



# RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

## TORÇÃO PARTE II

Prof. Dr. Daniel Caetano

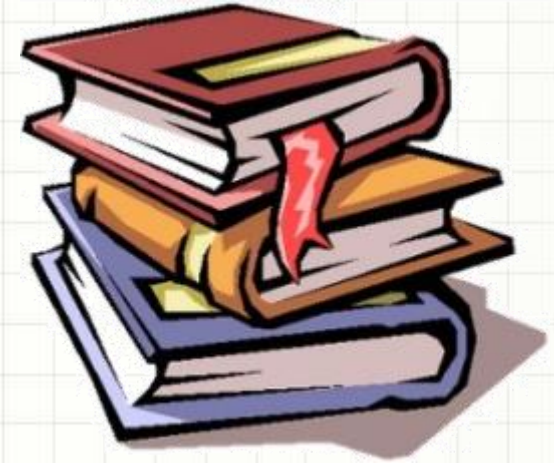
2014 - 1

# Objetivos

- Calcular deformações (rotações) por torção
- Capacitar para o traçado de diagramas de momento torçor em barras



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

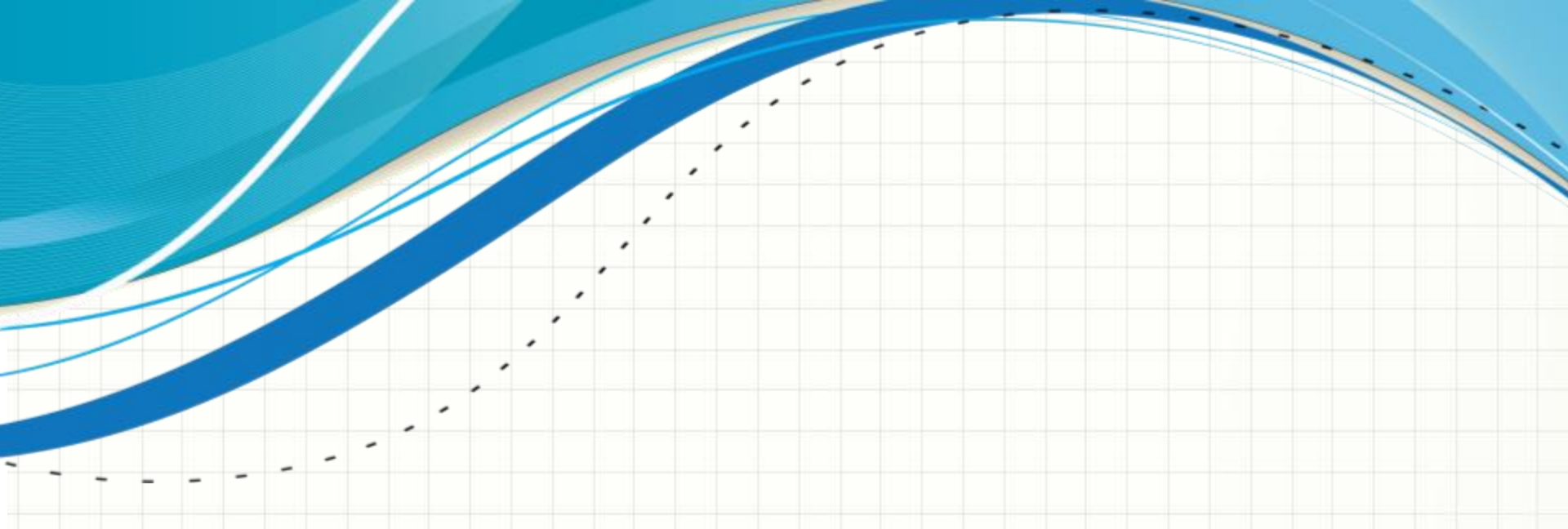
<http://www.caetano.eng.br/>

(Resistência dos Materiais II – Aula 6)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler) – Parte 1 / 2  
Páginas 153 a 166.

---

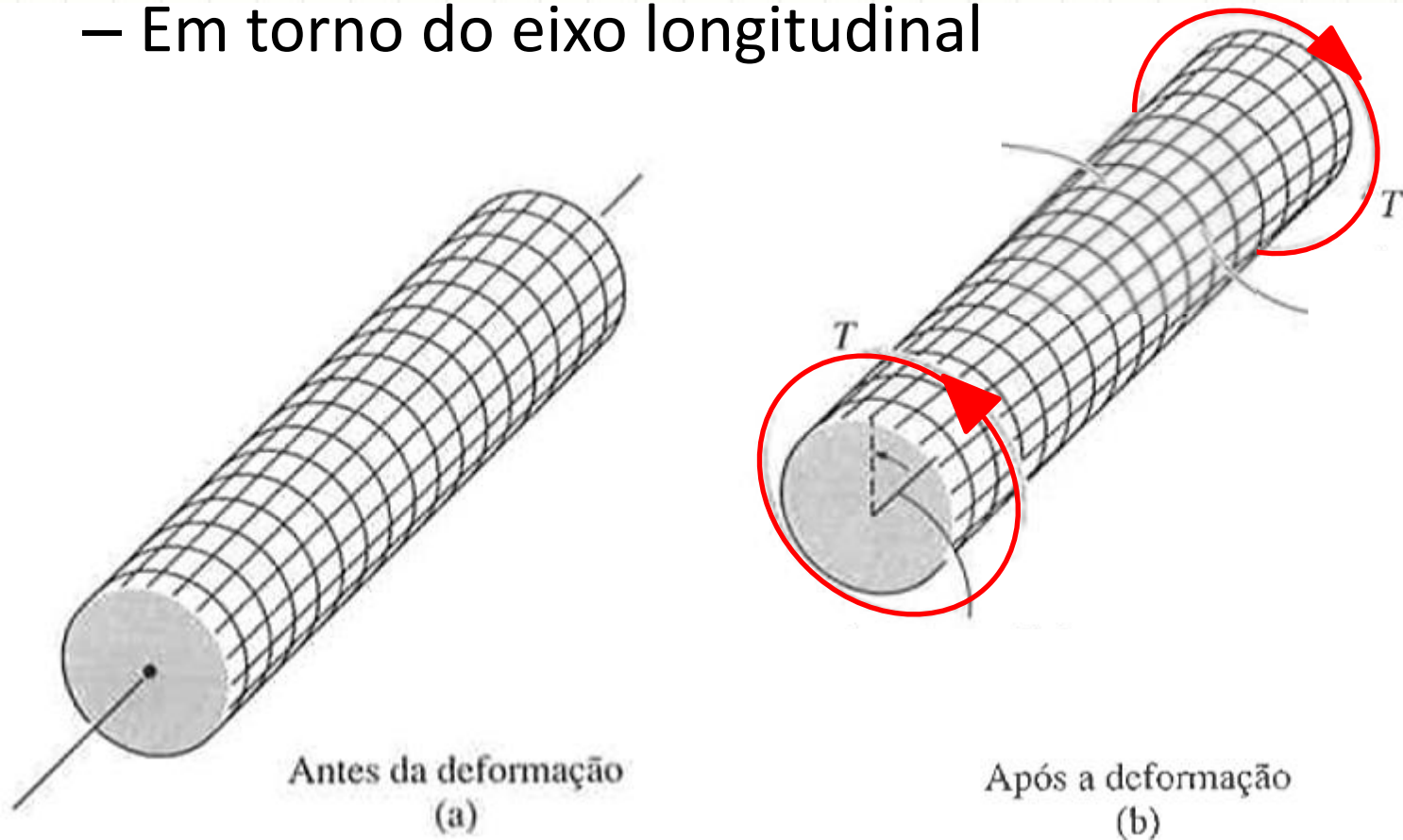


**RELEMBRANDO:**

# **CISALHAMENTO E A TORÇÃO**

# Deformação por Torção

- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - Em torno do eixo longitudinal

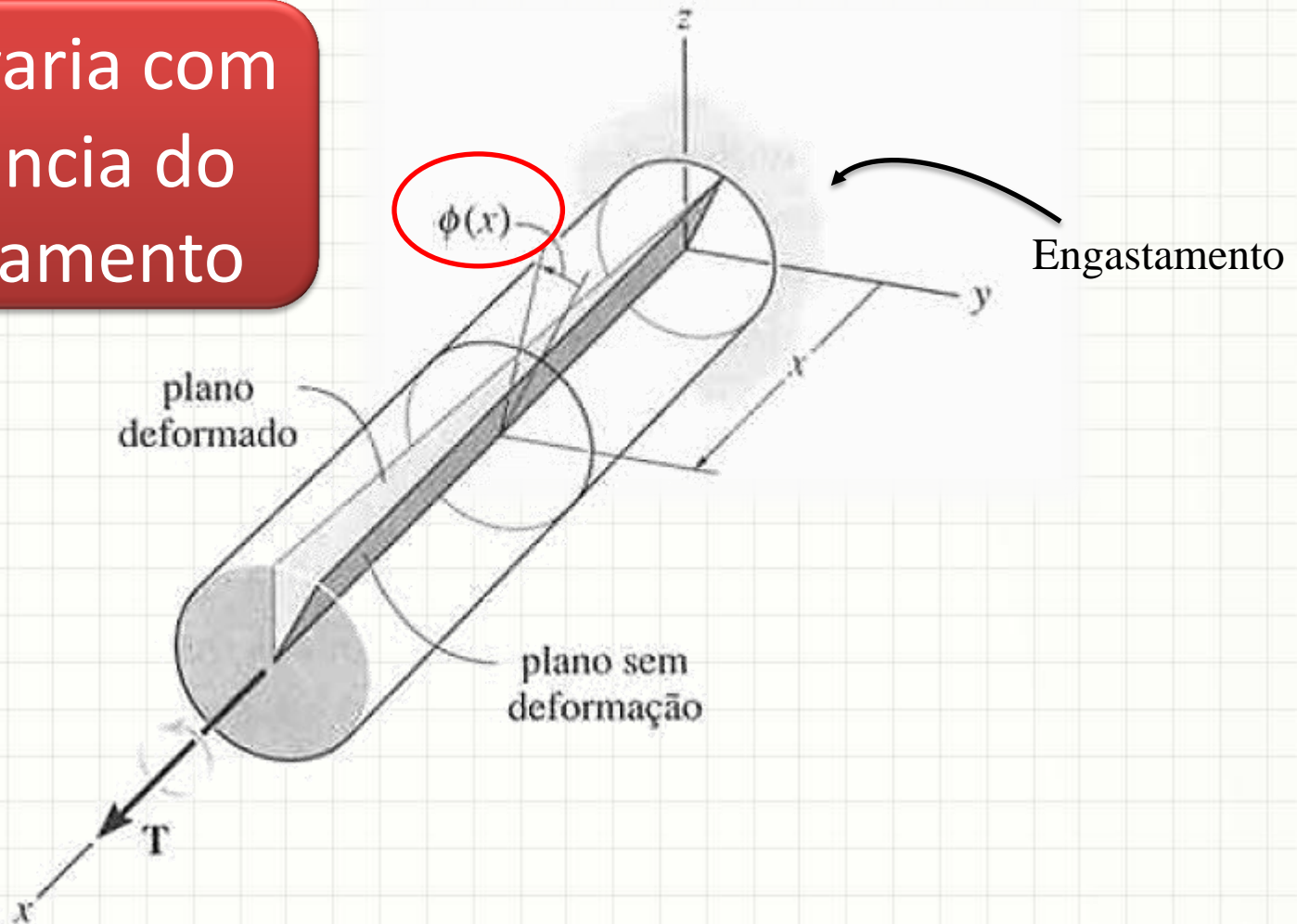




# Deformação por Torção

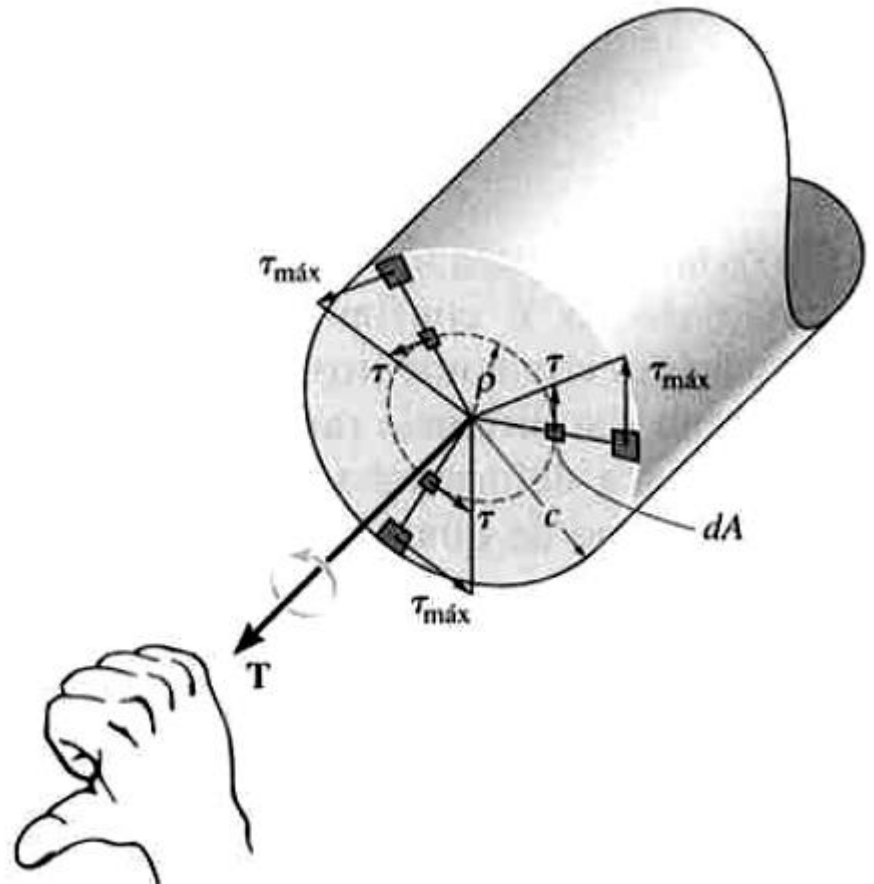
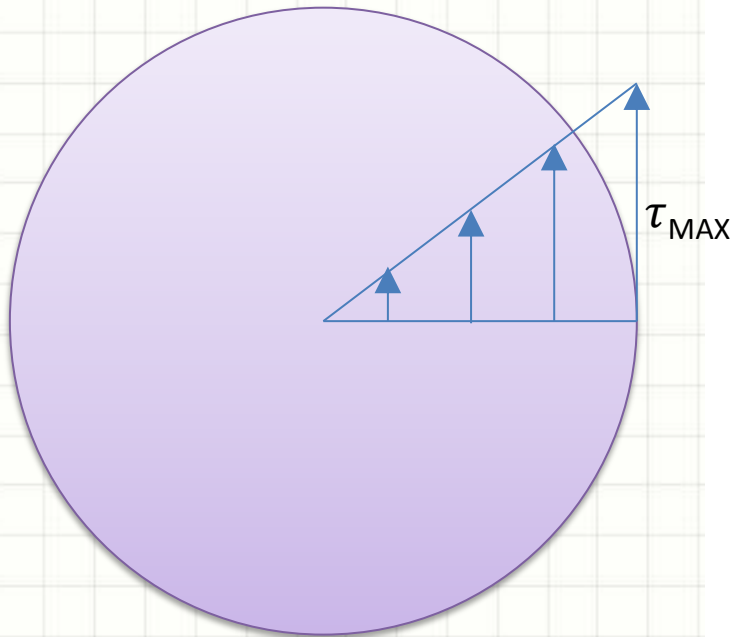
- Pode-se definir a deformação por ângulo  $\phi(x)$

$\phi(x)$  : varia com a distância do engastamento



# Deformação por Torção

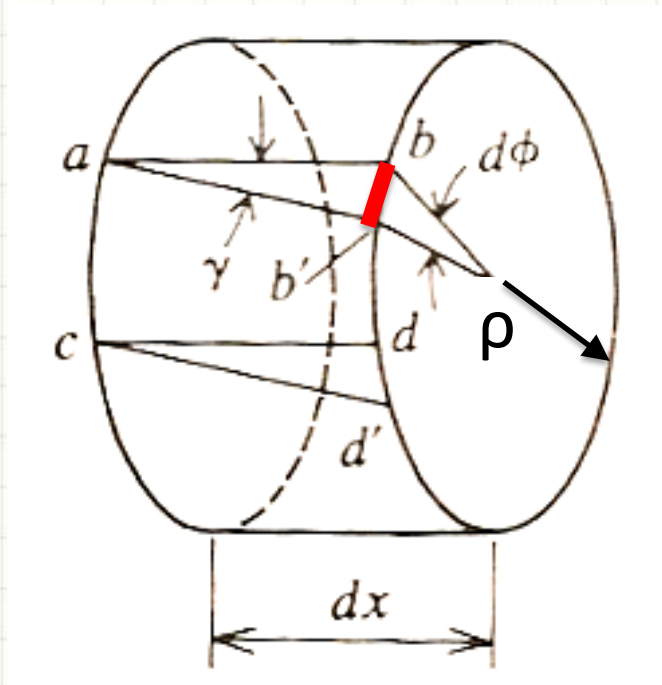
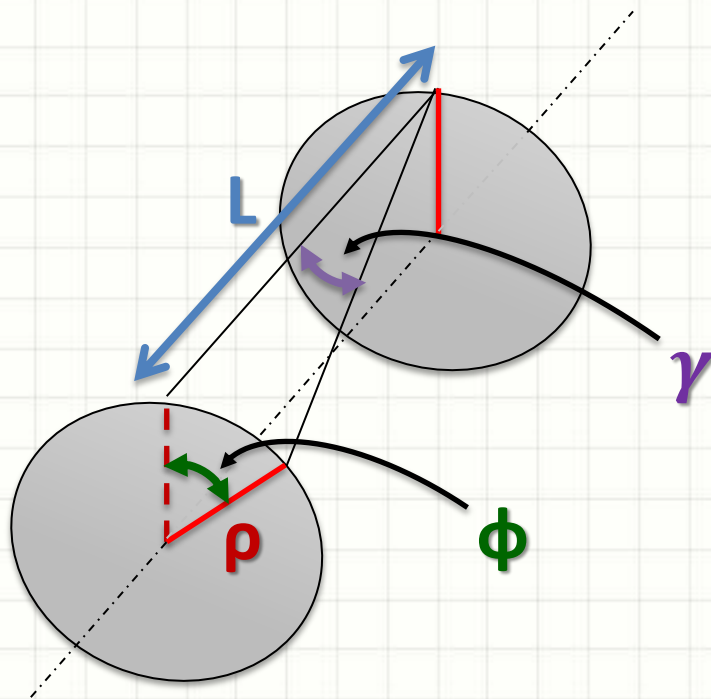
- Deformação causada pelo cisalhamento



# Deformação por Torção

$$\gamma \cdot dx = \rho \cdot d\phi$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$



Como  
calcular  $\phi$  ?





# CÁLCULO DO ÂNGULO DE TORÇÃO

# Ângulo de Torção

- De maneira geral, podemos considerar:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

- Isolando  $d\phi$ :

$$d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

# Ângulo de Torção

- De maneira geral, podemos considerar:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

- Isolando  $d\phi$ :

$$d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

- Pela lei de Hooke...

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

# Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

- Resulta em:

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

# Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$



# Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

- Pela fórmula do cisalhamento na torção...

$$\tau = \frac{T(x) \cdot \rho}{J(x)}$$

- Então...

$$d\phi = \frac{T(x) \cdot \rho}{G \cdot J(x)} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

# Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \frac{T(x) \cdot \cancel{\rho}}{G \cdot J(x)} \cdot \frac{dx}{\cancel{\rho}}$$

$$d\phi = \frac{T(x)}{G \cdot J(x)} \cdot dx$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{G \cdot J(x)} \cdot dx$$

# Ângulo de Torção

- Considerando T e J constantes...

$$\phi = \int_0^L \frac{T}{G \cdot J} \cdot dx$$

$$\phi = \frac{T}{G \cdot J} \cdot \int_0^L dx$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \text{ [rad]}$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

# Exemplo: Eixo Maciço

- Lembrando que para um eixo maciço

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

- Como...

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

- Então...

$$\phi = \frac{2 \cdot T \cdot L}{\pi \cdot R^4 \cdot G} \text{ [rad]}$$

# Exemplo: Eixo Maciço

- Um momento torçor de 1MN.m age sobre um eixo de aço,  $G=50\text{GPa}$ , com raio 10cm (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?

**Passo 1:**

**Calcular J**

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{2} = 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}$$



# Exemplo para Eixo Maciço

- Um momento torçor de 1MN.m age sobre um eixo de aço,  $G=50\text{GPa}$ , com raio 10cm (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?

$$J = 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}$$

**Passo 2:**  
**Calcular  $\phi$**

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\phi = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}}$$

# Exemplo para Eixo Maciço

- Um momento torçor de 1MN.m age sobre um eixo de aço,  $G=50\text{GPa}$ , com raio 10cm (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?
- Logo...

$$\phi = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}}$$

$$\phi = \frac{100}{25 \cdot \pi} = \frac{4}{\pi} \text{ rad}$$



# RESUMO DE FÓRMULAS

# Fórmulas para Torção

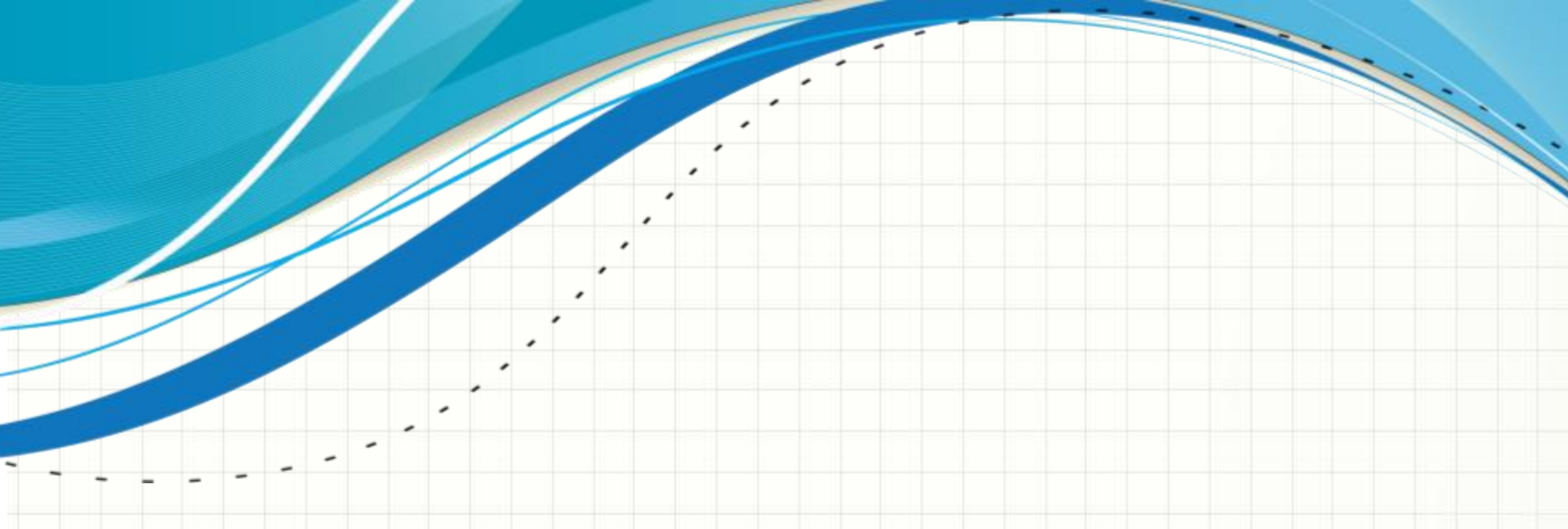
- Pelo que vimos até agora...

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T}{J} \cdot R$$

$$P = T \cdot \omega$$

Então... A partir do momento torçor T calculamos tudo?

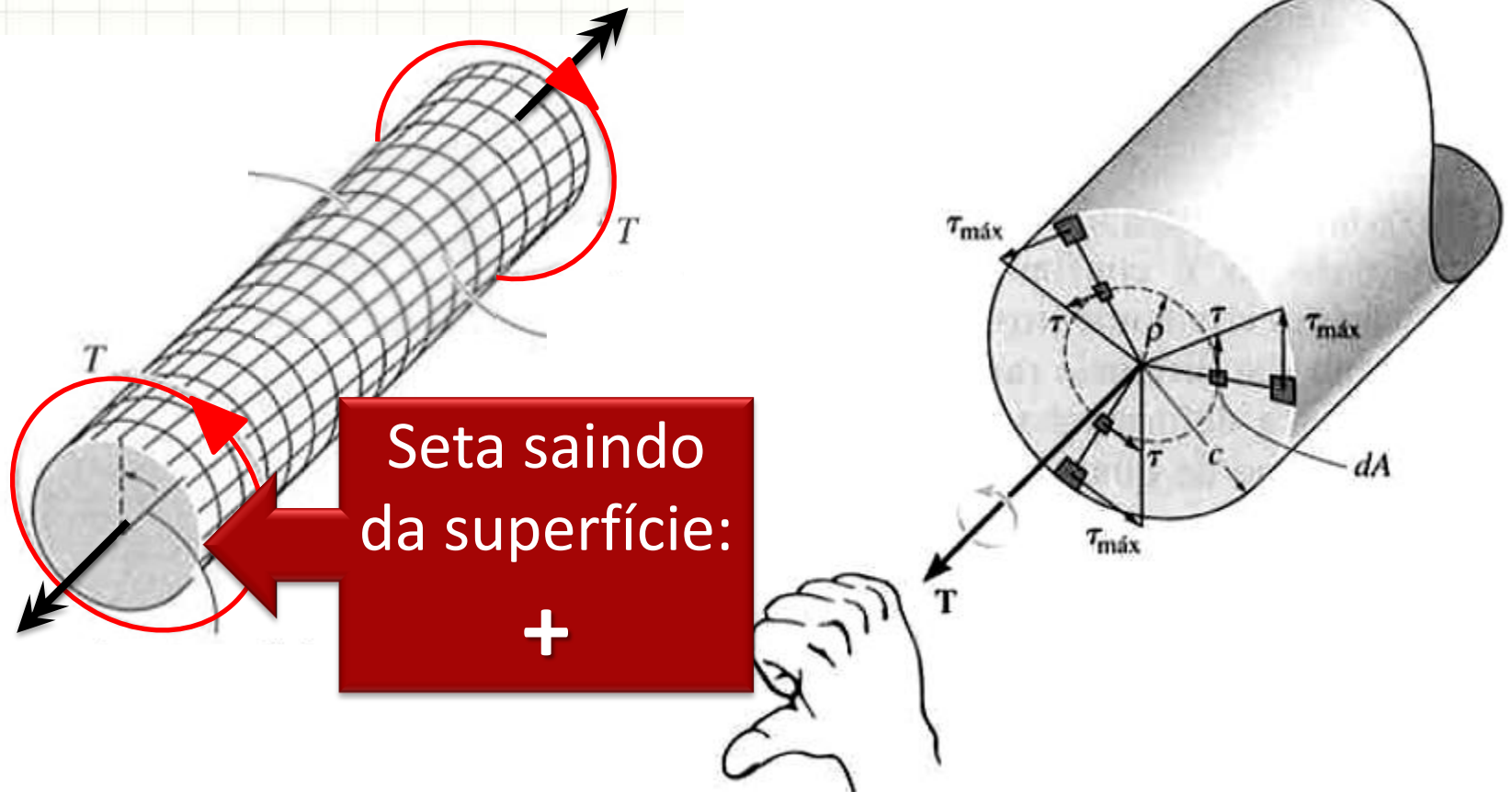


# **DIAGRAMA DE MOMENTO TORÇOR**



# Convenção de Sinais

- Sinal é dado pela regra da mão direita



# Diagramas Planos

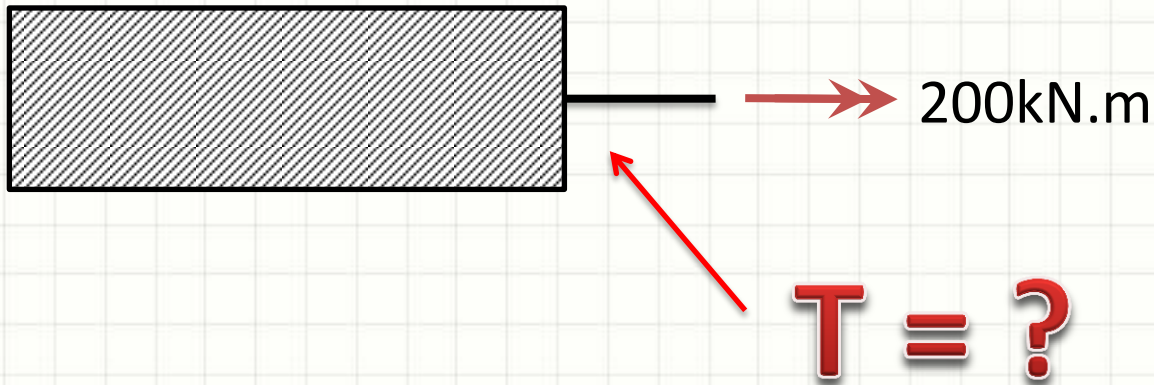
- Momentos Torçores Concentrados



T: \_\_\_\_\_

# Diagramas Planos

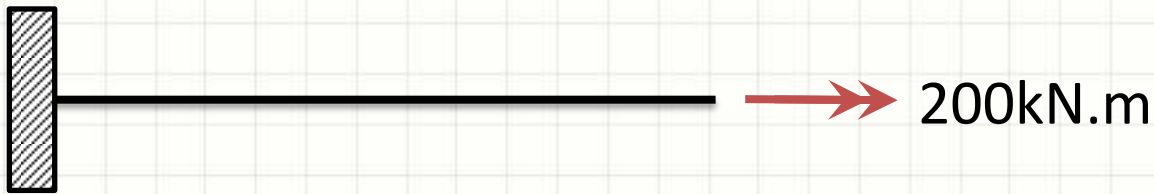
- Momentos Torçores Concentrados



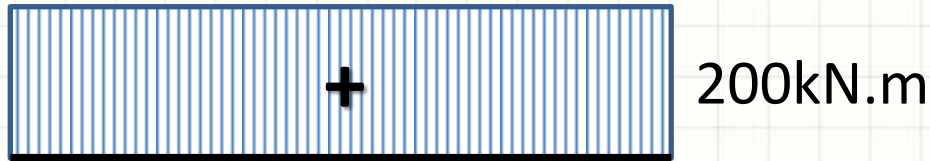
T: \_\_\_\_\_

# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



T:



# Diagramas Planos

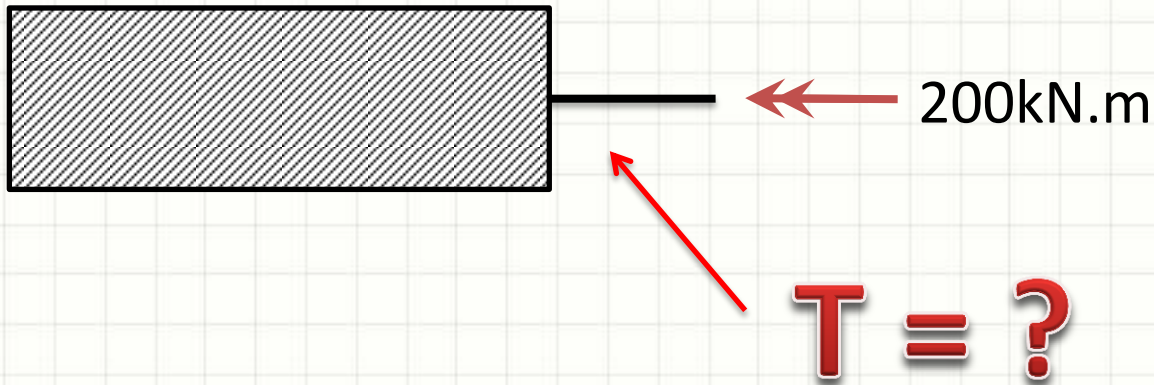
- Momentos Torçores Concentrados



T: \_\_\_\_\_

# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados

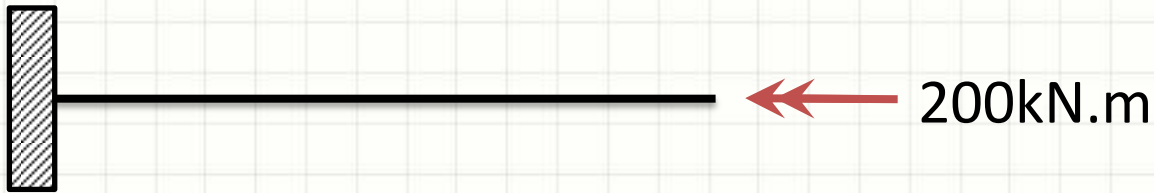


T: \_\_\_\_\_

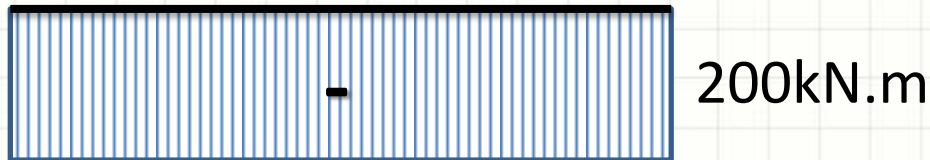


# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados

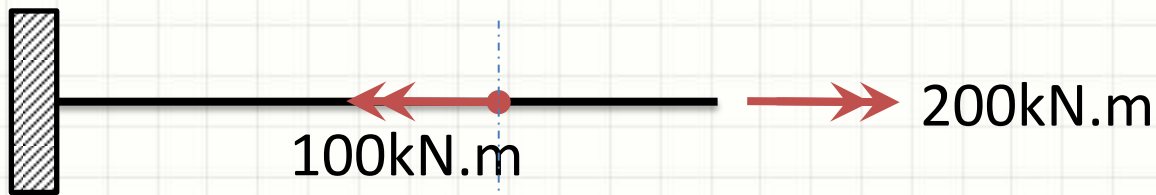


**T:**



# Diagramas Planos

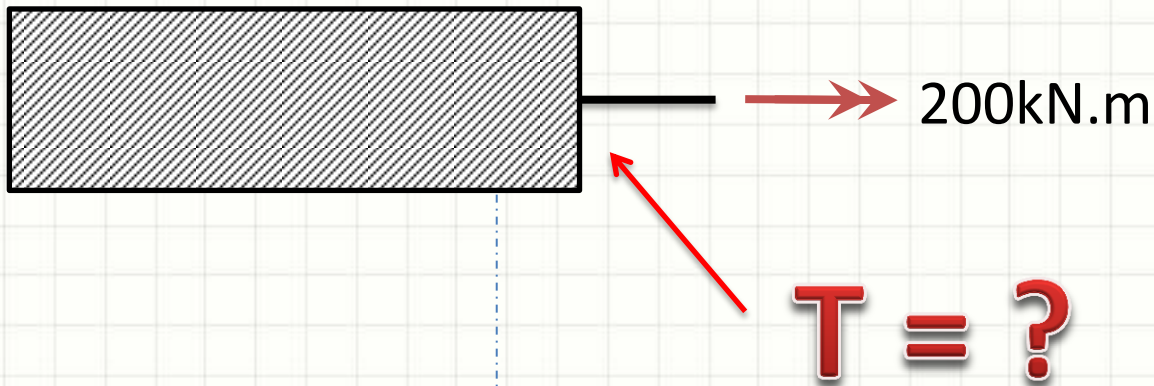
- Momentos Torçores Concentrados



T: \_\_\_\_\_

# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados

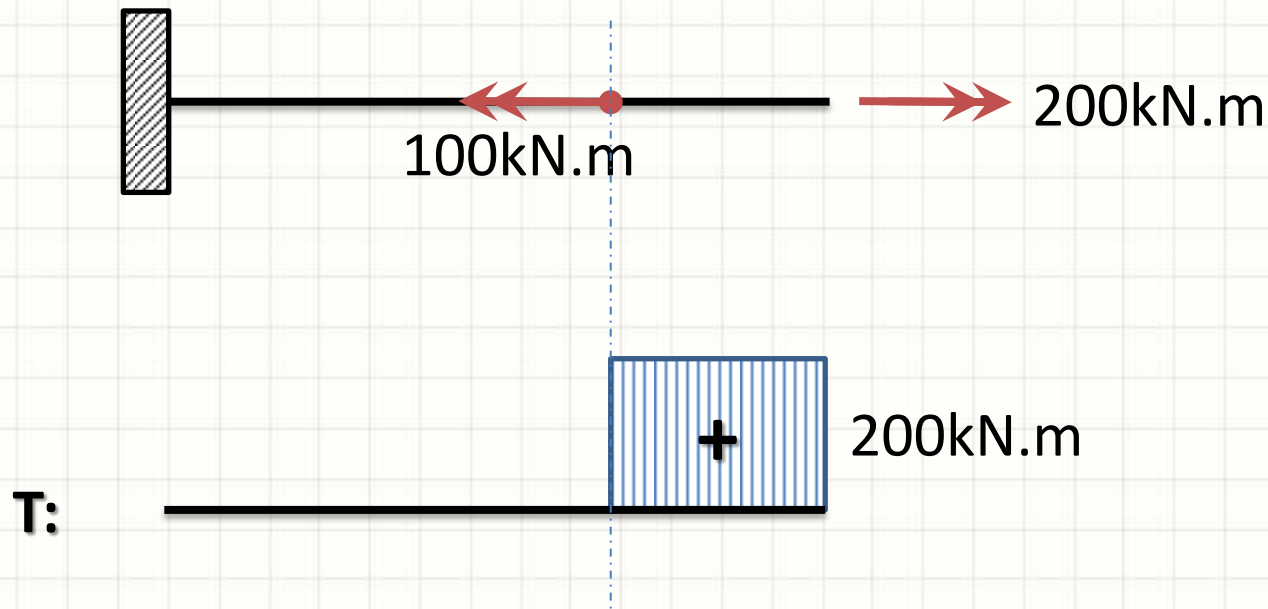


T:



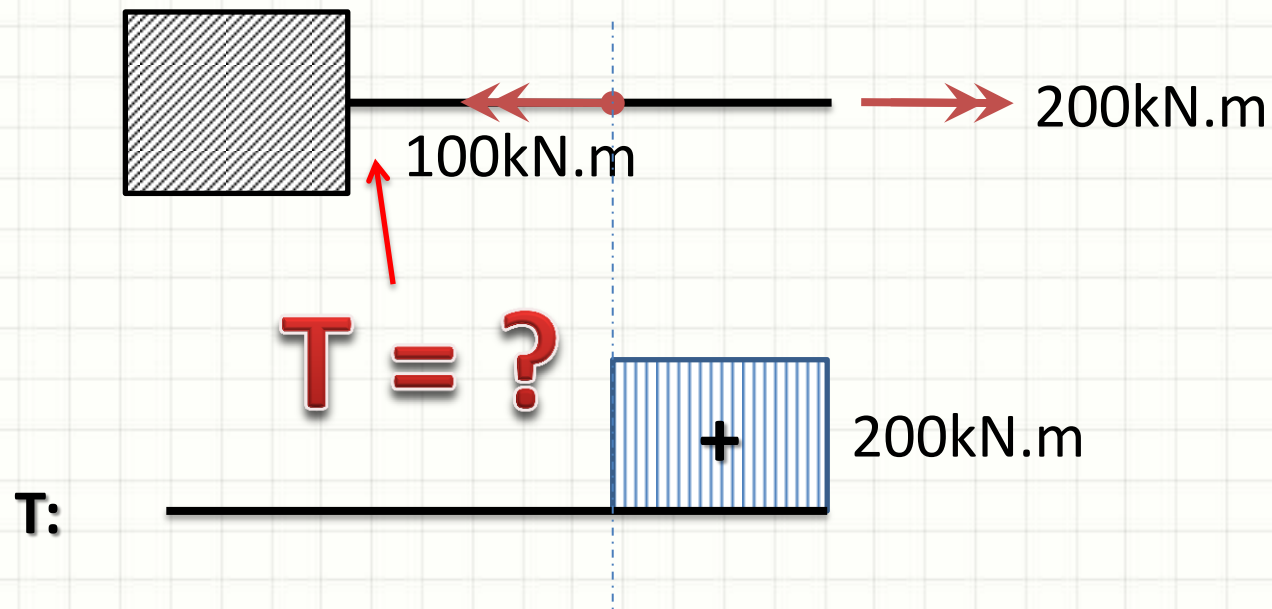
# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



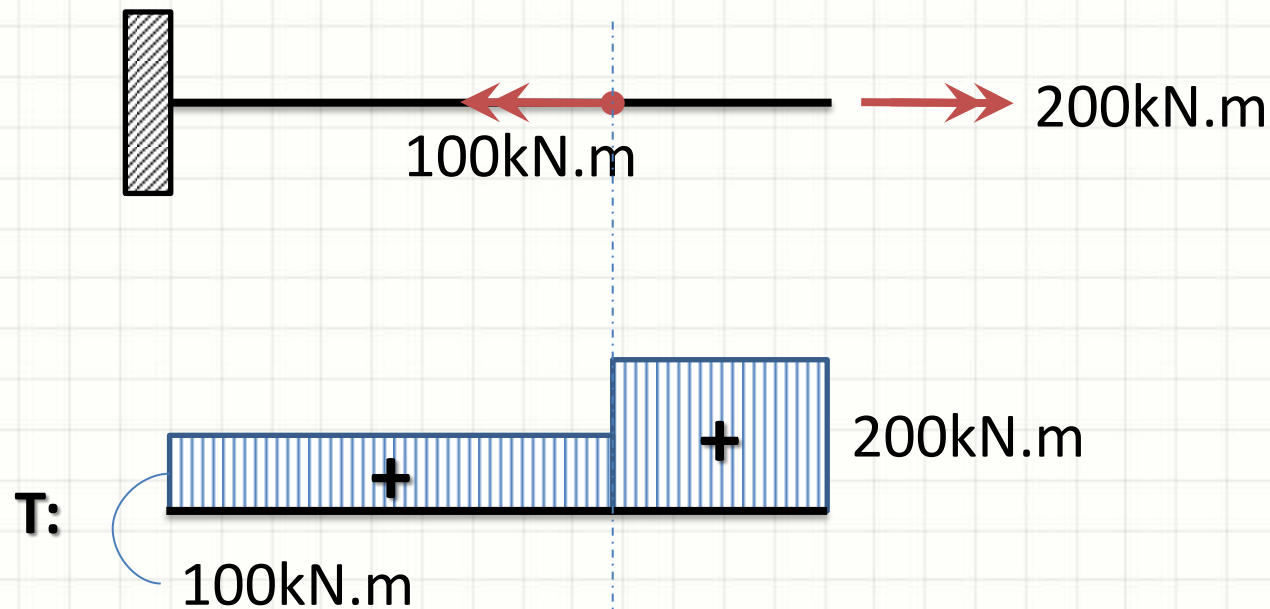
# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



# Diagramas Planos

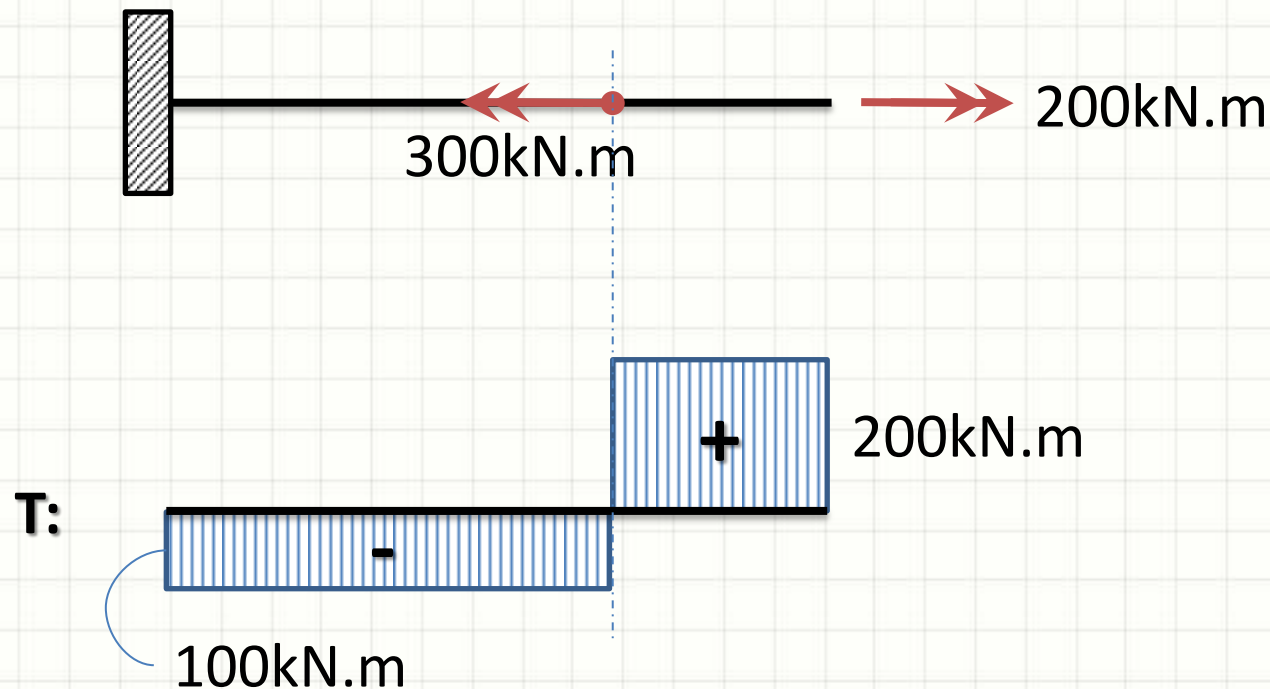
- Momentos Torçores Concentrados





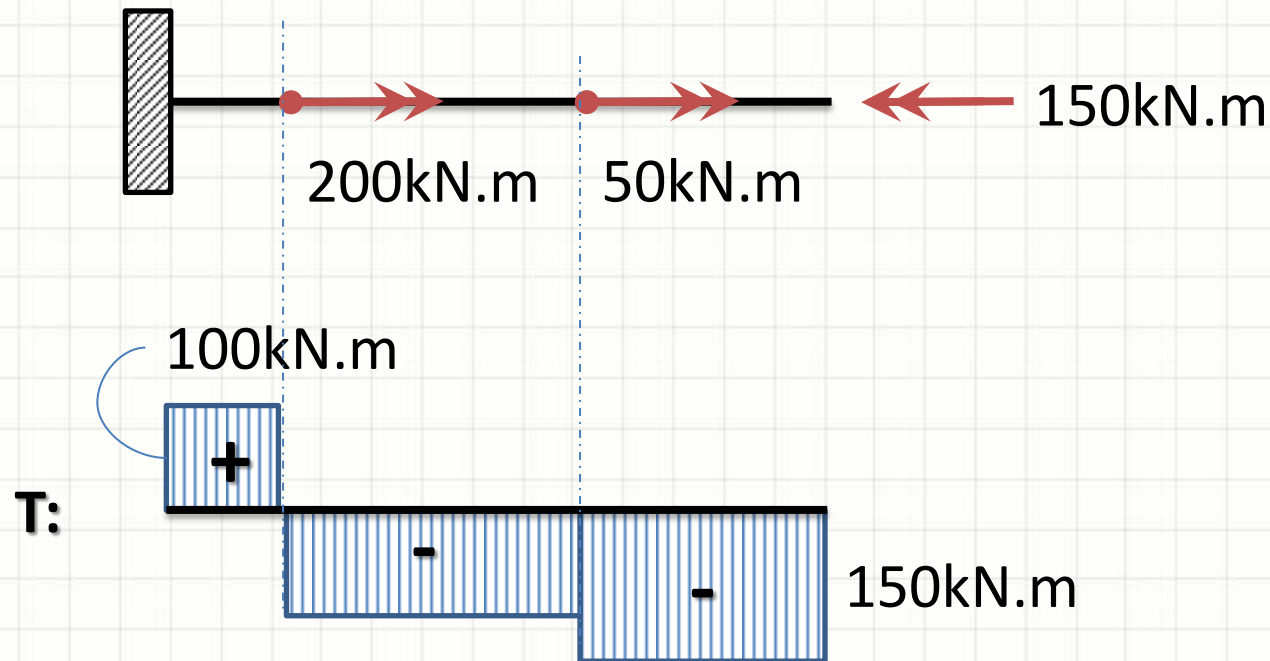
# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



# Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados





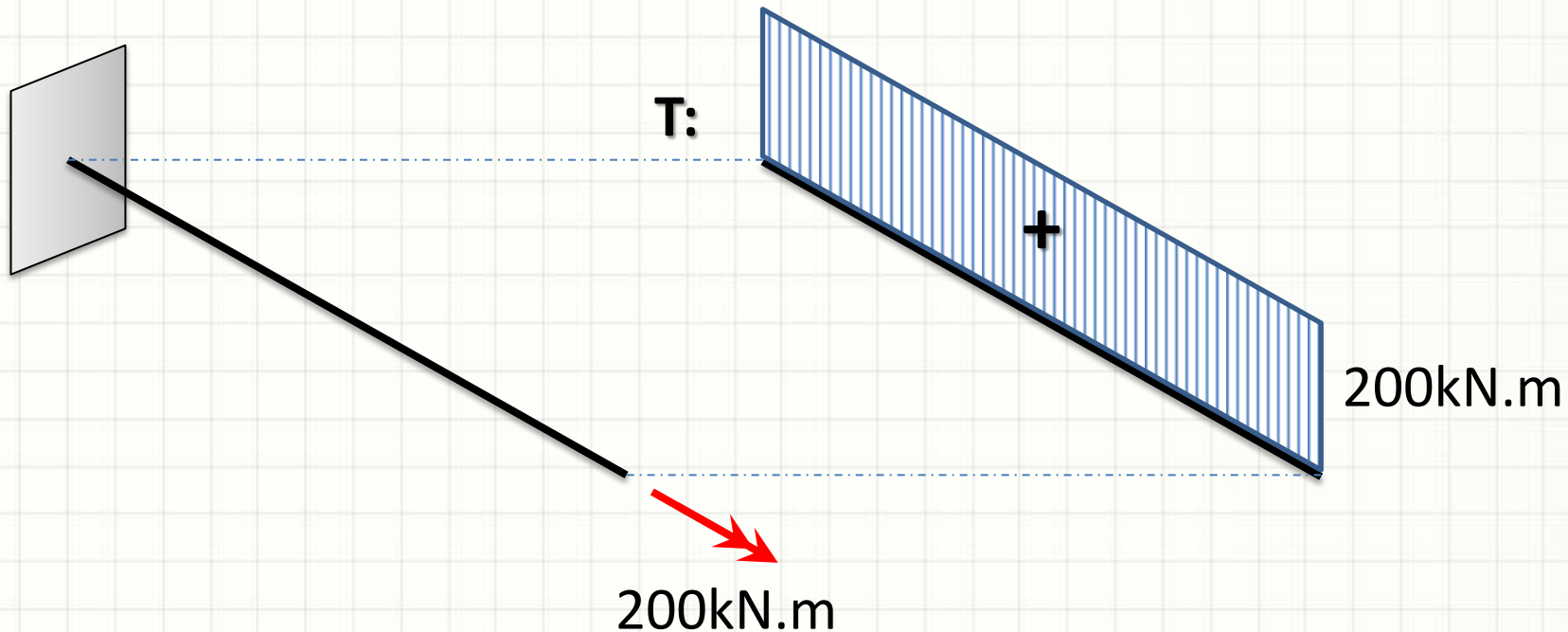
**PAUSA PARA O CAFÉ**



# **DIAGRAMA DE MOMENTO TORÇOR TRIDIMENSIONAL**

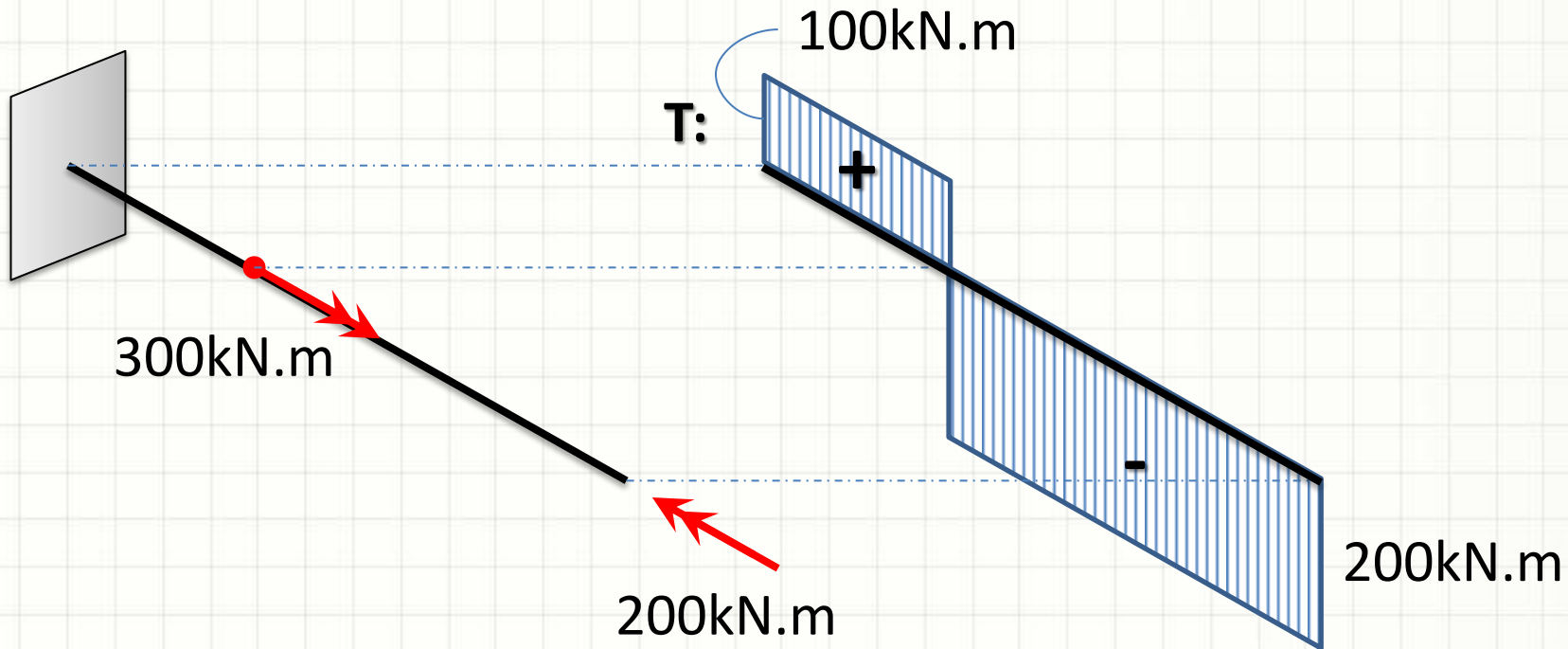
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



# Diagramas Tridimensionais

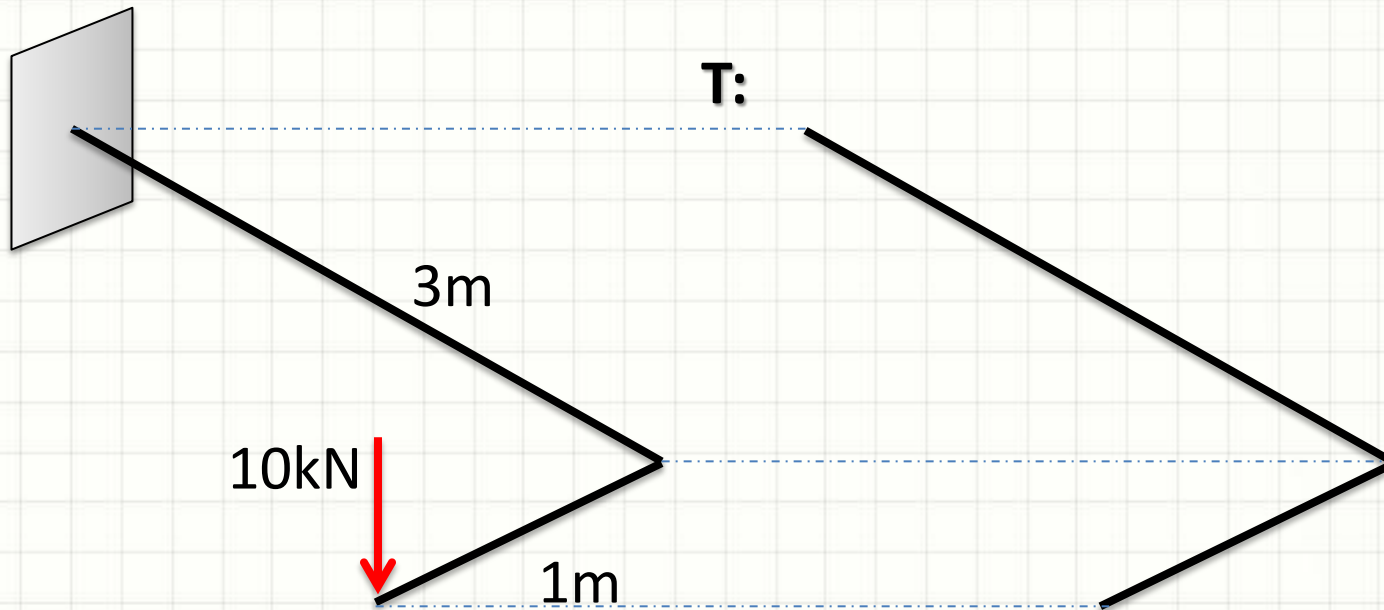
- Momentos Torçores Concentrados





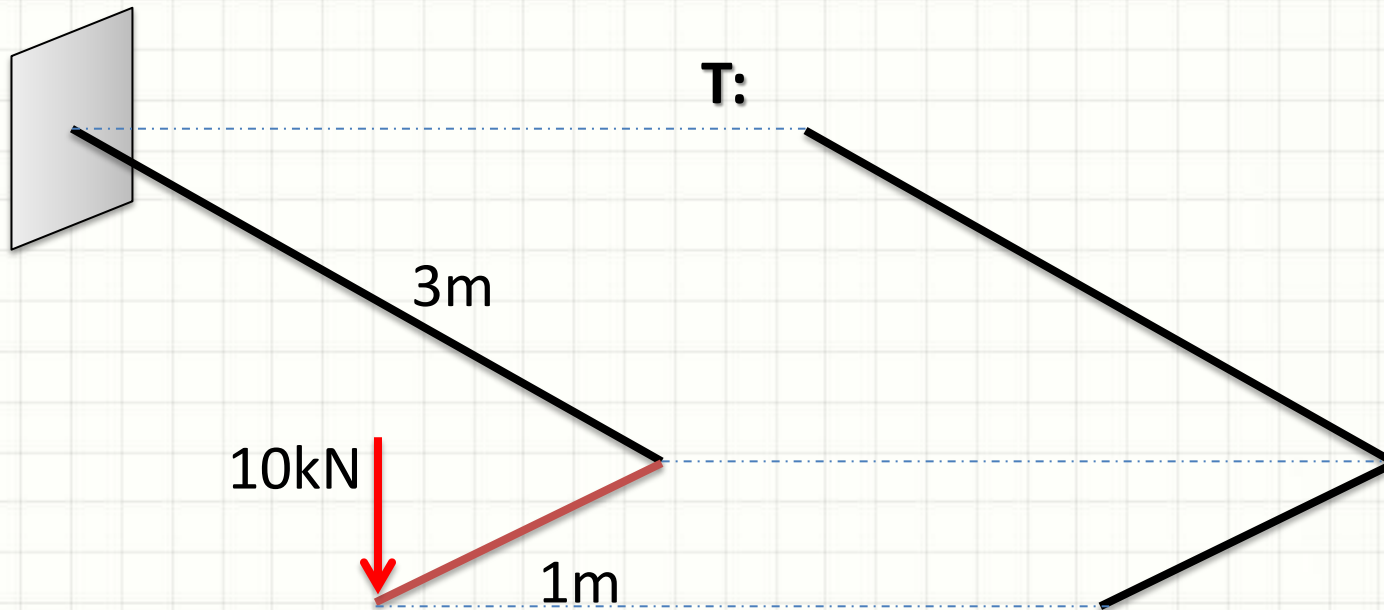
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



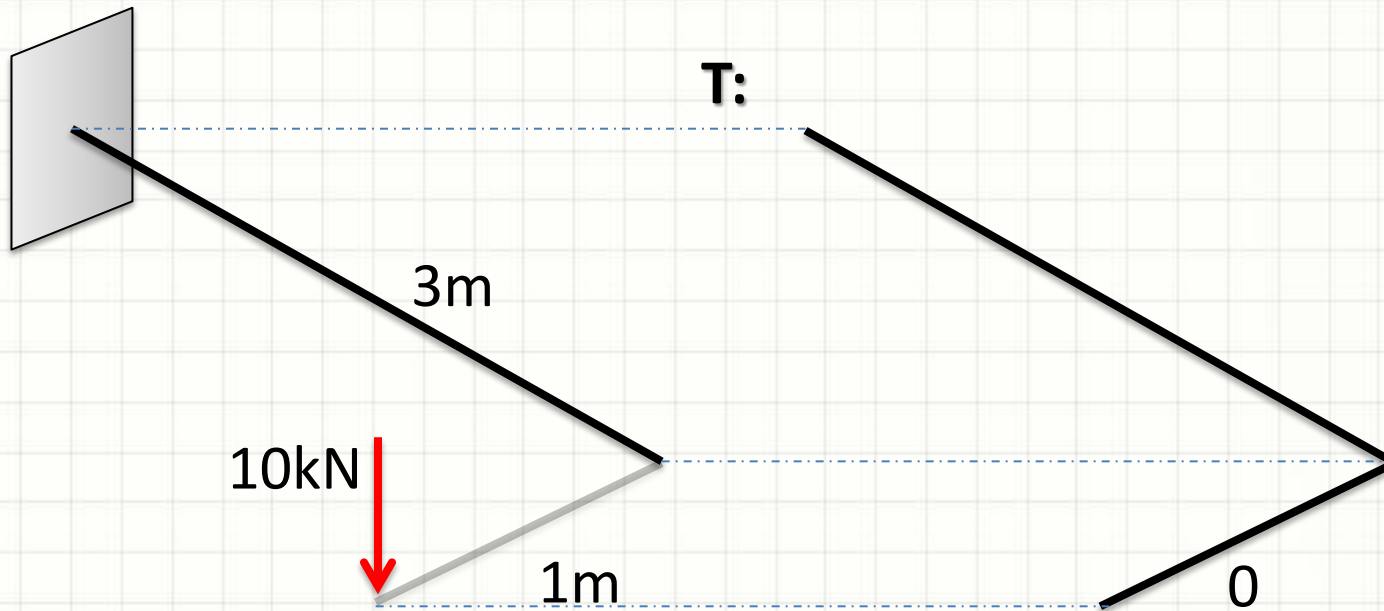
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



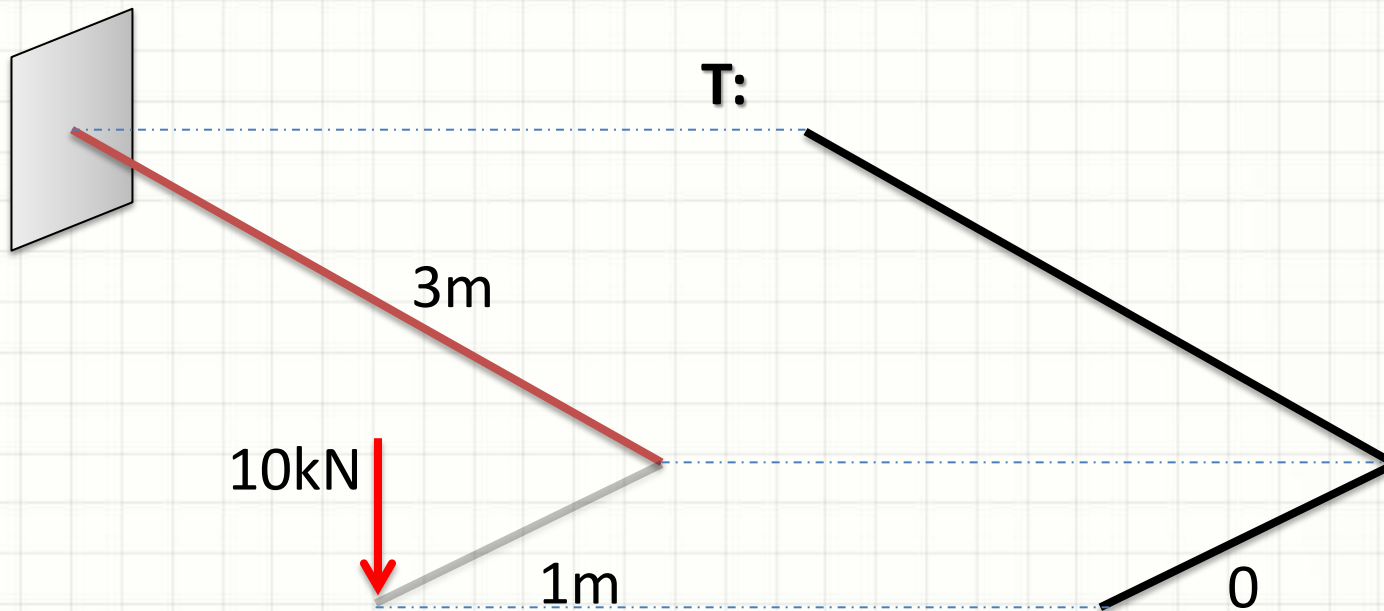
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



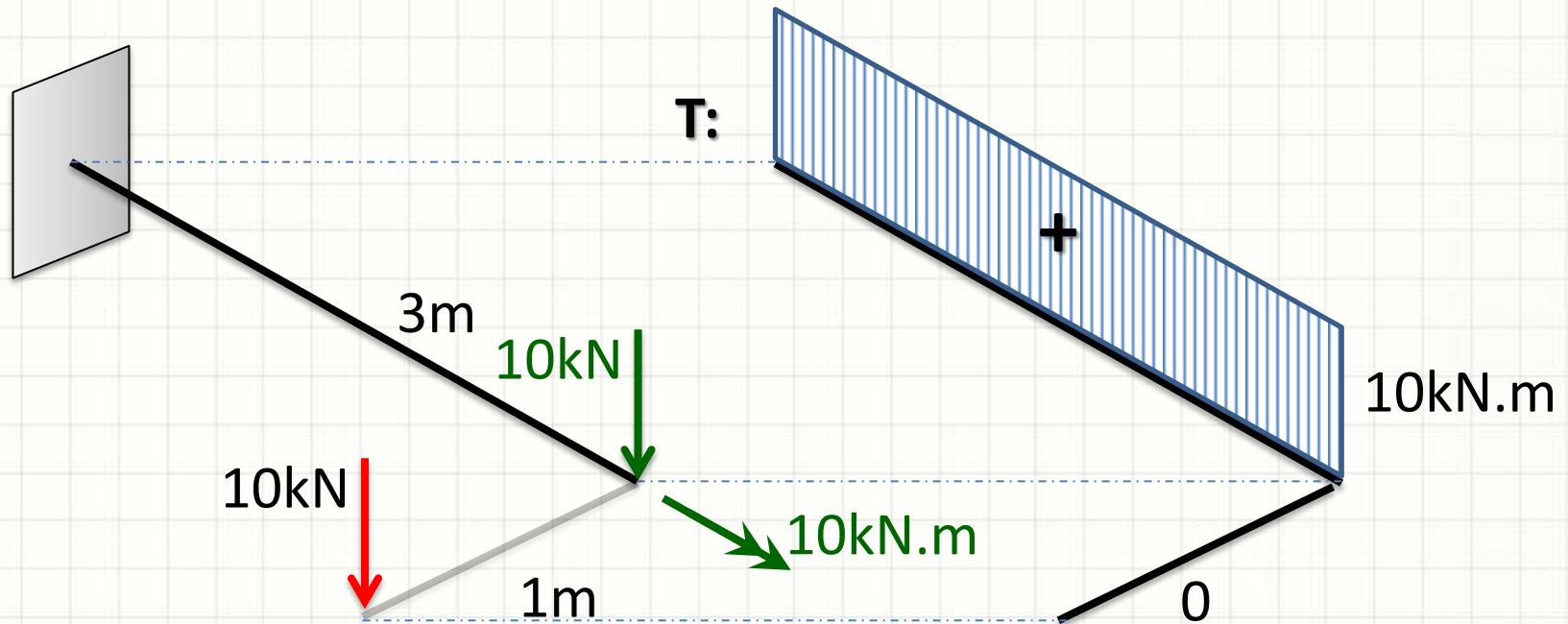
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



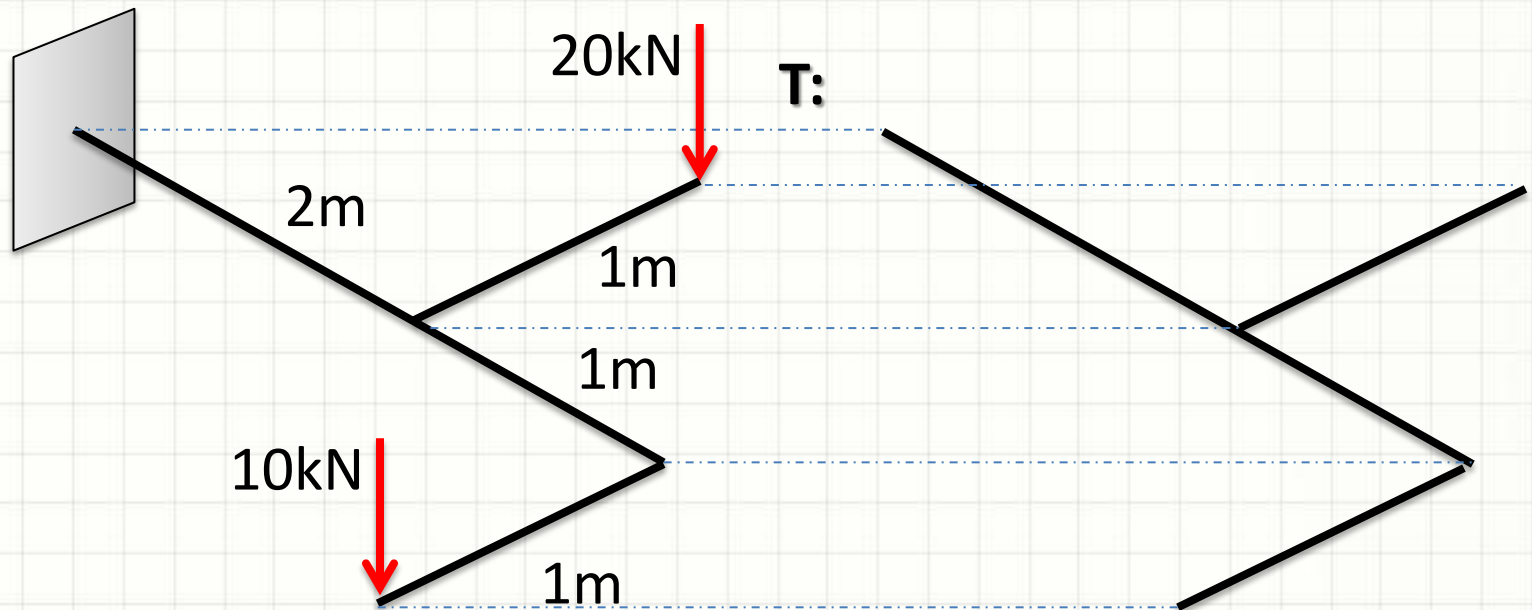
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



# Diagramas Tridimensionais

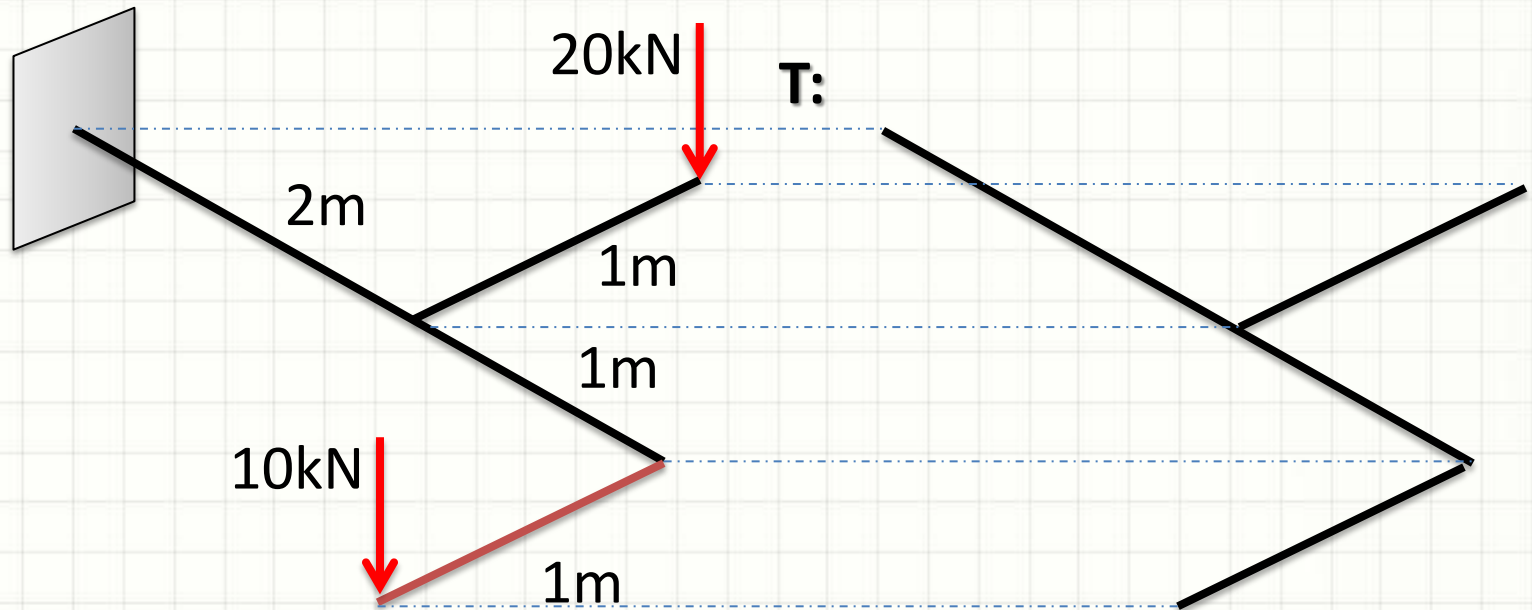
- Momentos Torçores Concentrados





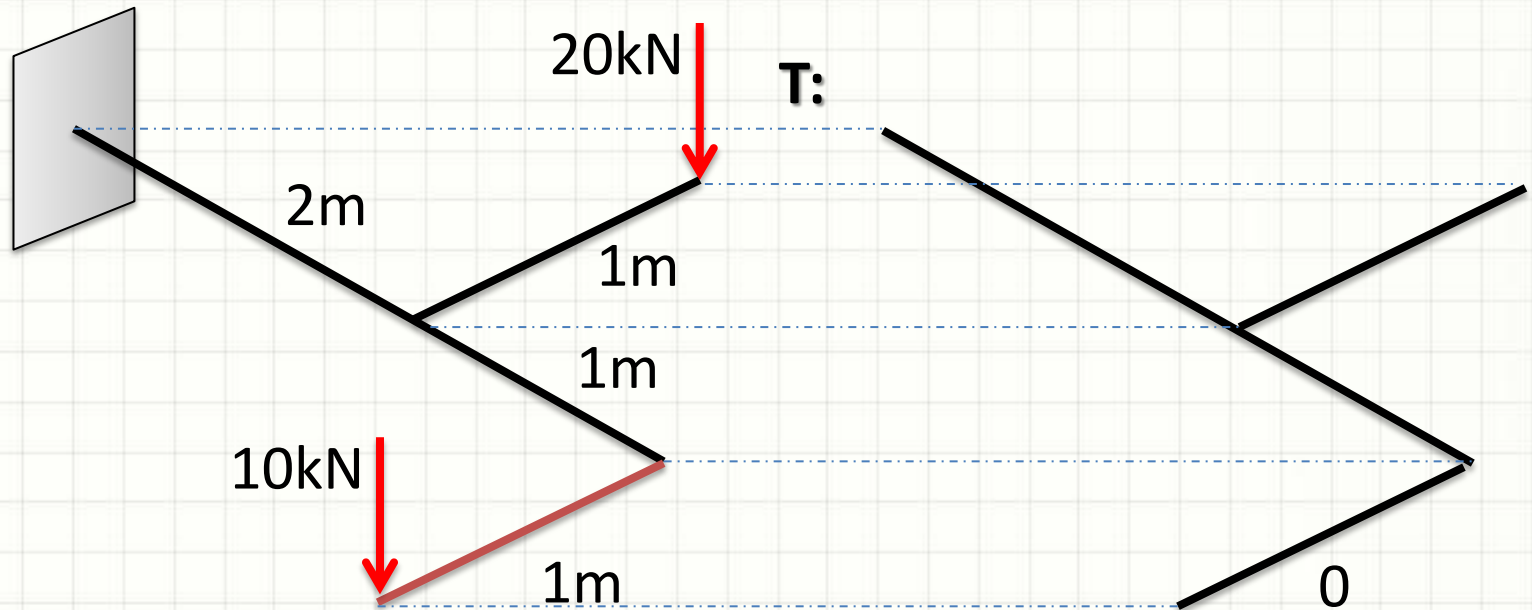
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



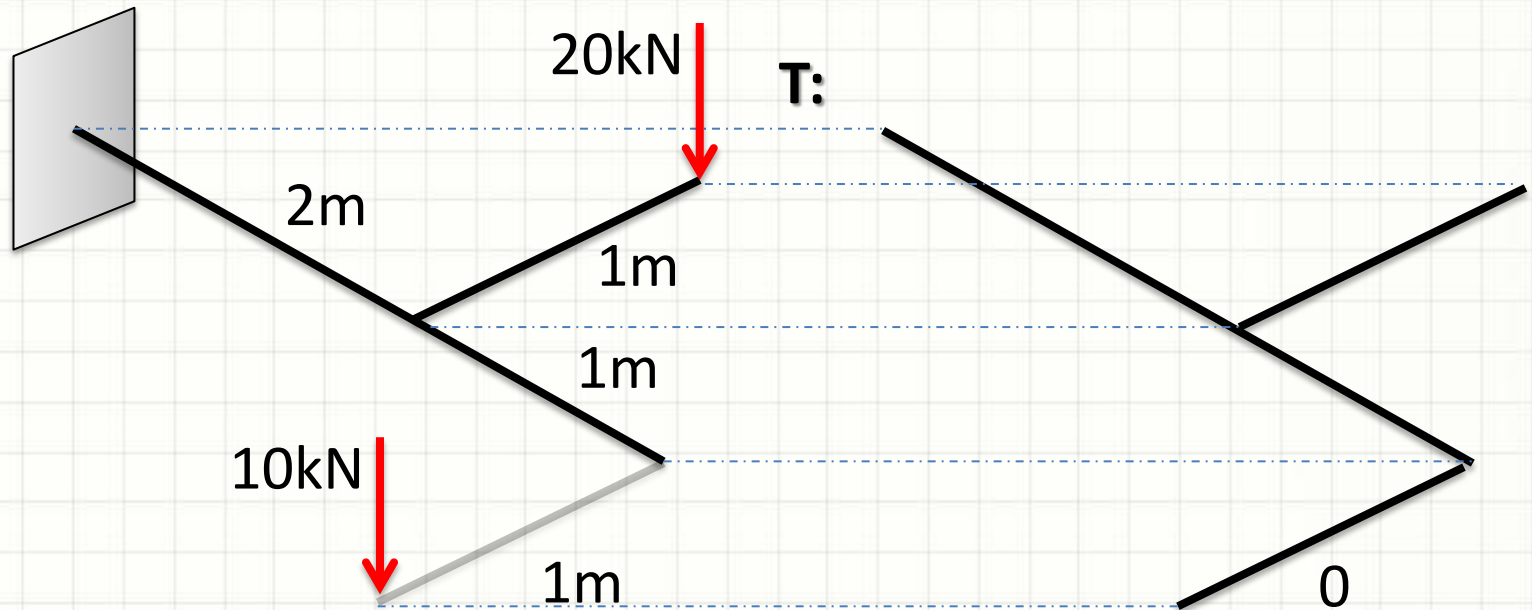
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



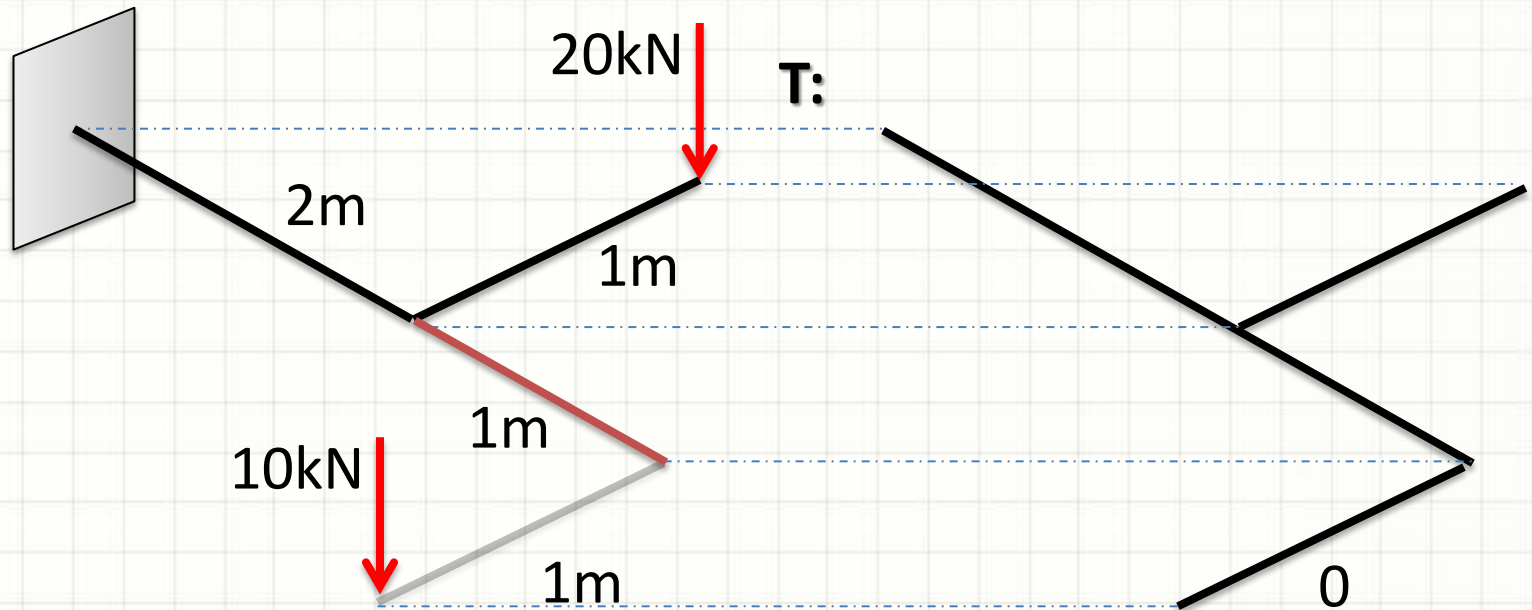
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



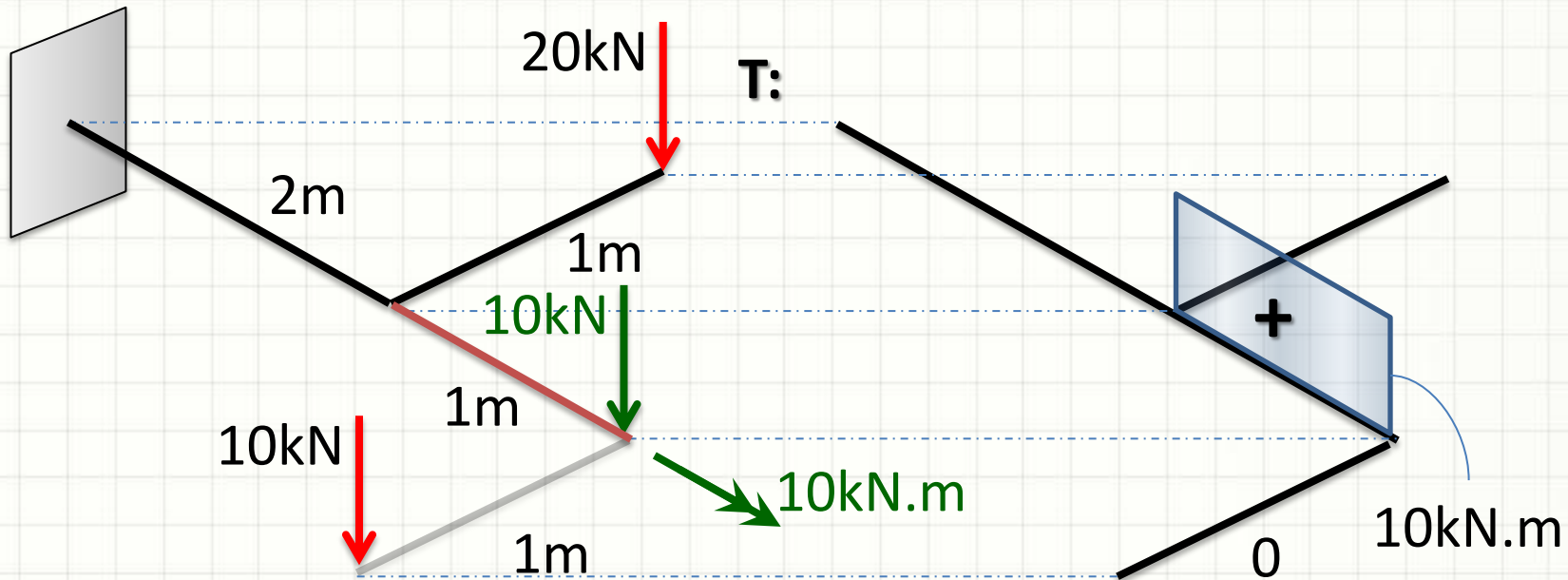
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



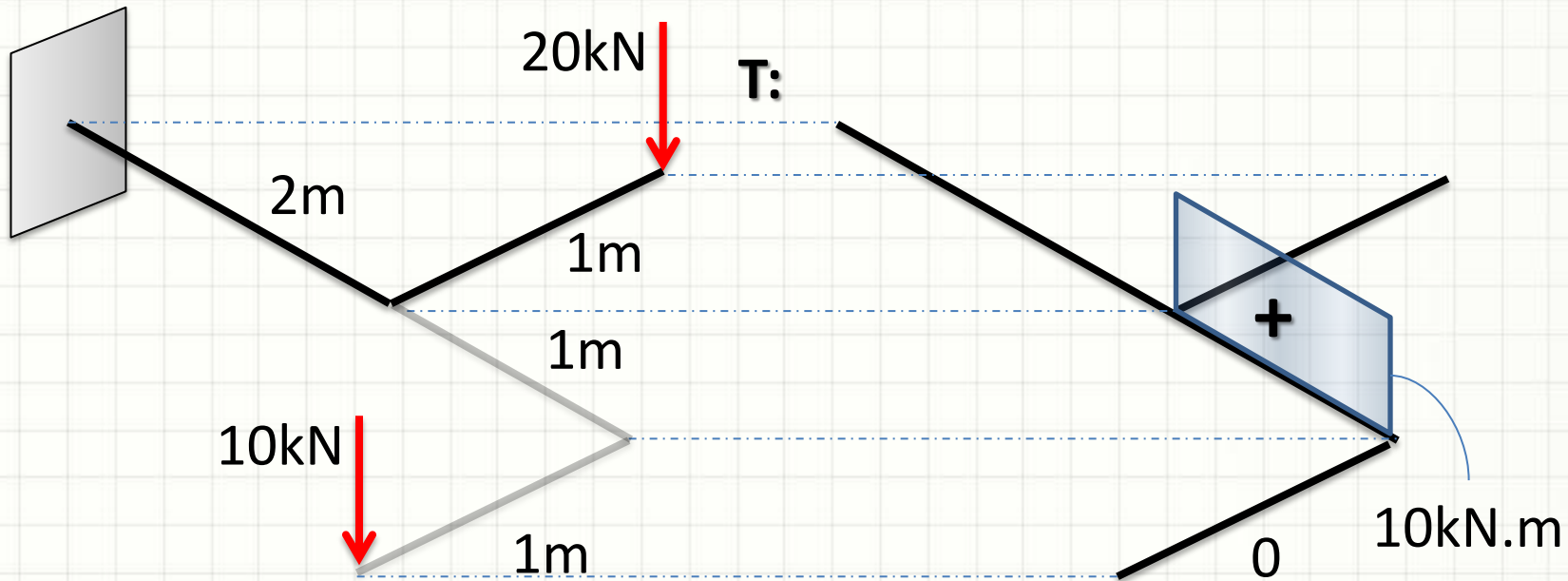
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



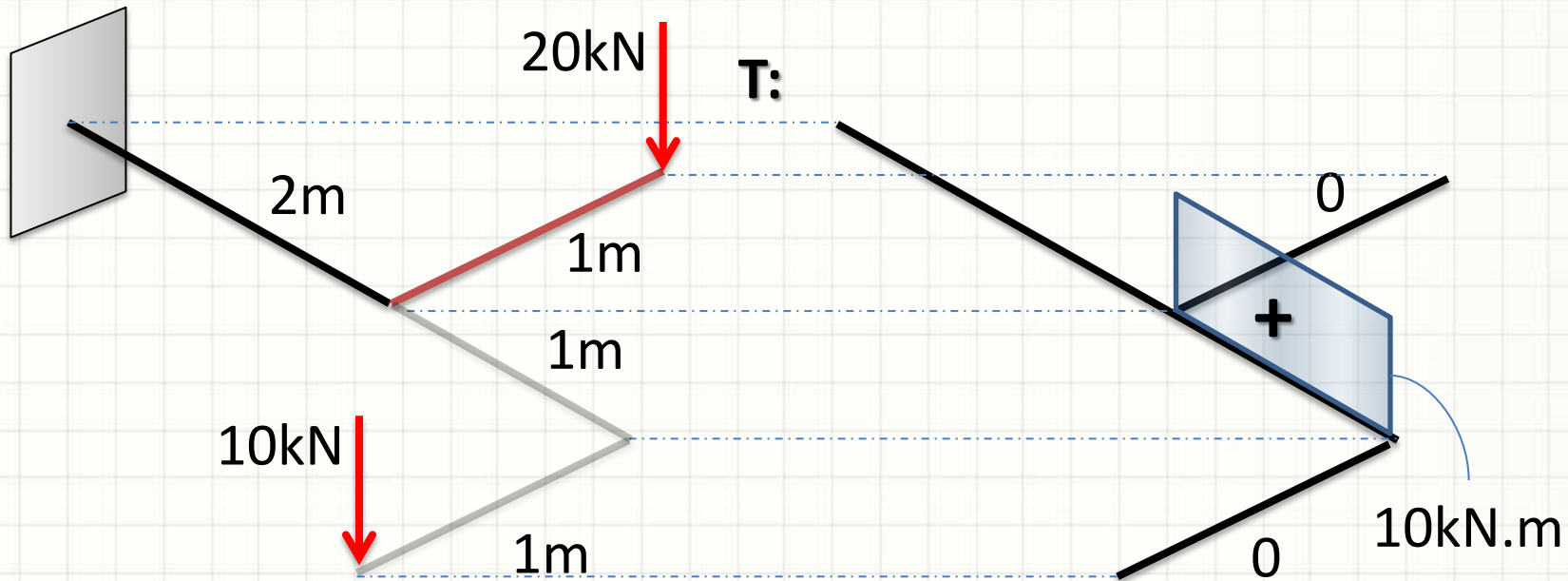
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



# Diagramas Tridimensionais

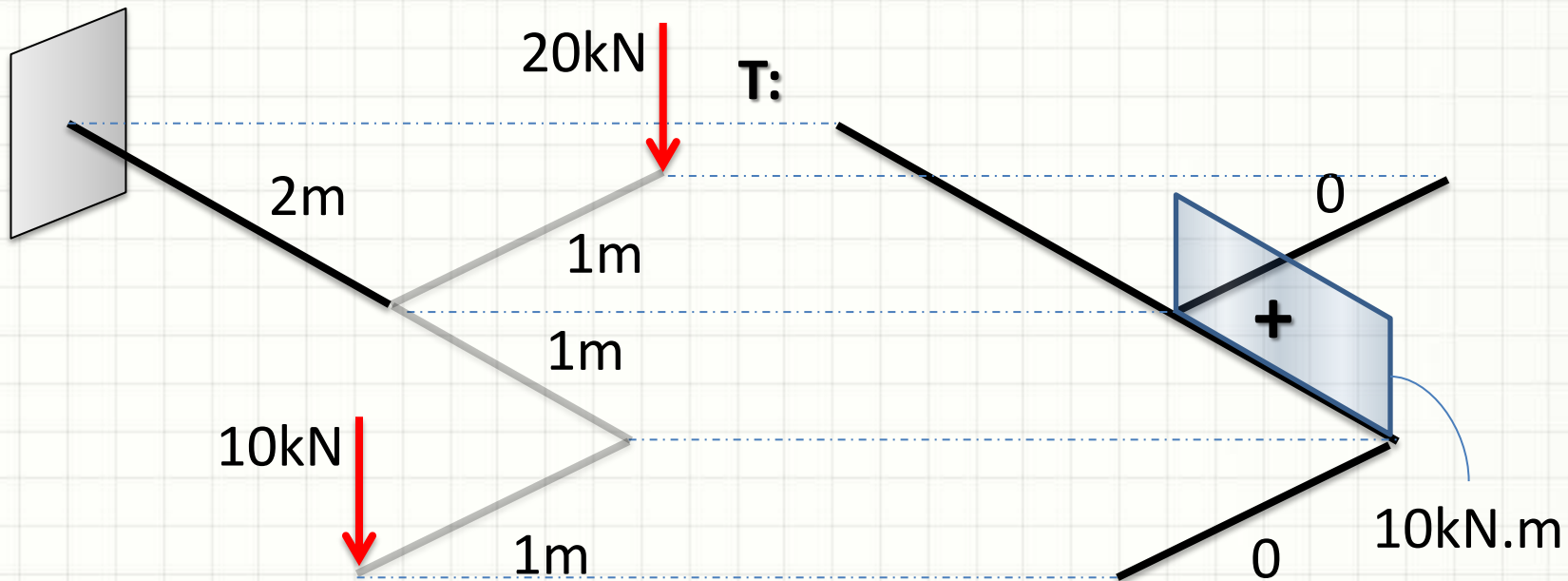
- Momentos Torçores Concentrados





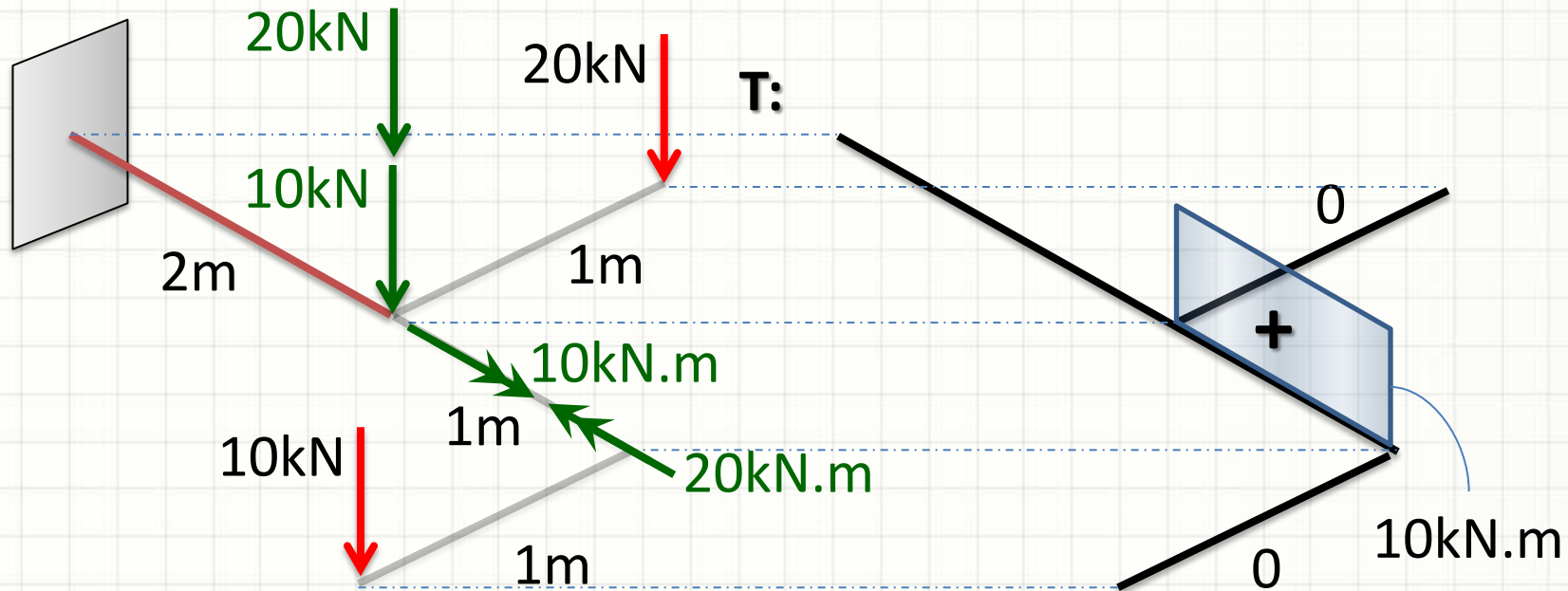
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



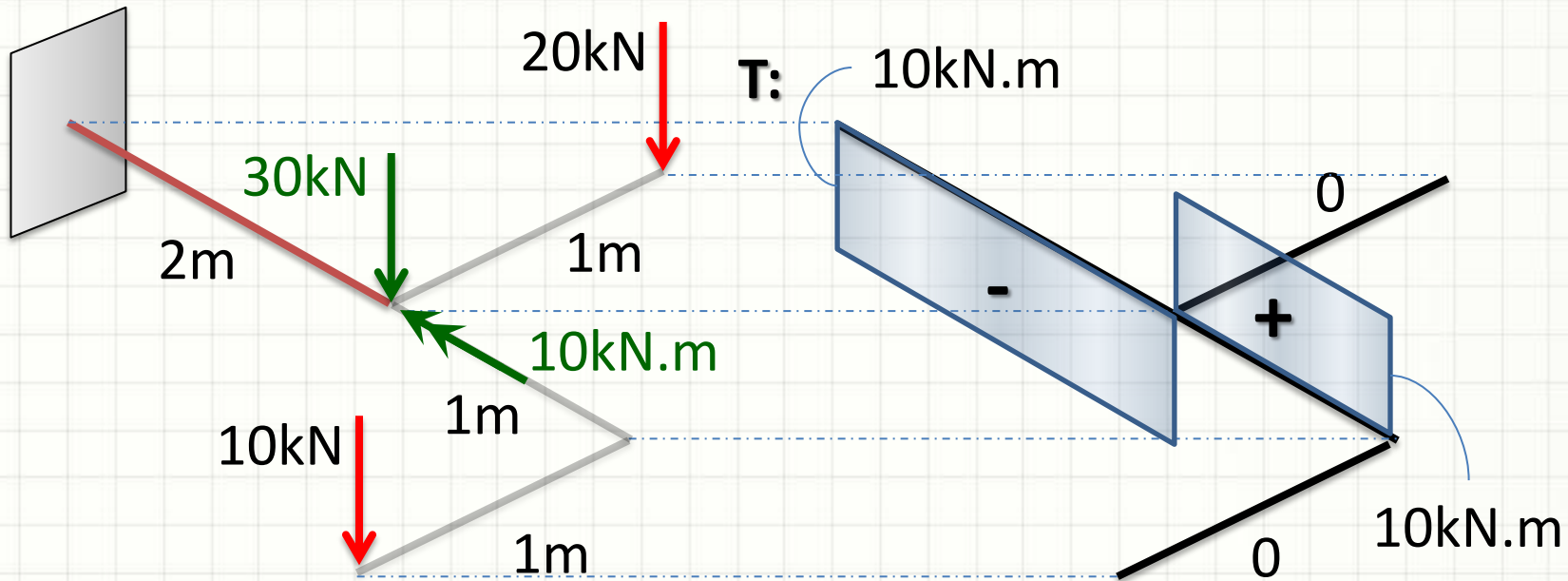
# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



# Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados

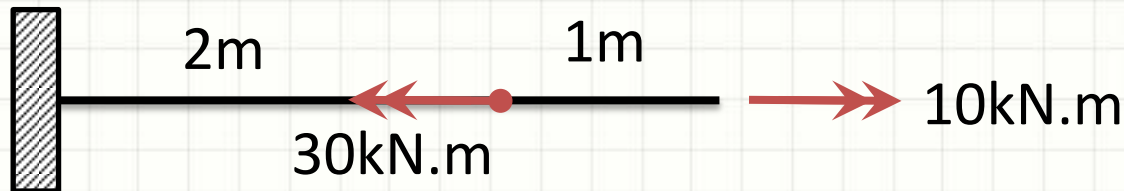




**EXEMPLO COMPLETO**

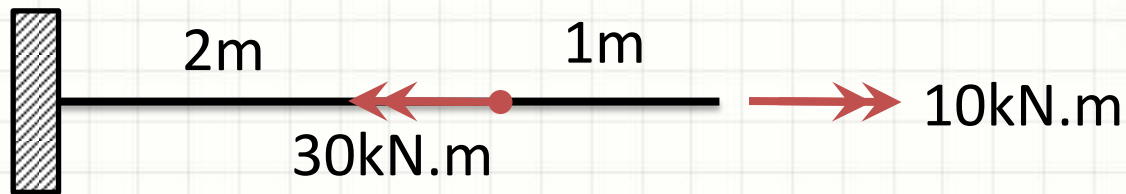
# Exemplo

- A barra abaixo, que possui  $G = 20\text{GPa}$ , tem  $R = 10\text{ cm}$ . Calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o  $\tau_{MAX}$ .



# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = ?$     $\tau_{MAX} = ?$

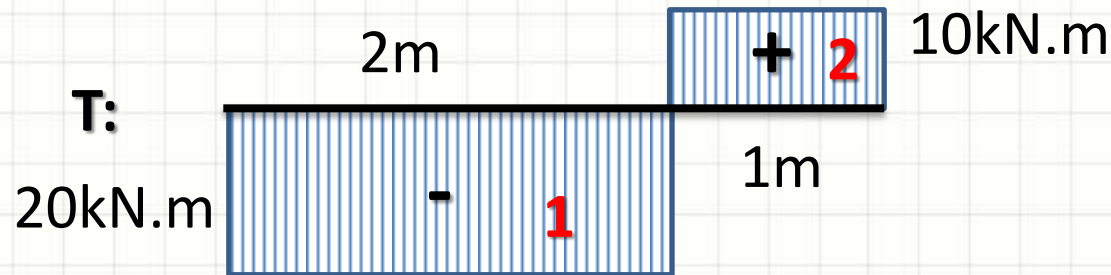


- Passo 1: Diagrama de Torção



# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = ?$     $\tau_{MAX} = ?$



- Passo 2: Cálculo de J...

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

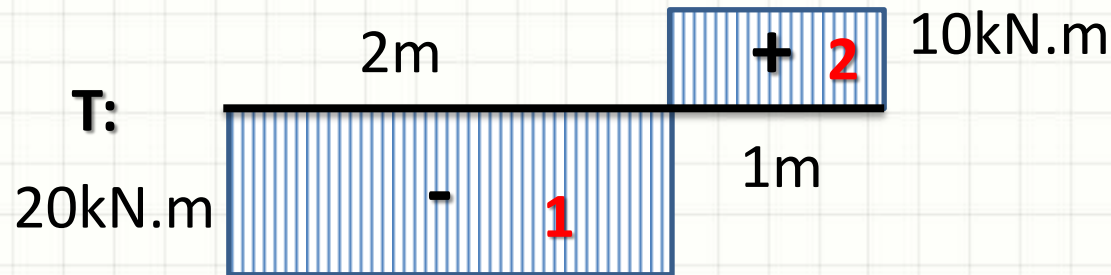
- E  $\phi$ ...

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$



# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = ?$     $\tau_{MAX} = ?$



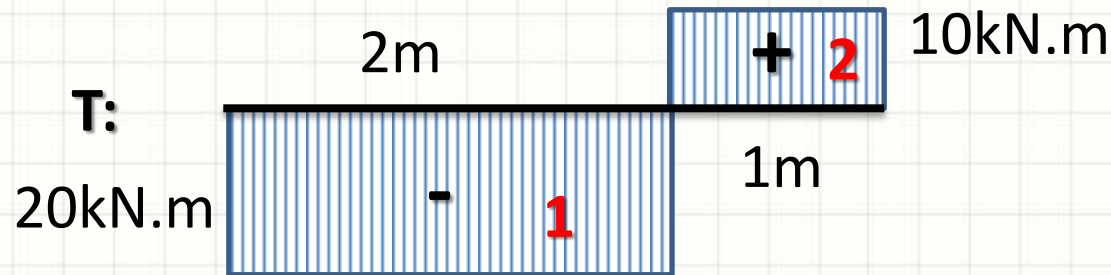
- Passo 3: Cálculo de  $\phi_1$

$$\phi_1 = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

$$\phi_1 = \frac{2 \cdot (-20 \cdot 10^3) \cdot 2}{2 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^4} = \frac{-4}{100 \cdot \pi}$$

# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = ?$     $\tau_{MAX} = ?$



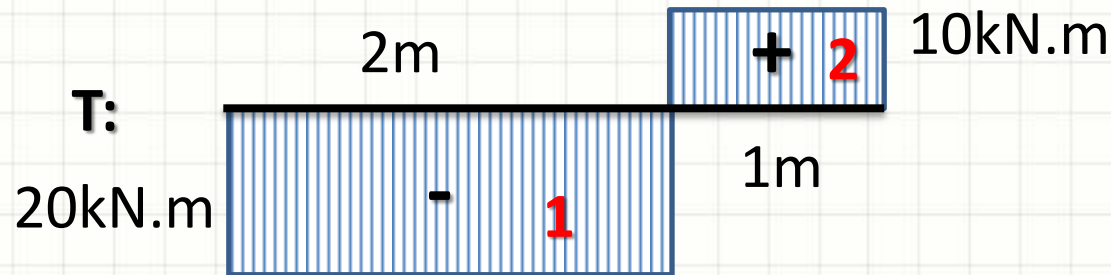
- Passo 4: Cálculo de  $\phi_2$

$$\phi_2 = \frac{2.T.L}{G.\pi.R^4}$$

$$\phi_2 = \frac{2.(10.10^3).1}{2.10^{10}.\pi.(1.10^{-1})^4} = \frac{1}{100.\pi}$$

# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = ?$     $\tau_{MAX} = ?$



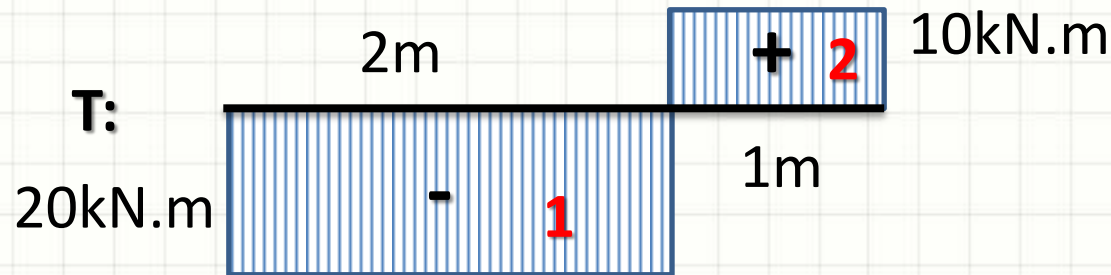
- Passo 5: Cálculo de  $\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\phi = \frac{-4}{100.\pi} + \frac{1}{100.\pi}$$

$$\phi = \frac{-3}{100.\pi} \text{ rad} \cong -0,0095493 \text{ rad} \cong -0,55^\circ$$

# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = -0,55^\circ$     $\tau_{MAX} = ?$



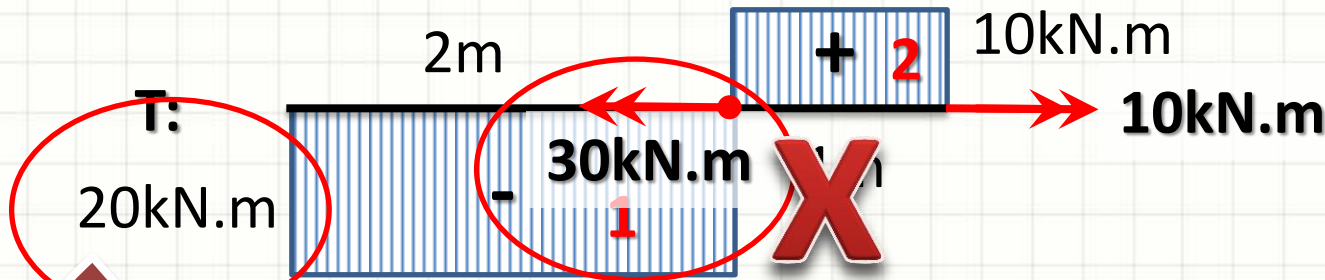
- Passo 6: Cálculo de  $\tau_{MAX}$

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} = \frac{2 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot R^4} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot (20 \cdot 10^3)}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^3} = \frac{4 \cdot 10^7}{\pi} \cong 12,7\text{MPa}$$

# Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$     $R = 10\text{ cm}$     $\phi = -0,55^\circ$     $\tau_{MAX} = ?$



Passo 6: Cálculo de  $\tau_{MAX}$

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} = \frac{2 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot R^4} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot (20 \cdot 10^3)}{\pi \cdot (0,1)^3} = \frac{4 \cdot 10^7}{\pi} \cong 12,7\text{MPa}$$



**PERGUNTAS?**



**CONCLUSÕES**



# Resumo

- Pode-se determinar o ângulo de torção
  - M. Torçor: calcular as grandezas de interesse
  - Diagramas: determinar o ponto de máximo momento de torção
  - **Exercitar: Exercícios Hibbeler**
- 
- E se a torção ocorrer em eixo bi-engastado?
  - E se o eixo não possuir seção transversal circular?



**PARA TREINAR**

# Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 161 a 166
- Mínimos:
  - Exercícios 5.42, 5.45, 5.46, 5.49
- Extras:
  - Exercícios 5.43, 5.44, 5.47, 5.52
- Adote essas conversões:
  - 1 ksi = 7MPa
  - 1 pol = 25mm
  - 1hp = 1000W

# Para Treinar em Casa

## Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

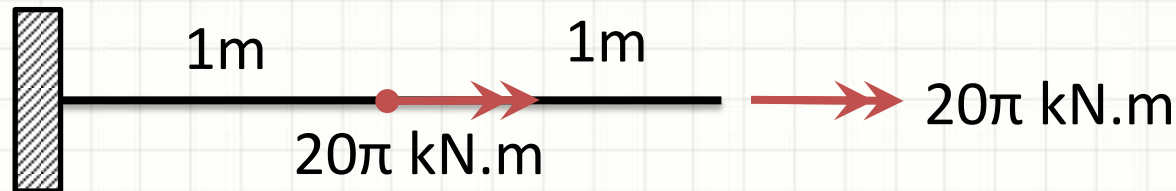
Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**



# EXERCÍCIO

# Exercício – Entrega Individual

- A barra abaixo, que possui  $G = 20\text{GPa}$ , tem  $R = 10\text{ cm}$ . Calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o  $\tau_{MAX}$ .



- Calcule qual seria a diferença de rotação e cisalhamento máximo se a barra fosse oca, com o raio interno igual a 5cm?