Resistência dos Materiais II

Momento Estático

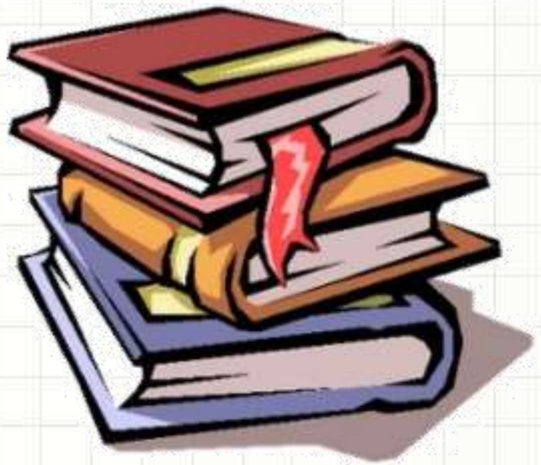
Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

Objetivos

- Conhecer a influência da forma na Resistência dos Materiais
- Compreender o conceito de Momento Estático
- Calcular Momento Estático

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 1)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Hibbeler) – Págs 568-570
Biblioteca Virtual	“Resistência dos Materiais”

Antes de Mais nada...

- **Não deixe de consultar o material da Aula 0!**
- **Disciplina desafiante!**
  - Toda semana acessar o SAVA!
  - Se preparar para conteúdo da semana seguinte!
- **Exercícios Semanais**
  - Exercícios propostos a cada aula: SAVA
- **Será controlada a presença**
  - Chamada ocorrerá sempre às 22:20
  - Nome fora da lista = falta
- **Contato**

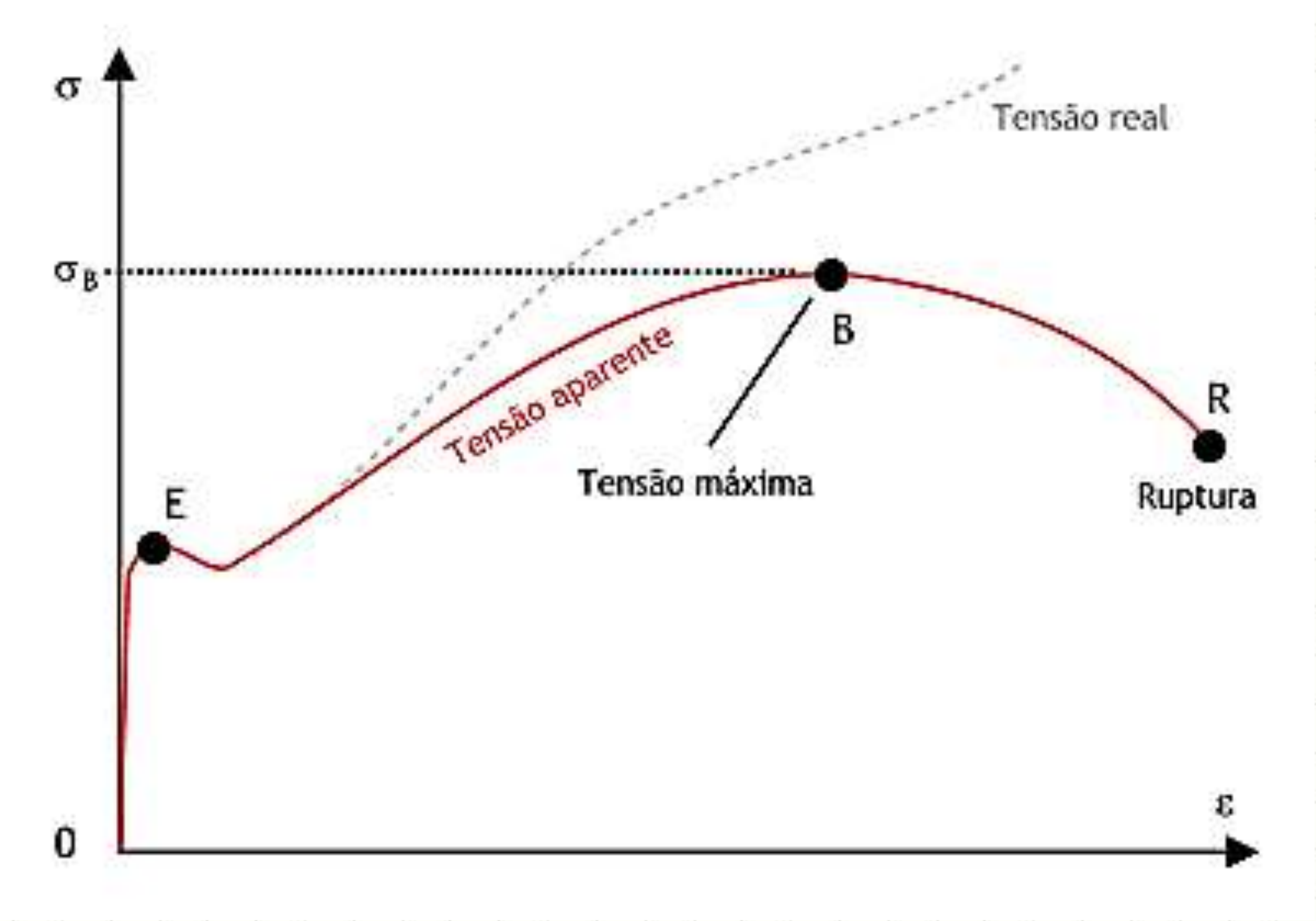
Professor	Informações de Contato
Daniel Caetano	prof@caetano.eng.br

Retomando:

Tensão x Deformação

Tensão x Deformação

- Tensão Real x Aparente

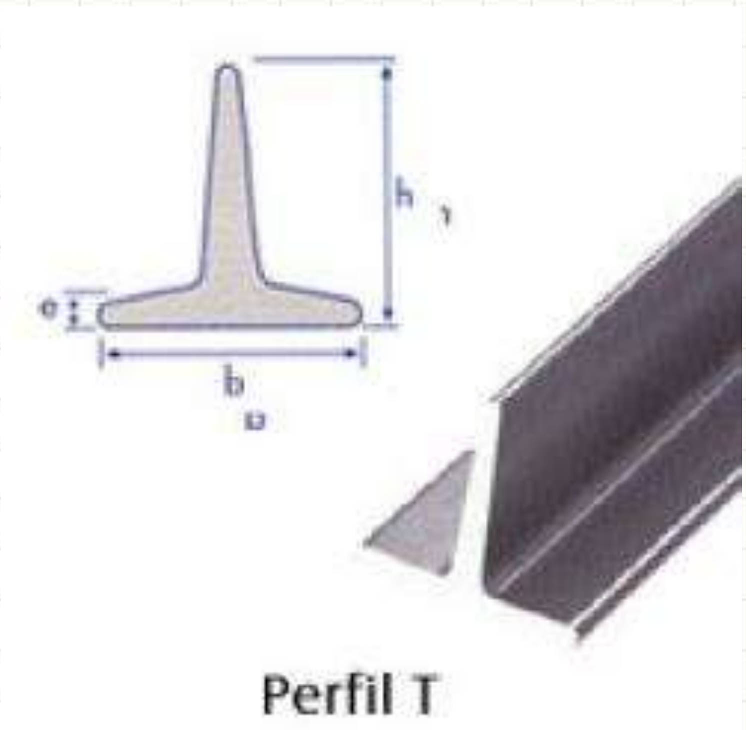


Efeito da Forma

- Tensão x Deformação

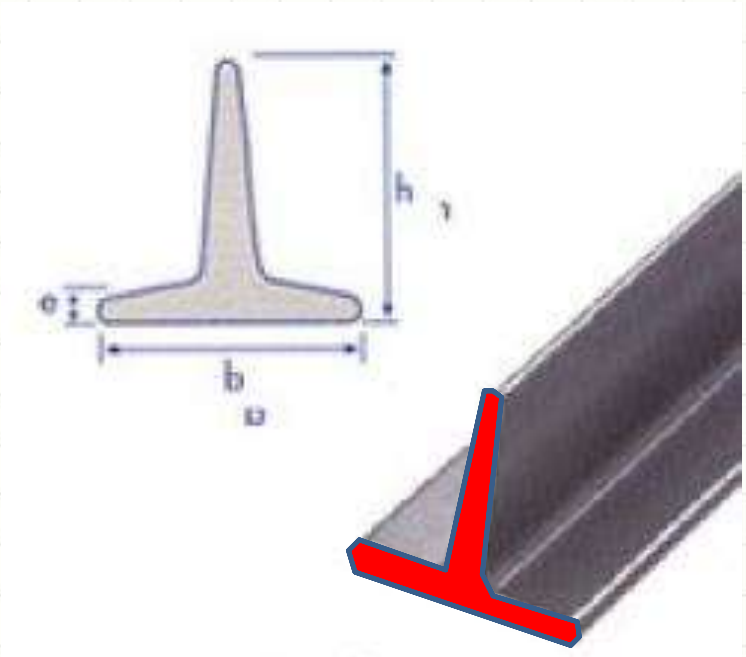

Efeito da Forma

- Formas diferentes: resistências diferentes

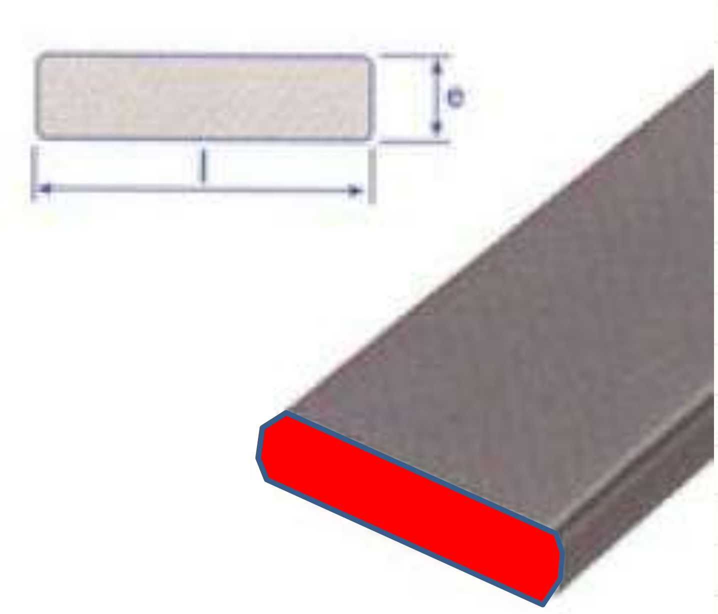


Efeito da Forma

- Formas diferentes: resistências diferentes



Perfil T



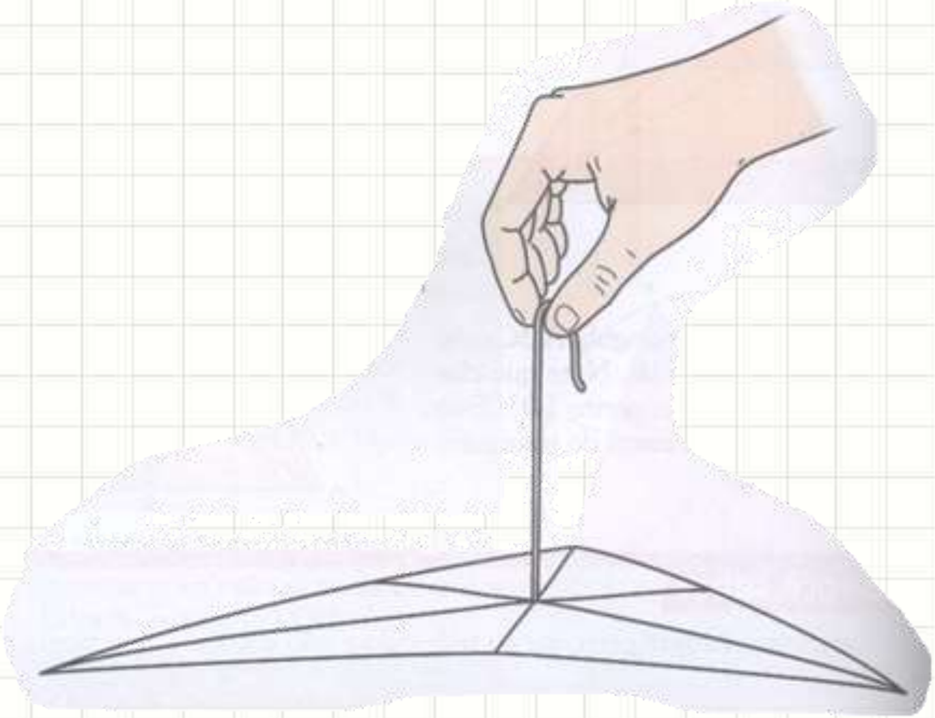
Barra Chata

Seção Transversal

Verificando o Equilíbrio

Ponto de Equilíbrio

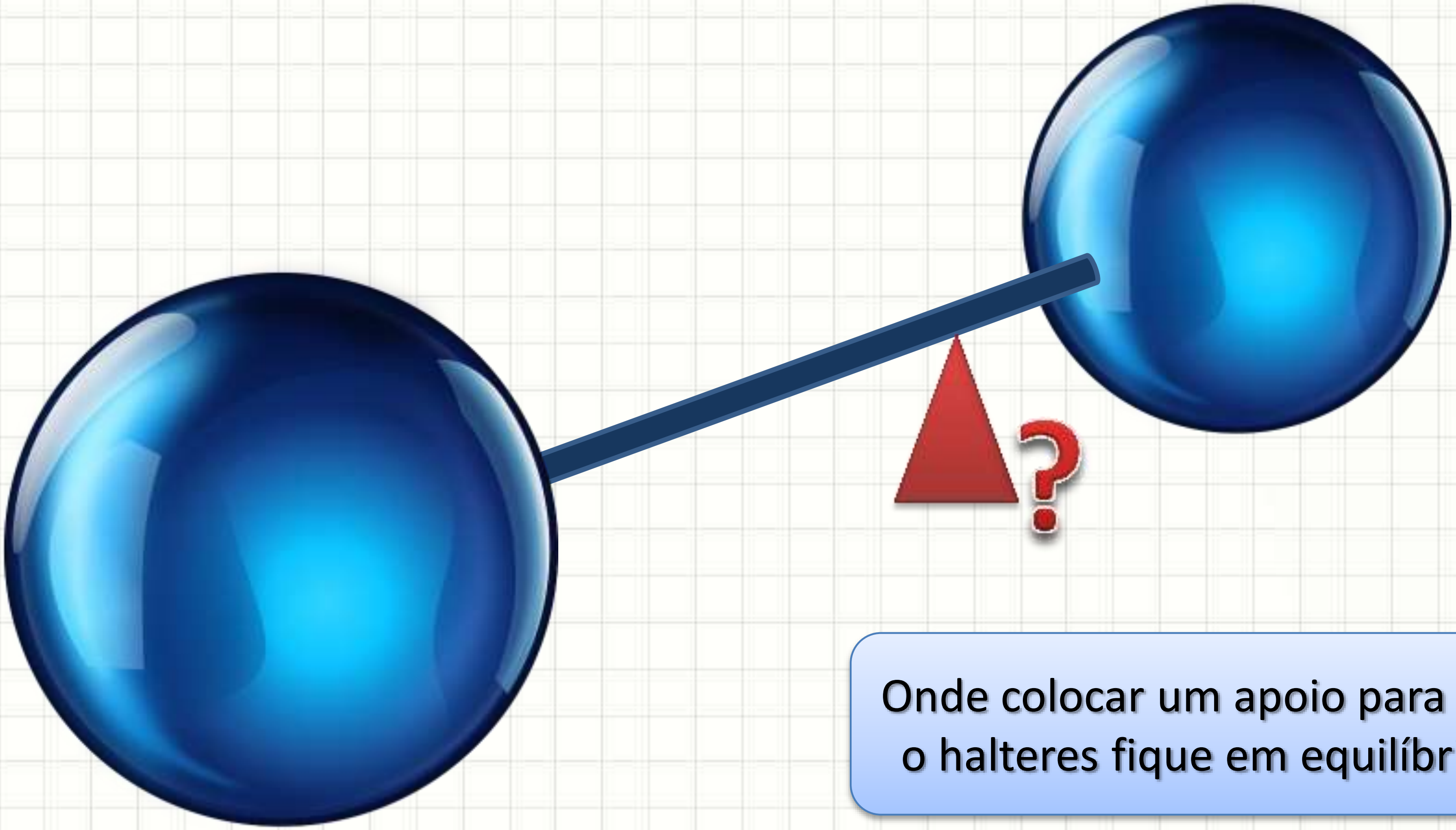
- Distribuição Idêntica da Área / Massa



- Baricentro = Centro de Massa
  - Densidade uniforme: centroide = baricentro

Verificando o Equilíbrio

- Considere o seguinte elemento:

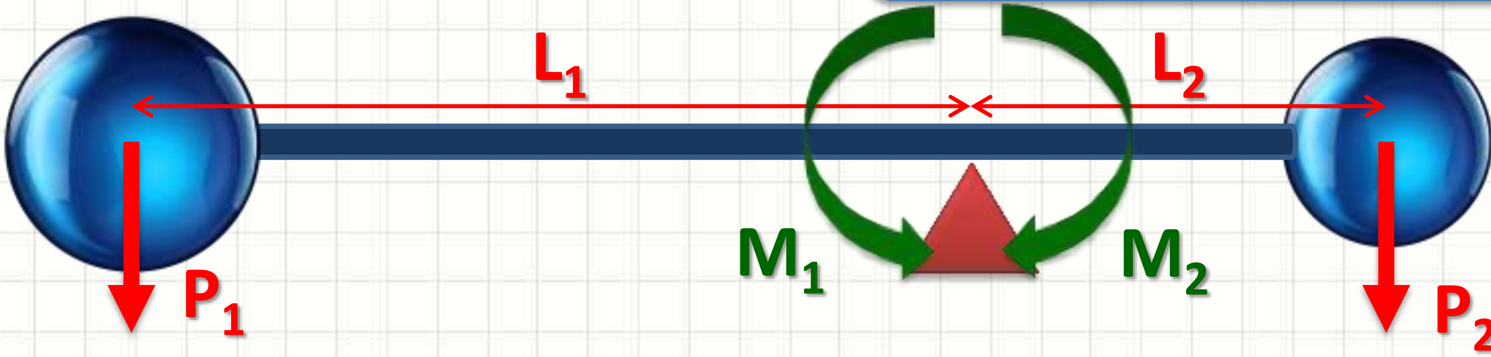


Onde colocar um apoio para que o halteres fique em equilíbrio?

Verificando o Equilíbrio

- Visualizando em 2D:

Onde colocar um apoio para que o halteres fique em equilíbrio?



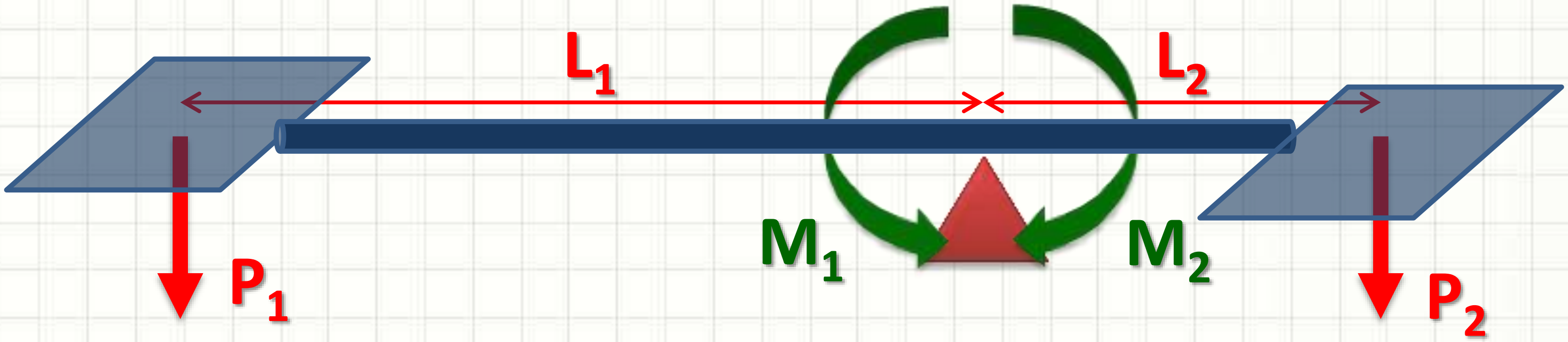
- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 \cdot L_1 = P_2 \cdot L_2$

Mas

$M_1 = P_1 \cdot L_1$
$M_2 = P_2 \cdot L_2$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



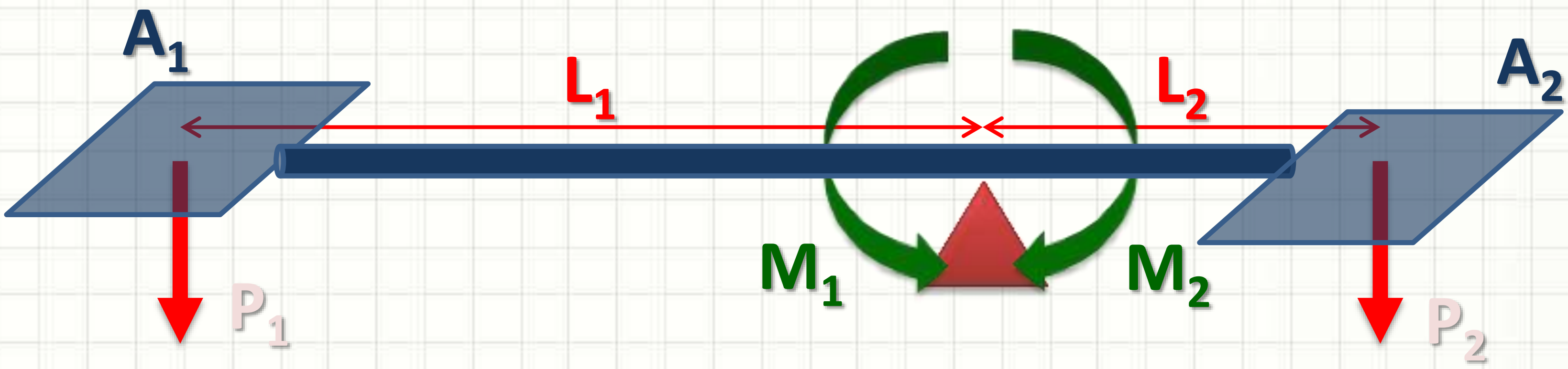
- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 \cdot L_1 = P_2 \cdot L_2$

Mas

$M_1 = P_1 \cdot L_1$
$M_2 = P_2 \cdot L_2$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 . L_1 = P_2 . L_2$
- Ou... $A_1 . \cancel{\delta} . L_1 = A_2 . \cancel{\delta} . L_2$
- Finalmente... $A_1 . L_1 = A_2 . L_2$

Mas

$P_1 = A_1 . \delta$
$P_2 = A_2 . \delta$

Densidade Superficial (em N/m^2)

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?

- Para equilíbrio: $A_1 \, . \, L_1 = A_2 \, . \, L_2$
- Vamos chamar $A \, . \, L$ de S (momento estático)
- Assim, para equilíbrio: $S_1 = S_2$
- Ou...

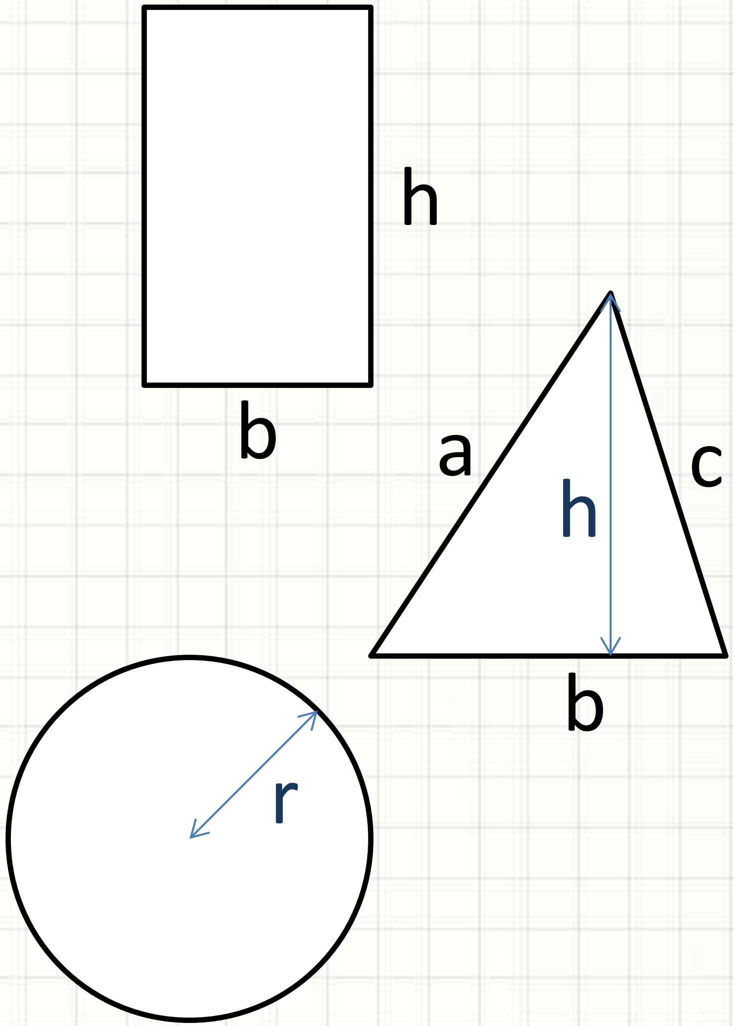
$$S_1 - S_2 = 0$$

O segredo para achar o ponto de equilíbrio está no tal momento estático!

“Medindo” a Forma

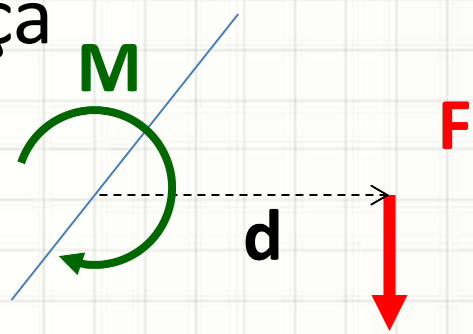
Caracterizando uma Forma Plana

- Perímetro
  - Retângulo: $2 \cdot b + 2 \cdot h$
  - Triângulo: $a + b + c$
  - Círculo: $2 \cdot \pi \cdot r$
- Área
  - Retângulo: $b \cdot h$
  - Triângulo: $b \cdot h / 2$
  - Círculo: $\pi \cdot r^2$
- Só isso?



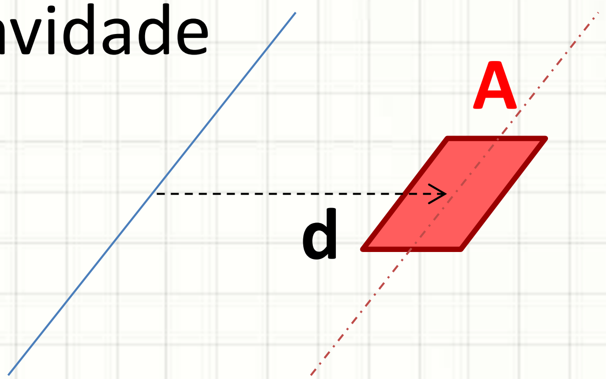
Momento Estático

- Analogia: Momento de uma Força
  - $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$



- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)
  - S = A · d
  - d: do eixo ao centro de gravidade

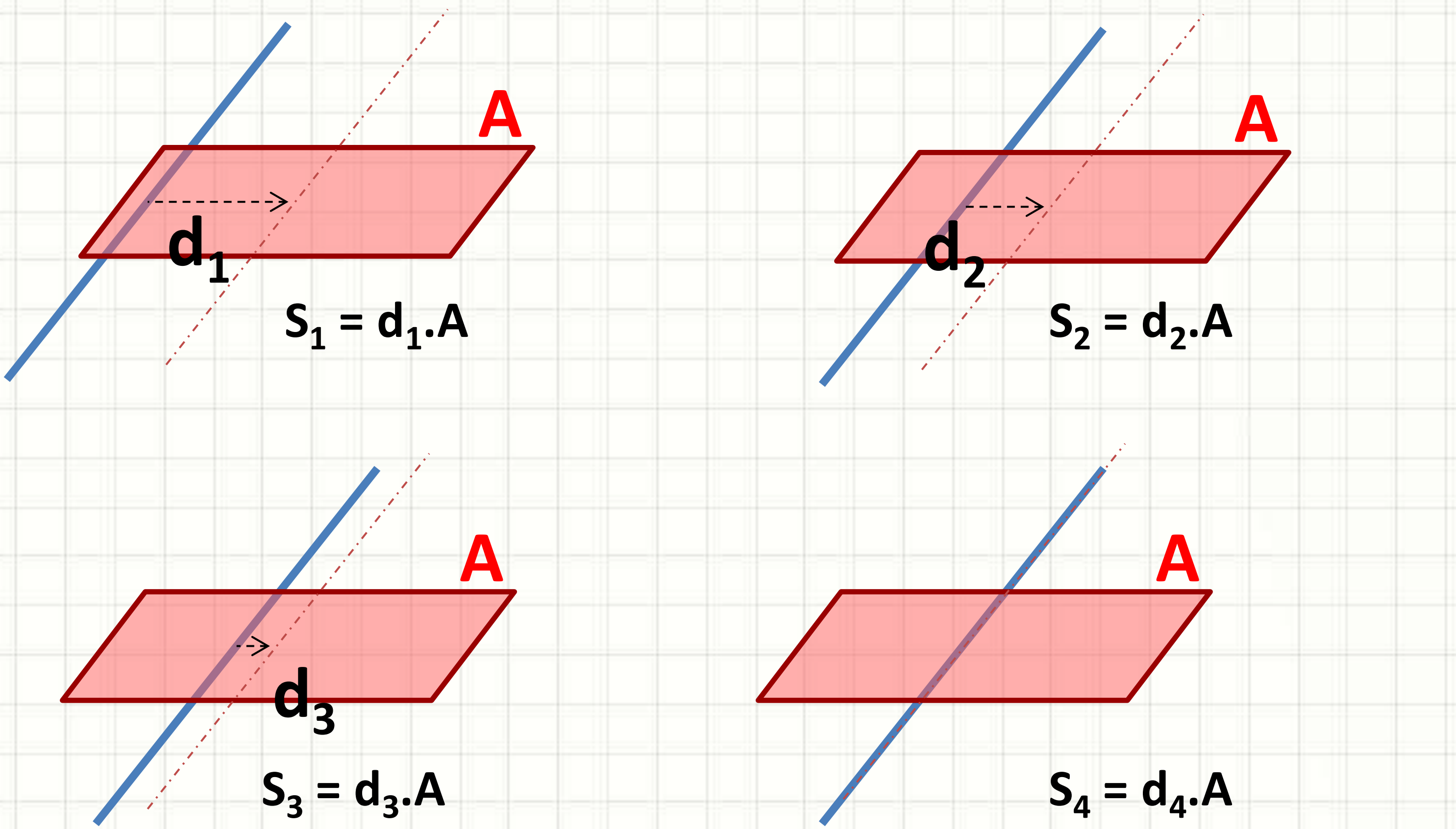
O quão "desequilibrada" está uma área em relação a um eixo de interesse



Momento Estático

$S_1 > S_2 > S_3 > S_4$

- Está equilibrado?

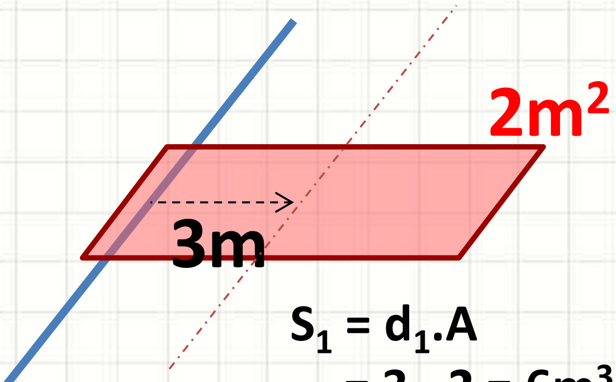


Momento Estático

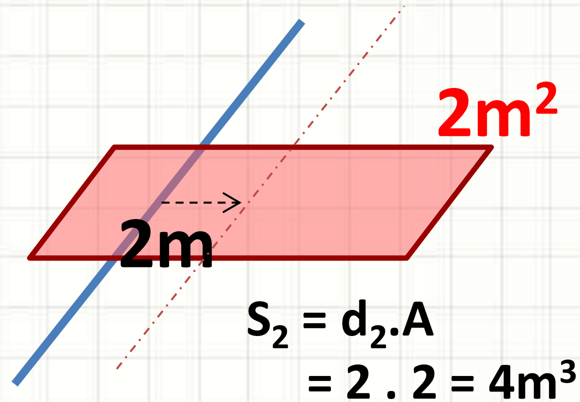
$S_1 > S_2 > S_3 > S_4$

- Está equilibrado?

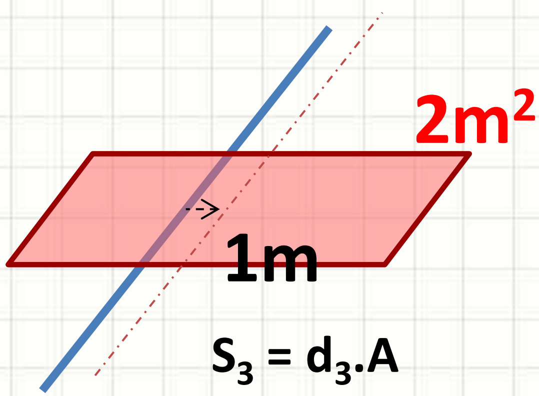
Quanto mais simétrico → menor o S



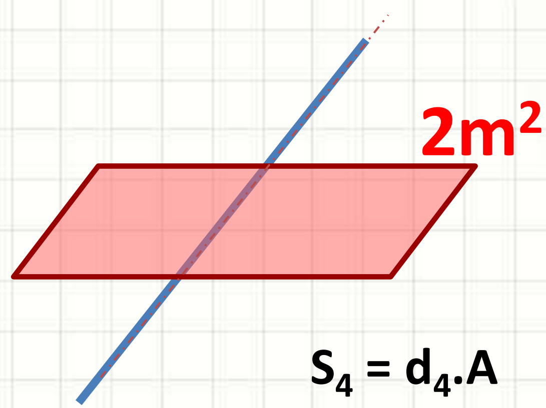
$S_1 = d_1.A$
$= 3 . 2 = 6m^3$



$S_2 = d_2.A$
$= 2 . 2 = 4m^3$



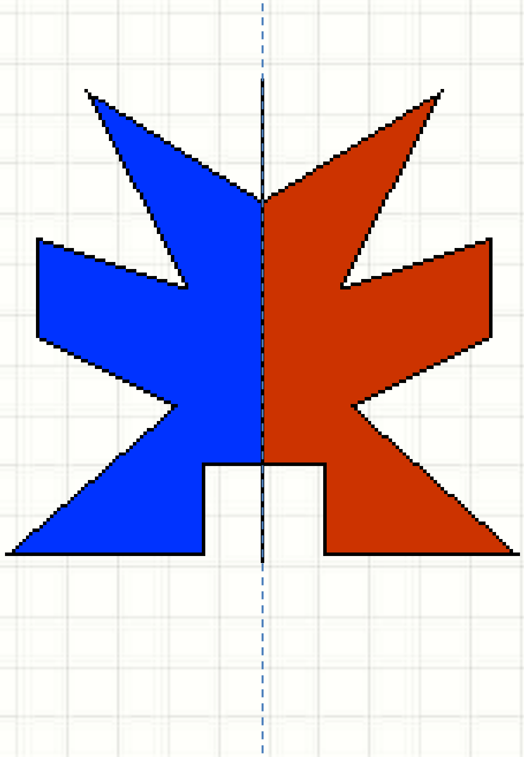
$S_3 = d_3.A$
$= 1 . 2 = 2m^3$



$S_4 = d_4.A$
$= 0 . 2 = 0m^3$

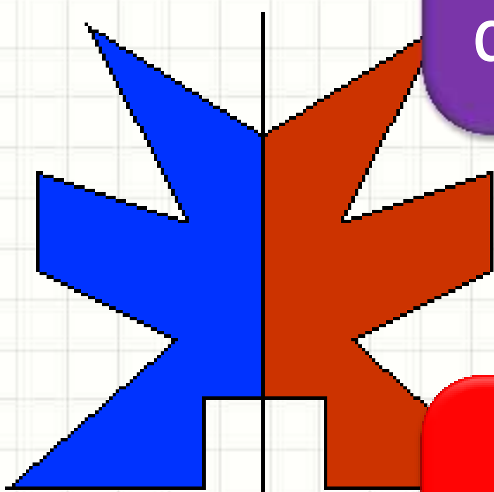
Momento Estático

- Simetria - distribuição idêntica da área, relativamente a um eixo



Momento Estático

- Simetria - d a área, relativame

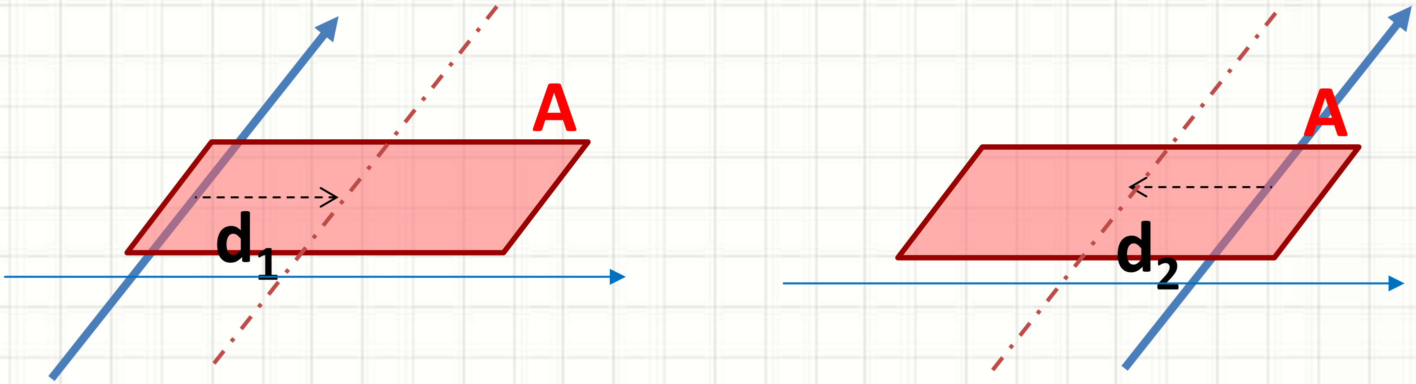


Momento Estático em Relação ao Eixo de Simetria é ZERO!

A distância tem SINAL!

Sinal do Momento Estático

- Considere o fio azul: as situações são iguais?



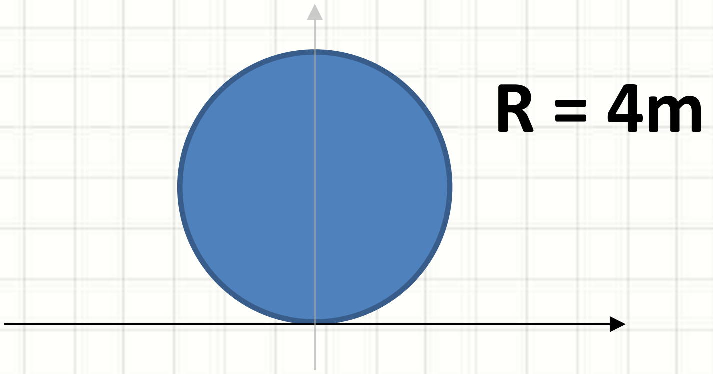
$S_1 = d_1.A > 0$ **$S_2 = d_2.A < 0$**

- Se já conhecermos a **área** e um **S**: calculamos **d**

$$S = d.A \longrightarrow d = S/A$$

Exercício

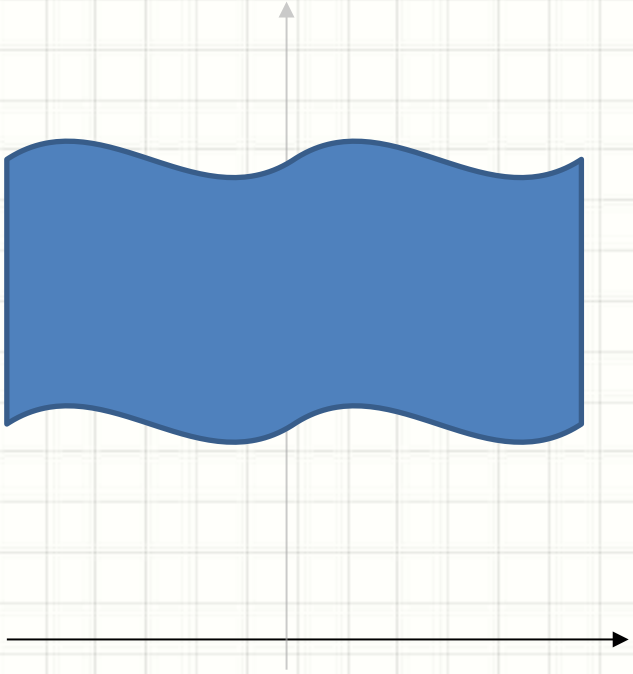
- Calcule o Momento Estático **$S = d.A$**
  - Com relação ao eixo em preto



Exercício

- Calcule a distância ao eixo horiz. de simetria

$$d = S/A$$

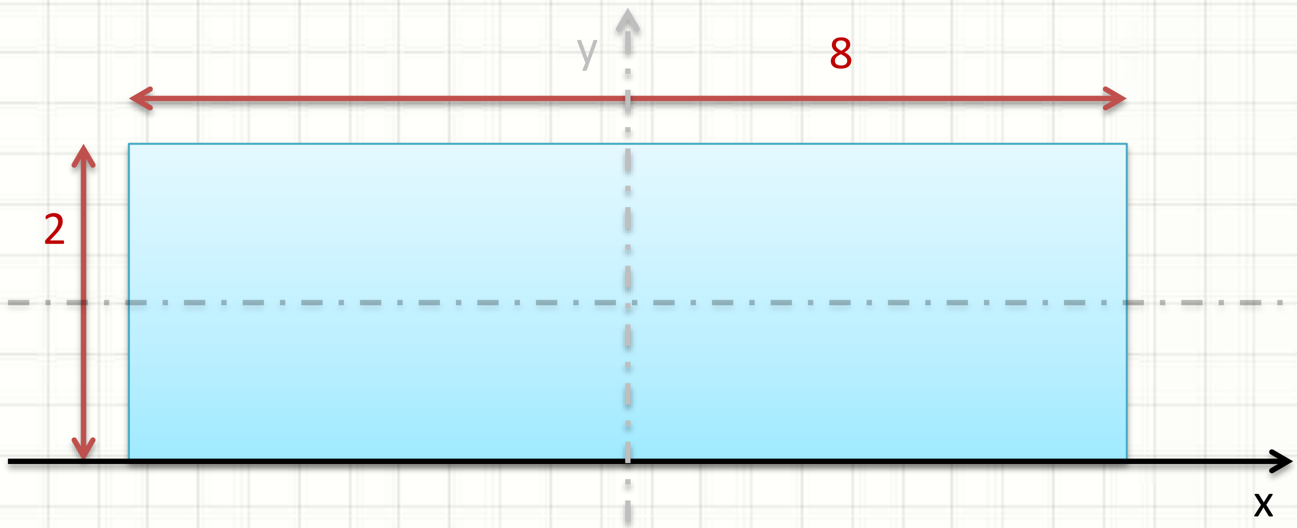


$S = 32m^3$
$A = 8m^2$

Formalizando o Cálculo do Momento Estático

Momento Estático

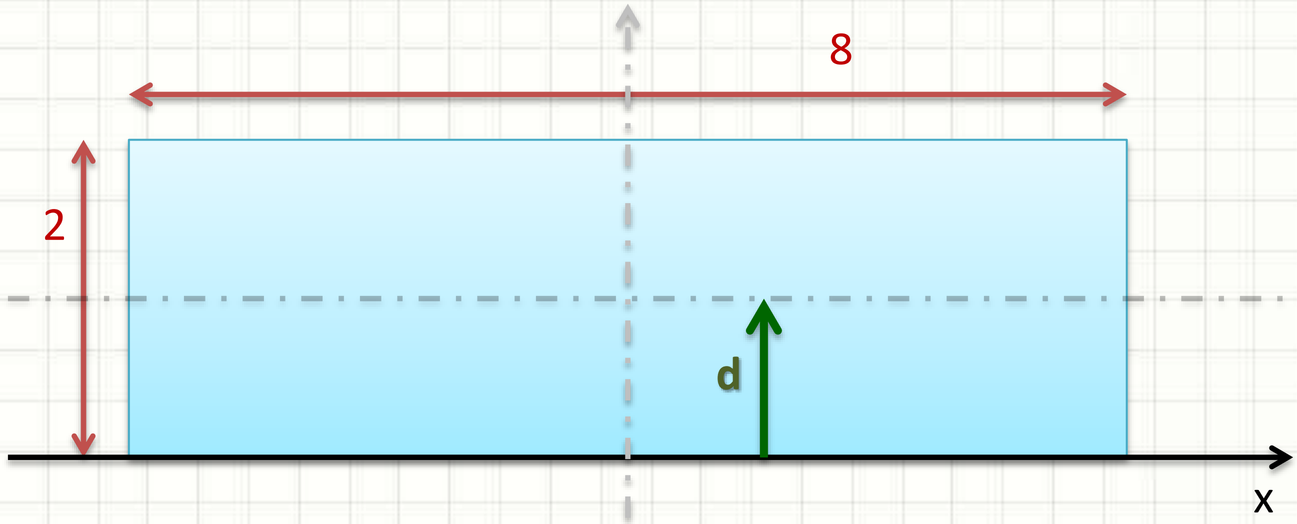
- Exemplo



- Simétrico a Y? → **S_y = 0**
- Simétrico a X? → **Não!**

Momento Estático

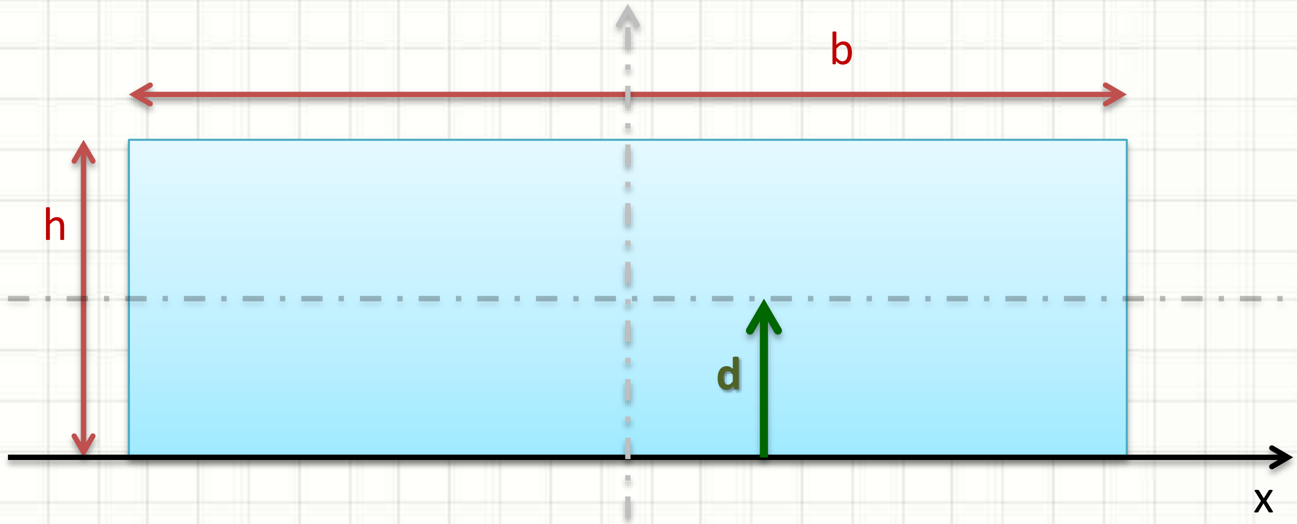
- Exemplo



- **S_x = ?**
- $S_x = A \cdot d = (2 \cdot 8) \cdot 1 = 16$

Momento Estático

- Exemplo Genérico



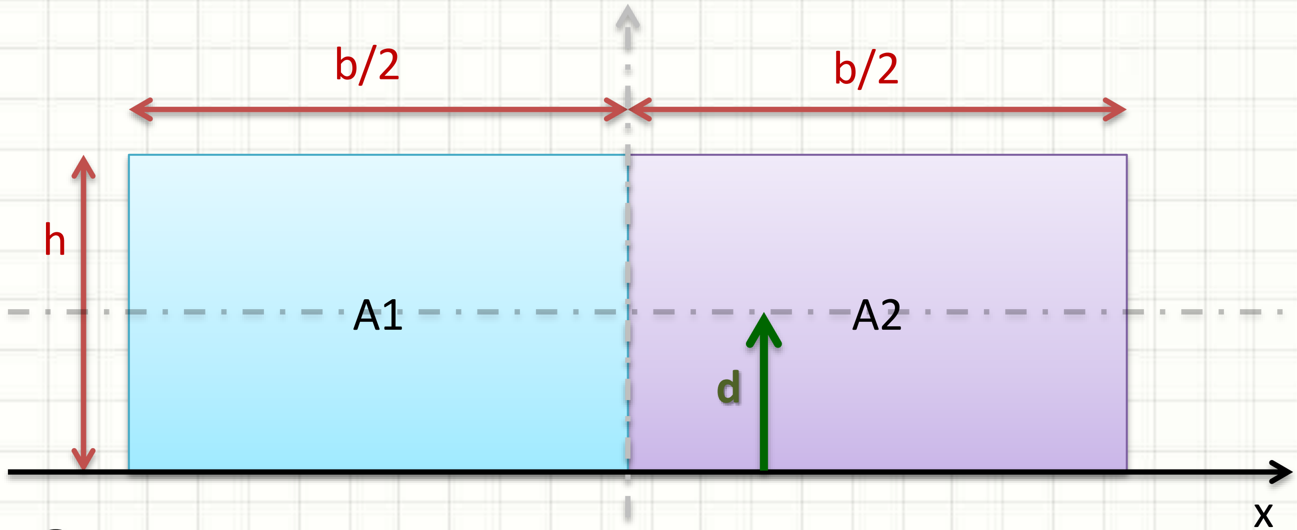
- **S_x = ?**
- $S_x = A.d =$
- $S_x = (b.h).\frac{h}{2} =$

$$\boldsymbol{S_x = \frac{b.h^2}{2}}$$

Anotem!

Momento Estático

- E se a área for considerada em duas partes?



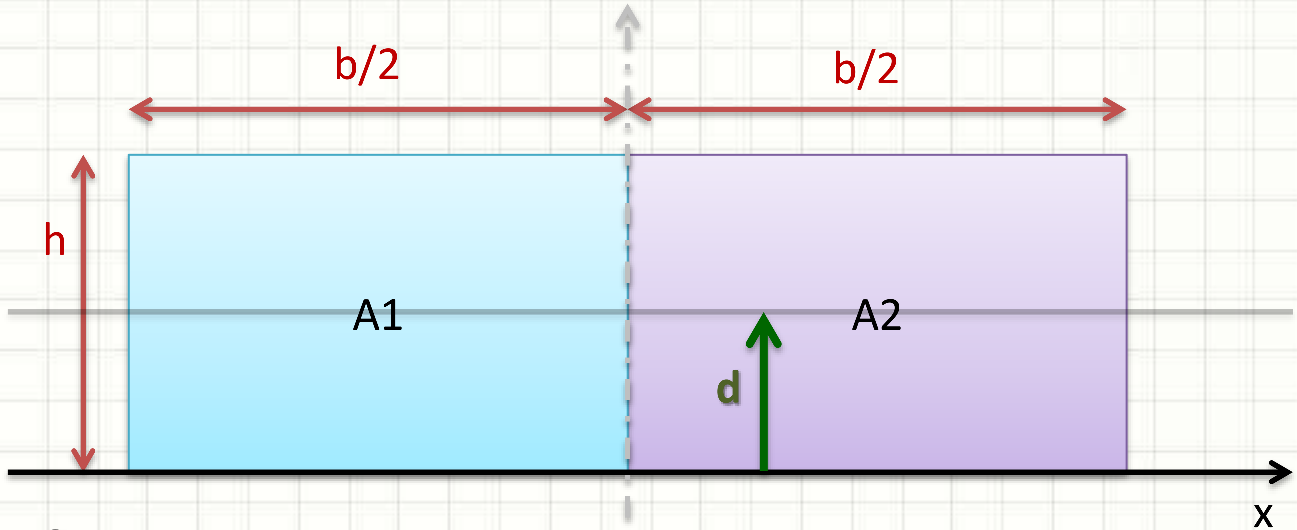
- **S_x = ?**

S_x = A1 · d + A2 · d =

$$S_x = \left(\frac{b}{2}.h\right).\frac{h}{2} + \left(\frac{b}{2}.h\right).\frac{h}{2} \Rightarrow \quad S_x = \left(\frac{b}{4}.h^2\right) + \left(\frac{b}{4}.h^2\right) =$$

Momento Estático

- E se a área for considerada em duas partes?



- **S_x = ?**

$$S_x = \left(\frac{b}{4}.h^2\right) + \left(\frac{b}{4}.h^2\right) \Rightarrow$$

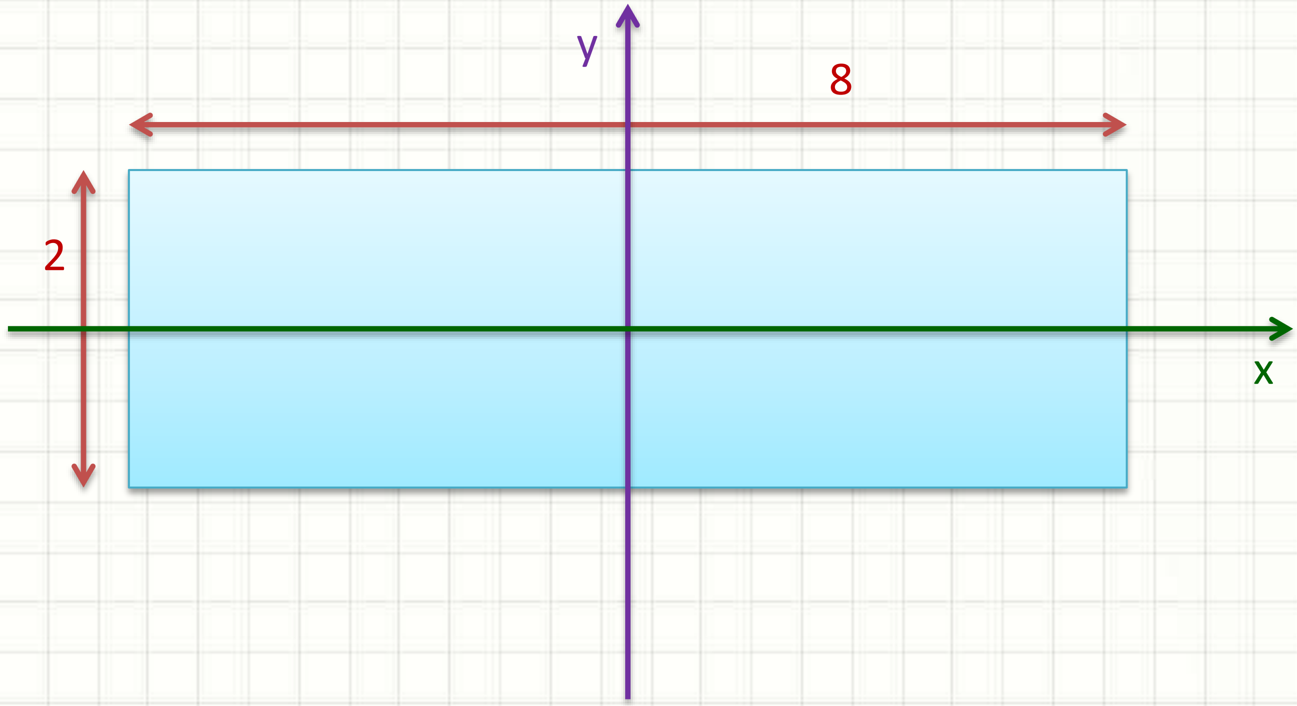
$$S_x = 2.\left(\frac{b}{4}.h^2\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S_x = \frac{b.h^2}{2}}$$

Comparem!

Momento Estático

- E quando há simetria?



- Simétrico a X? → $S_x = 0$
- Simétrico a Y? → $S_y = 0$

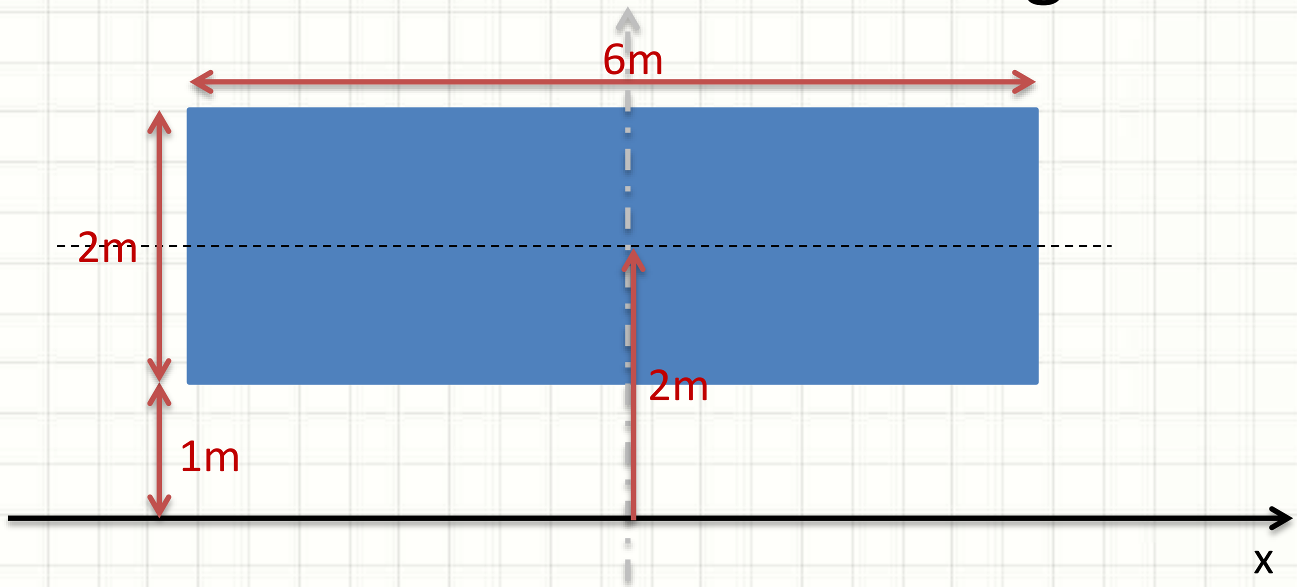
Exercício

Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo

Exercício

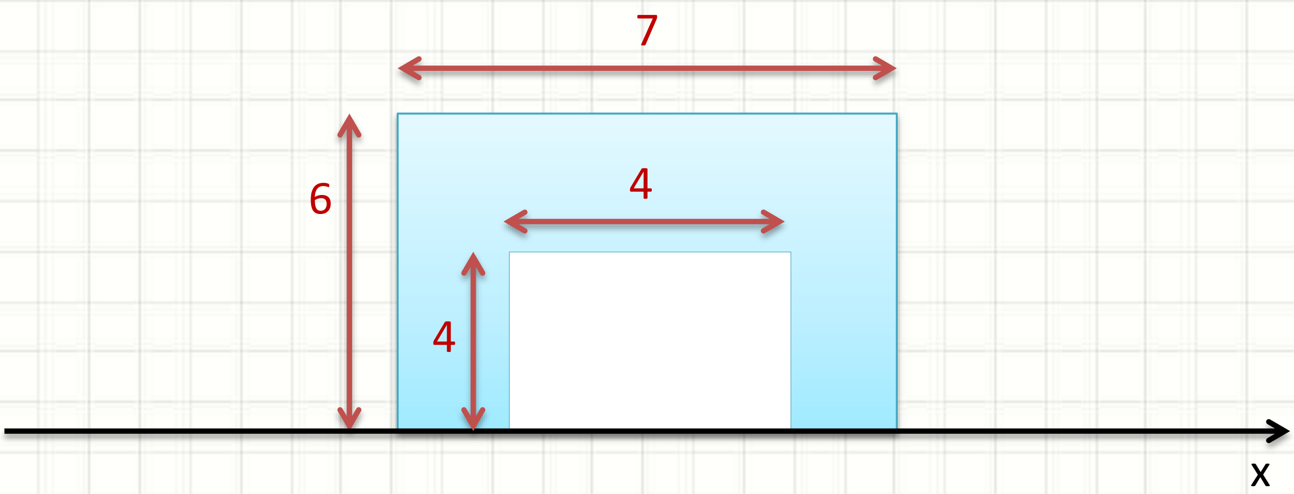
- Calcule o momento estático da figura abaixo



Momento Estático Calculado por Partes

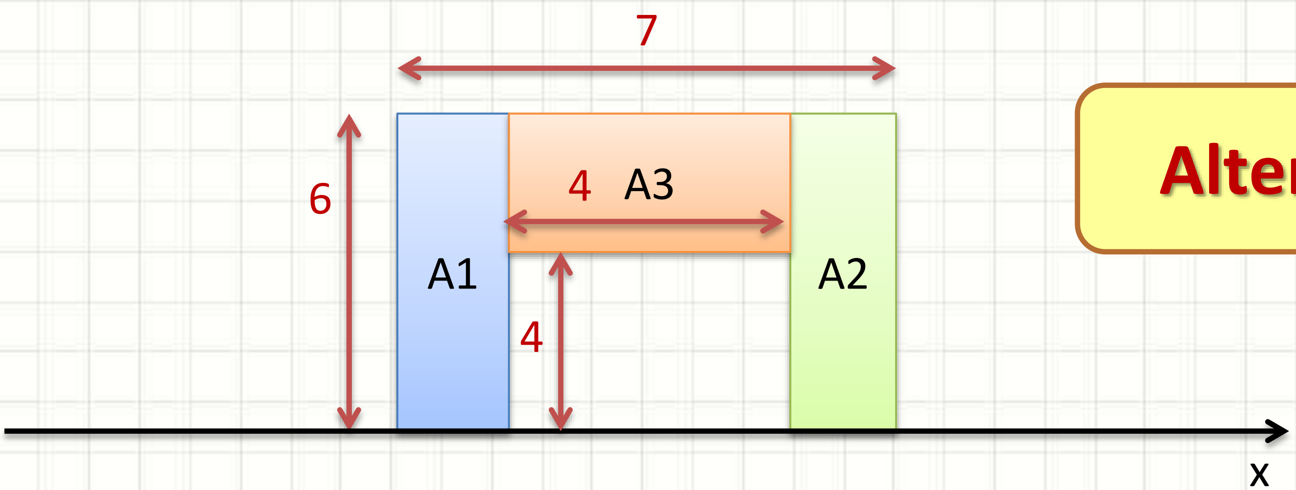
Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul



Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul

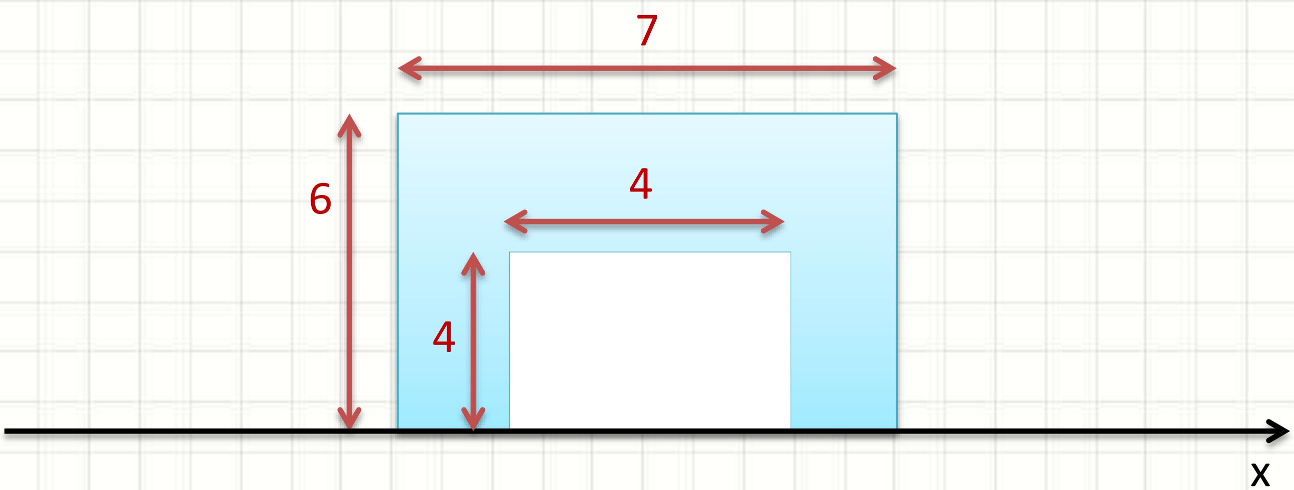


Alternativa?

- $S_{xAzul} = S_{x_{A_1}} + S_{x_{A_2}} + S_{x_{A_3}}$

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul

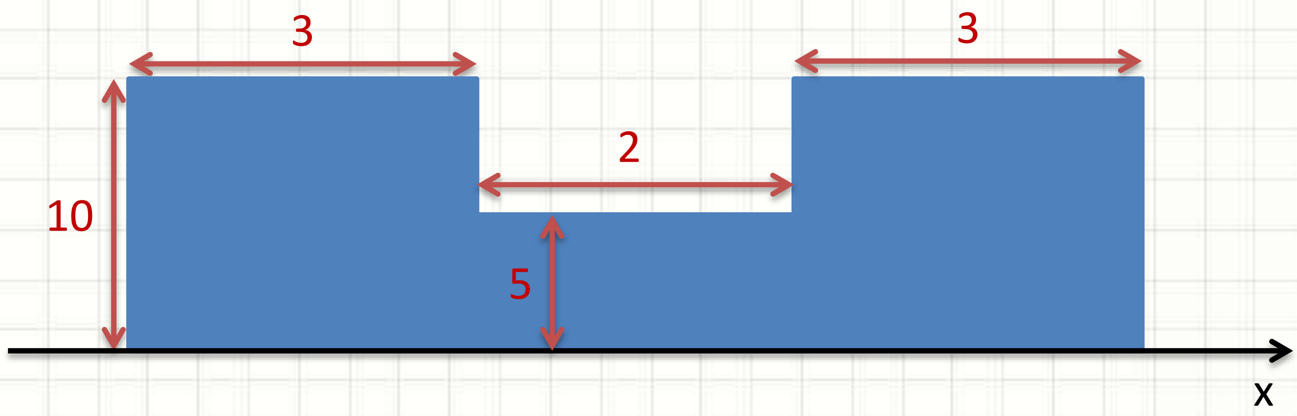


- $S_{xAzul} = S_{xRetAzul} - S_{xRetBranco}$
- $S_{xAzul} = \frac{b_1 \cdot h_1^2}{2} - \frac{b_2 \cdot h_2^2}{2} =$
- $S_{xAzul} = \frac{7 \cdot 36}{2} - \frac{4 \cdot 16}{2} = 126 - 32 = \mathbf{94}$

Exercícios

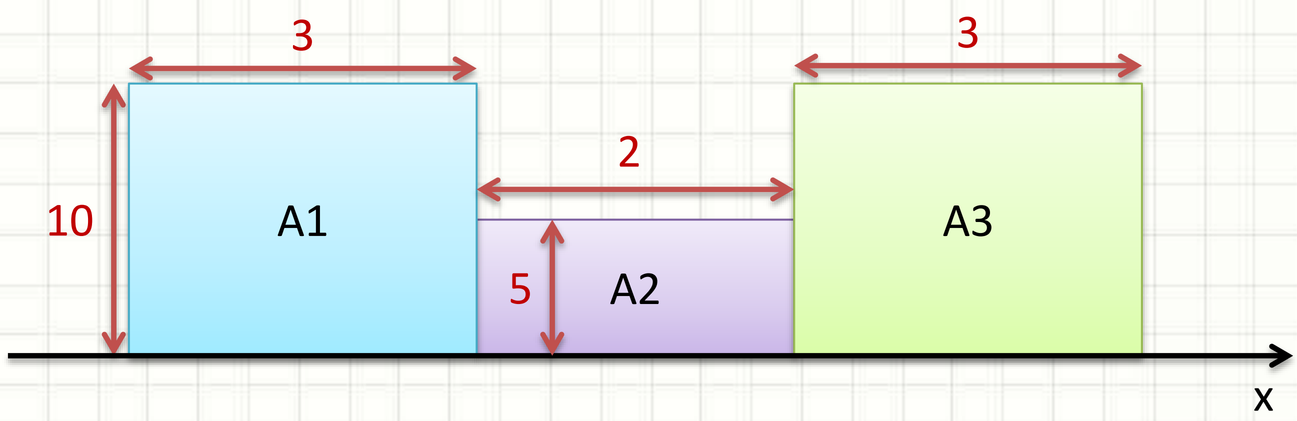
Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo



Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo

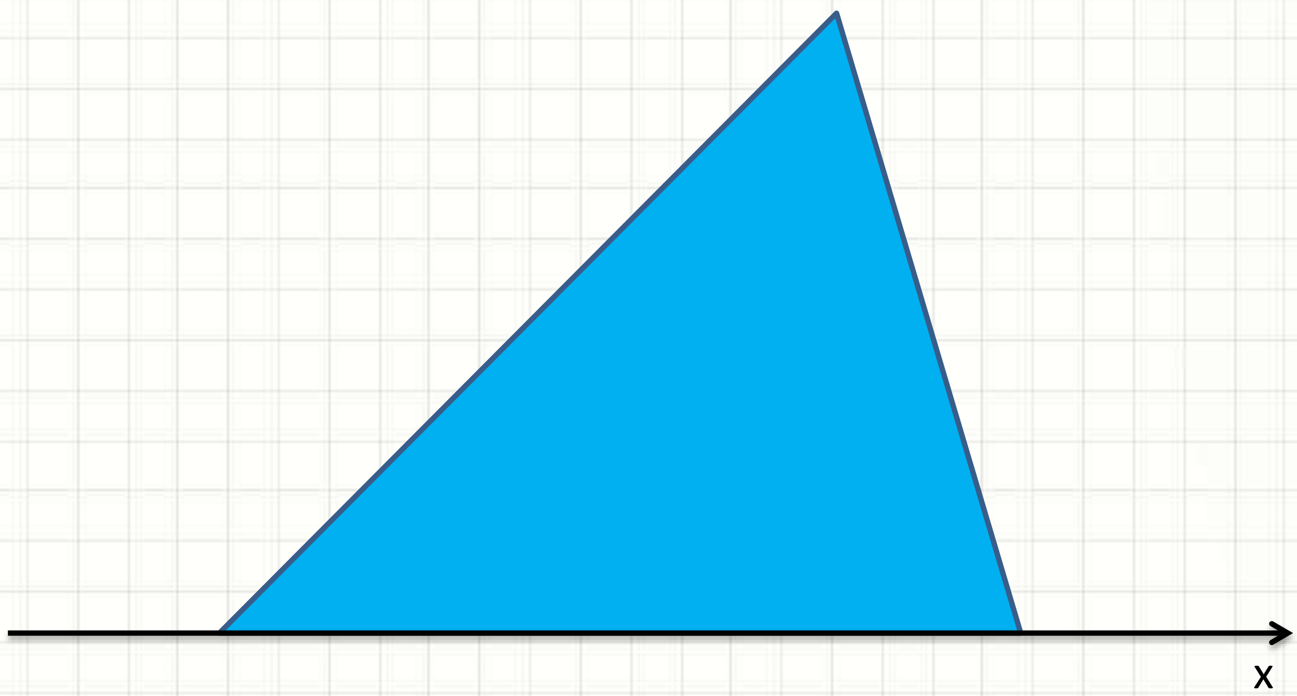


- $S_x = S_{xA1} + S_{xA2} + S_{xA3}$

Momento Estático em Regiões Planas Genéricas

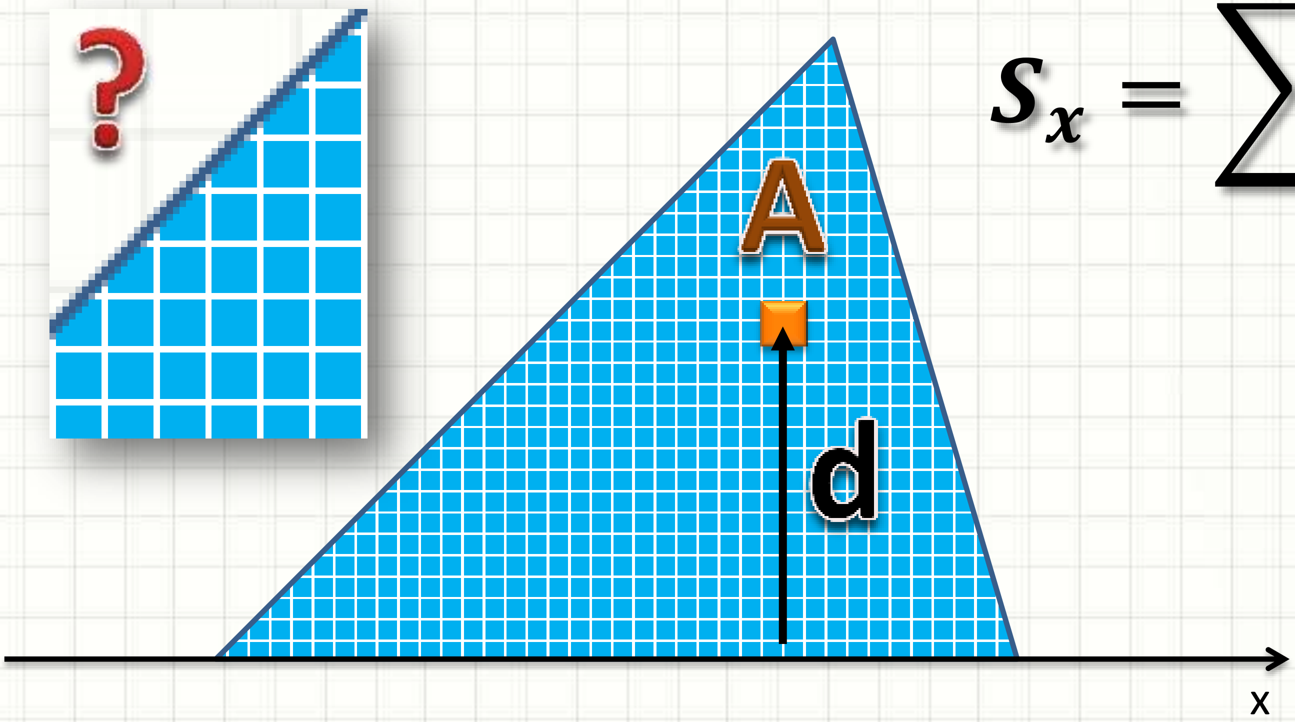
Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



Momento Estático

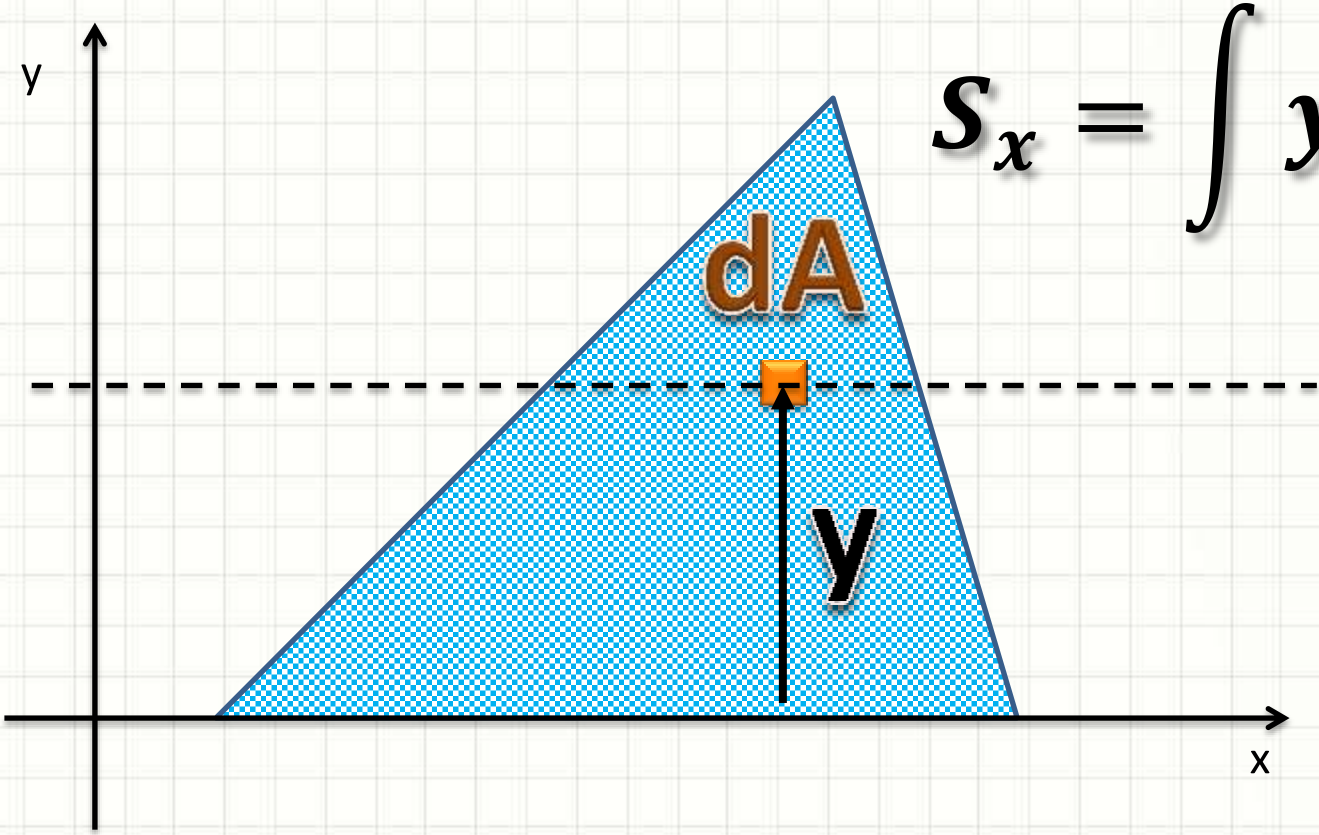
- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \sum d.A$$

Momento Estático

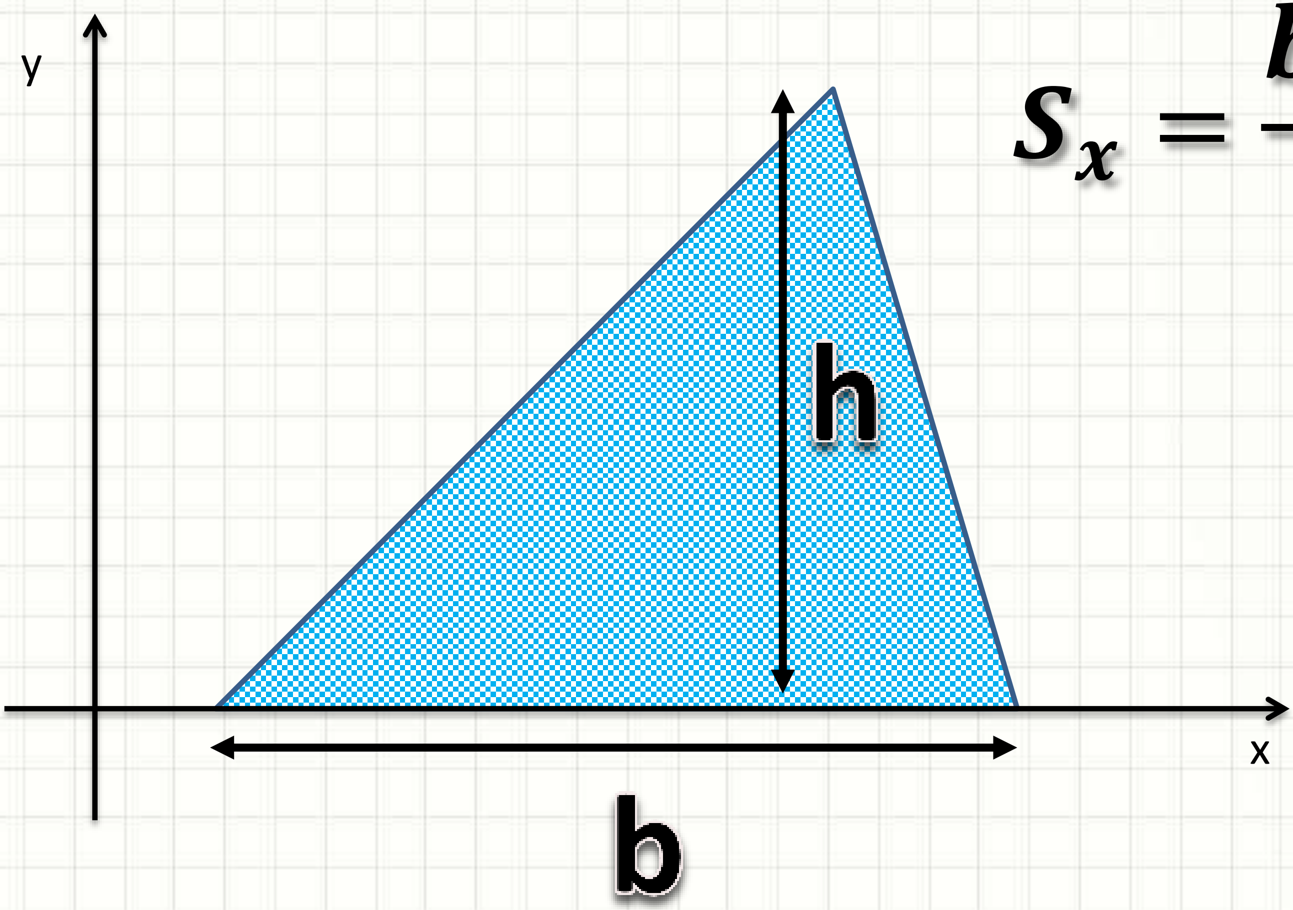
- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \int y.dA$$

Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \frac{b.h^2}{6}$$

Momento Estático

- Cálculo genérico

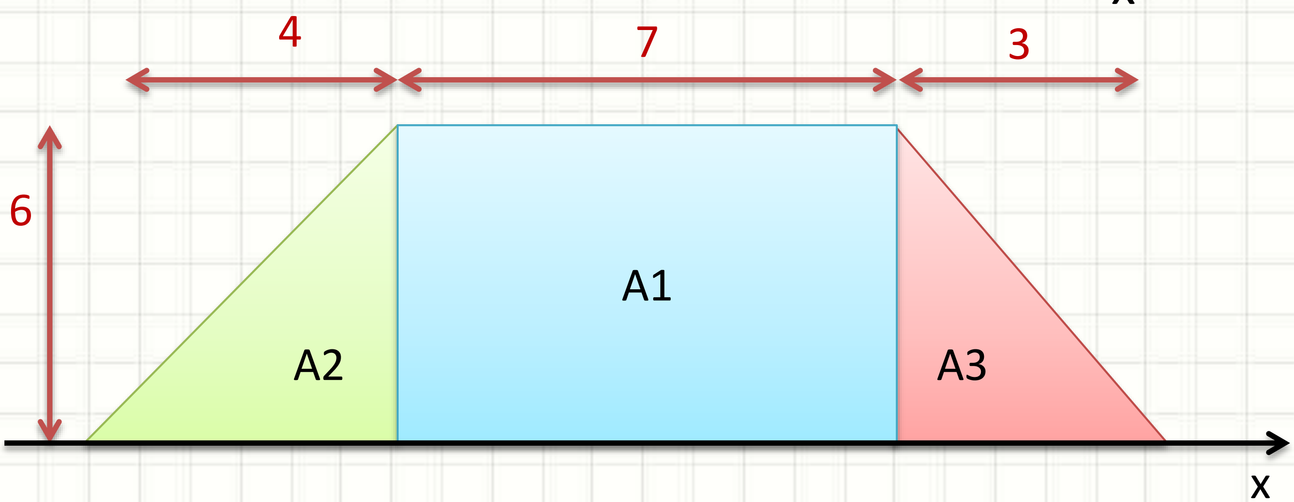
$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

- Unidade S = [L^3]

Momento Estático com Triângulos

- Calcule o Momento Estático S_x:

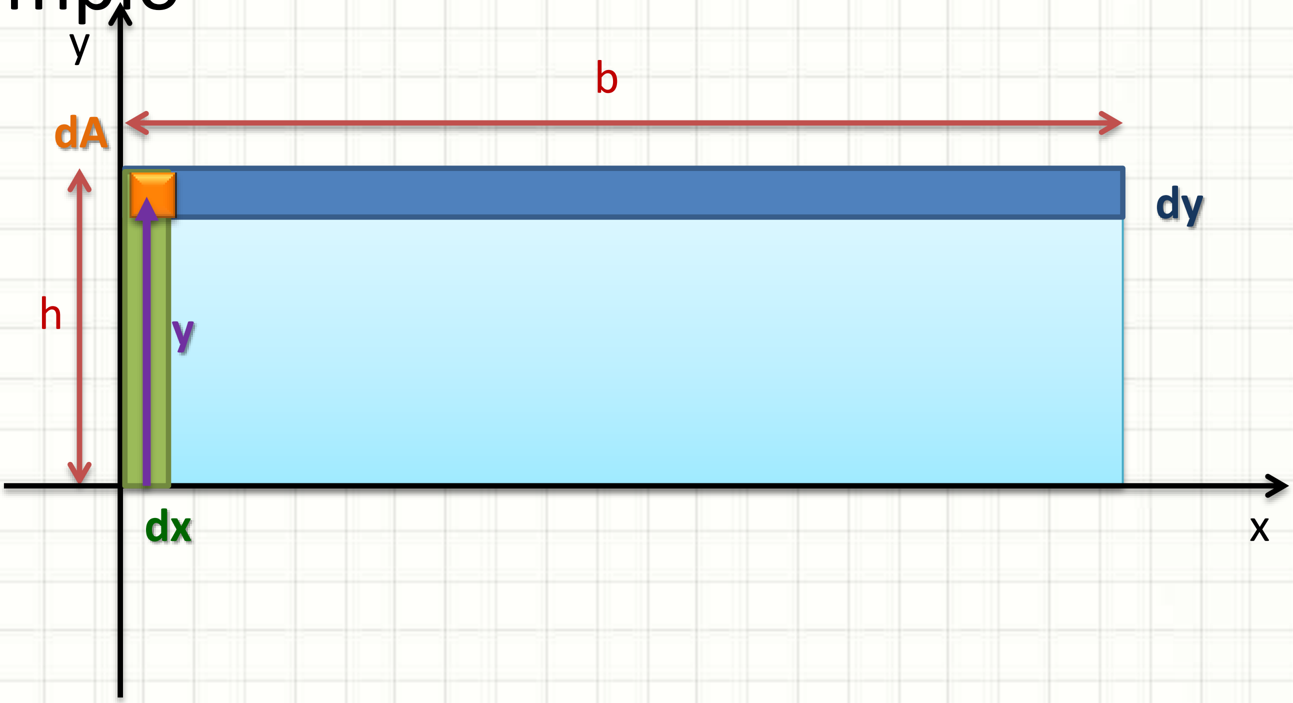


- $S_x = S_{x_{A_1}} + S_{x_{A_2}} + S_{x_{A_3}}$
- $S_x = \frac{b_1 \cdot h^2}{2} + \frac{b_2 \cdot h^2}{6} + \frac{b_3 \cdot h^2}{6} = \frac{(3 \cdot b_1 + b_2 + b_3) \cdot h^2}{6}$
- $\boldsymbol{S_x = \frac{(3 \cdot 7 + 4 + 3) \cdot 36}{6} = 168}$

Exemplo de Momento Estático pela Integral

Momento Estático

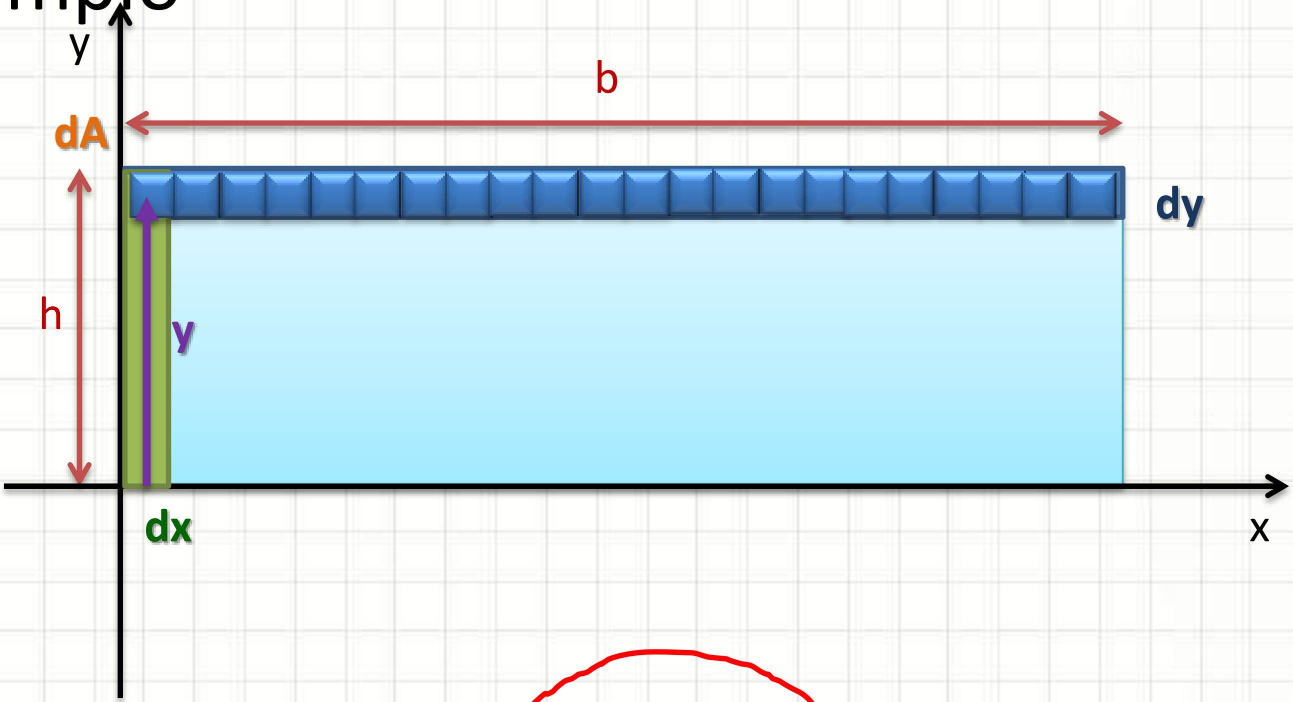
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx . dy =$$

Momento Estático

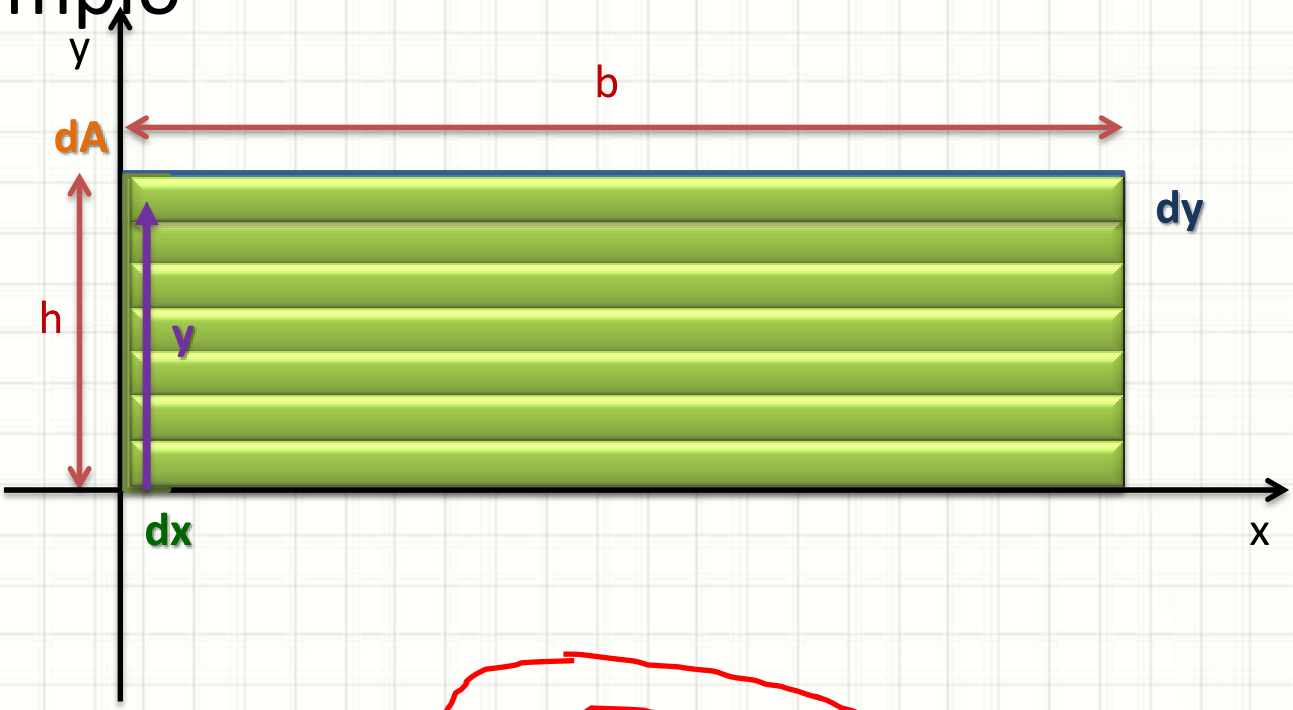
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx . dy =$$

Momento Estático

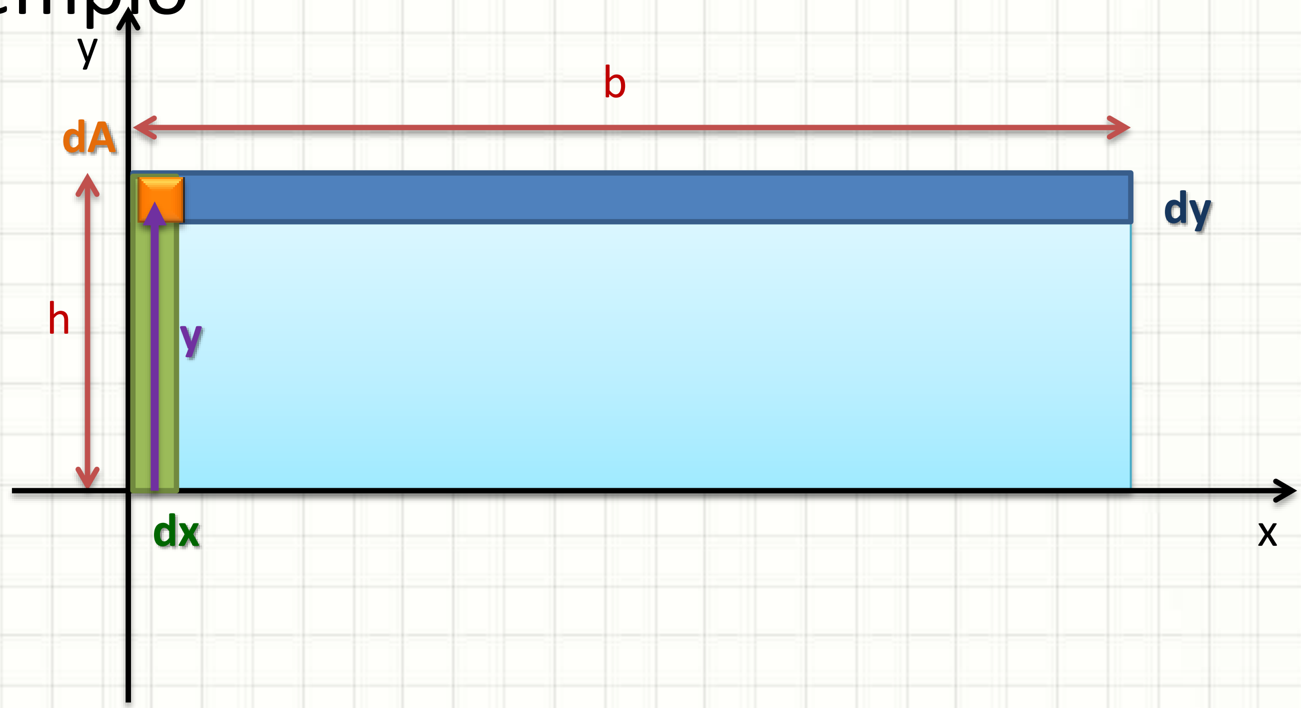
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx.dy =$$

Momento Estático

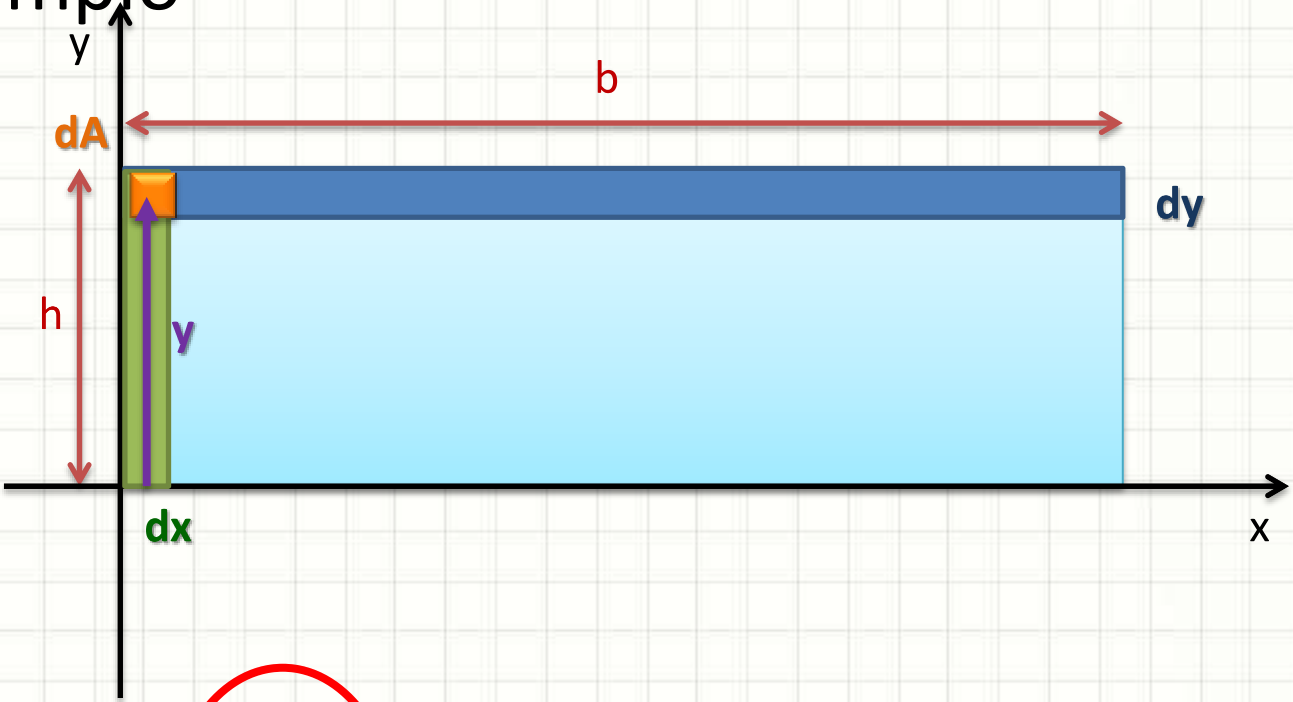
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx.dy = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx.dy =$$

Momento Estático

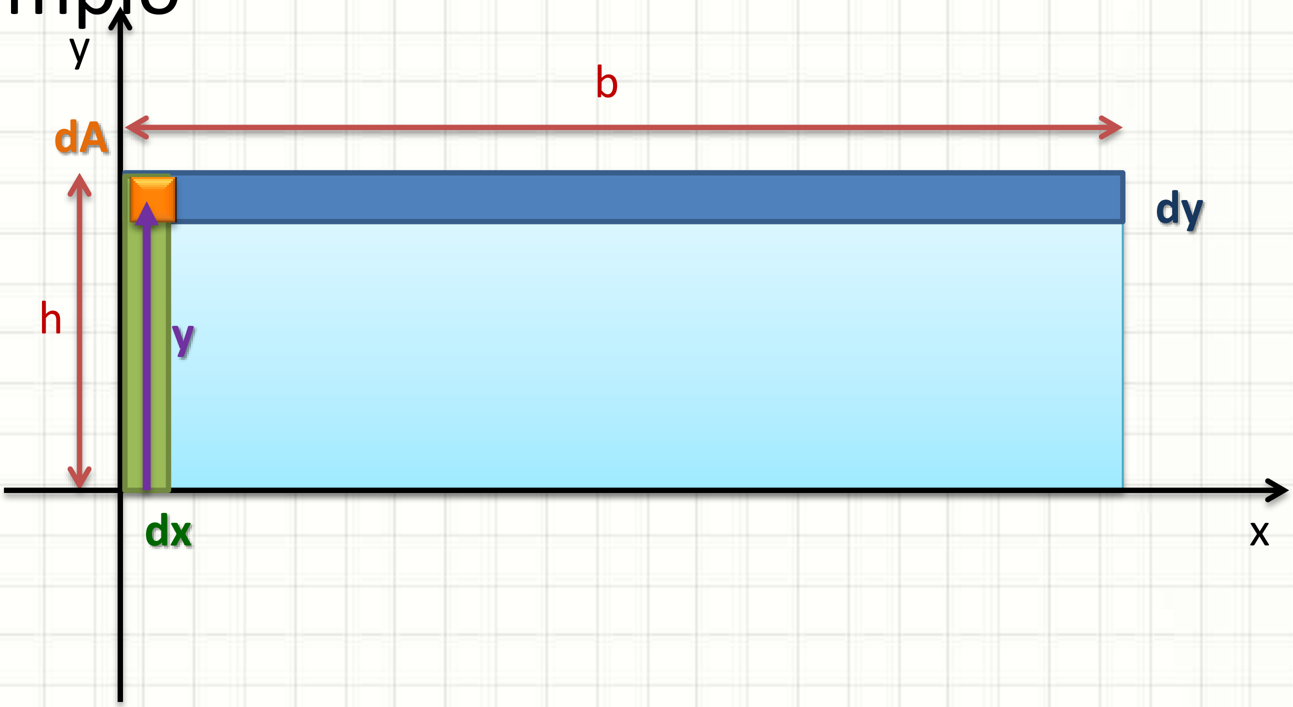
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx . dy = \int_0^h y \cdot b \cdot dy =$$

Momento Estático

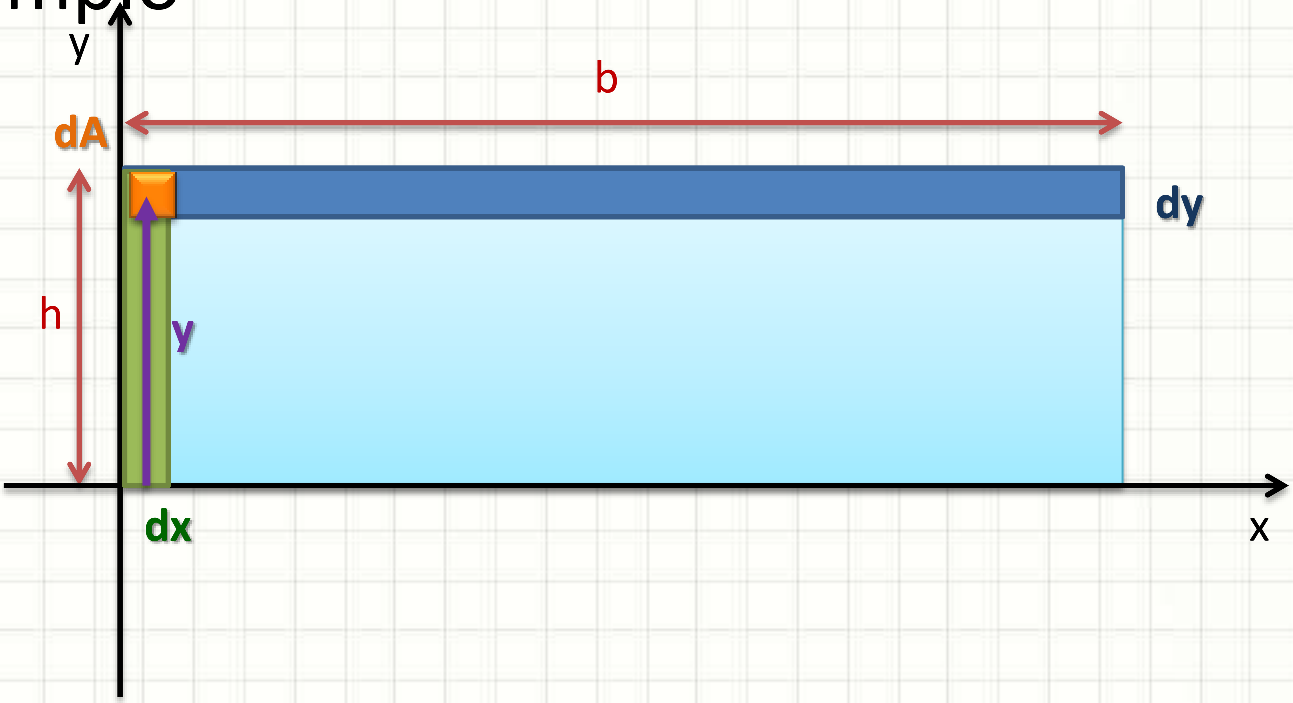
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y \cdot dy =$$

Momento Estático

- Exemplo



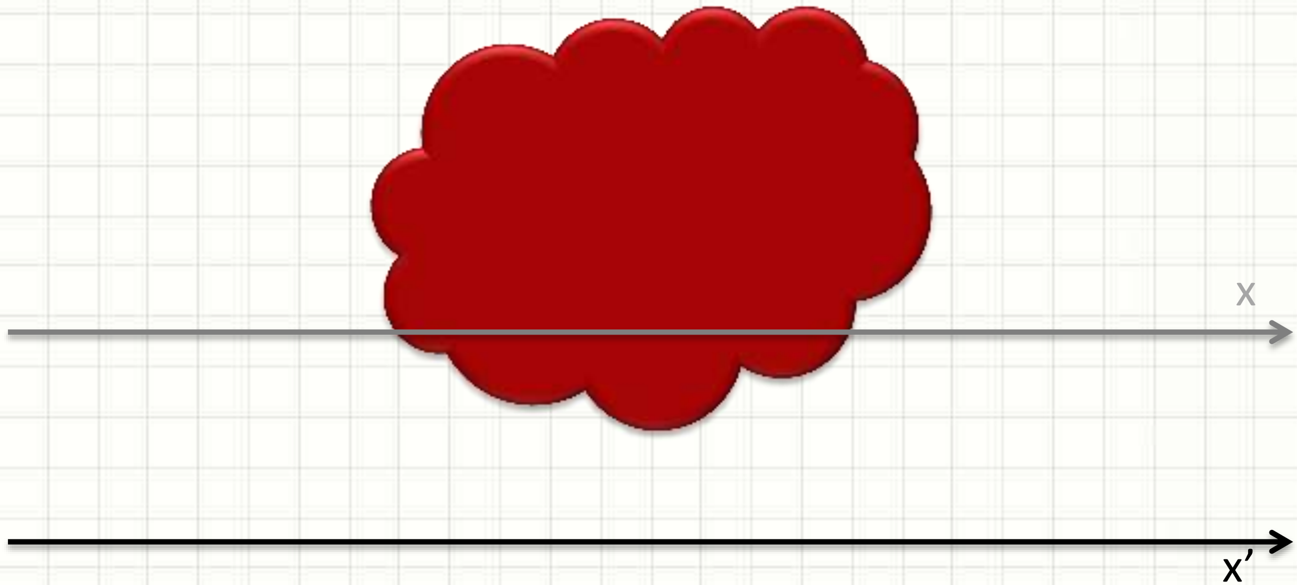
$$S_x = b \cdot \int_0^h y \cdot dy = b \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Pausa para o Café!

Translação de Eixo no Momento Estático

Mudando o Eixo de Referência

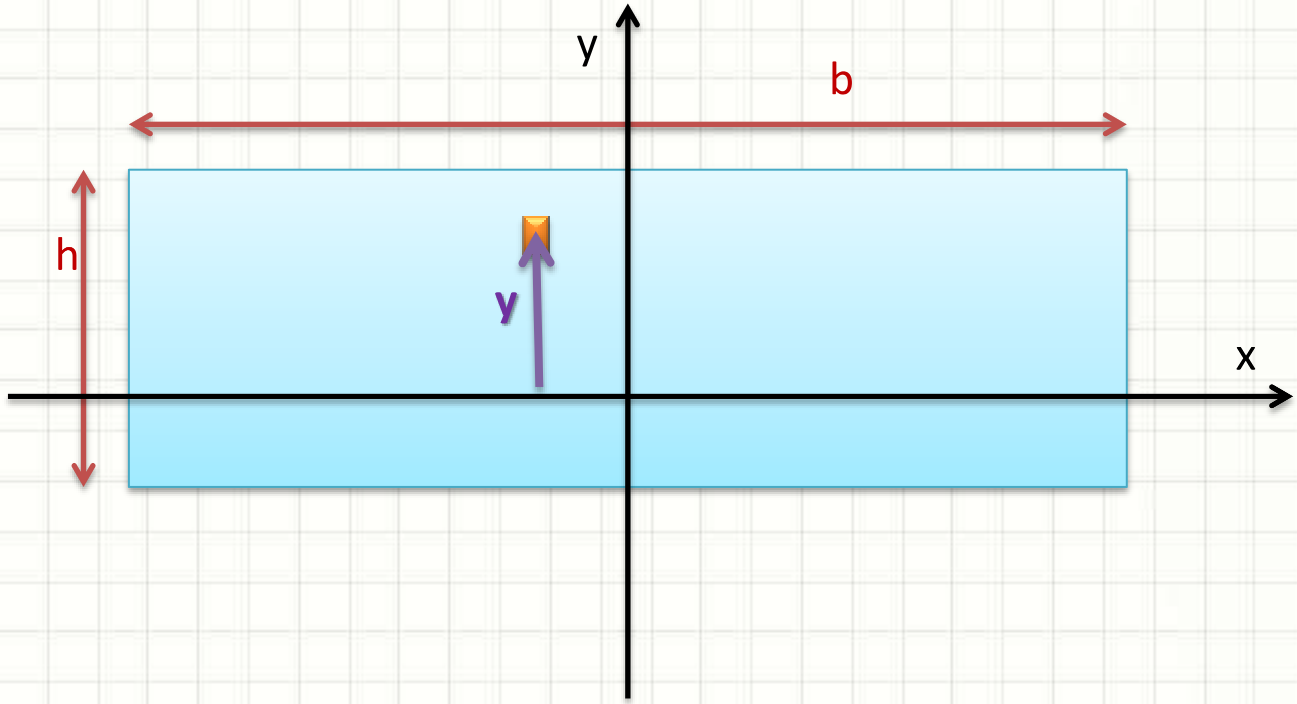
- Tenho S_x e A.



- Como calcular $S_{x'}$?
- Integral?

Translação de Eixos

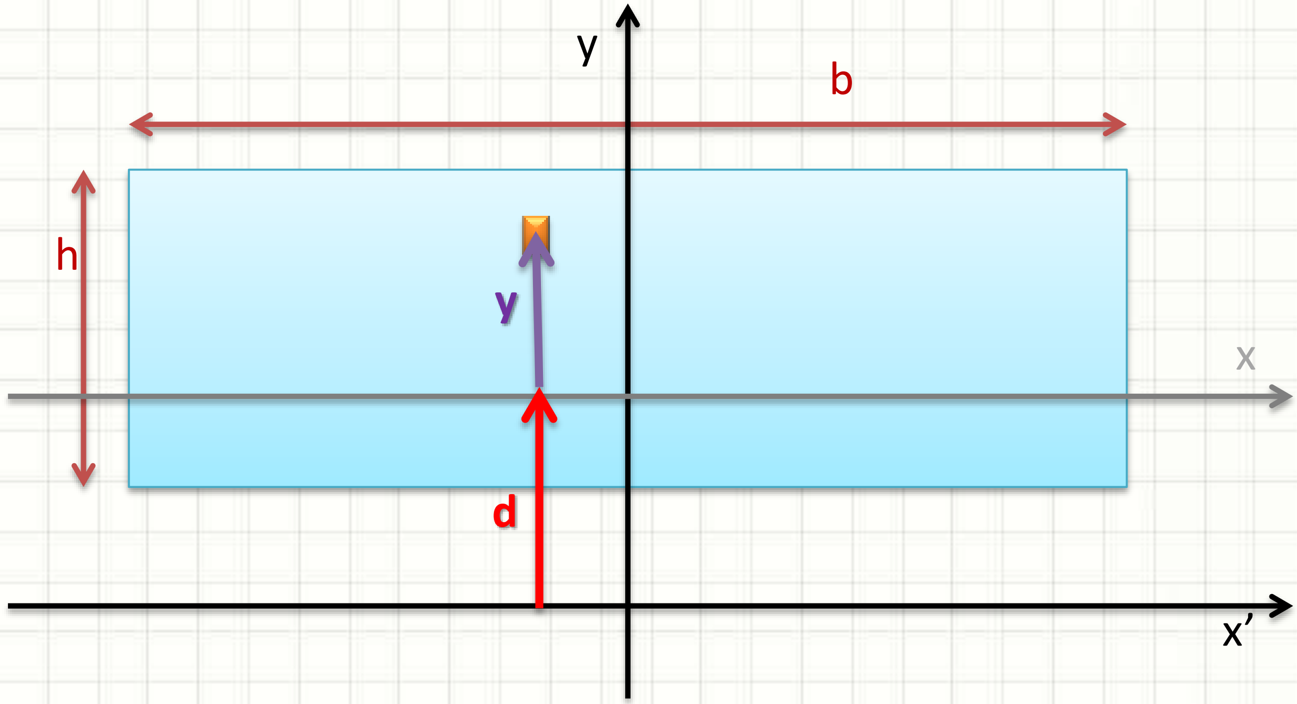
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

Translação de Eixos

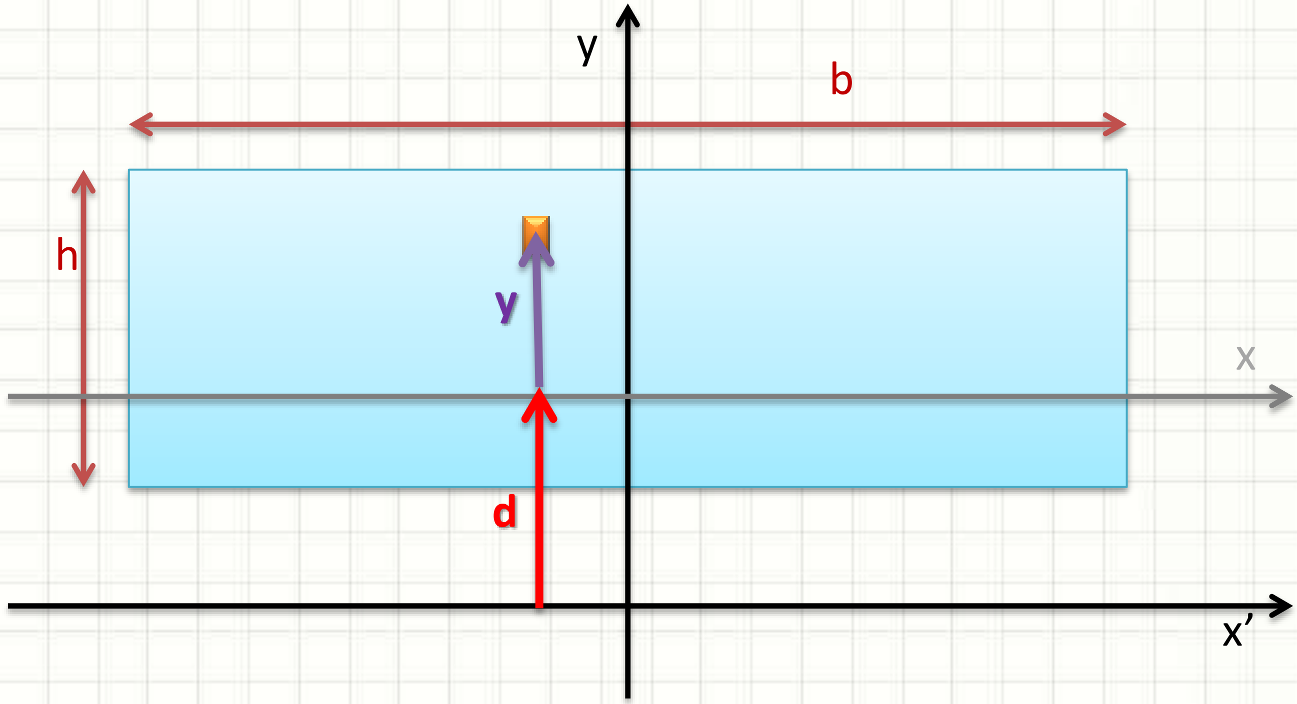
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_x = \int_A y \cdot dA \qquad S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA$$

Translação de Eixos

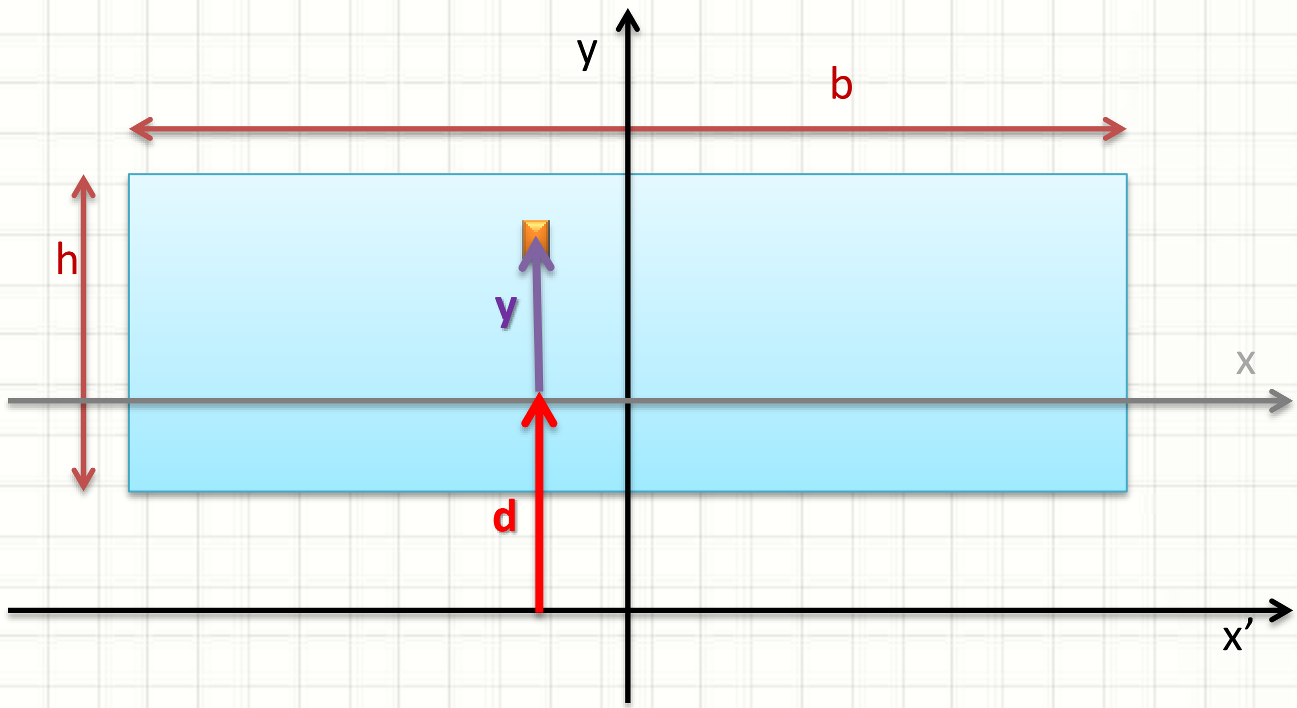
- Momento Estático   (**S_x conhecido**)



$$S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA$$

Translação de Eixos

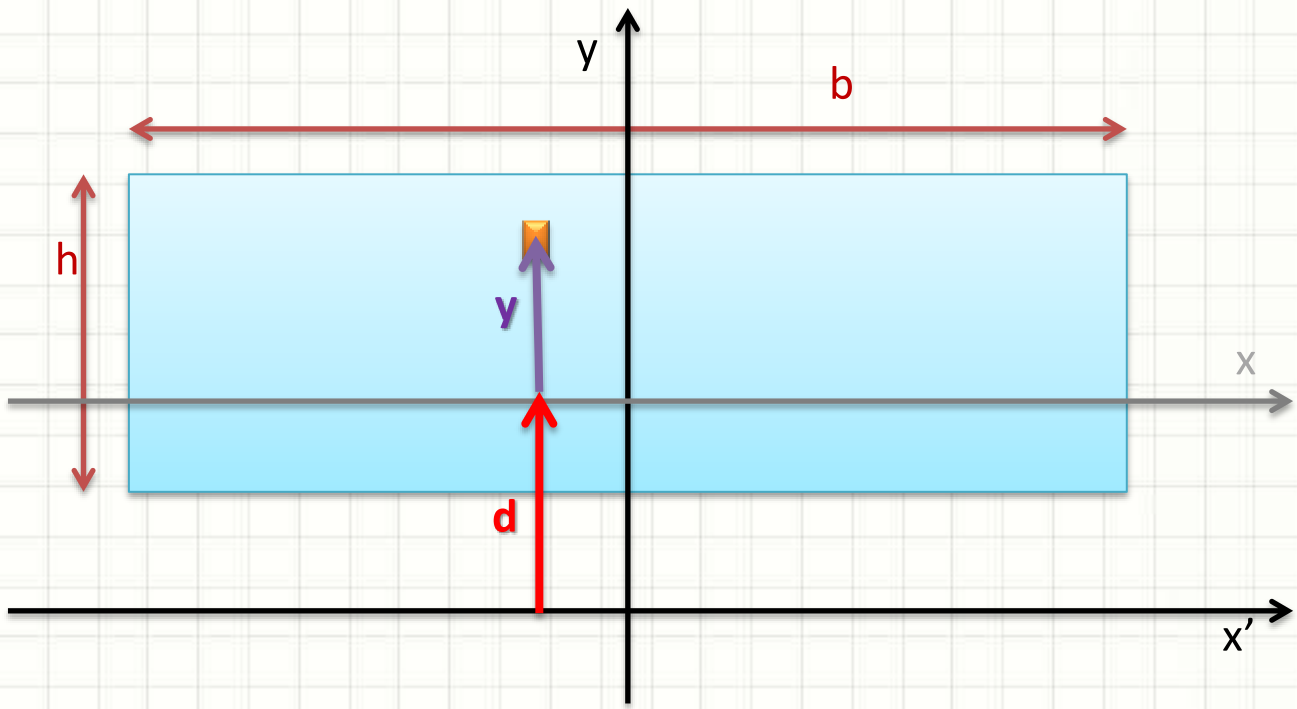
- Momento Estático (S_x **conhecido**)



$$S_{x'} = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA = \int_A y \cdot dA + d.\int_A dA$$

Translação de Eixos

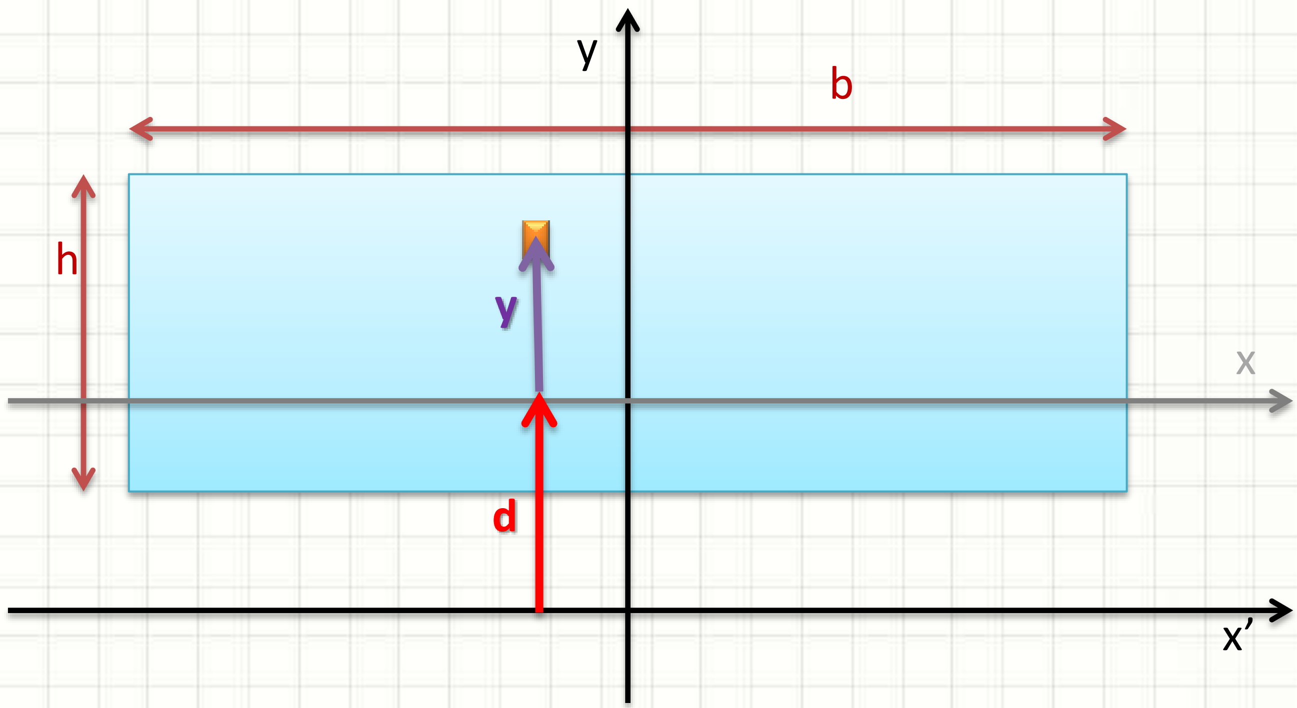
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_{x'} = \boxed{\int_A y \cdot dA} + \boxed{d.\int_A dA}$$

Translação de Eixos

- Momento Estático (**S_x conhecido**)



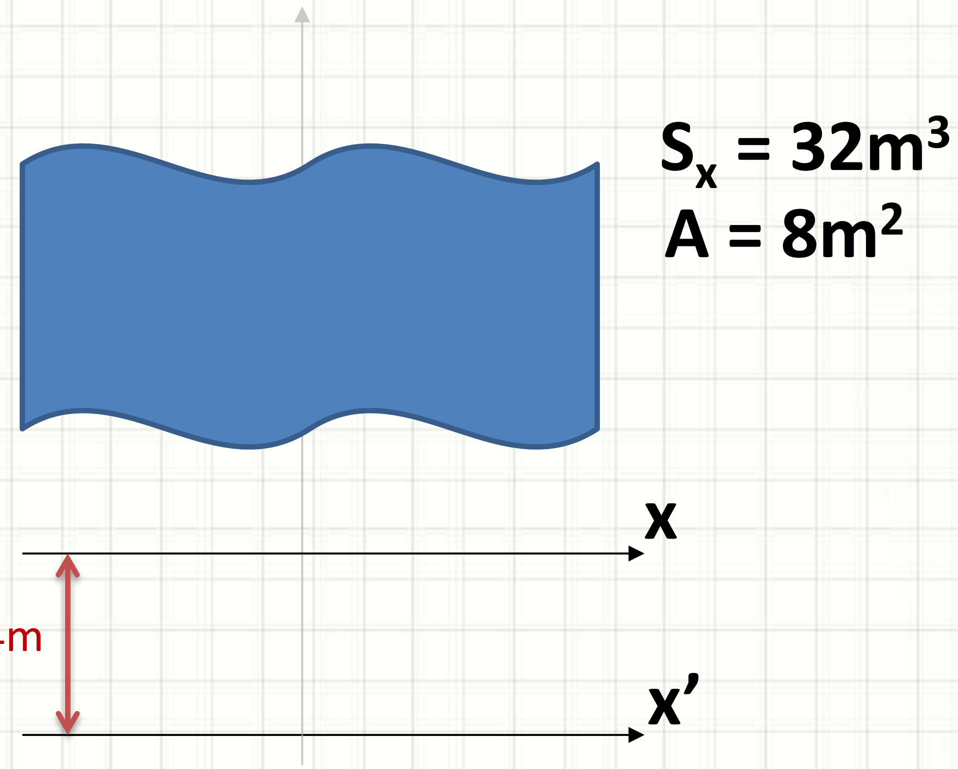
$$S_{x'} = S_x + d.A$$

O que acontece se o eixo x original era o de simetria?

ΔS

Exercício

- Calcule o momento estático $S_{x'}$



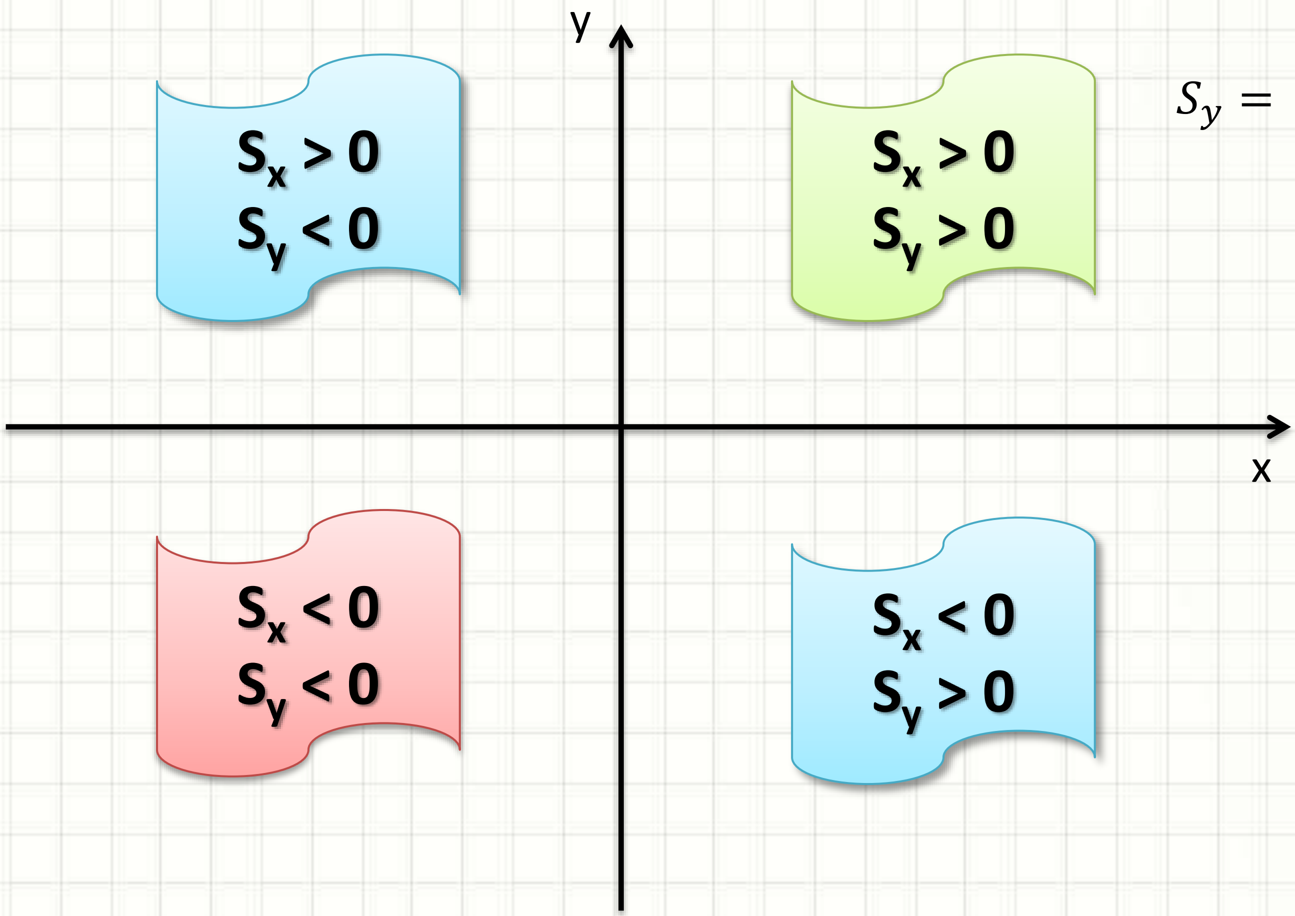
Sinal do Momento Estático

Sinal do Momento Estático

- Depende do “quadrante” da área

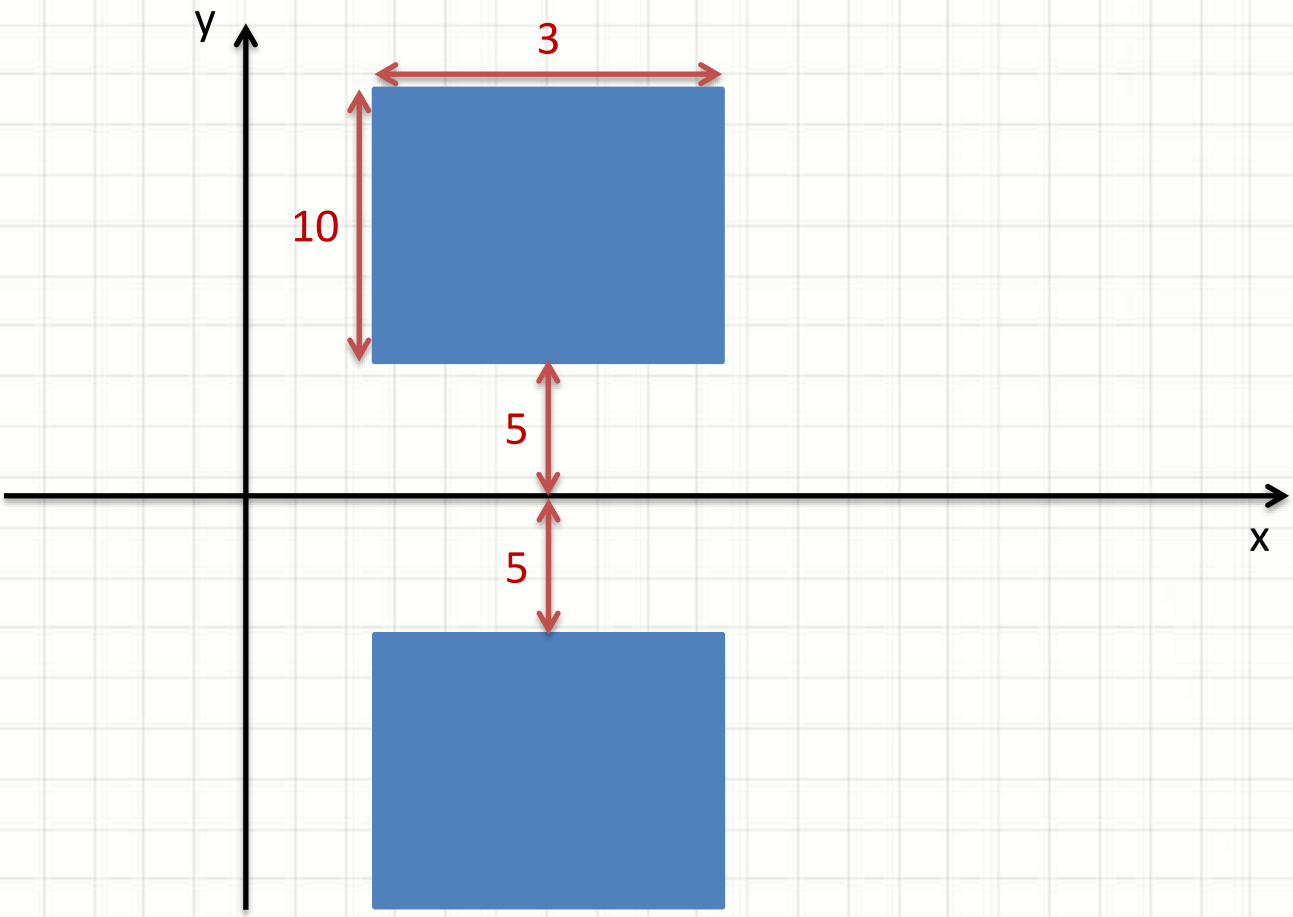
$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$



Exercício

- Calcule o momento estático S_x da figura:



Sinal na Translação de Eixos

- Quando faço translação de momento estático:

$$S_{x'} = S_x + d.A$$

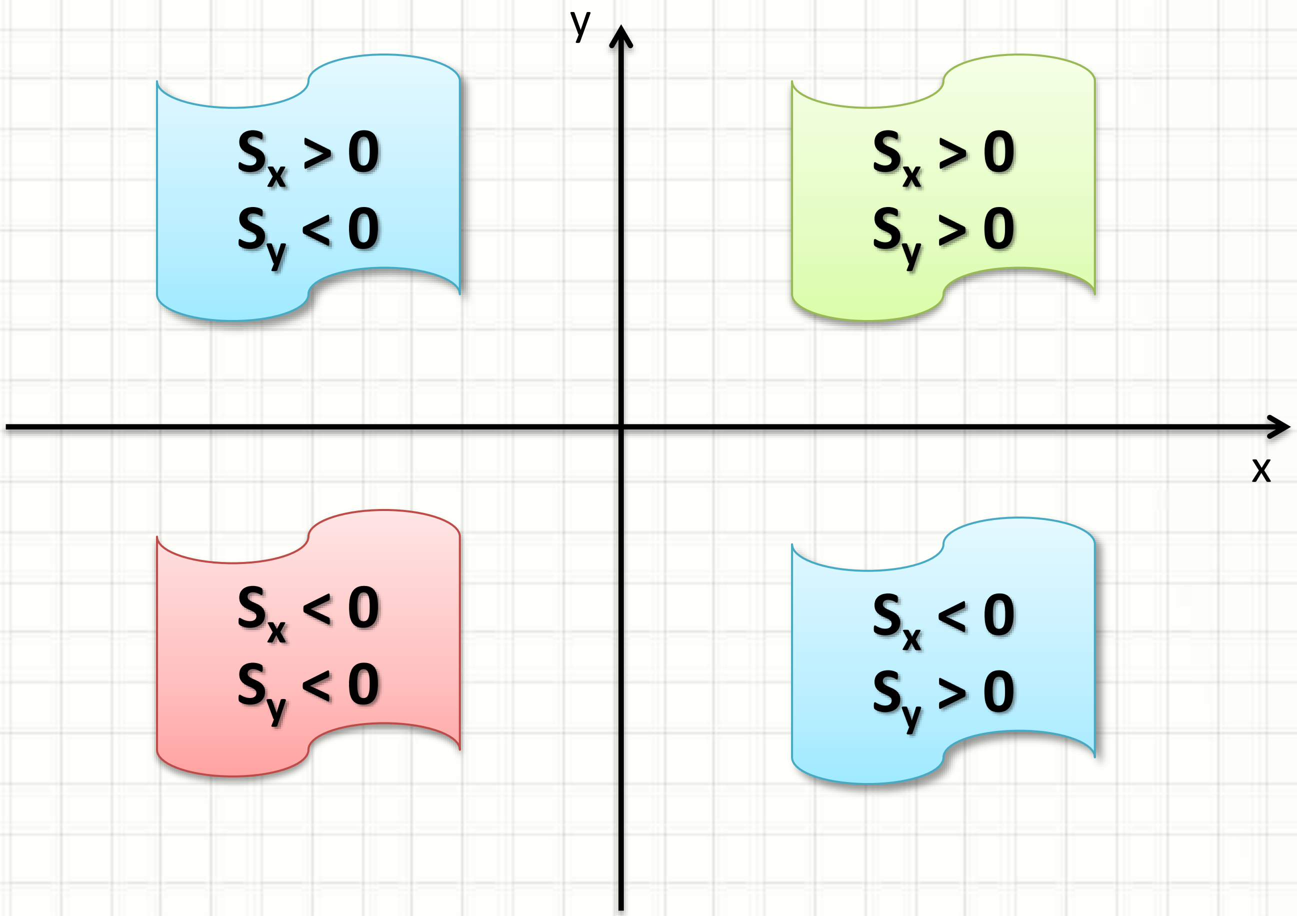
- Qual o sinal do "d"?
  - Novo eixo se distancia do eixo de simetria?
    - "d" terá o mesmo sinal do Sx
  - Novo eixo mais próximo do eixo de simetria?
    - "d" terá sinal invertido ao Sx

Se distanciando do centro? d →↑S
Se aproximando do centro? d →↓S

Consequências do Sinal do Momento Estático

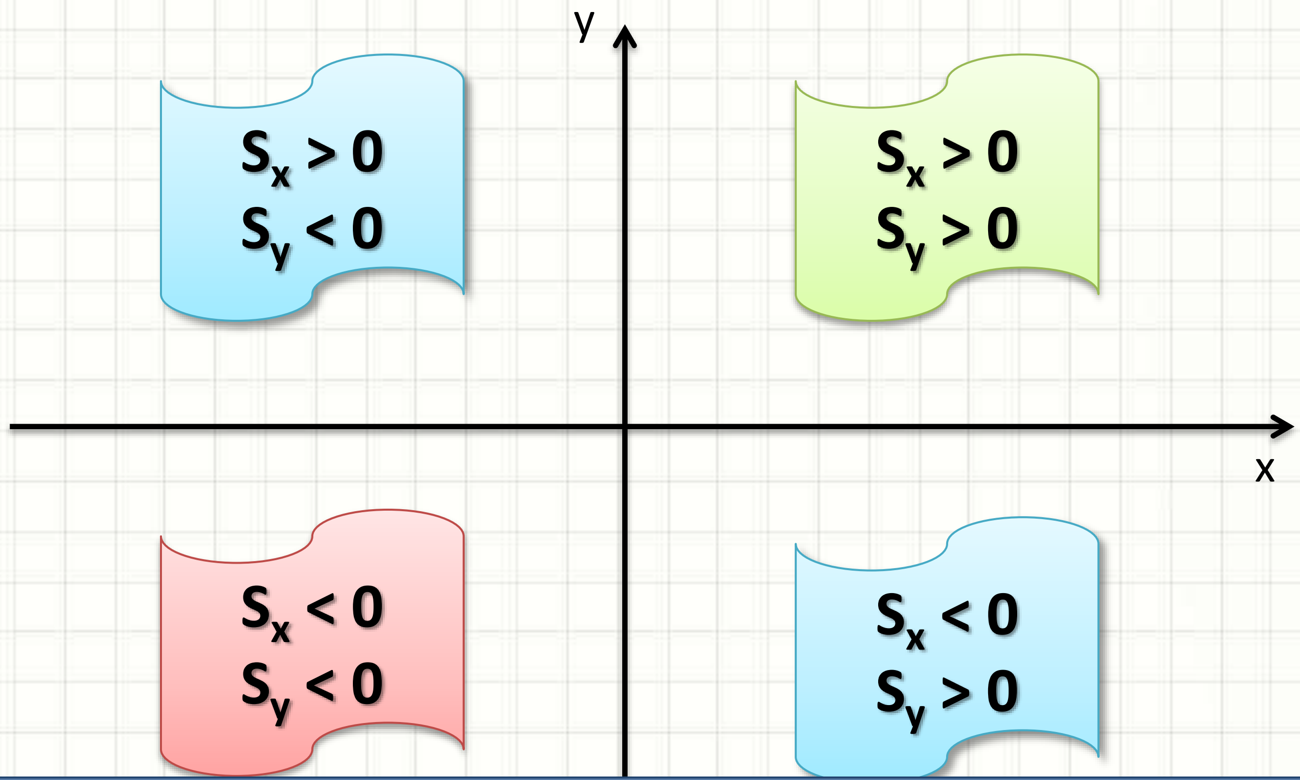
Consequências do Sinal no M.E.

- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Consequências do Sinal no M.E.

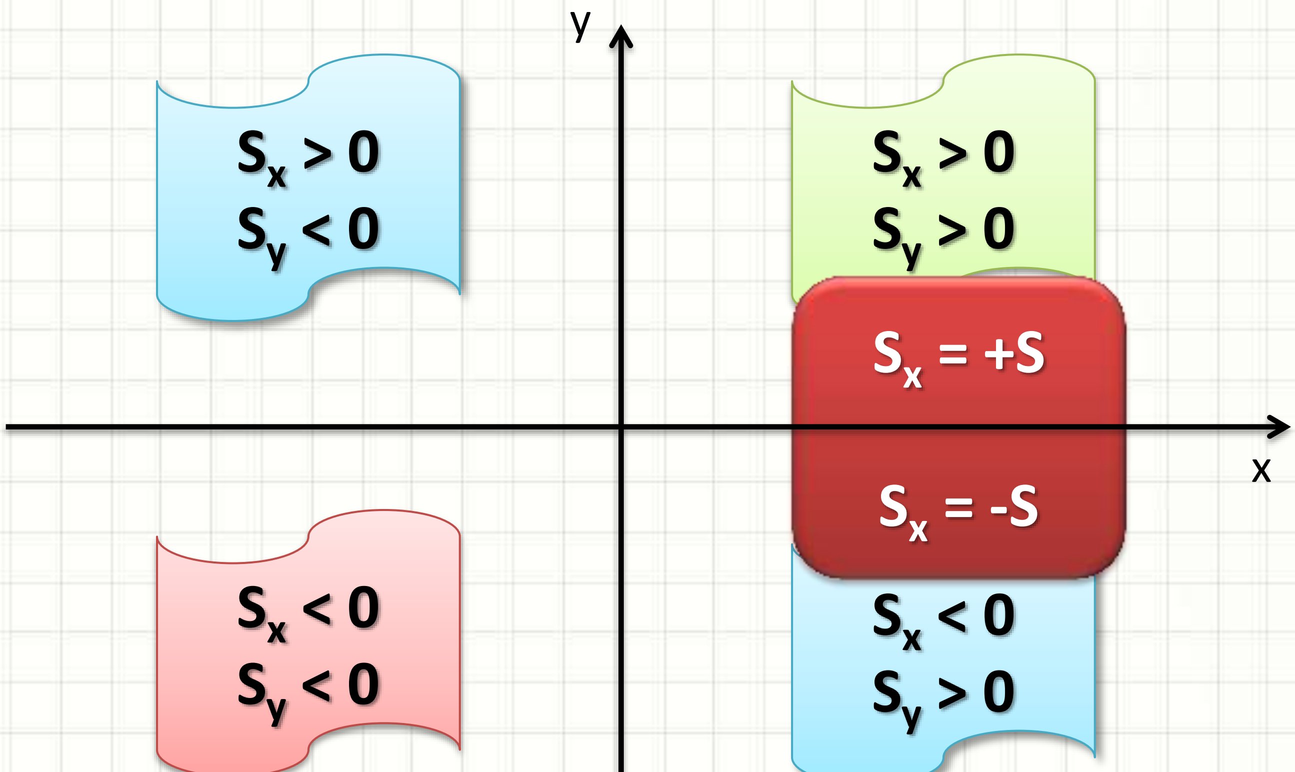
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Por isso a simetria leva a momento estático igual a zero!

Consequências do Sinal no M.E.

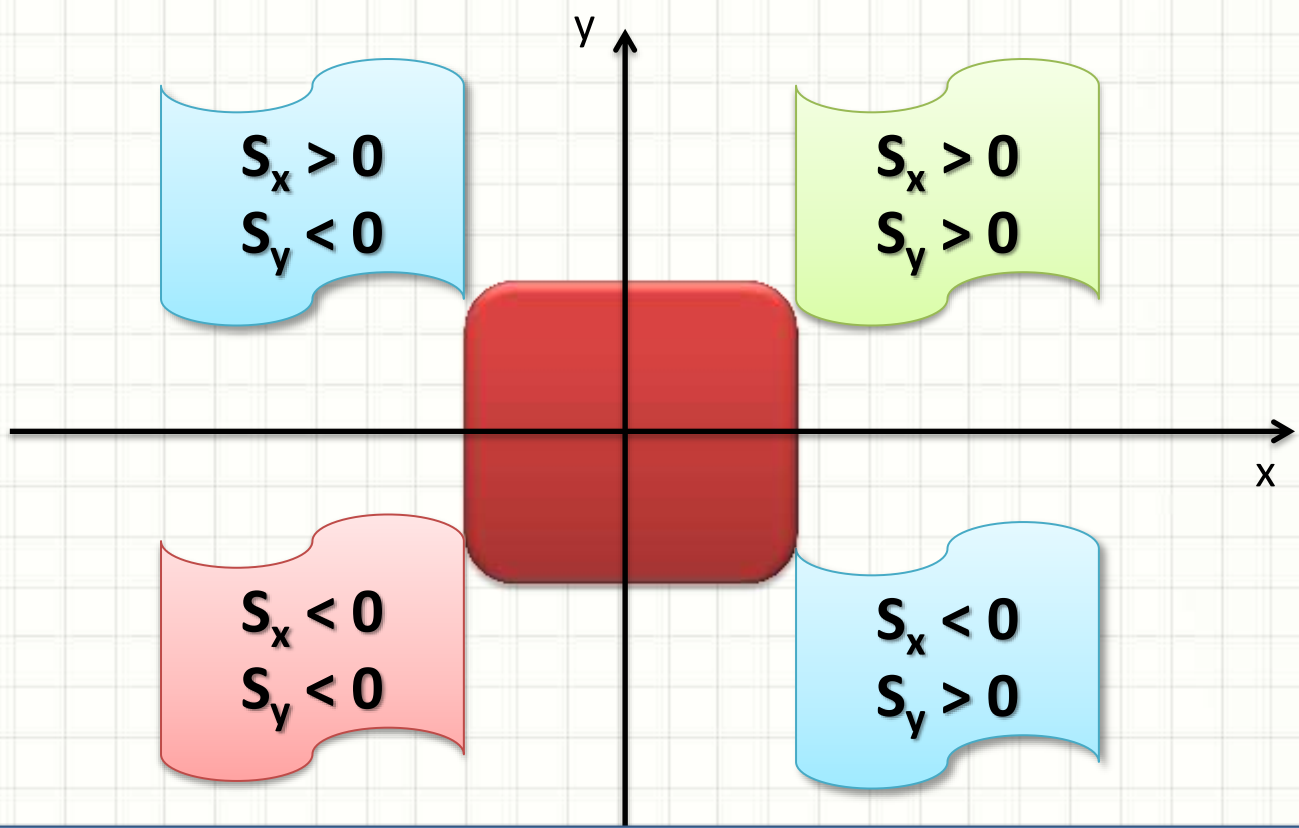
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Por isso a simetria leva a momento estático igual a zero!

Consequências do Sinal no M.E.

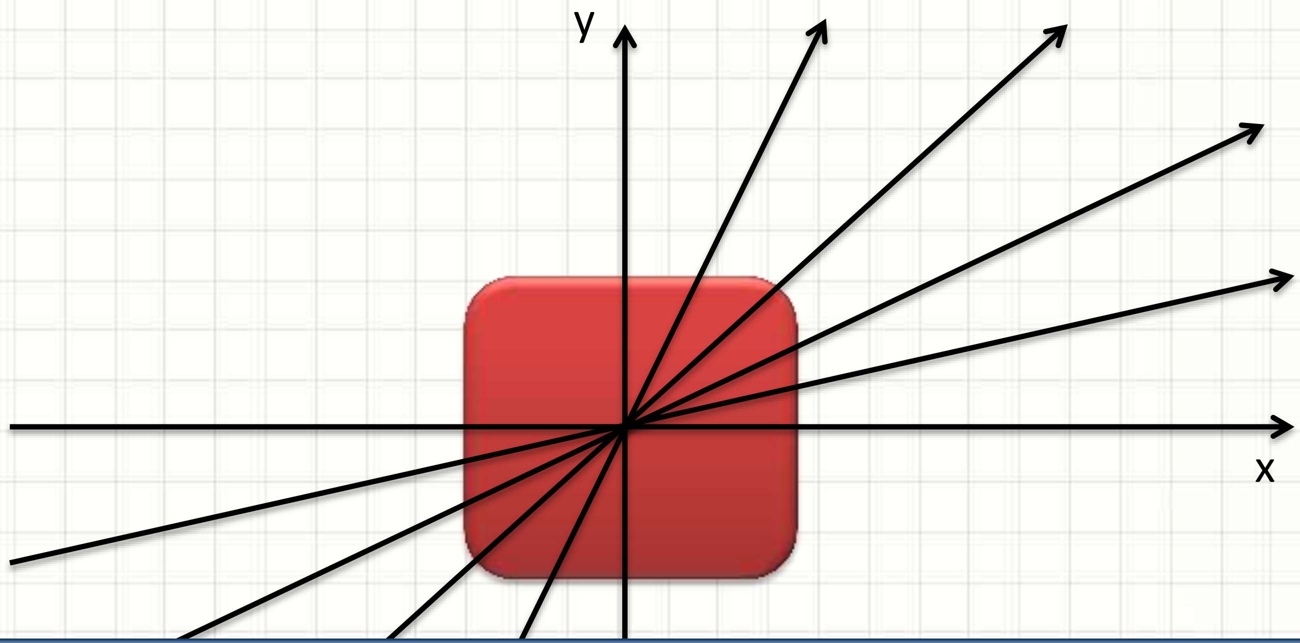
- O ponto em que Sx e Sy da área são zero...



É o centro da área: centroide

Consequências do Sinal no M.E.

- O ponto em que Sx e Sy da área são zero...

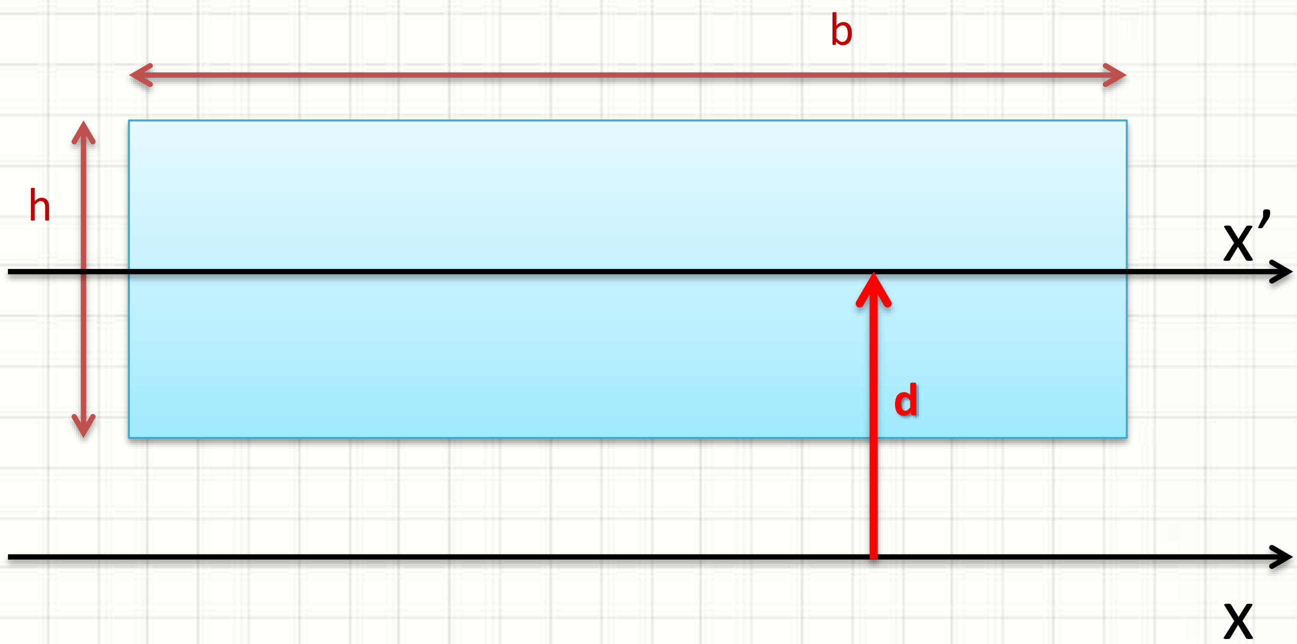


O Momento Estático da região será zero com relação a qualquer eixo que passe por esse ponto

Encontrando o Centroide/Baricentro

Baricentro de Figuras Planas

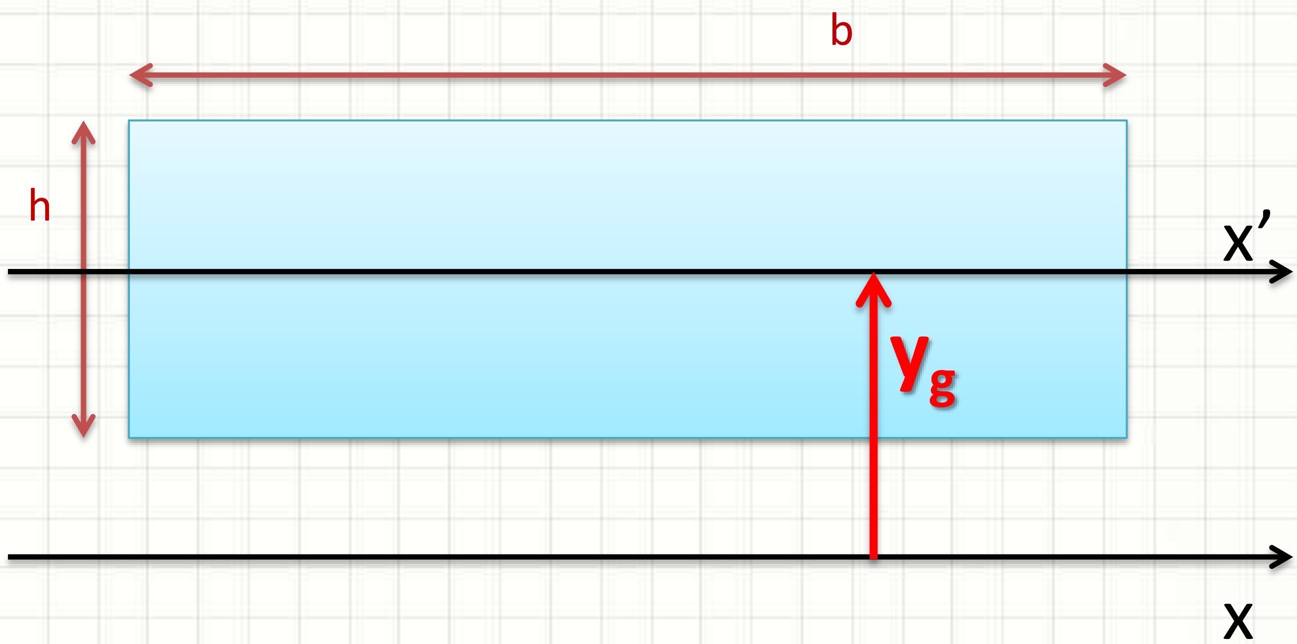
- Dados Sx e Sy; baricentro → Sx’ = 0 e Sy’ = 0



$$S_{x'} = S_x - d.A \ = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

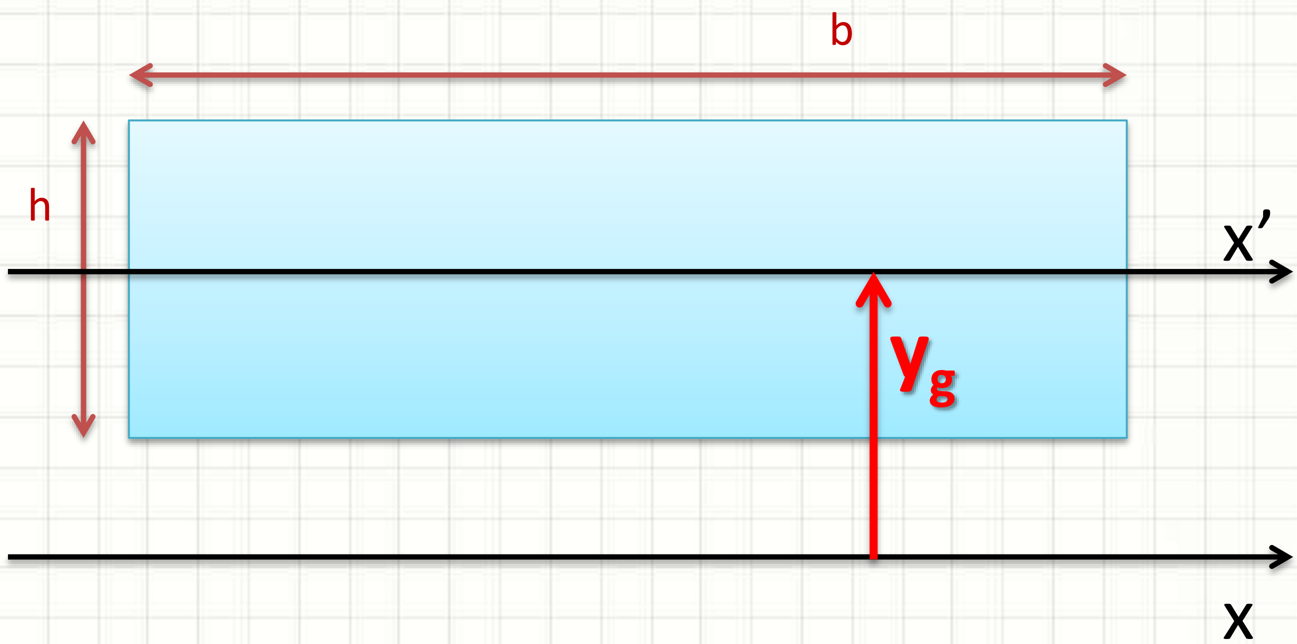
- Dados Sx e Sy; baricentro → Sx' = 0 e Sy' = 0



$$S_{x'} = S_x - y_g . A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

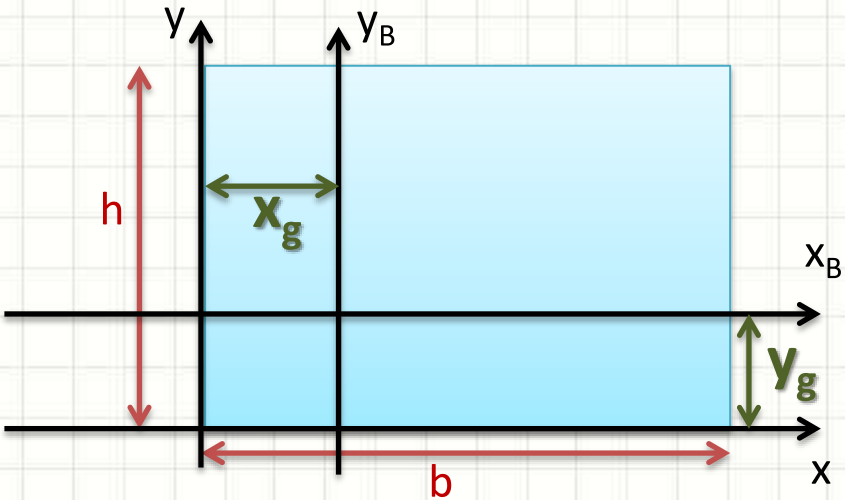
- Dados Sx e Sy; baricentro → Sx' = 0 e Sy' = 0



$$S_x - y_g . A = 0 \quad \rightarrow \quad y_g = \frac{S_x}{A}$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Retângulo

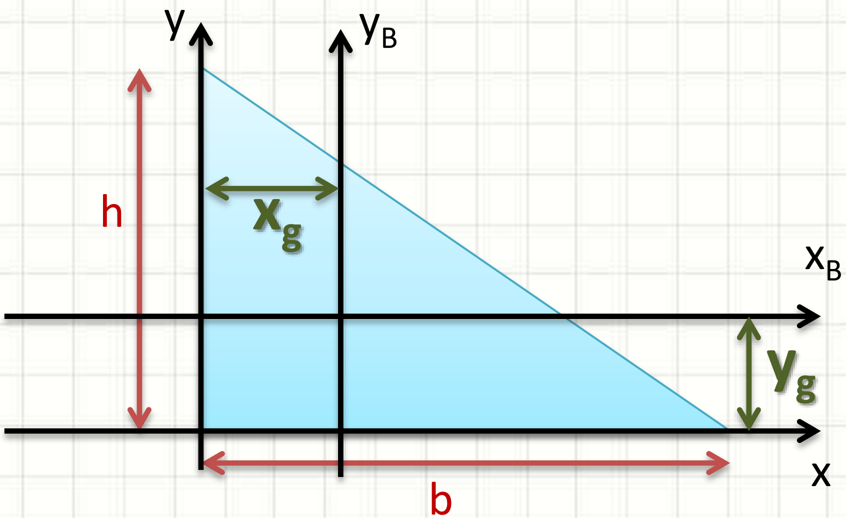


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = h/2$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = b/2$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Triângulo

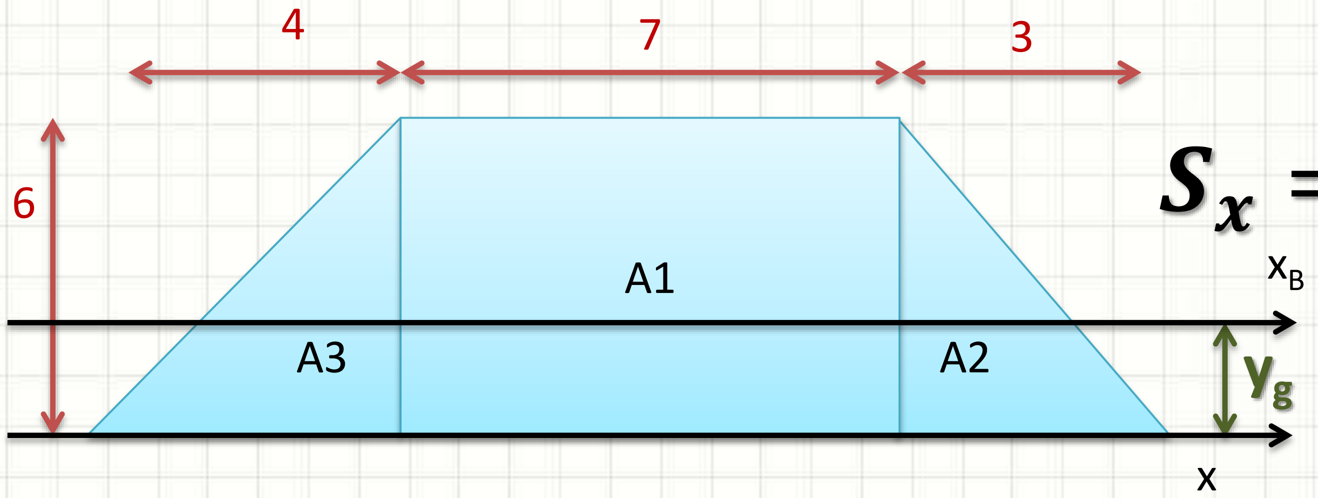


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = h/3$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = b/3$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o $\bar{y}$ do baricentro da área abaixo



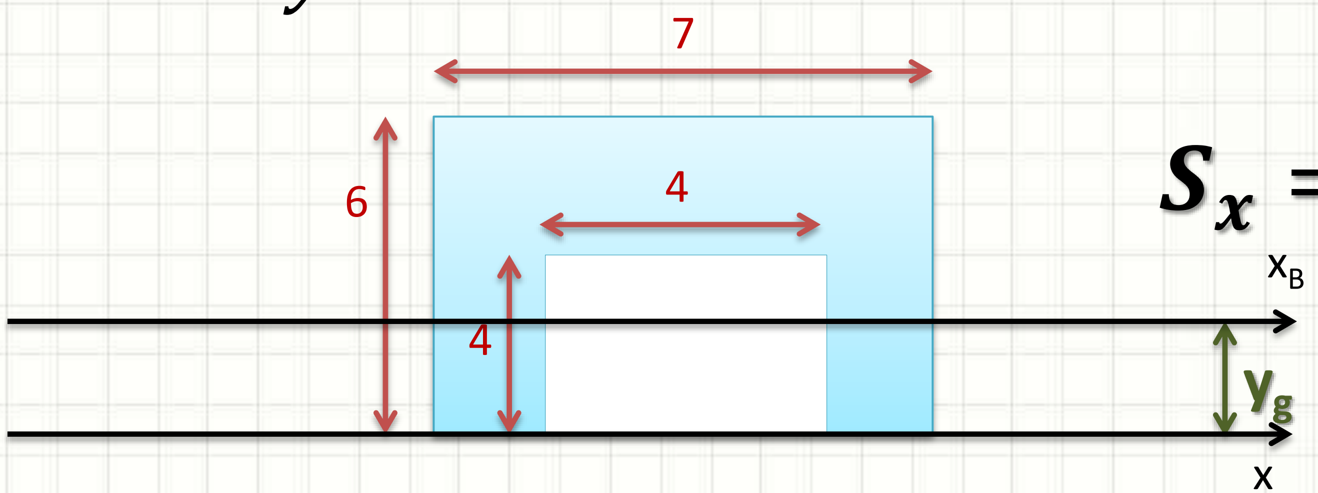
$$S_x = 168$$

$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A1 + A2 + A3} = \frac{168}{7 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2}} =$$

$$y_g = 2{,}67$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o $\bar{y}$ do baricentro da área abaixo



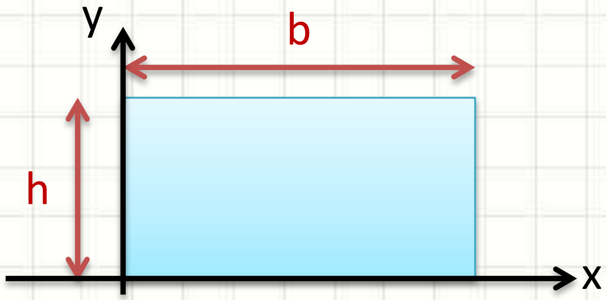
$$S_x = 94$$

$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A_{ATotal} - A_B} = \frac{94}{7 \cdot 6 - 4 \cdot 4} =$$

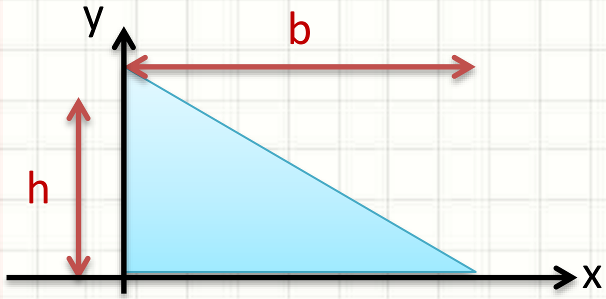
$$y_g = 3{,}62$$

Resultados Importantes

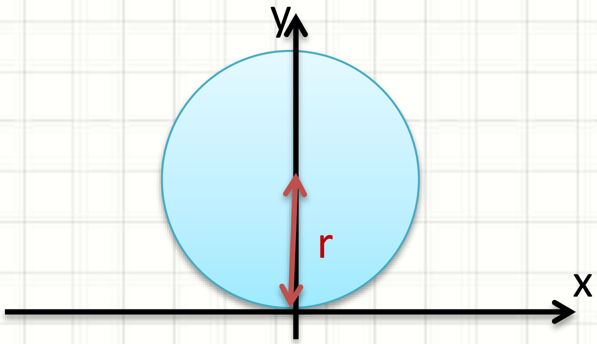
Momentos Estáticos



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2} \qquad S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$

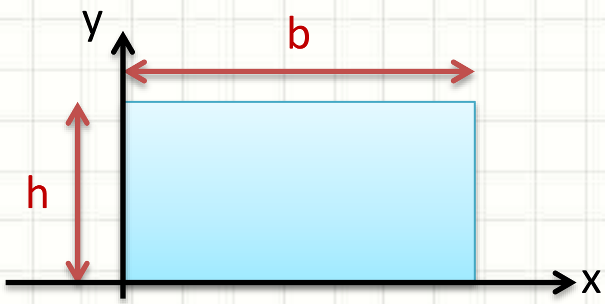


$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

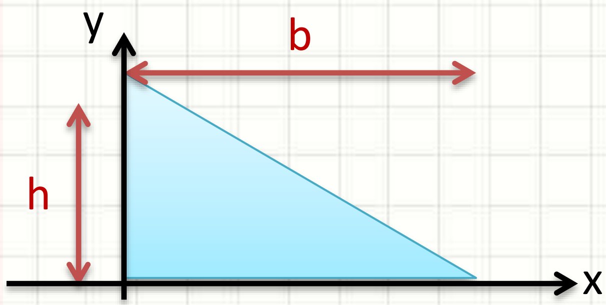


$$S_x = \pi \cdot r^3 \qquad S_y = 0$$

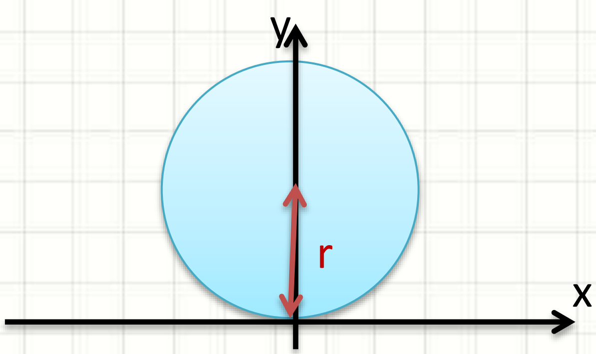
Distância ao Centro de Gravidade



$$y_g = \frac{h}{2} \qquad x_g = \frac{b}{2}$$

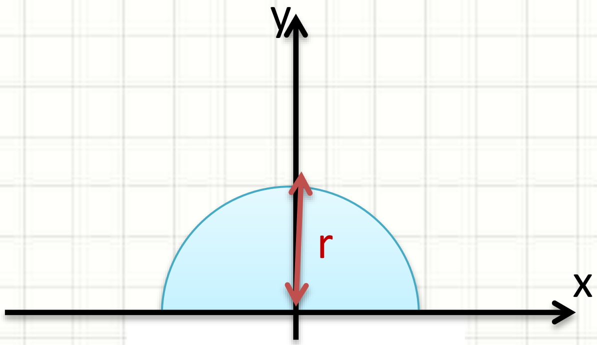


$$y_g = \frac{h}{3} \qquad x_g = \frac{b}{3}$$



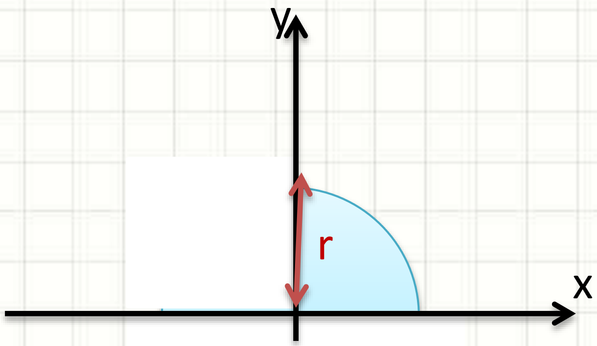
$$y_g = r \qquad x_g = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_g = 0$$



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

Para Treinar

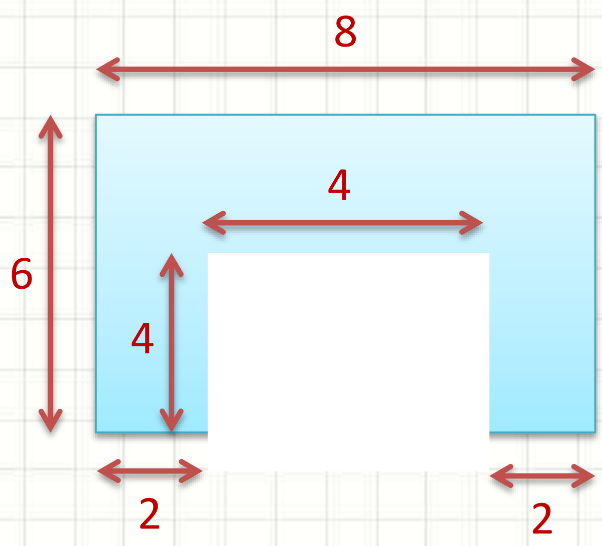
Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercício A.1
  - Exercícios A.2 a A.6 - **Só localização do centroide**
- Extras:
  - Exercícios A.7 a A.12 - **Só localização do centroide**

Exercício no SAVA

Exercício – SAVA – Individual!

- Calcule a posição do centroide da área azul



Conclusões

Resumo

- Importância da Forma na Resistência
- Propriedades das Áreas Planas
- Momento Estático
- Localização do Centroide
- **<u>Exercitar</u>: Material Didático**

- Momento de Inércia
  - Momento de Segunda Ordem
  - O que é isso?
  - Para quê serve?

PERGUNTAS?

Exercício em Sala

Exercício – Individual, para **Agora**!

- Calcule a altura (y_g) do centroide da área azul