

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{204,6 \cdot R \cdot 2}{\pi \cdot R^4} = \frac{409,2}{\pi \cdot R^3}$$

# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750W$
- Se  $\omega = 175 \text{ rpm}$ ,  $\tau_{ADM} = 100MPa$ , calcule  $D$
- Considerando  $\tau_{MAX} = \tau_{ADM}$

$$\tau_{MAX} = \frac{409,2}{\pi \cdot R^3} = 100 \cdot 10^6$$

# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750W$
- Se  $\omega = 175 \text{ rpm}$ ,  $\tau_{ADM} = 100MPa$ , calcule  $D$
- De onde concluimos que...

$$\frac{409,2}{\pi \cdot R^3} = 100 \cdot 10^6 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{4,092}{\pi \cdot 10^6}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{4,092}{\pi \cdot 10^6}} = \frac{1,092099}{10^2} = 0,01092099m$$

# A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço,  $P = 3750W$
- Se  $\omega = 175 \text{ rpm}$ ,  $\tau_{ADM} = 100MPa$ , calcule  $D$
- Se temos o raio, temos o diâmetro:

$$R = 0,01092099m$$

$$D = 0,021842m$$

$$D \cong 2,2cm$$

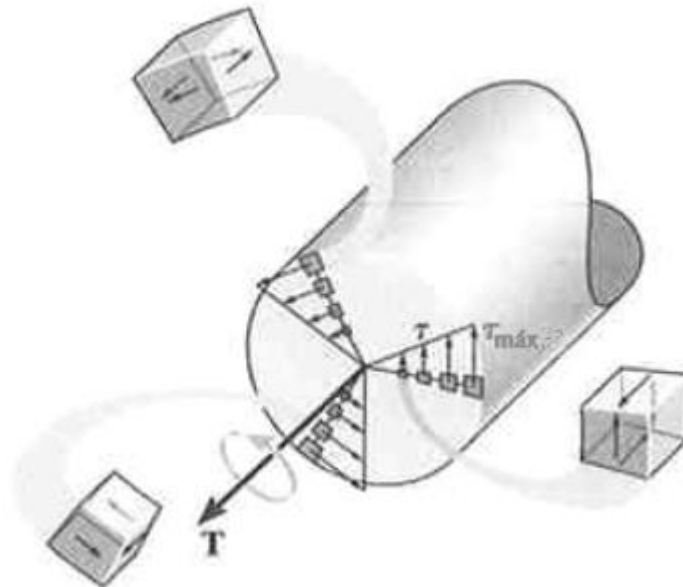


**ROMPIMENTO**



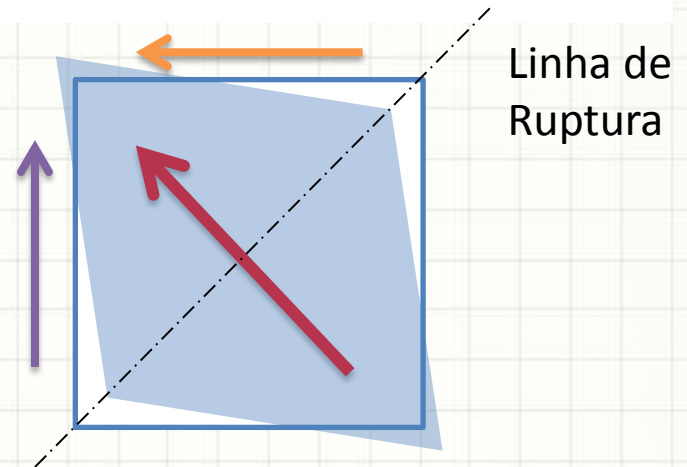
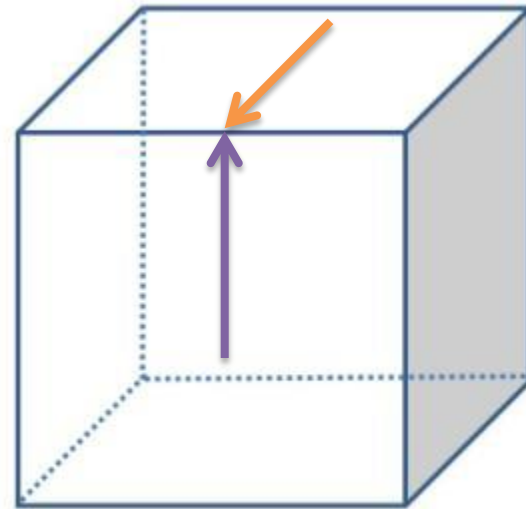
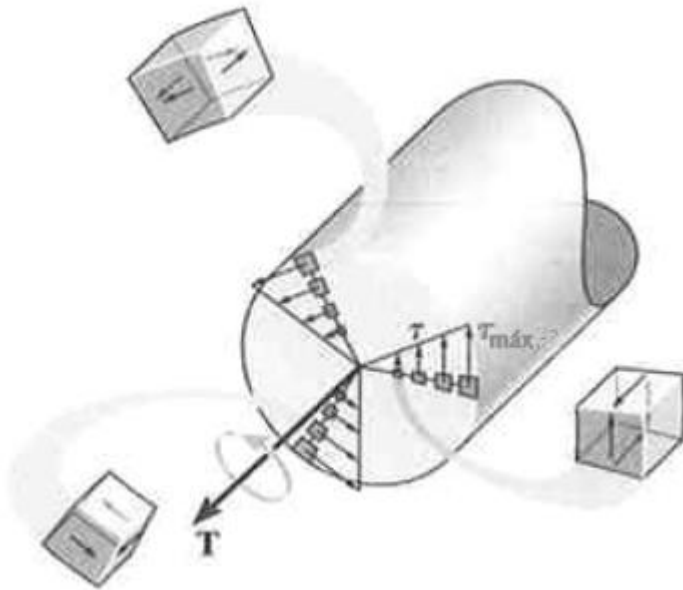
# Rompimento por Torção

- O rompimento por forças de cisalhamento...
  - É no plano perpendicular a estas forças
- É isso que ocorre na torção?
- O rompimento é helicoidal!
  - Por quê?



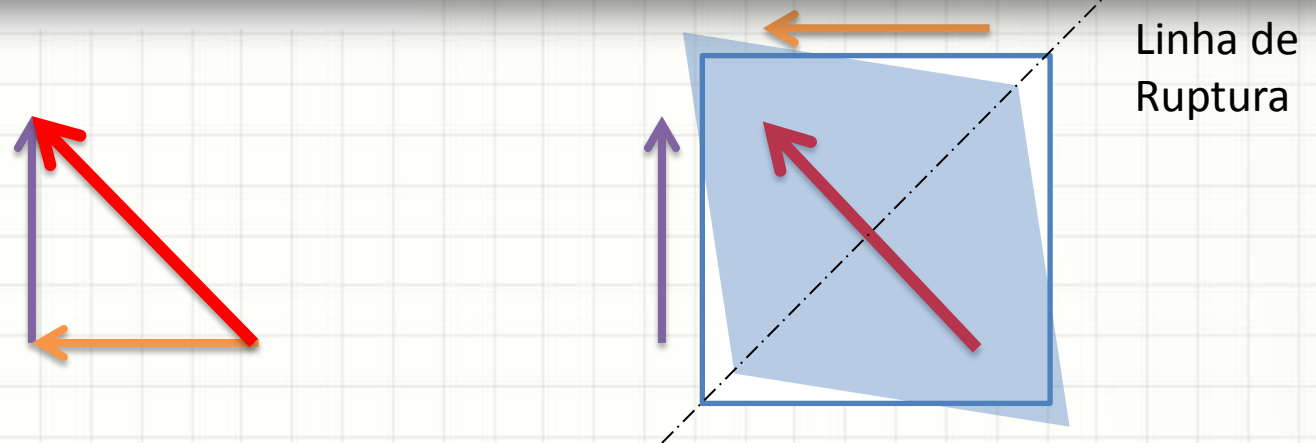
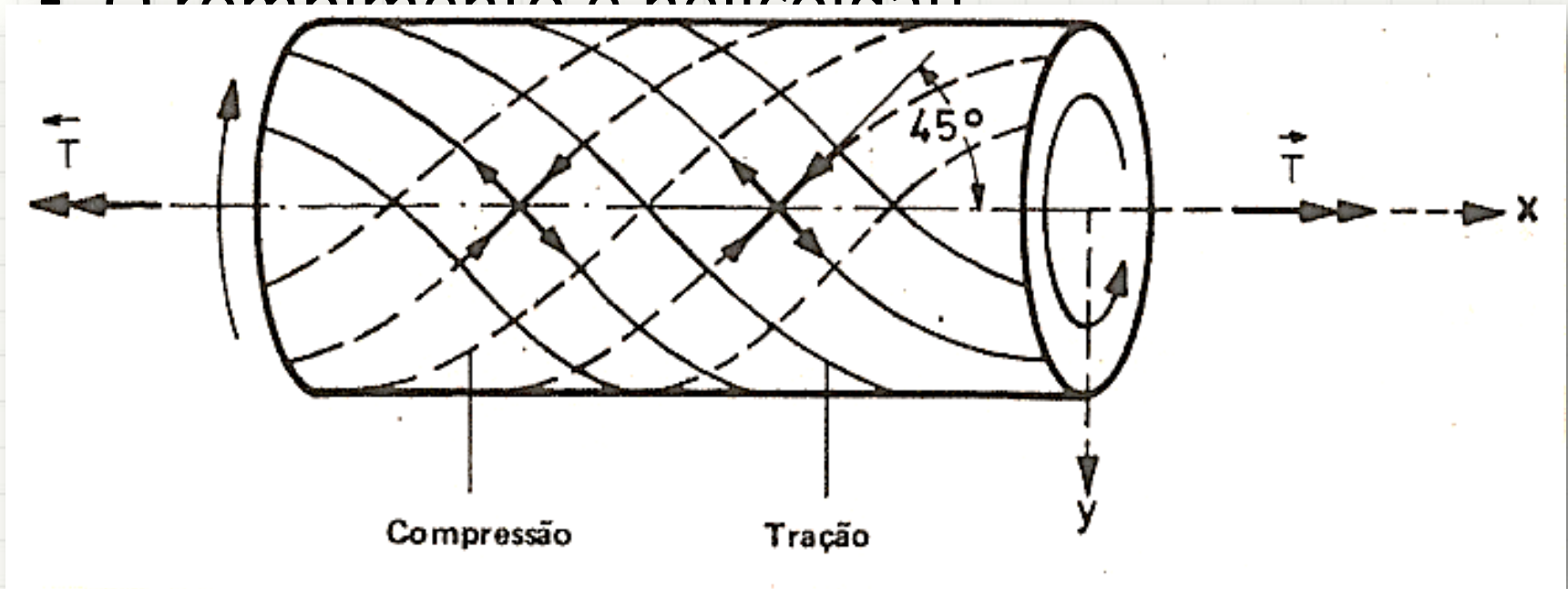
# Rompimento por Torção

- O rompimento é helicoidal!



# Rompimento por Torção

- O rompimento é helicoidal





**PERGUNTAS?**



# CONCLUSÕES

# Resumo

- Torção: deformações medidas angularmente
    - Deformação depende do raio!
  - Tensão de cisalhamento máxima:  $f(T,R,J)$
  - Eixos: rotação  $\rightarrow$  potência máxima admissível
  - **Exercitar**: Exercícios Hibbeler
- 

- E a deformação total da torção?
- Como calcular o ponto de máxima torção?





**PARA TREINAR**

# Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 109 a 124
- Mínimos:
  - Exercícios 5.1, 5.2, 5.5, 5.25
  - Nota: no 5.1, onde está 15pol, leia 1,5pol
- Extras:
  - Exercícios 5.3, 5.6, 5.7, 5.26, 5.30
- Adote essas conversões:
  - 1 ksi = 7MPa
  - 1 pol = 25mm
  - 1hp = 1000W

# Para Treinar em Casa

## Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**



# EXERCÍCIO

# Exercício – Entrega Individual

- Um eixo de comprimento 10m e  $R=10\text{cm}$  está submetido ao  $T = 80\text{kN.m}$ .
- Calcule  $\tau_{\text{MAX}}$  e a potência transmitida a 5000RPM em cada uma das configurações abaixo:

