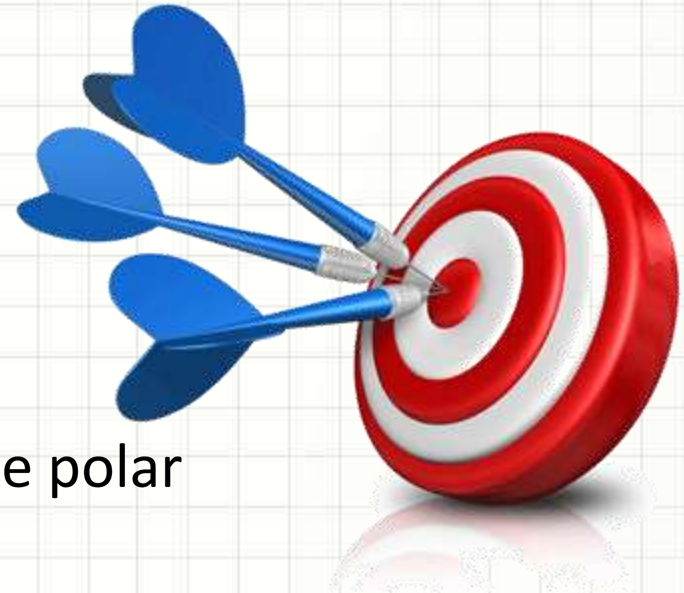
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

MOMENTO DE INÉRCIA

Prof. Dr. Daniel Caetano

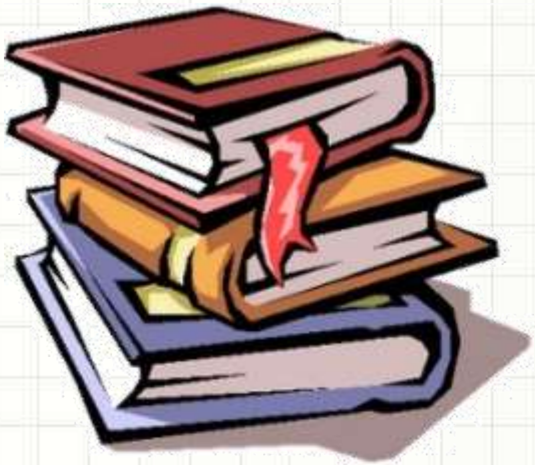
2018 - 2

Objetivos



- Apresentar os conceitos:
  - Momento de inércia: retangular e polar
  - Produto de Inércia
  - Eixos Principais de Inércia
- Calcular o momento de inércia para quaisquer eixos
- Determinar os eixos principais e calcular os momentos principais de inércia

Material de Estudo



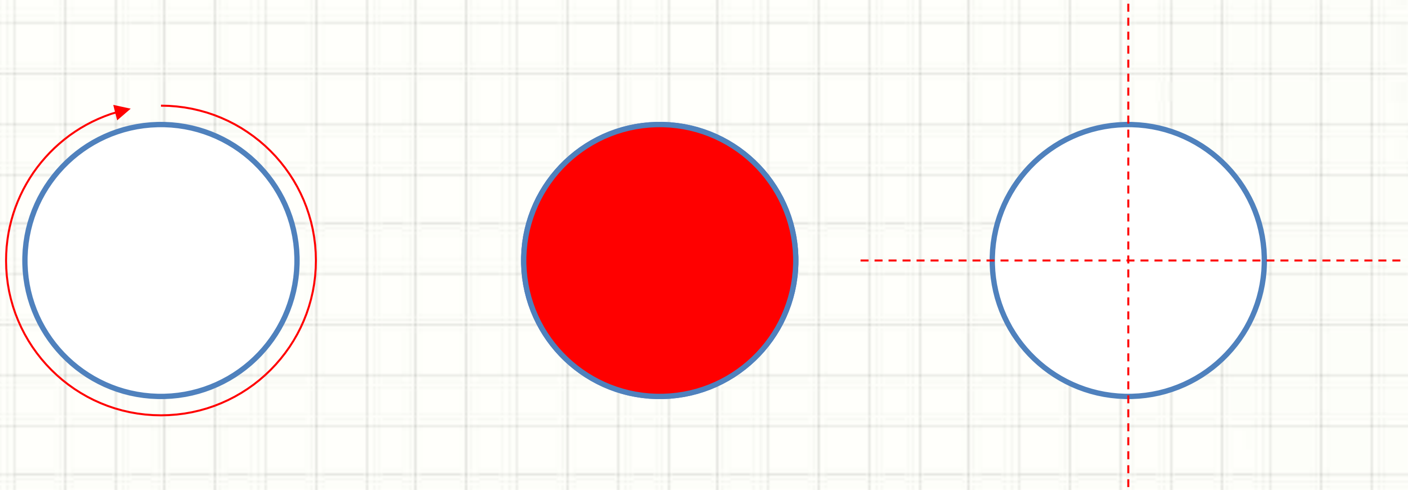
Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 2)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Beer et al.), págs 728 a 732 Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 570-576
Biblioteca Virtual	“Resistência dos Materiais”

Relembrando:

"Medindo a Forma"

Características das Figuras Planas

- Perímetro
- Área
- Momento Estático → cálculo do centroide
  - O quão “simétrica” é a distribuição da área

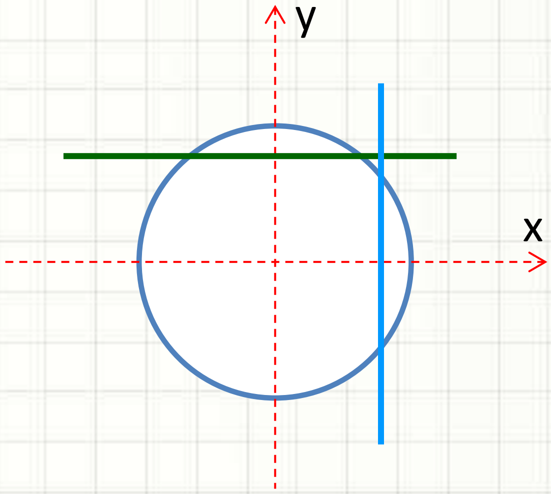


Momento Estático

- Cálculo do Momento Estático
  - Área x Distância até Eixo do Centro de Gravidade

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

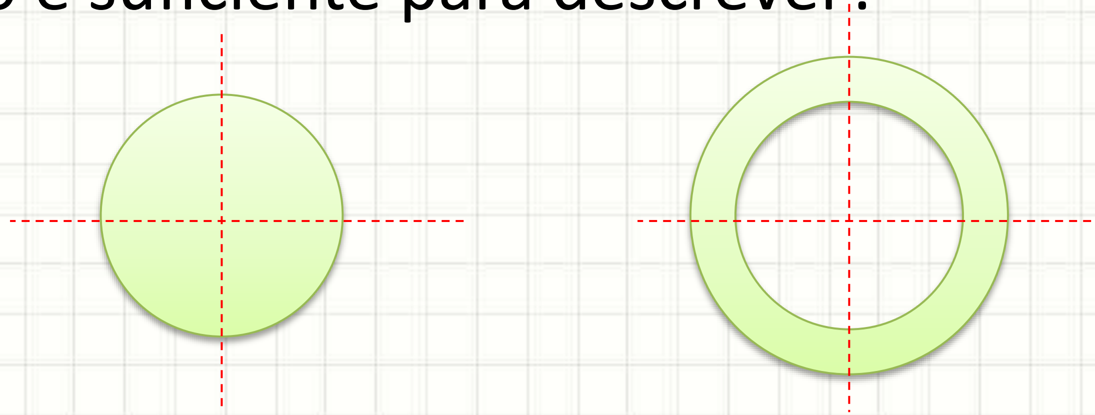


- Unidade S = [L^3]

Momento de Inércia

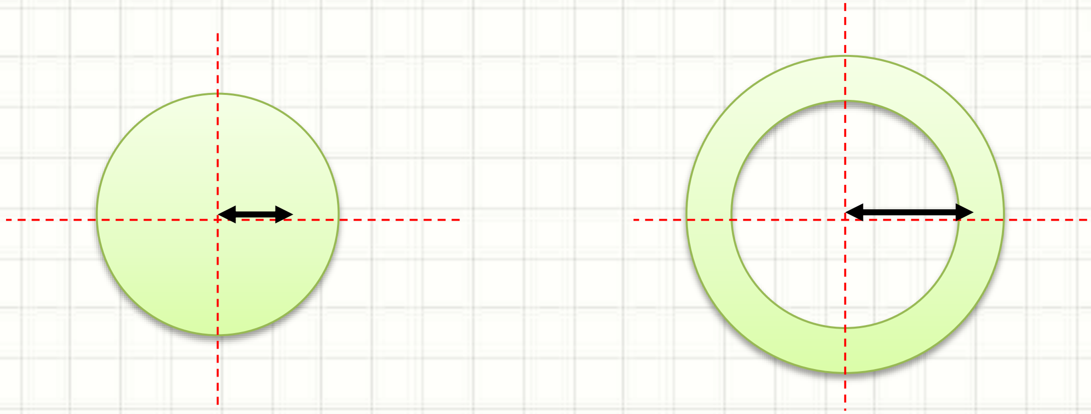
Momento de Inércia

- Área
  - Mede: quantidade de material
- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)
  - $S = A \cdot d$
  - Mede a assimetria com relação a um eixo
  - **Objetivo**: identificar o ponto de equilíbrio
  - Isso é suficiente para descrever?



Momento de Inércia

- Momento de Inércia (ou de 2ª Ordem)
  - "$I = A \cdot d^2$"
  - O que mede?
  - O espalhamento da área com relação a um eixo
  - **Objetivo**: ???
    - Tem a ver com a **inércia**



Momento de Inércia

- Inércia:
  - Tendência de manter estado de movimento
  - Massa Inercial
  - $F = m \cdot a$

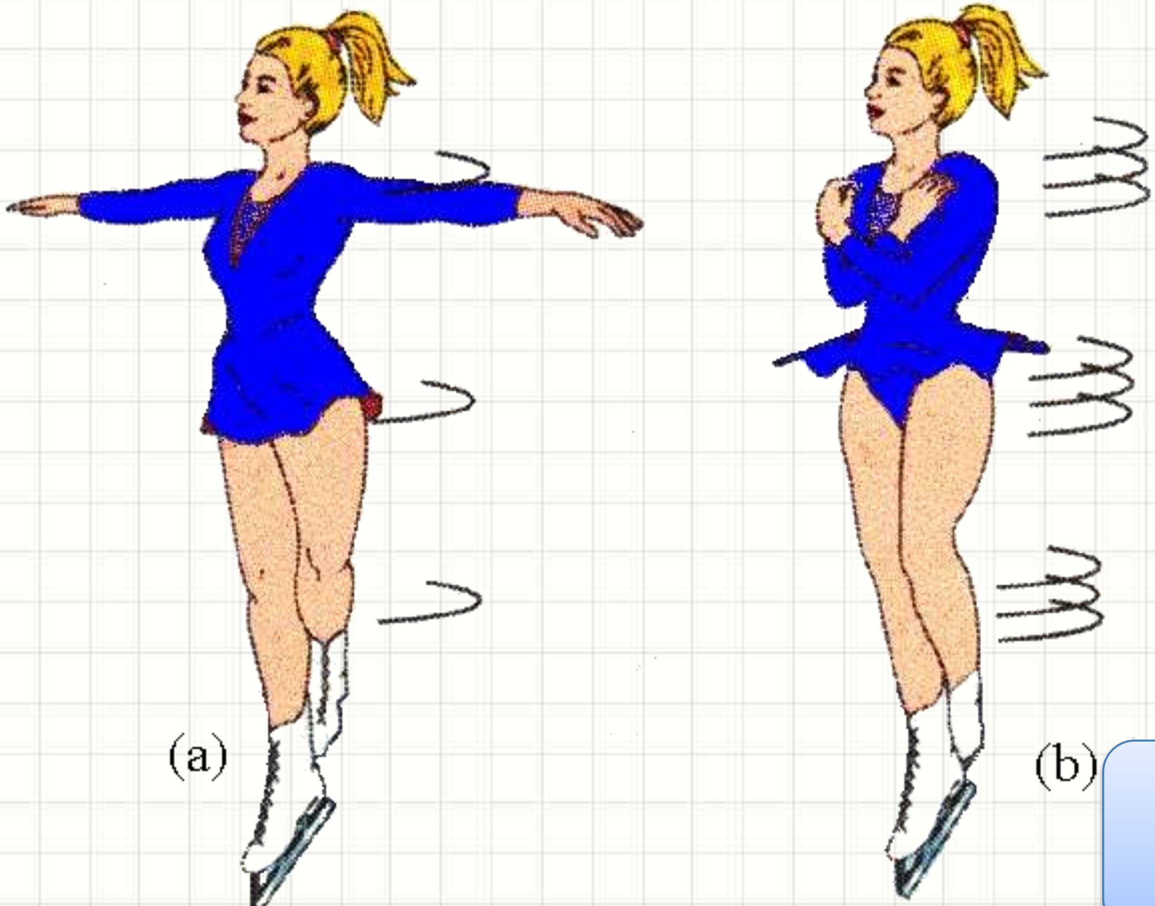
Momento de Inércia

- Momento de Inércia
  - Inércia de um corpo ao giro
  - Resistência a alterar o movimento de giro
  - “$I = A \cdot d^2$”

Quanto maior o momento de inércia, mais esforço necessário para colocar em movimento de giro

Momento de Inércia

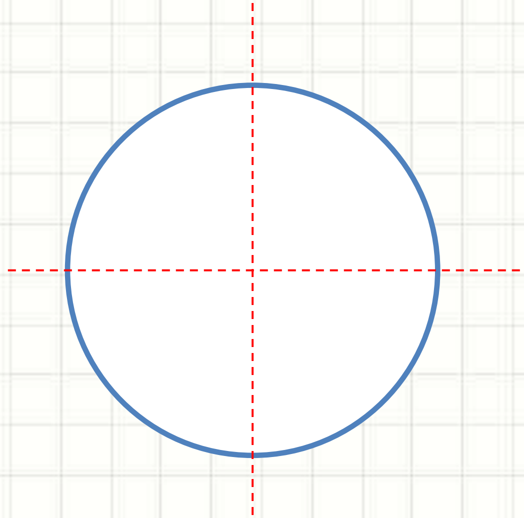
- Diferença no giro pelo Momento de Inércia



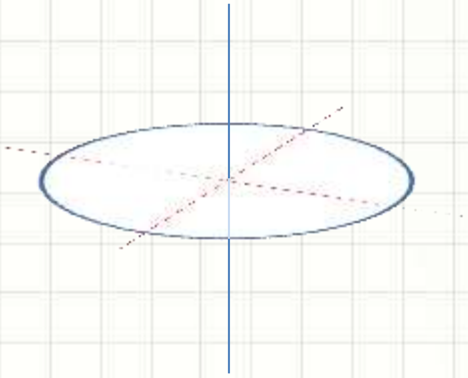
Vídeo!

Momento de Inércia

- Região plana: várias direções possíveis
  - No mesmo plano...
  - Perpendicular ao plano...



Momento Retangular de Inércia



Momento Polar de Inércia

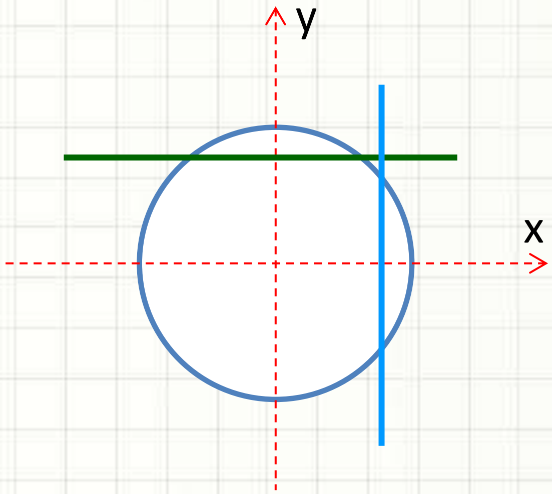
Momento Retangular de Inércia

Momento Retangular de Inércia

- Ou simplesmente **Momento de Inércia**

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$



- Importante nas **flexões**
- Sempre **positivos**! → Unidade I = [L^4]

Momento de Inércia

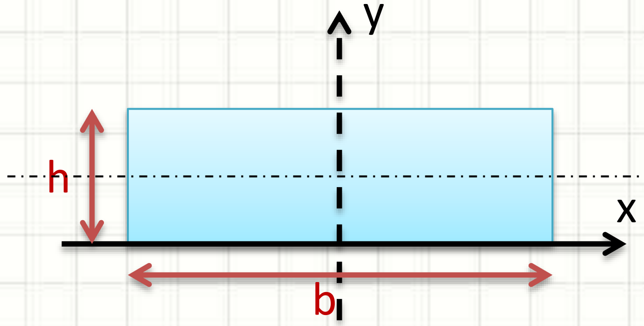
- Será que dá pra simplificar? $I_x = \int_A y^2 \cdot dA$
  - "Equação": $I = A.d^2$
  - Será que funciona?

$I_x = A.y^2$

$I_x = b.h.(h/2)^2$

$I_x = b.h.h^2/4$

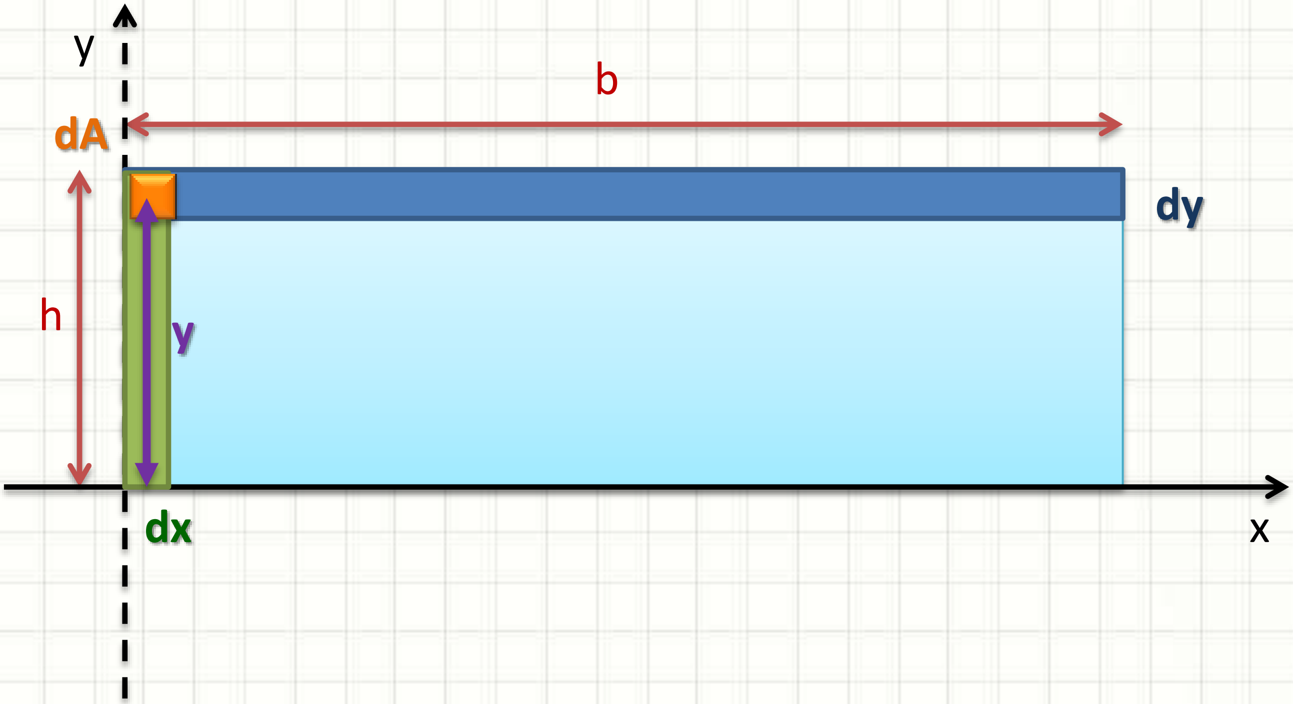
$\boxed{I_x = b.h^3/4}$



Será que isso está certo?

Momento de Inércia

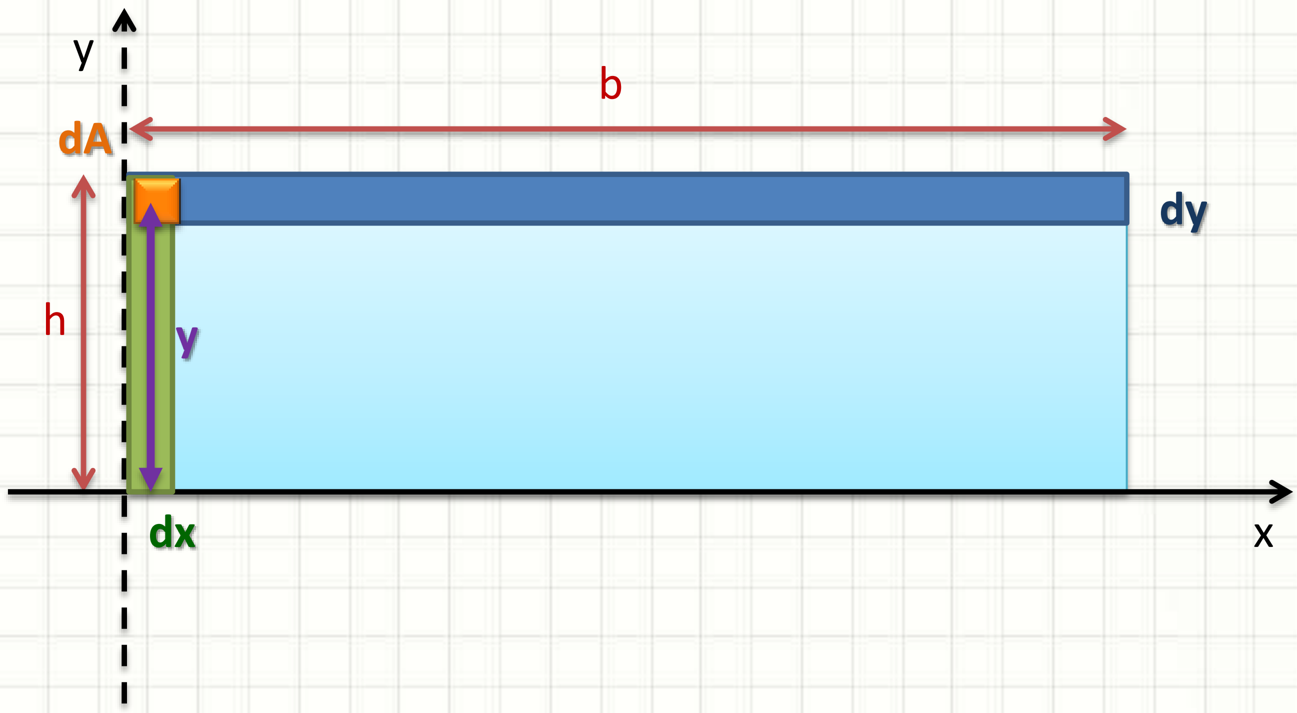
- Calculando pelo método da integral



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y^2 \cdot dx . dy =$$

Momento de Inércia

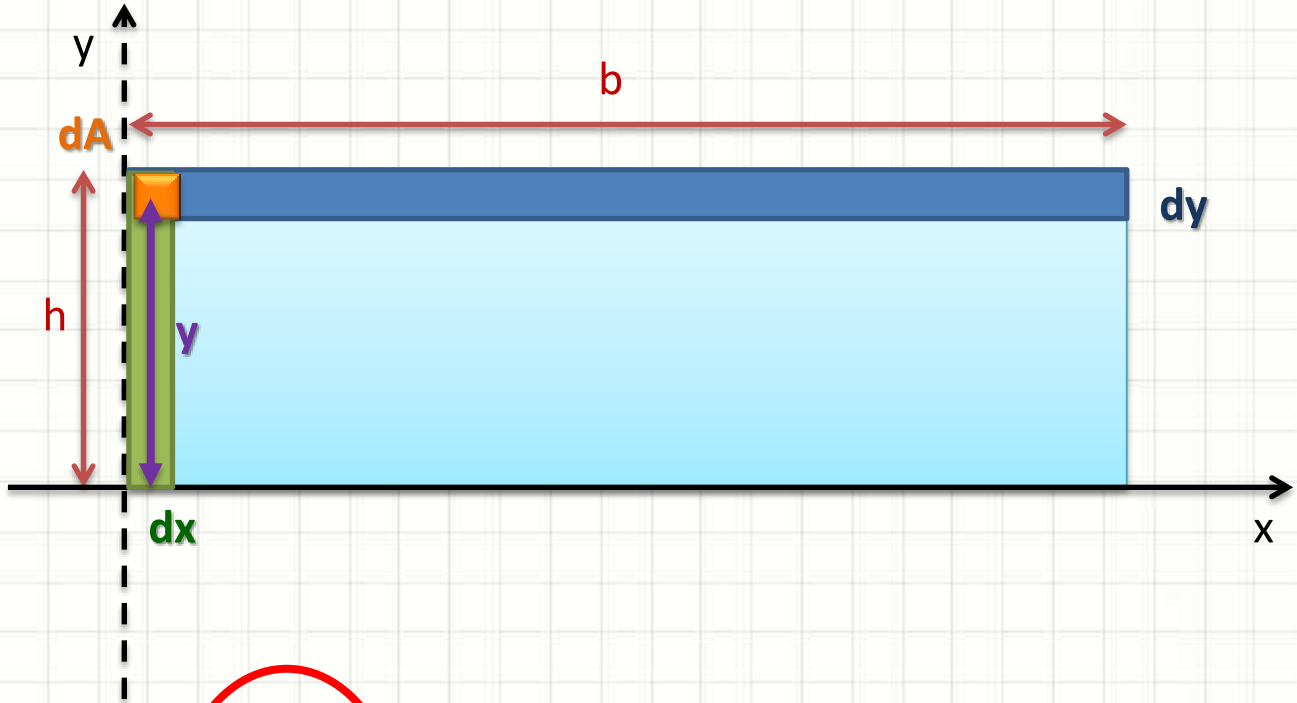
- Calculando pelo método da integral



$$I_x = \int_0^h \int_0^b y^2 \cdot dx.dy = \int_0^h y^2 \cdot \int_0^b dx.dy =$$

Momento de Inércia

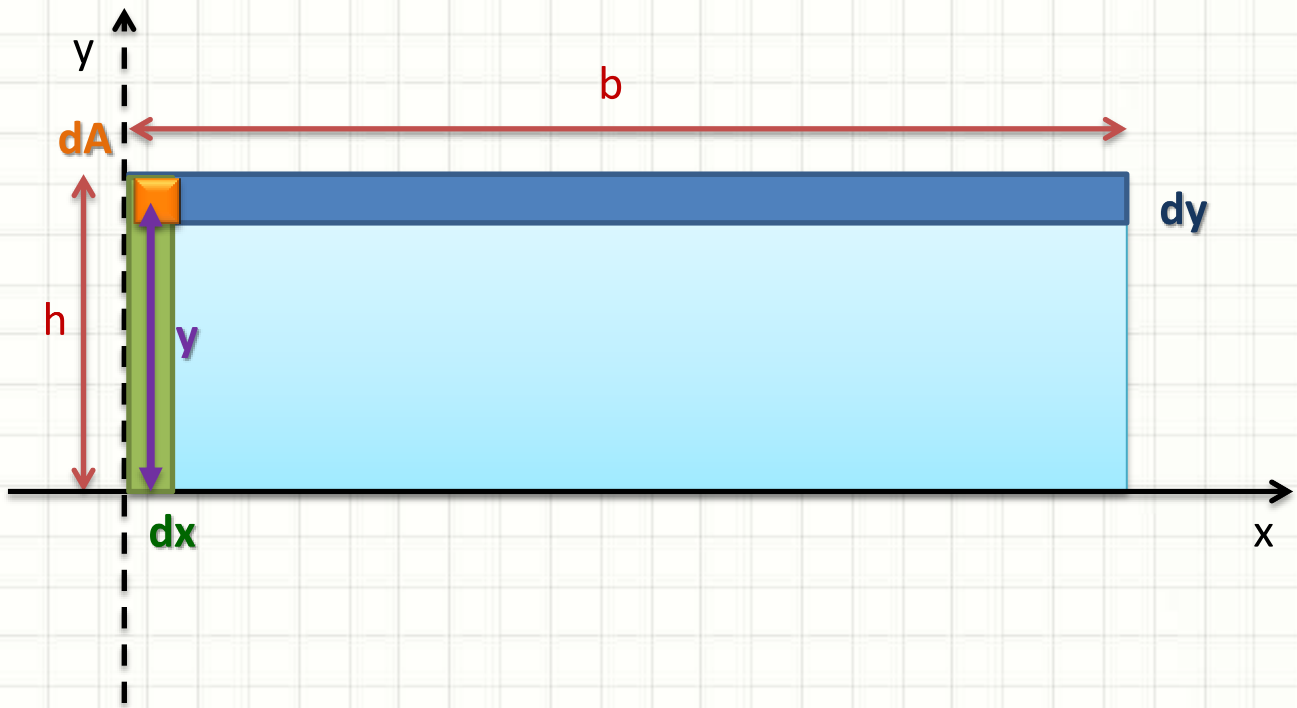
- Calculando pelo método da integral



$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \int_0^b dx \cdot dy = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy =$$

Momento de Inércia

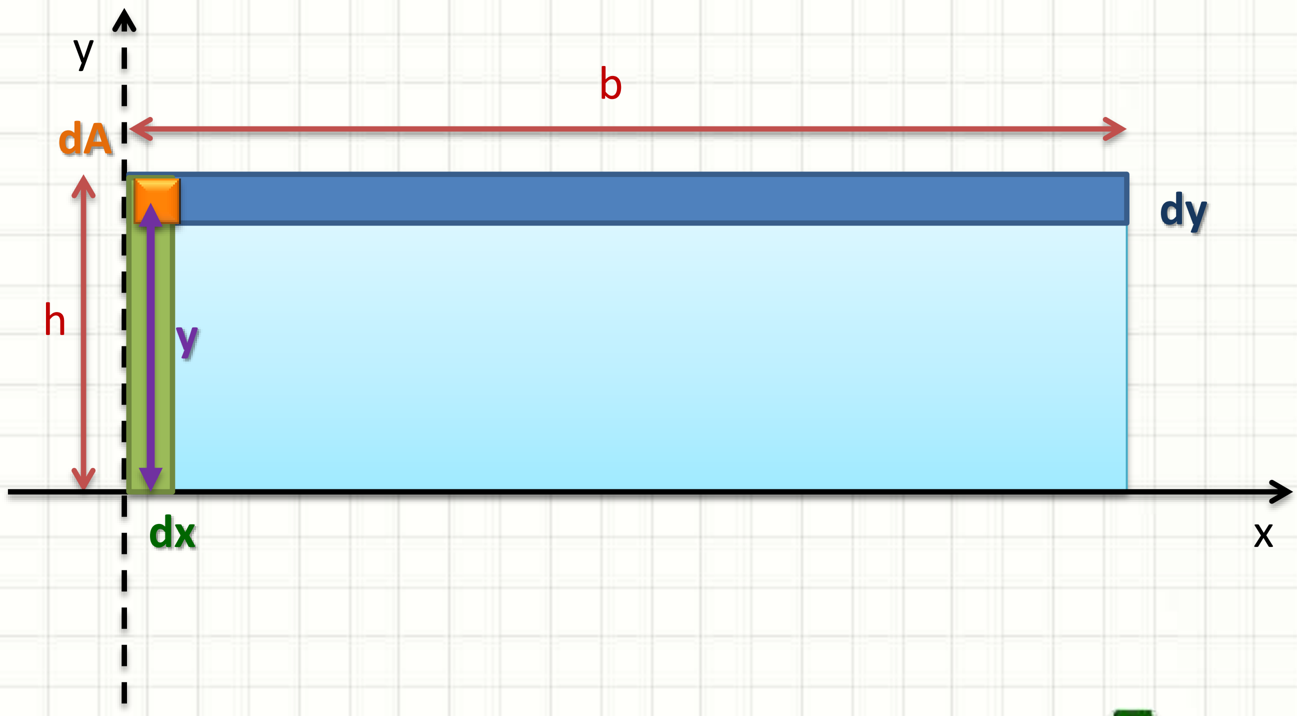
- Calculando pelo método da integral



$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy =$$

Momento de Inércia

- Calculando pelo método da integral



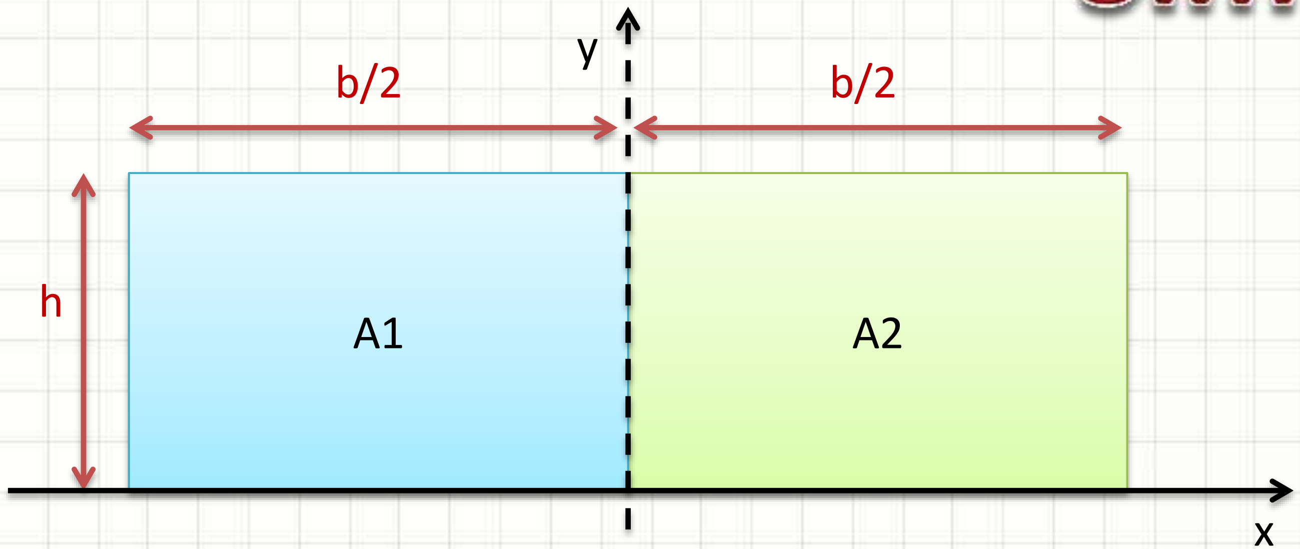
$$I_x = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\boldsymbol{3}}$$

Esse é o correto!

Momento de Inércia

- Calcular por partes funciona?

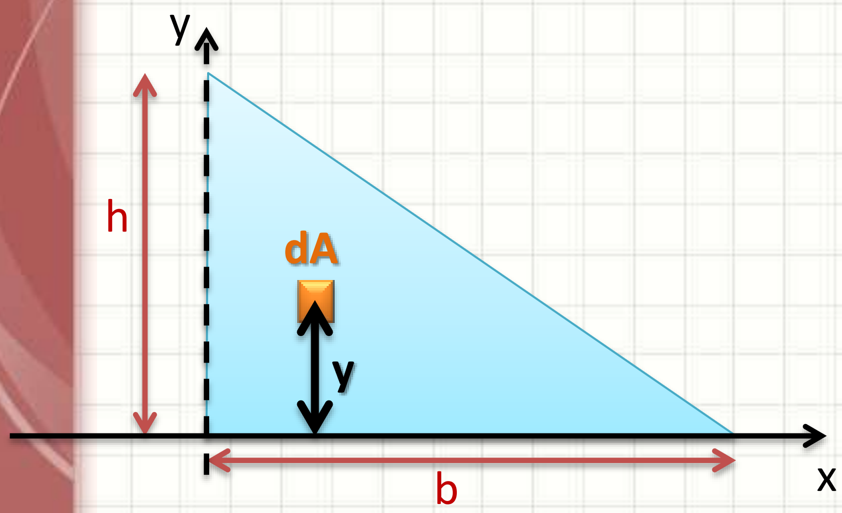
Sim!



$$I_x = \int_{A1} y^2 \cdot dA_1 + \int_{A2} y^2 \cdot dA_2 = \frac{b \cdot h^3}{6} + \frac{b \cdot h^3}{6} = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\boldsymbol{3}}$$

Momento de Inércia

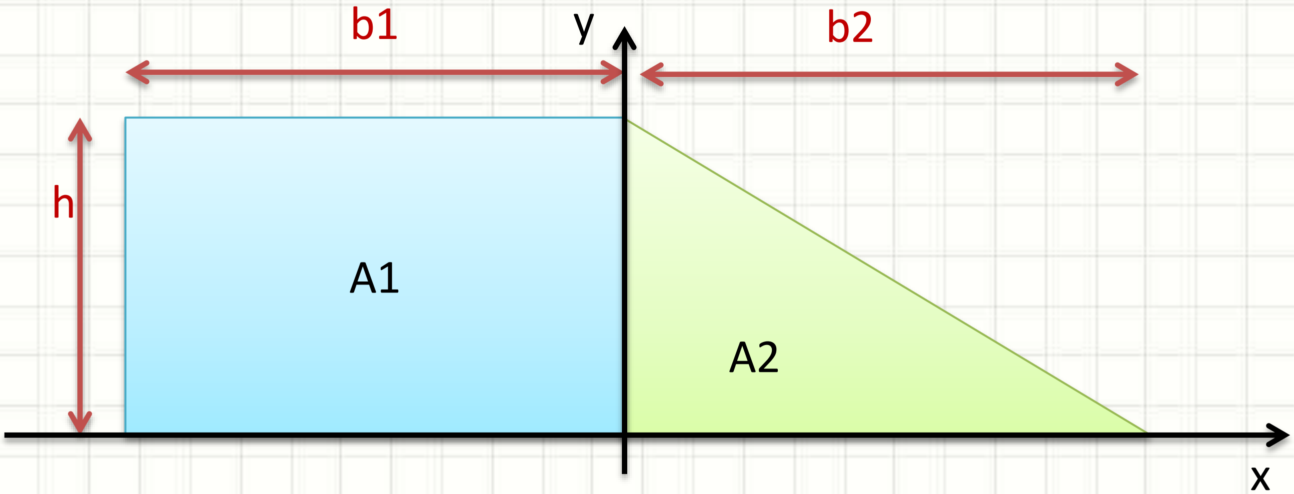
- Outro momento de inércia importante



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Momento de Inércia

- Como calcular por partes esse outro?

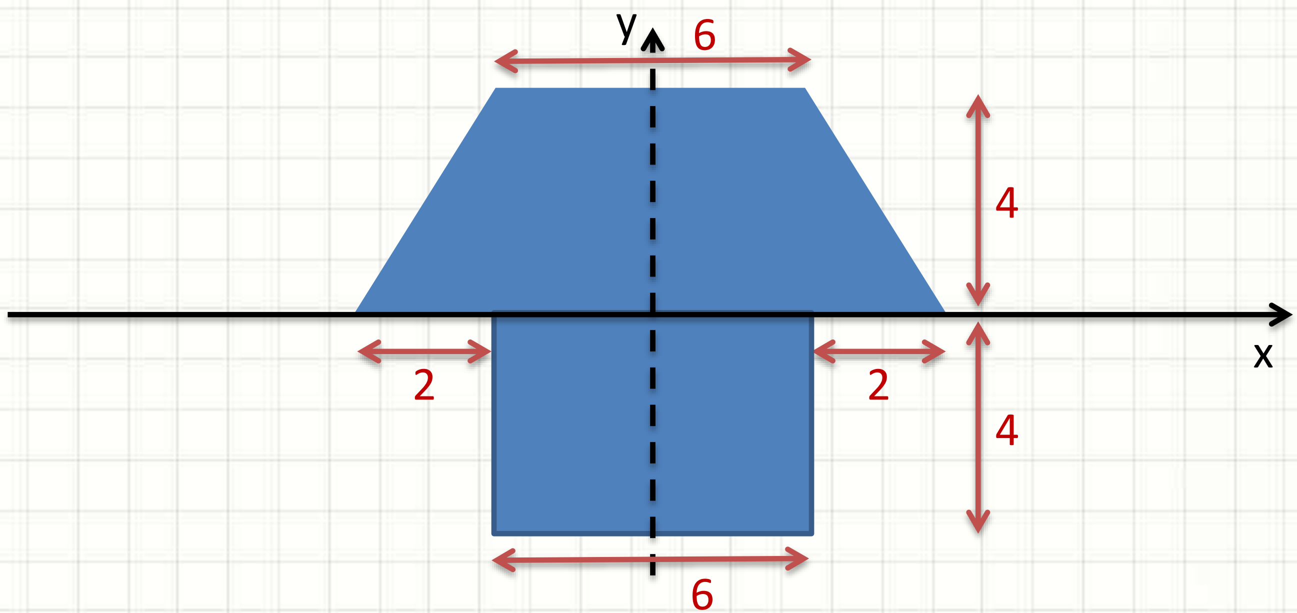


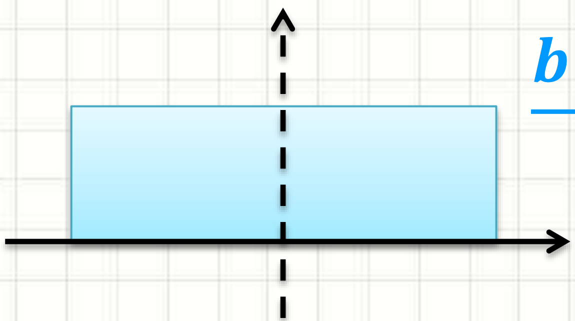
$$I_x = \int_{A1} y^2 \cdot dA_1 + \int_{A2} y^2 \cdot dA_2 = \frac{\boldsymbol{b1 \cdot h^3}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{b2 \cdot h^3}}{\boldsymbol{12}}$$

Exercício

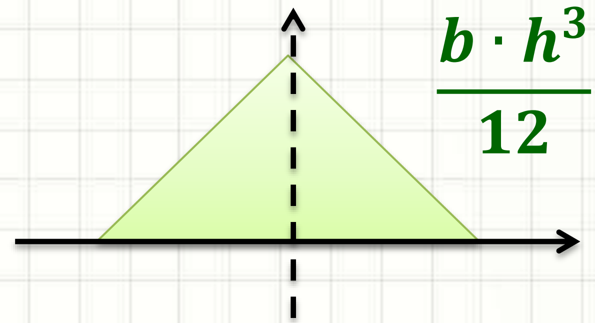
Exercício

- Calcular I_x





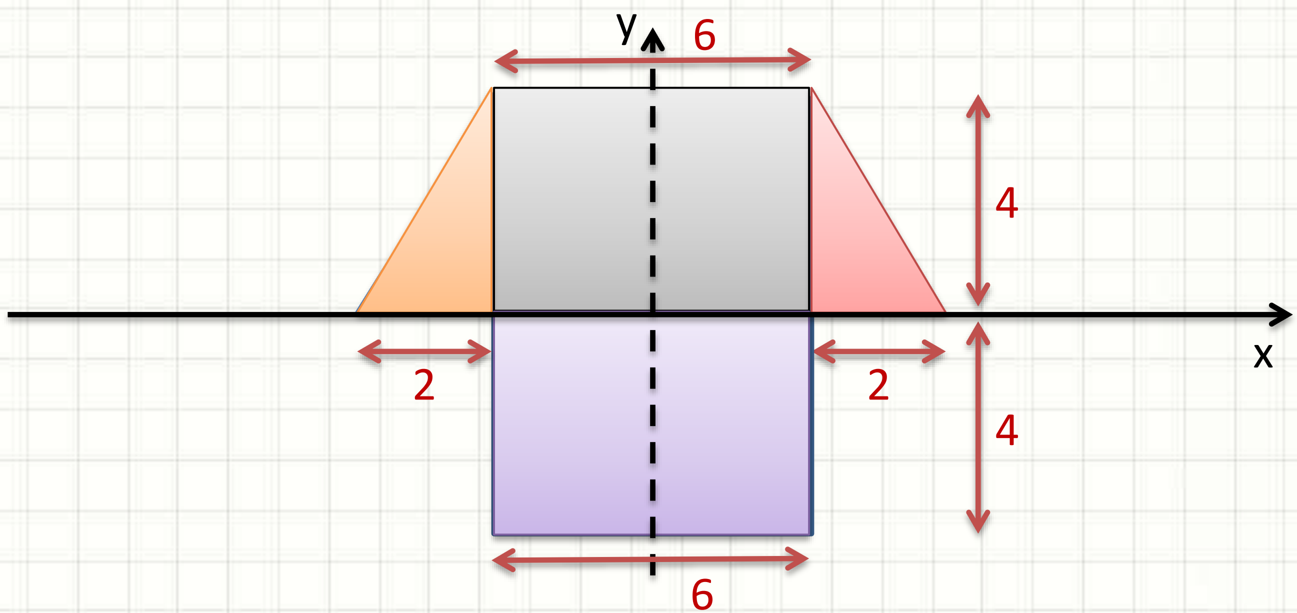
$$\frac{b \cdot h^3}{3}$$

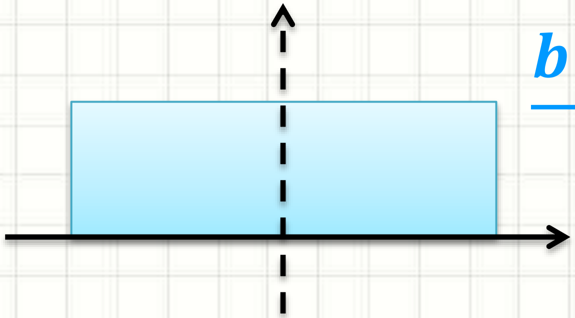


$$\frac{b \cdot h^3}{12}$$

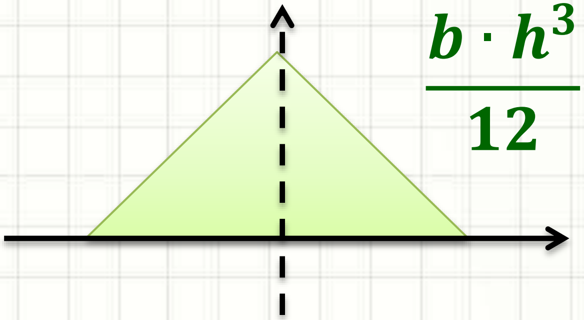
Exercício

- Calcular I_x





$$\frac{b \cdot h^3}{3}$$

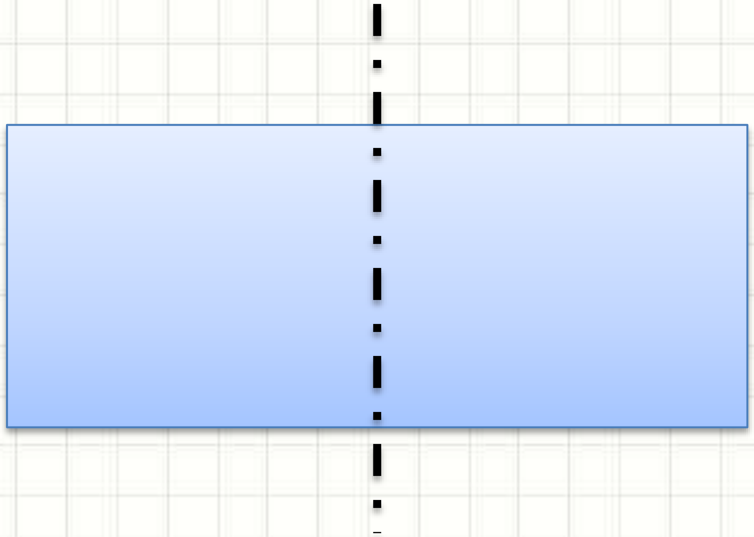


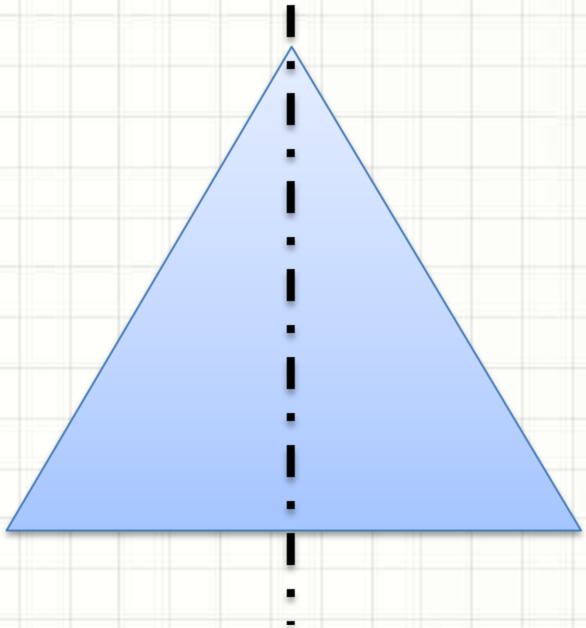
$$\frac{b \cdot h^3}{12}$$

Eixo Central de Inércia

Eixo Central de Inércia

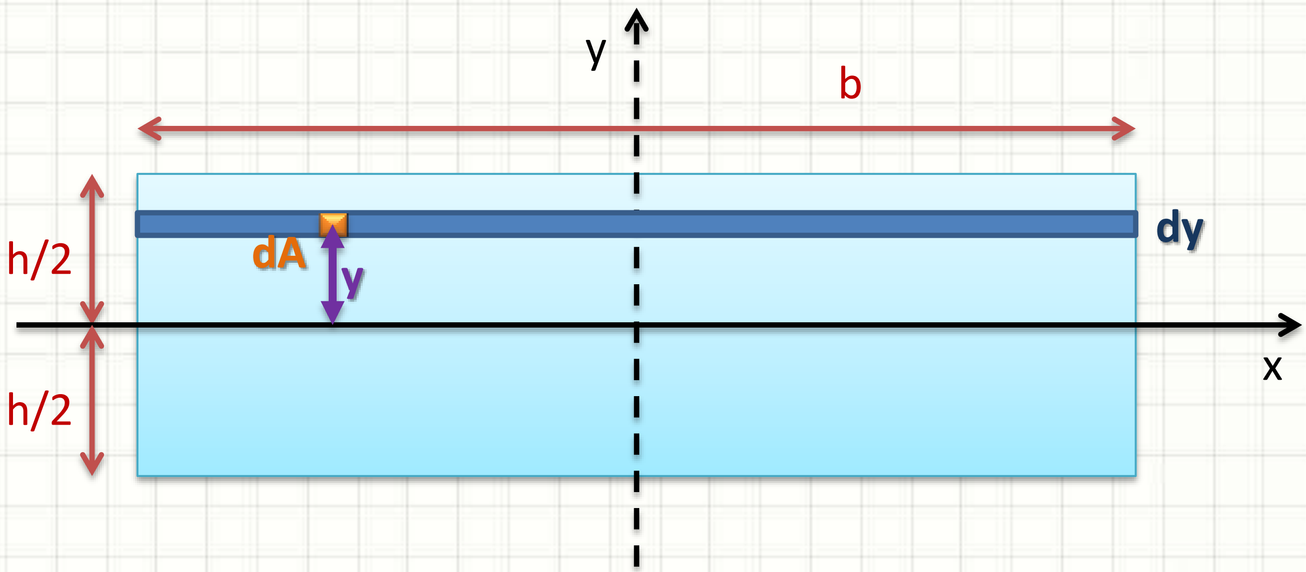
- As coisas em geral giram por um eixo...
  - Que passa no centroide do corpo!
- Propriedades especiais
  - Vamos ver mais adiante!





Eixo Central de Inércia

- Calculando o M.I. do eixo central horizontal

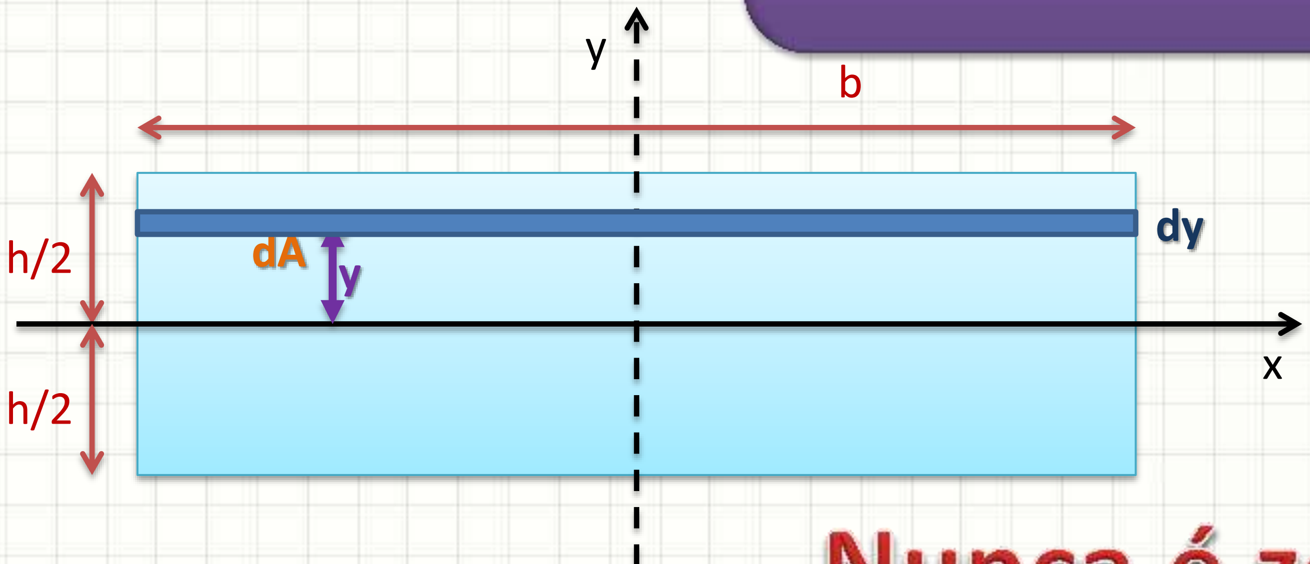


$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\mathbf{12}}$$

Eixo Central de Inér

- Calculando o M.I. do eix

O eixo central, dentre os paralelos a ele, é o eixo de menor inércia



Nunca é zero!

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\boldsymbol{12}}$$

Eixo Central de Inércia

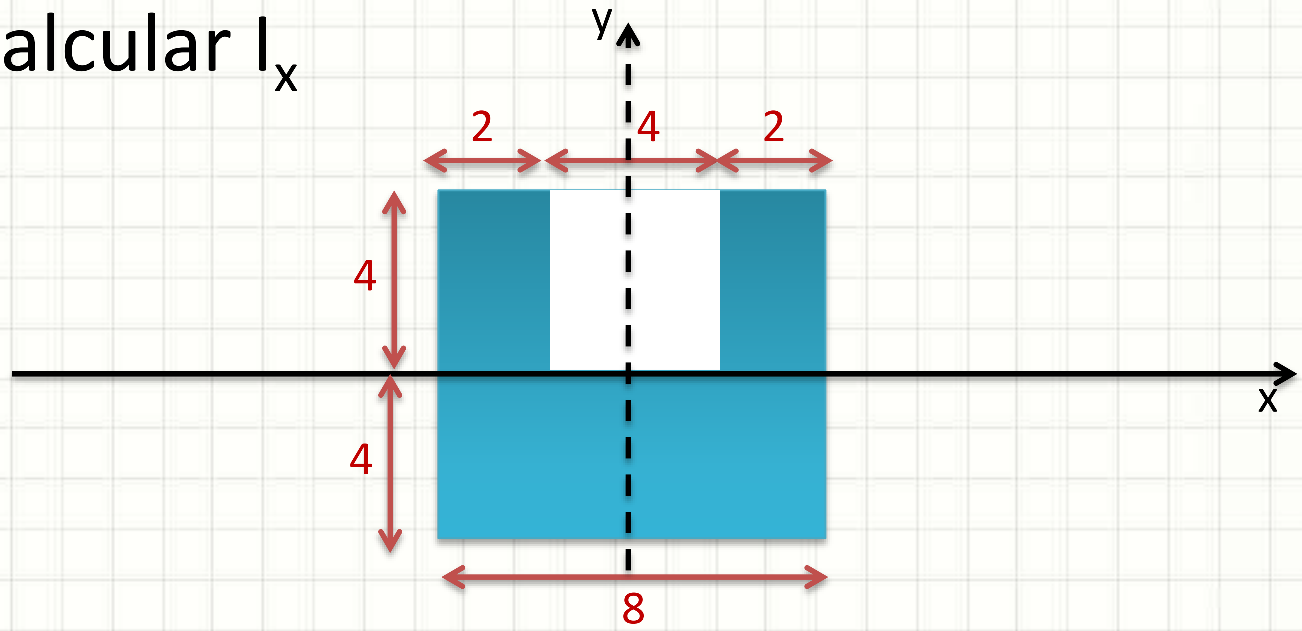
- Eixo Central
  - Menor inércia entre os paralelos a ele

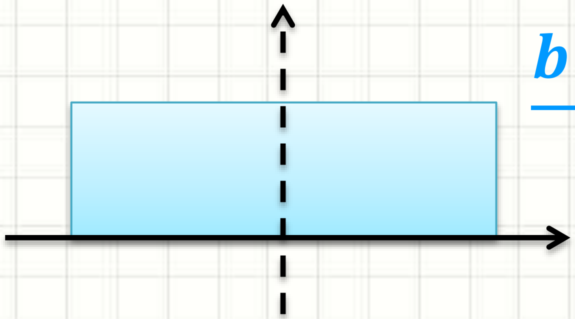
Ao afastar o eixo do centro, o momento de inércia **<u>sobe</u>**

Exercício

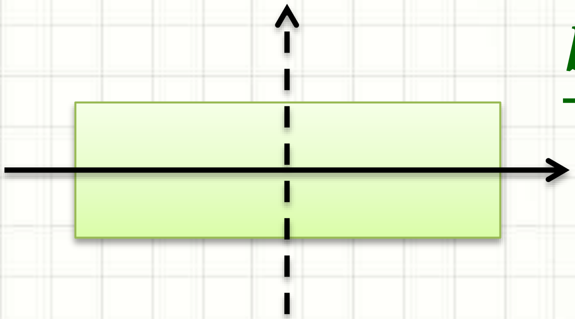
Exercício

- Calcular I_x





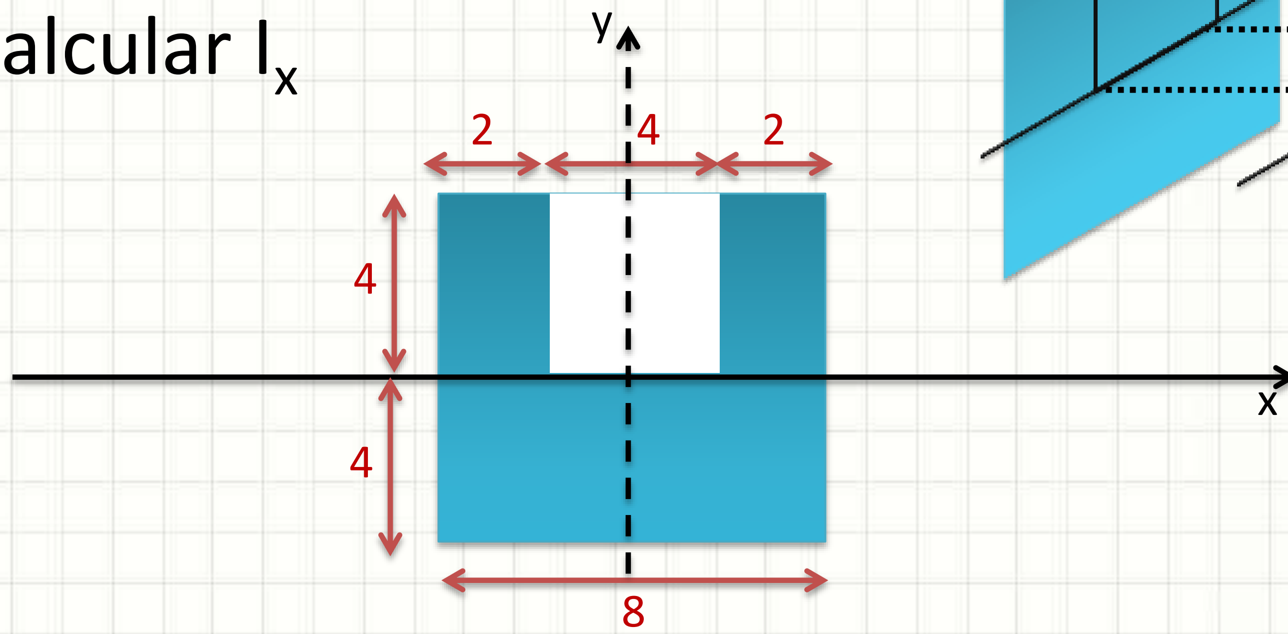
$$\frac{b \cdot h^3}{3}$$

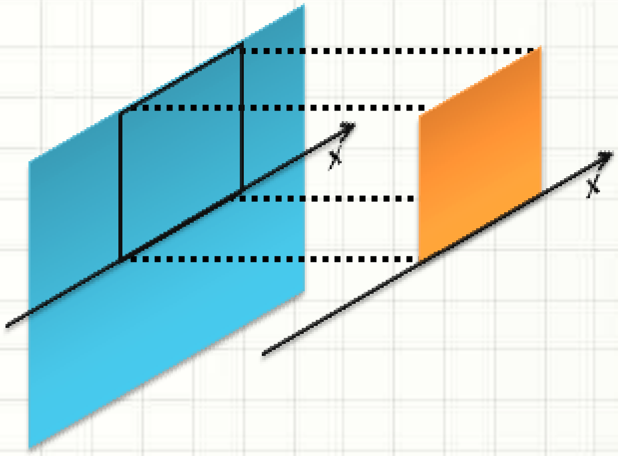


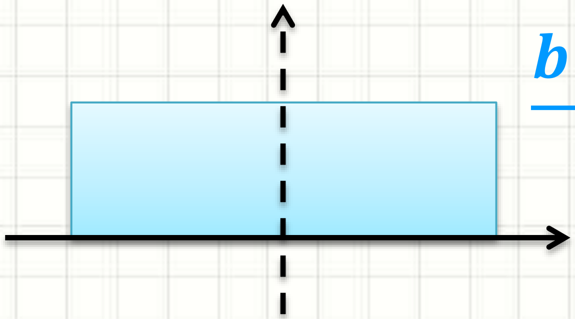
$$\frac{b \cdot h^3}{12}$$

Exercício

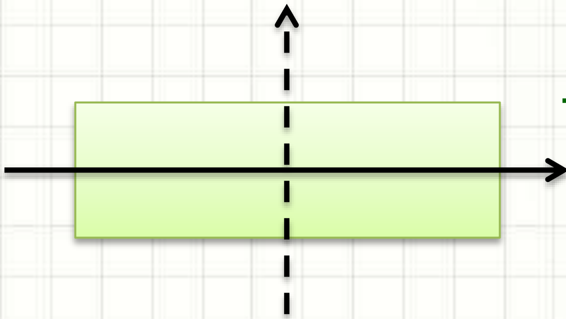
- Calcular I_x







$$\frac{b \cdot h^3}{3}$$

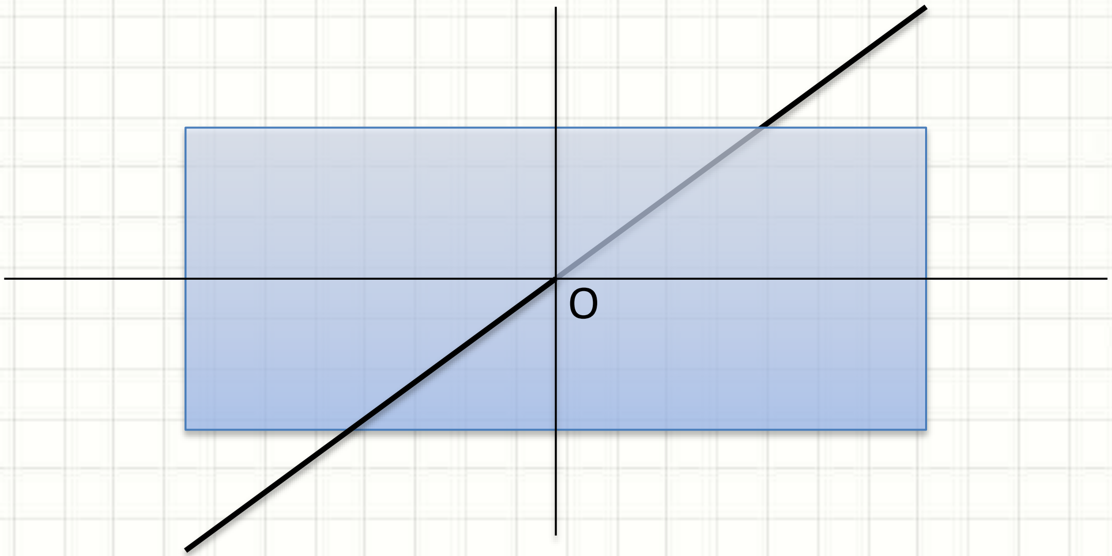


$$\frac{b \cdot h^3}{12}$$

Momento Polar de Inércia

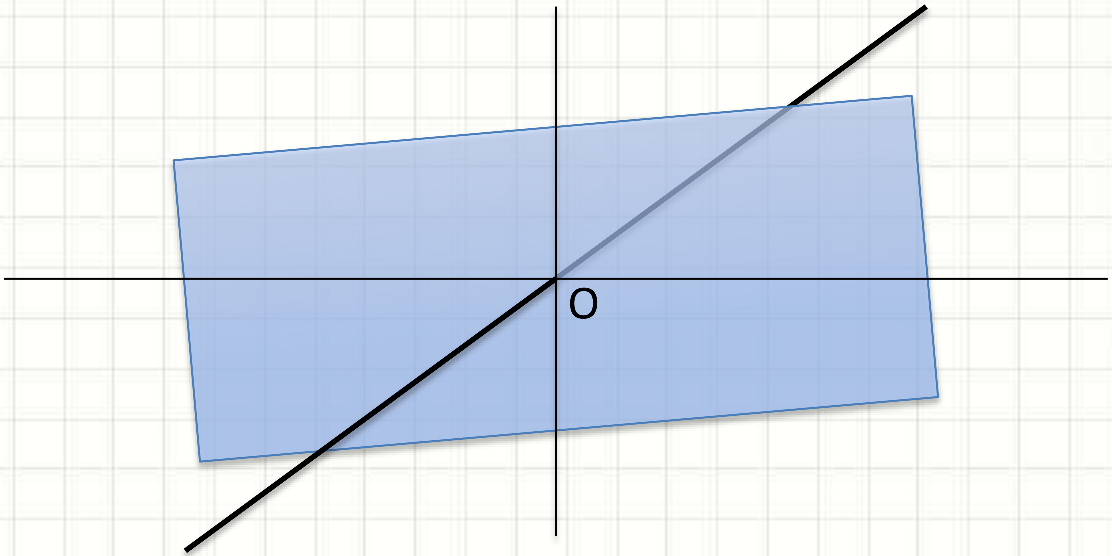
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que **sai** da tela



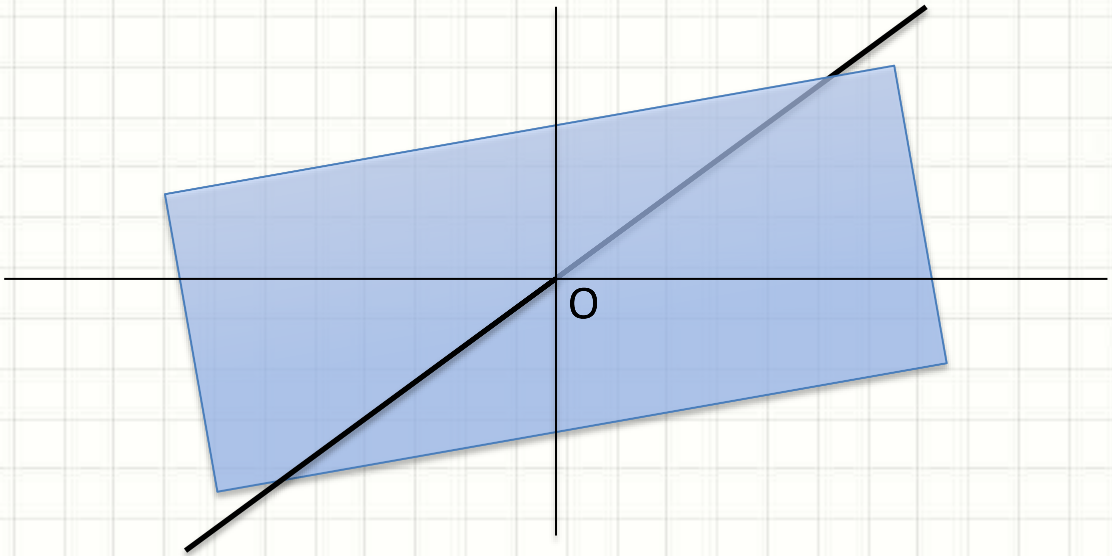
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que **sai** da tela



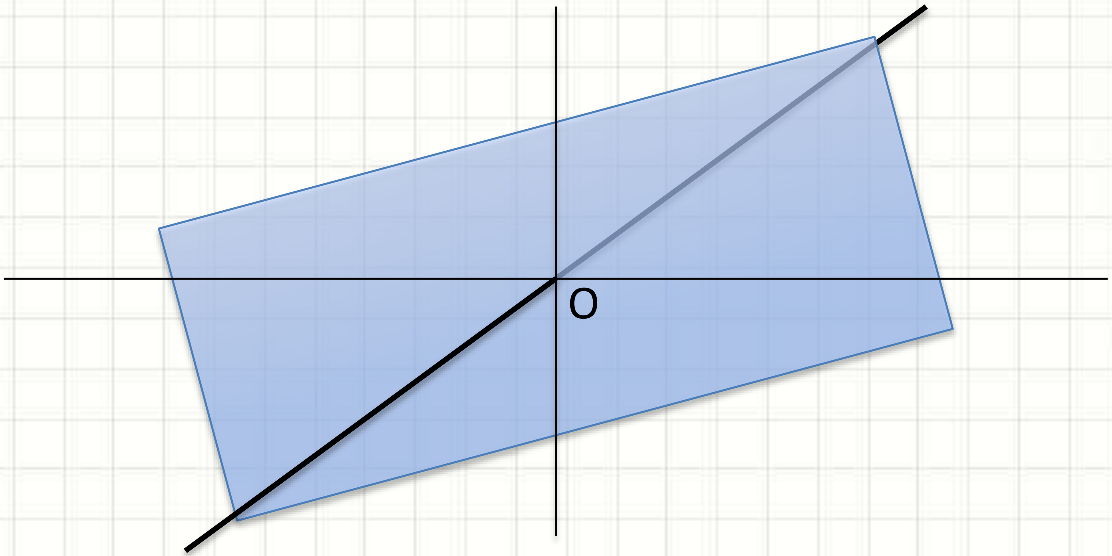
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que **sai** da tela



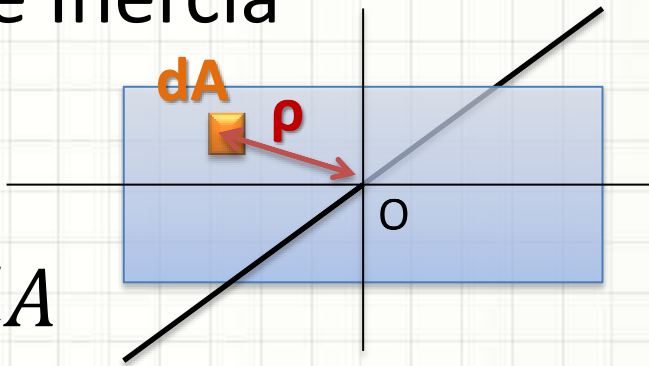
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que **sai** da tela



Momento Polar de Inércia

- Cálculo do Momento *Polar* de Inércia

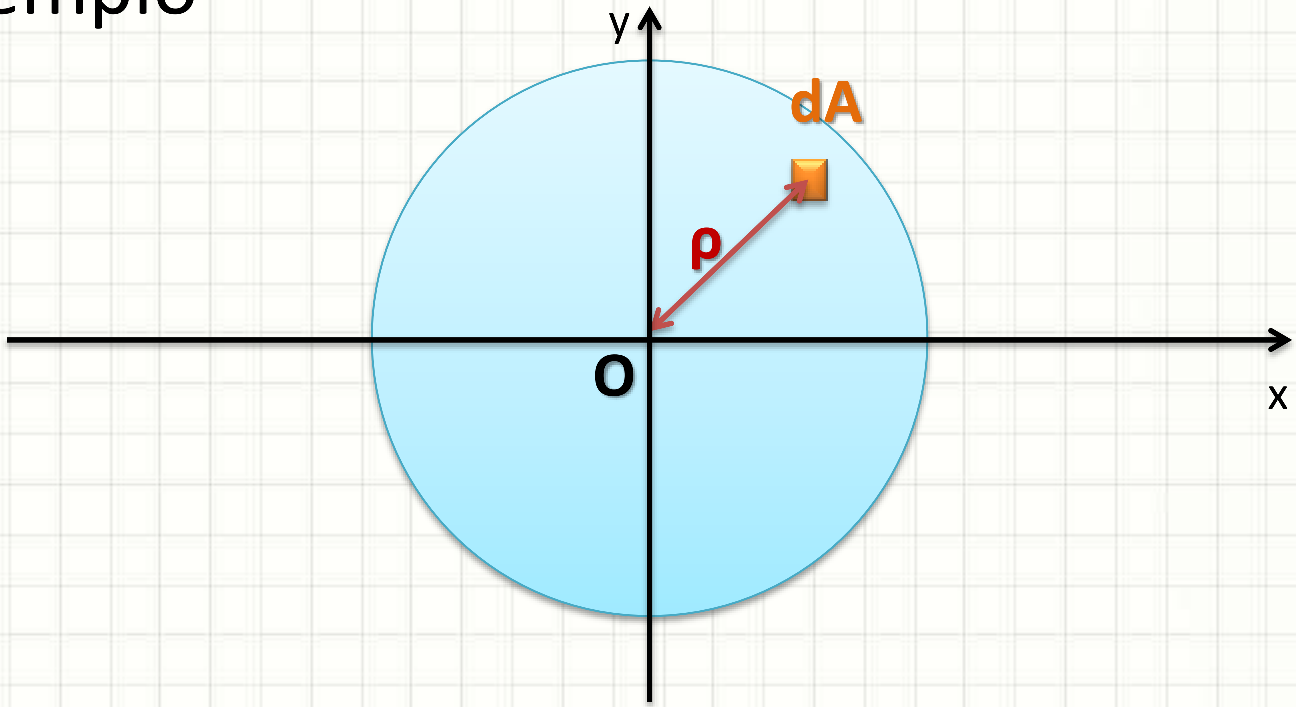


$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

- Inércia relativa a um ponto (eixo que “sai” por ele)
- Importante nas **torções**
- Sempre positivo! → Unidade J = $[L^4]$

Momento de Inércia

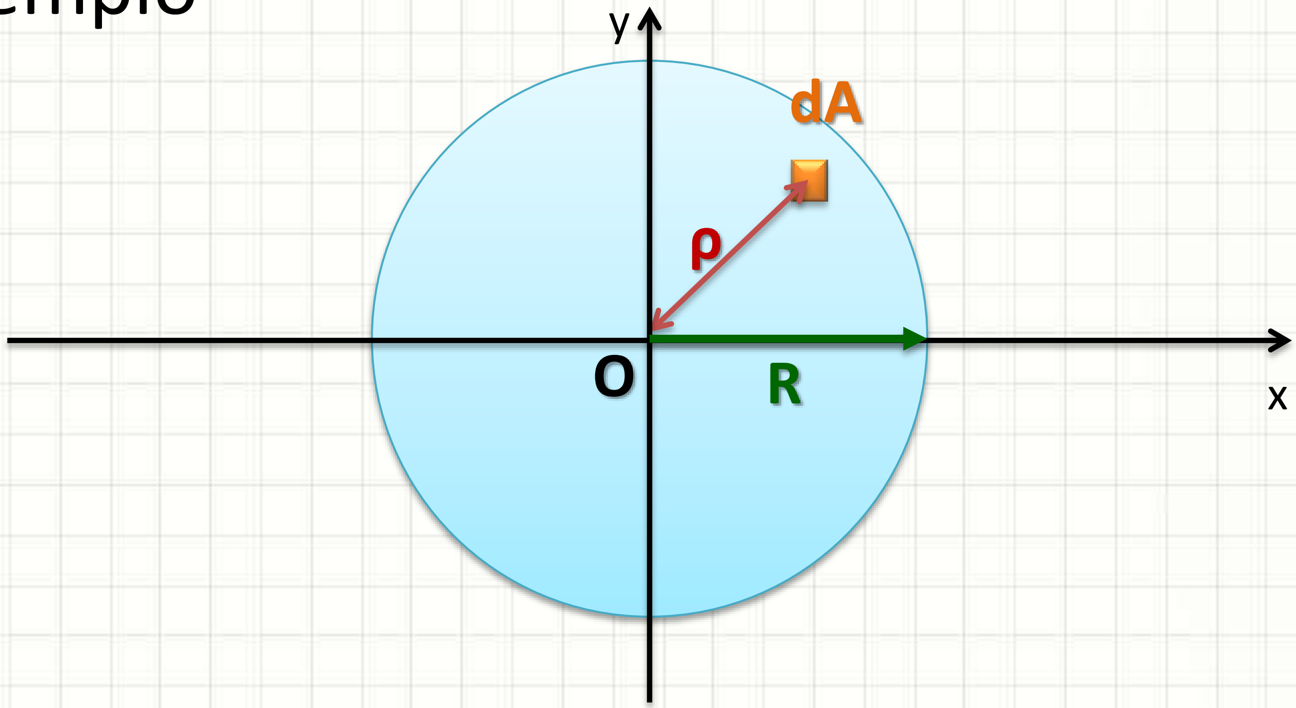
- Exemplo



$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Momento de Inércia

- Exemplo

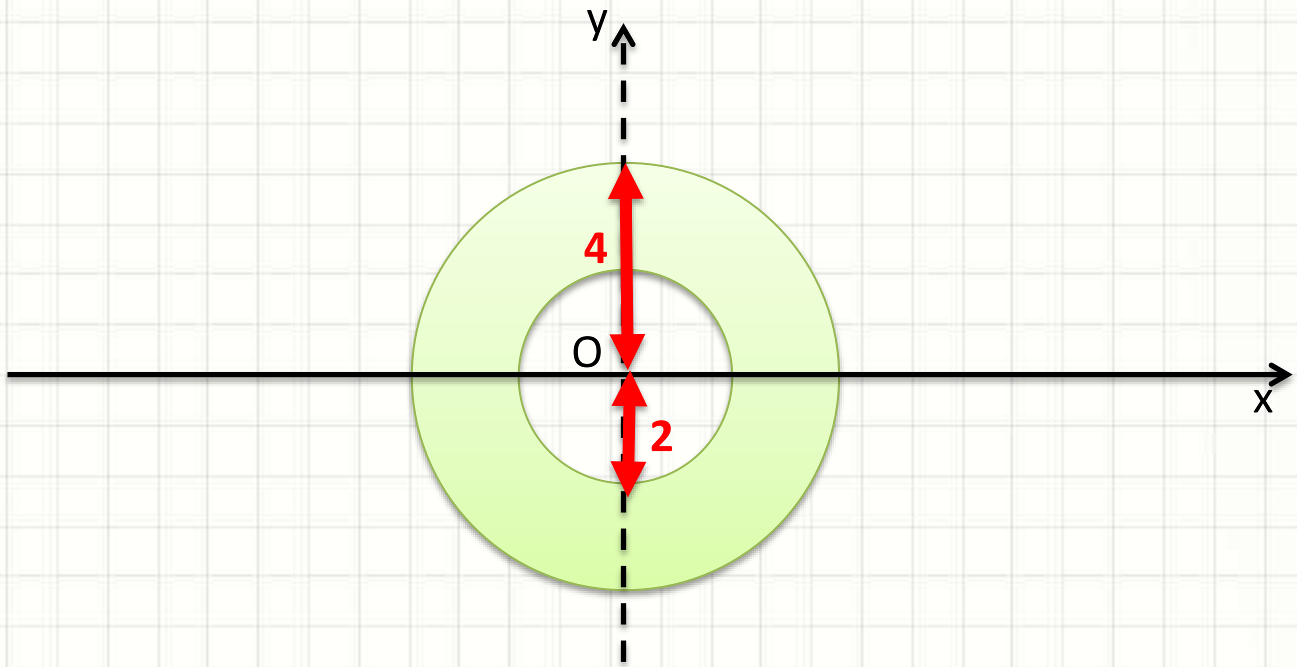


$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\boldsymbol{\pi \cdot R^4}}{\mathbf{2}}$$

Exercício

Exercício

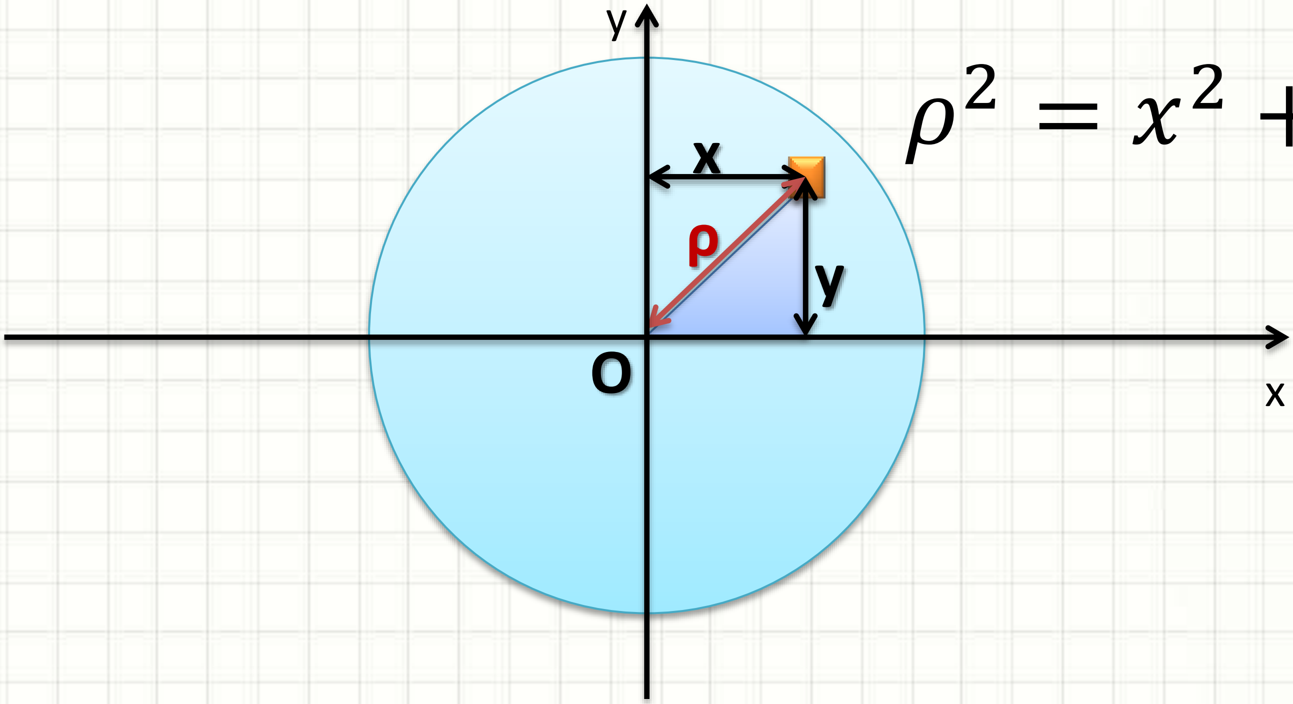
- Calcular J_o



Relação Momento Polar x Retangular de Inércia

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

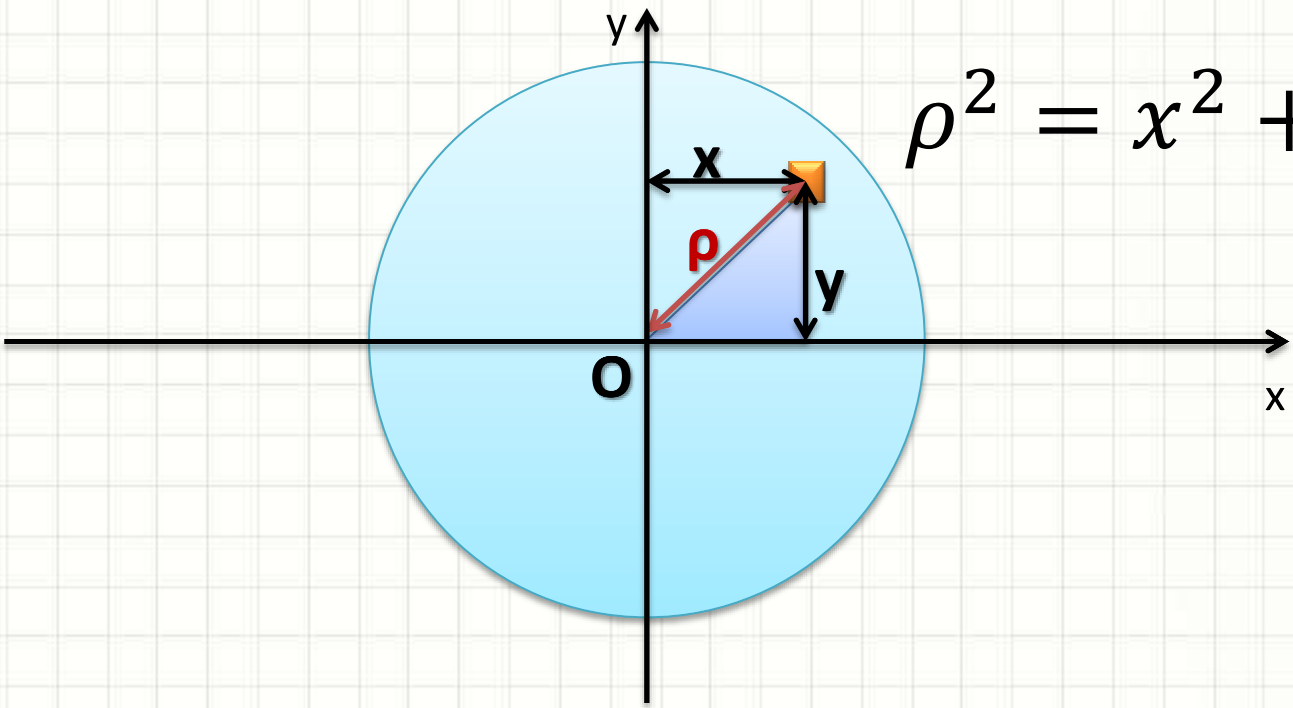


$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA \Rightarrow J_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

$$J_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

$$J_O = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

$$J_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

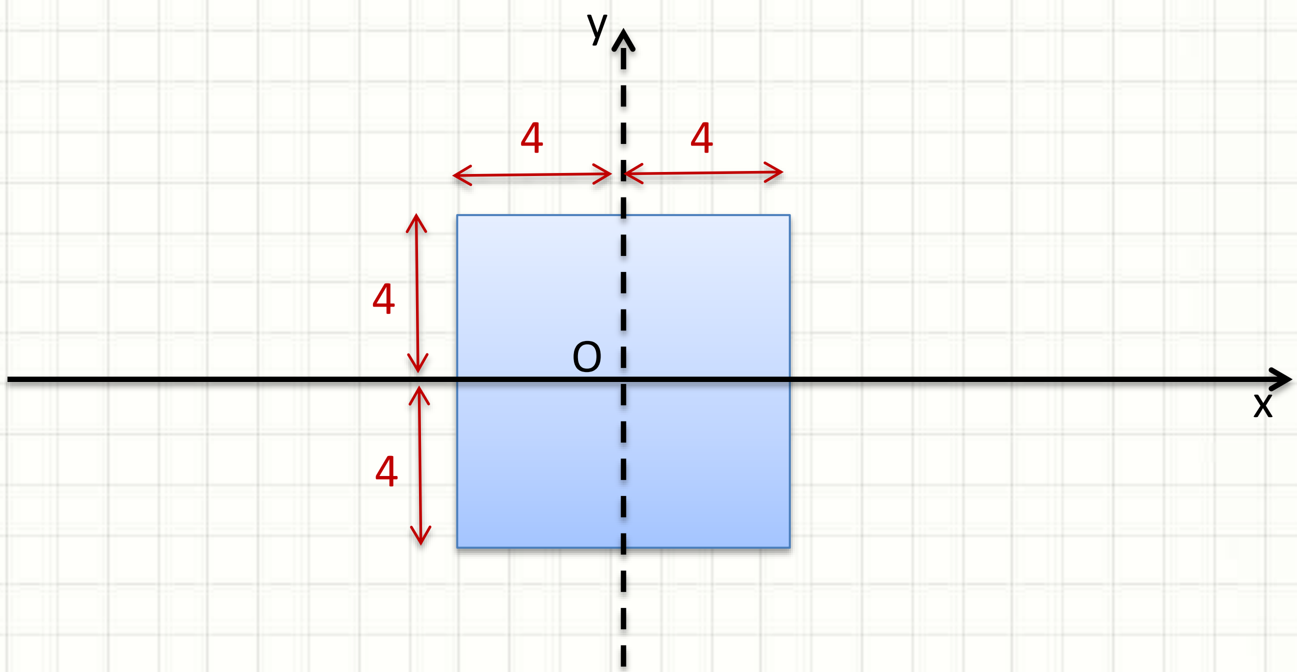
$$J_O = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA$$

$$\boldsymbol{J_O = I_x + I_y}$$

Exercício

Exercício

- Calcular J_o



A Inércia "Misteriosa"

A Inércia Misteriosa

- Se esses são momentos de inércia...

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A y \cdot y \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_A x \cdot x \cdot dA$$

- O que seria isso?

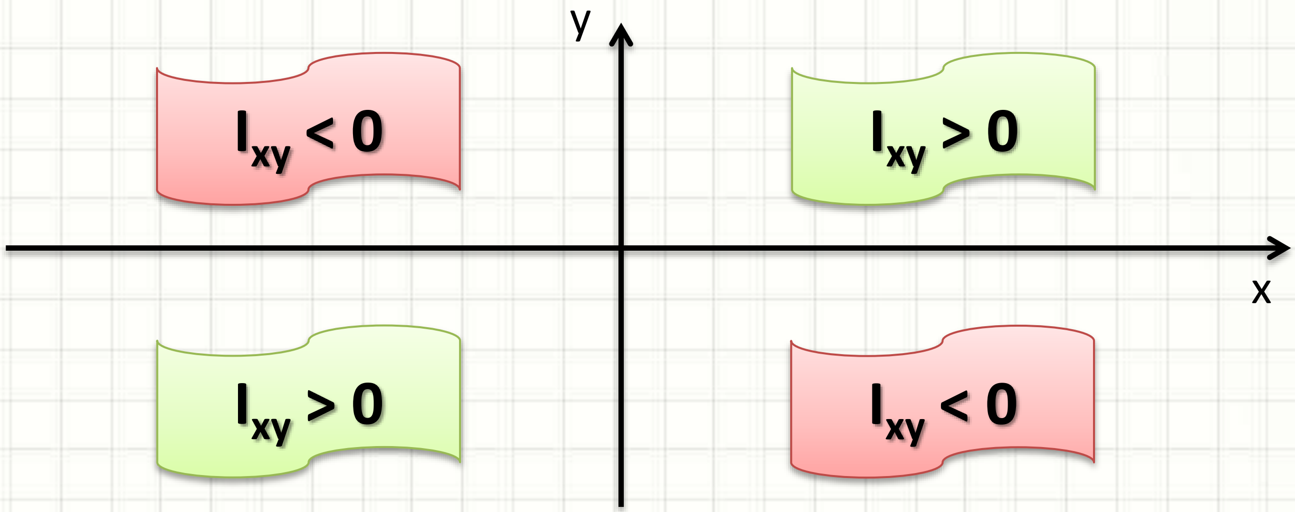
$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

Produto de Inércia

- Produto de Inércia: será usado depois

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo → $[I_{xy}] = m^4$



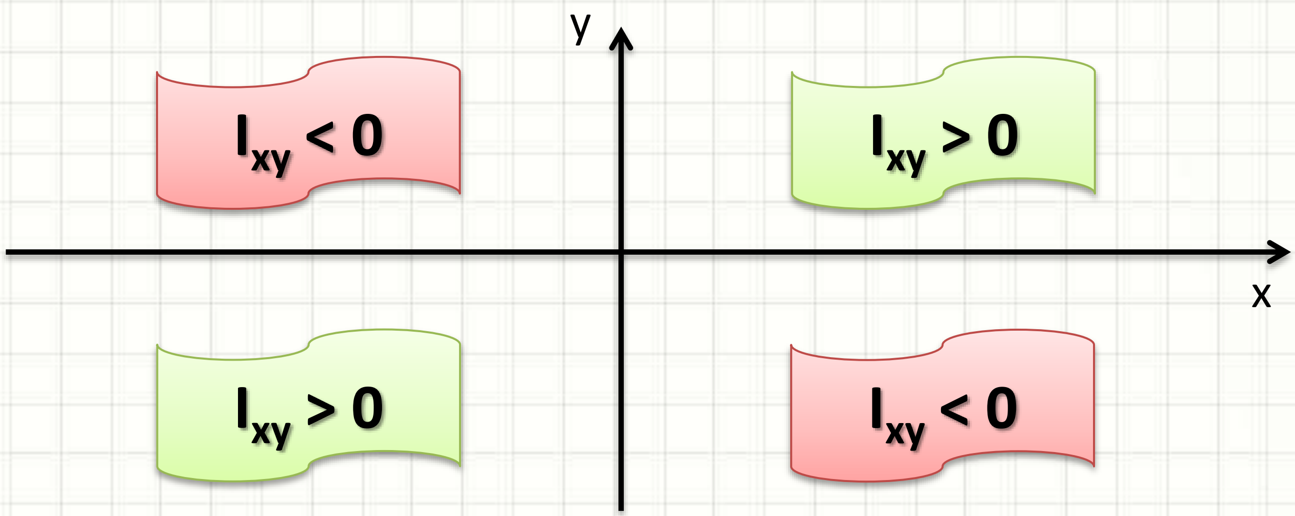
Produto de Inércia

Quando um dos **eixos é de simetria**, o produto de inércia será sempre **ZERO**!

- Produto de Inércia: será

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

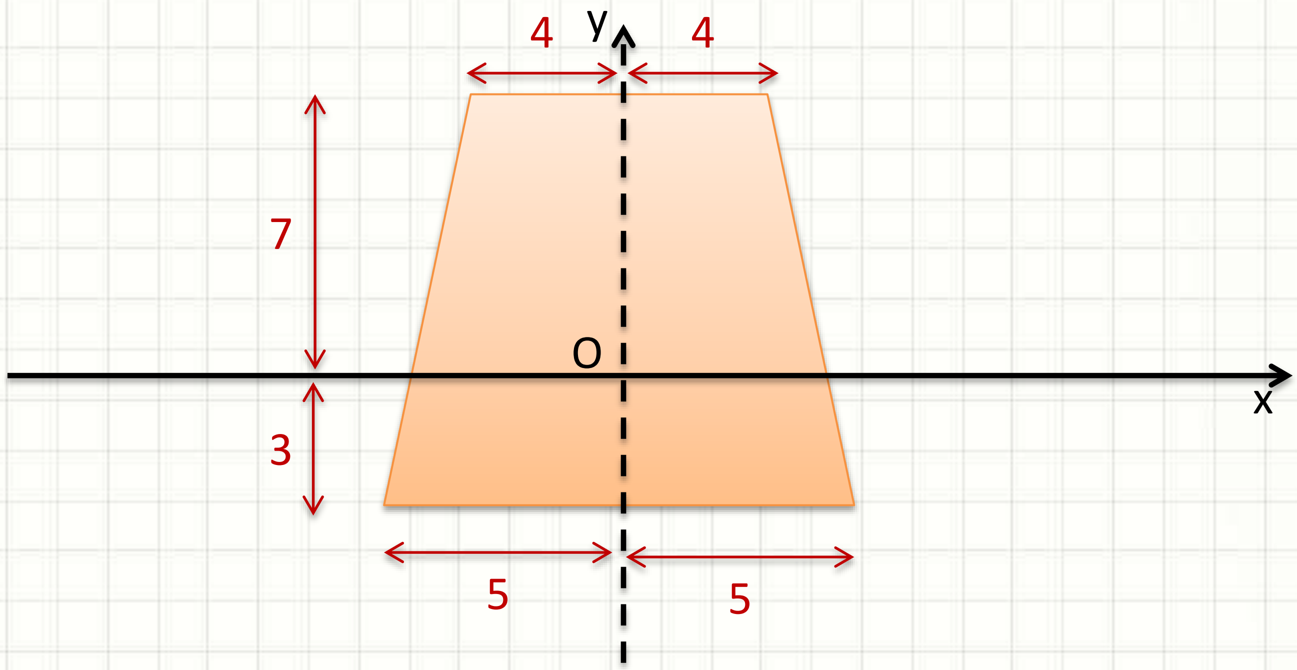
- Pode ser positivo ou negativo → $[I_{xy}] = m^4$



Exercício

Exercício

- Calcular I_{xy}

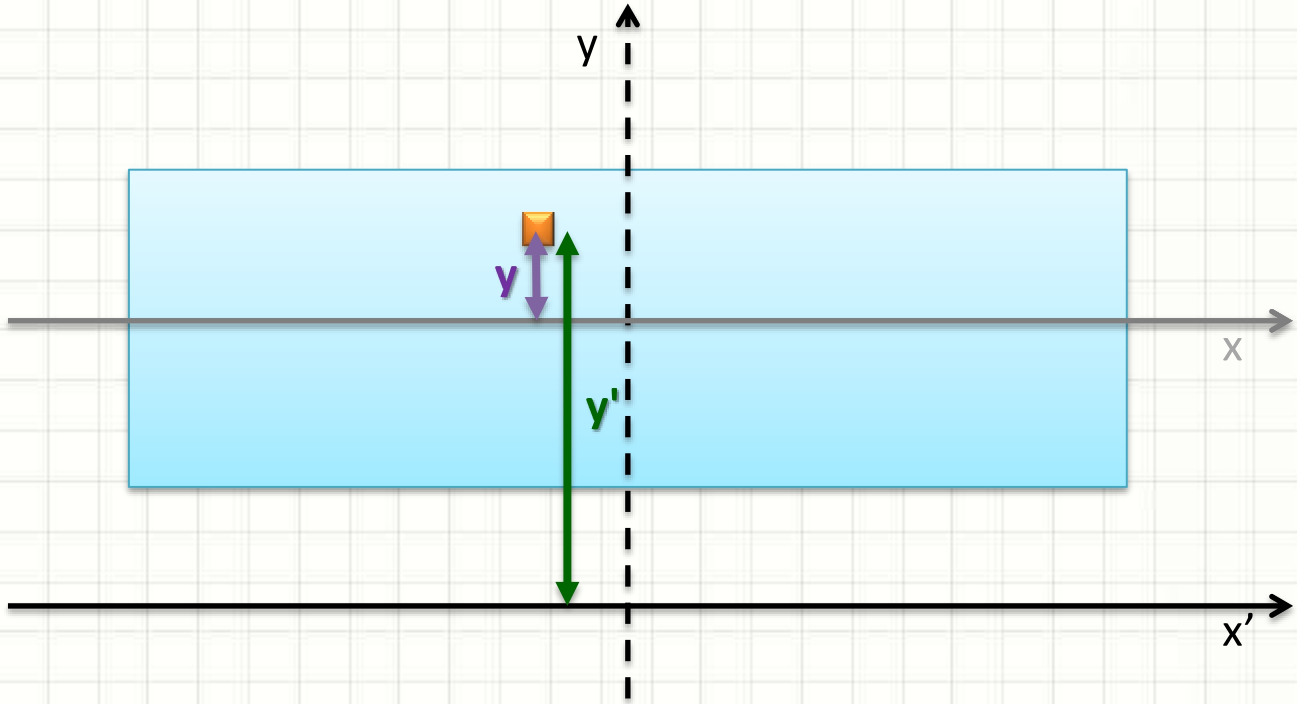


Pausa para o Café!

Translação de Eixo no Momento de Inércia

Translação de Eixos

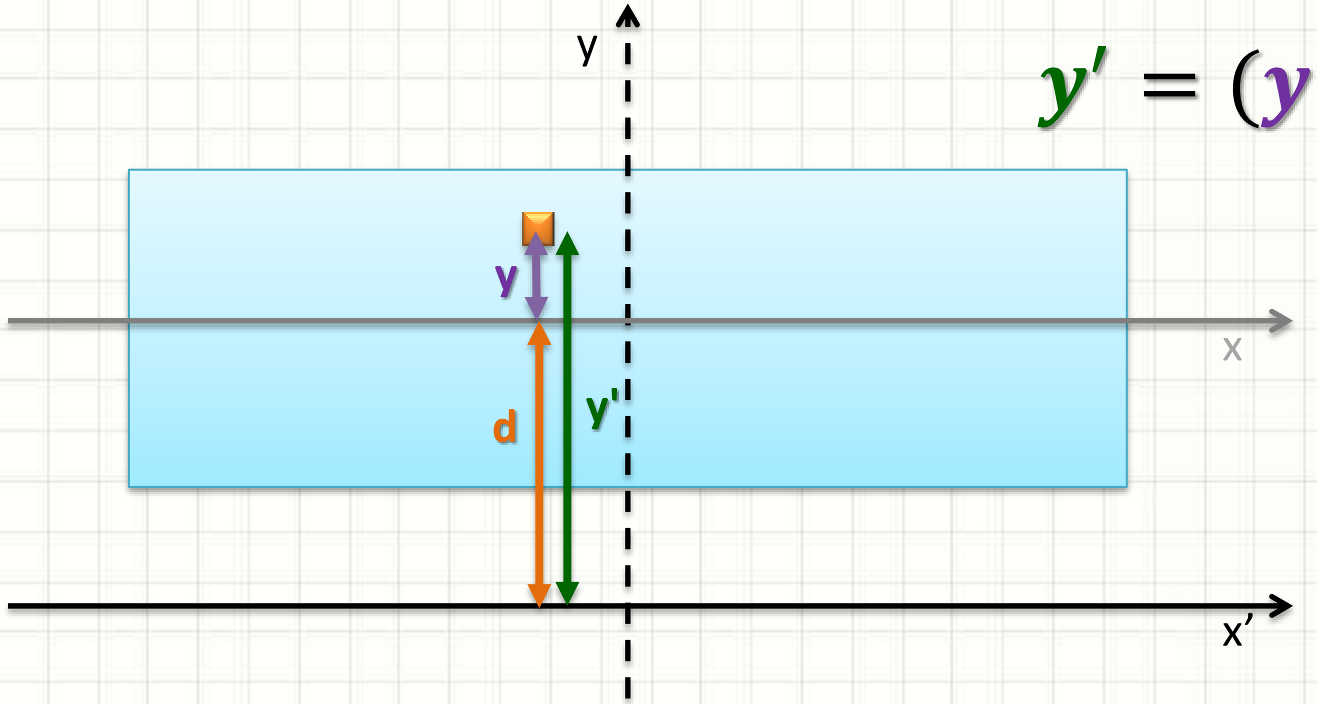
- Momento de Inércia (I$_x$ conhecido)



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \qquad I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I$_x$ conhecido)



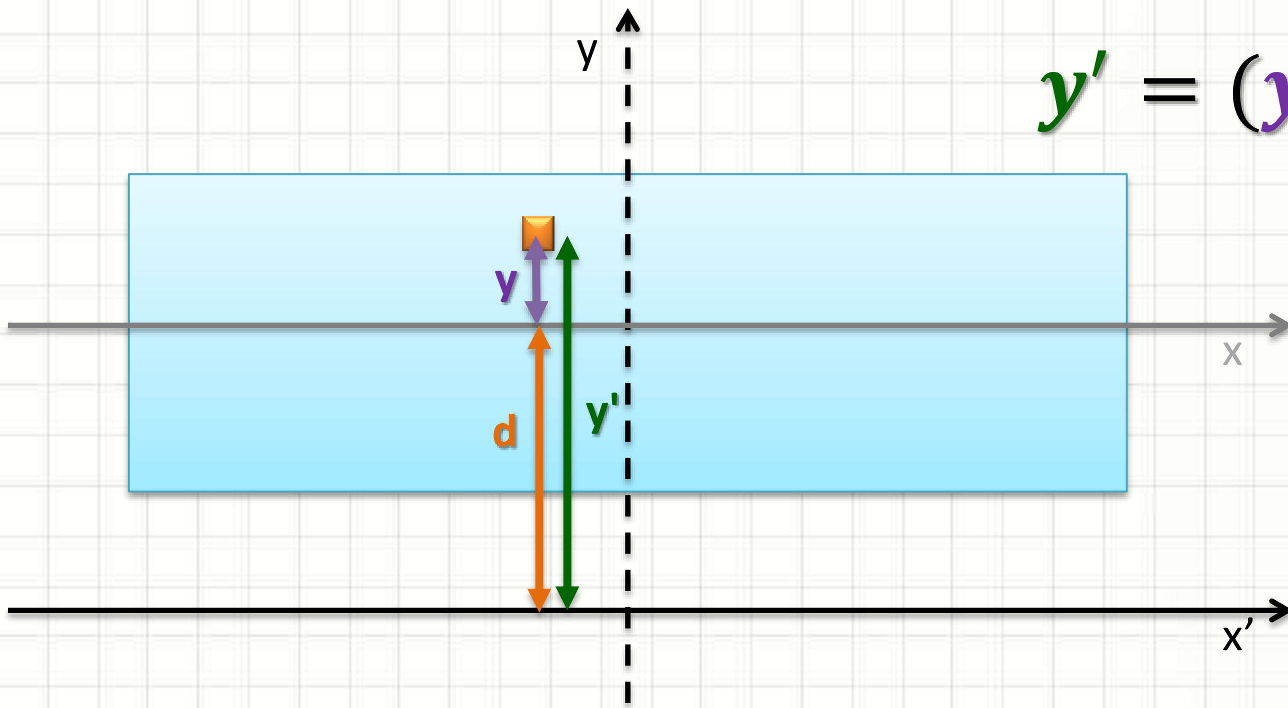
$$y' = (y + d)$$

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \qquad I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia   (I_x conhecido)

$$y' = (y + d)$$



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \qquad I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot d \cdot y \cdot dA + \int_A d^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA + 2.d.\int_A y \cdot dA + d^2.\int_A dA$$

$$\boldsymbol{I_{x'} = I_x + 2 \cdot d \cdot S_x + d^2 \cdot A}$$

Nos obriga a calcular o momento estático!

Translação de Eixos

- Como fica a translação se **x** for um eixo central?

$$I_{x'} = I_x + 2 \cdot d \cdot S_x + d^2 \cdot A$$

- Qual o valor de $\mathbf{S_x}$ nesse caso?
  - **Se x é central... $S_x = 0$**

$$I_{x'} = I_x + \cancel{2 \cdot d \cdot S_x} + d^2 \cdot A$$

$$\boxed{I_{x'} = I_x + A \cdot d^2}$$

Vale apenas se x é eixo central!

Translação de Eixos

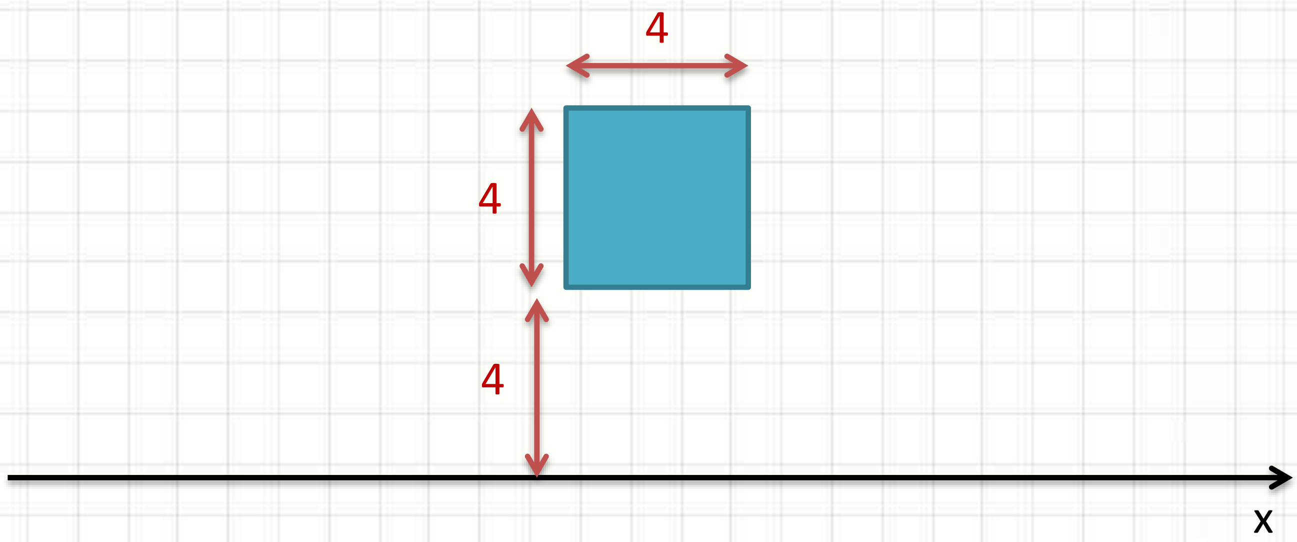
- PRIMEIRO E ÚNICO MANDAMENTO

"Não transladarás eixo que não seja central!"

EXERCÍCIO

Exercício

- Calcular I_x



Translação de Eixos - Complemento

- Obviamente isso vale para x e y centrais:

$$\boldsymbol{I_{x'} = I_x + A \cdot d^2}$$
$$\boldsymbol{I_{y'} = I_y + A \cdot d^2}$$

- Como I_x e I_y → eixos centrais, **d** → positivo
  - Partindo do central, translação AUMENTA momento
- Se O é o centroide... também vale:

$$\boldsymbol{J_{O'} = J_O + A \cdot d^2}$$

Translação de Eixo no Produto de Inércia

Translação de Eixos

- Pode-se demonstrar que se os eixos passam pelo centroide, isso é válido...

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$
$$I_{y'} = I_y + A \cdot d^2$$

- Da mesma forma deduz-se que...

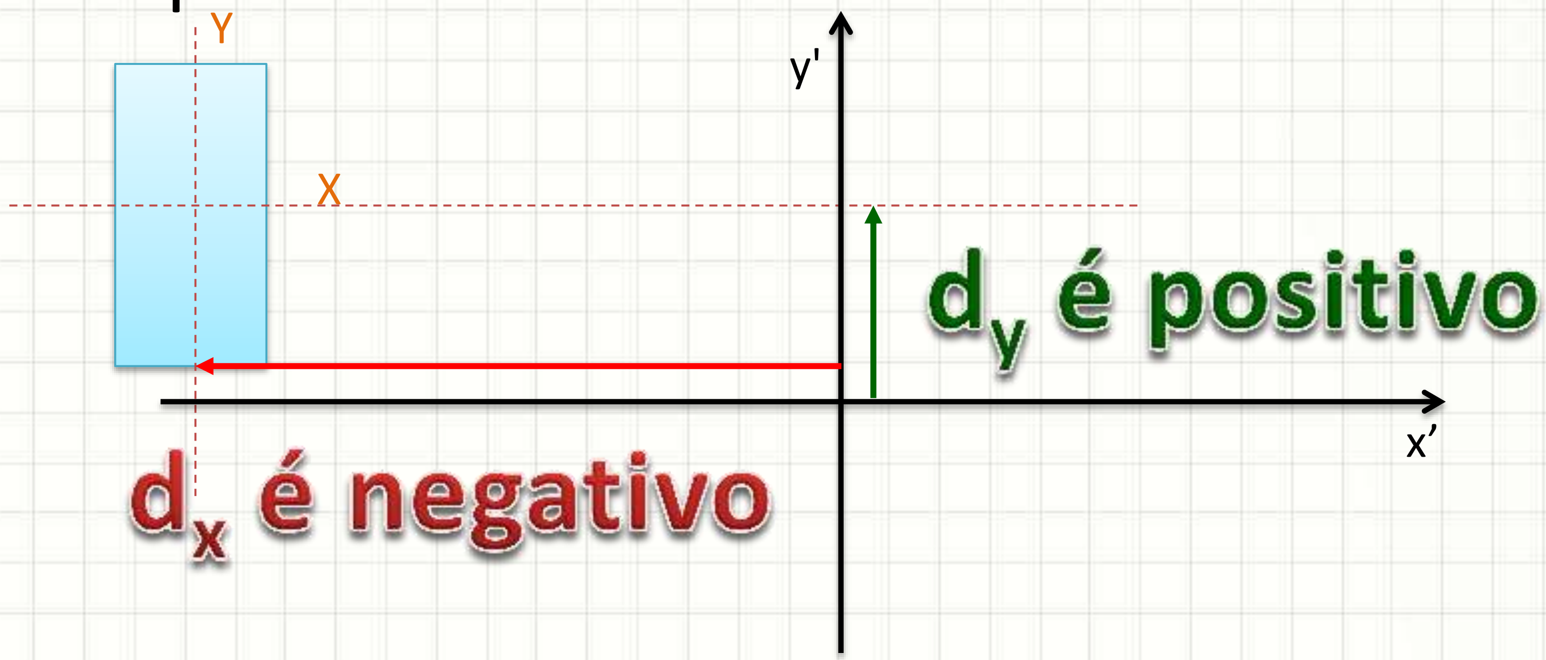
$$I_{xy'} = I_{xy} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Translação de Eixos

- Qual o sinal de d_x e d_y?

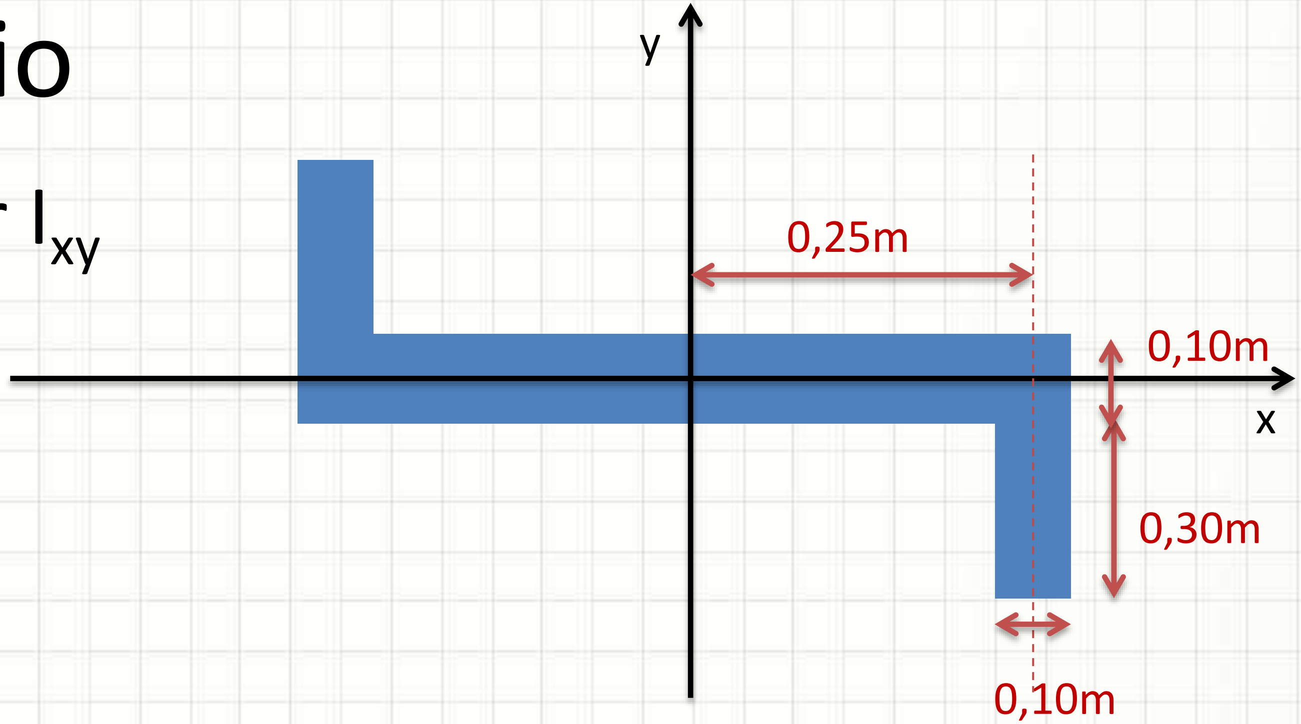
$$I_{xy'} = I_{xy} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

- Referência: eixo destino da translação
- Exemplo



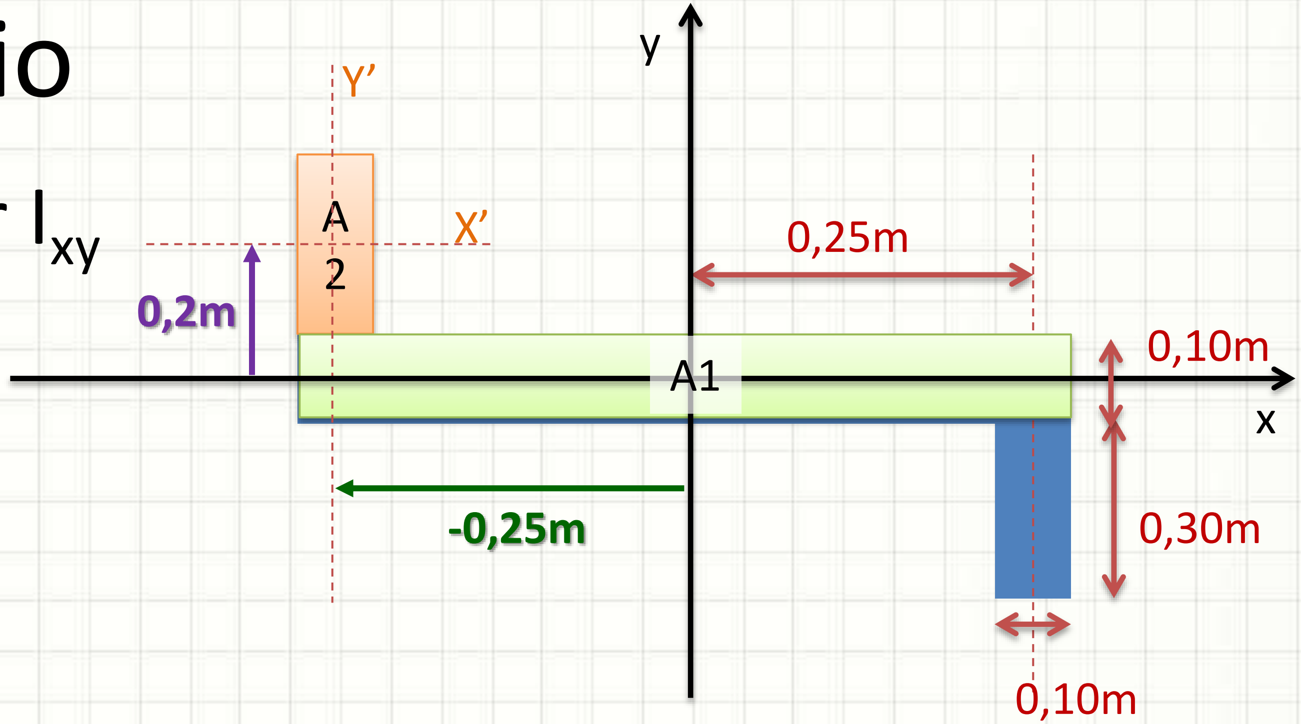
Exercício

- Calcular I_{xy}



Exercício

- Calcular I_{xy}



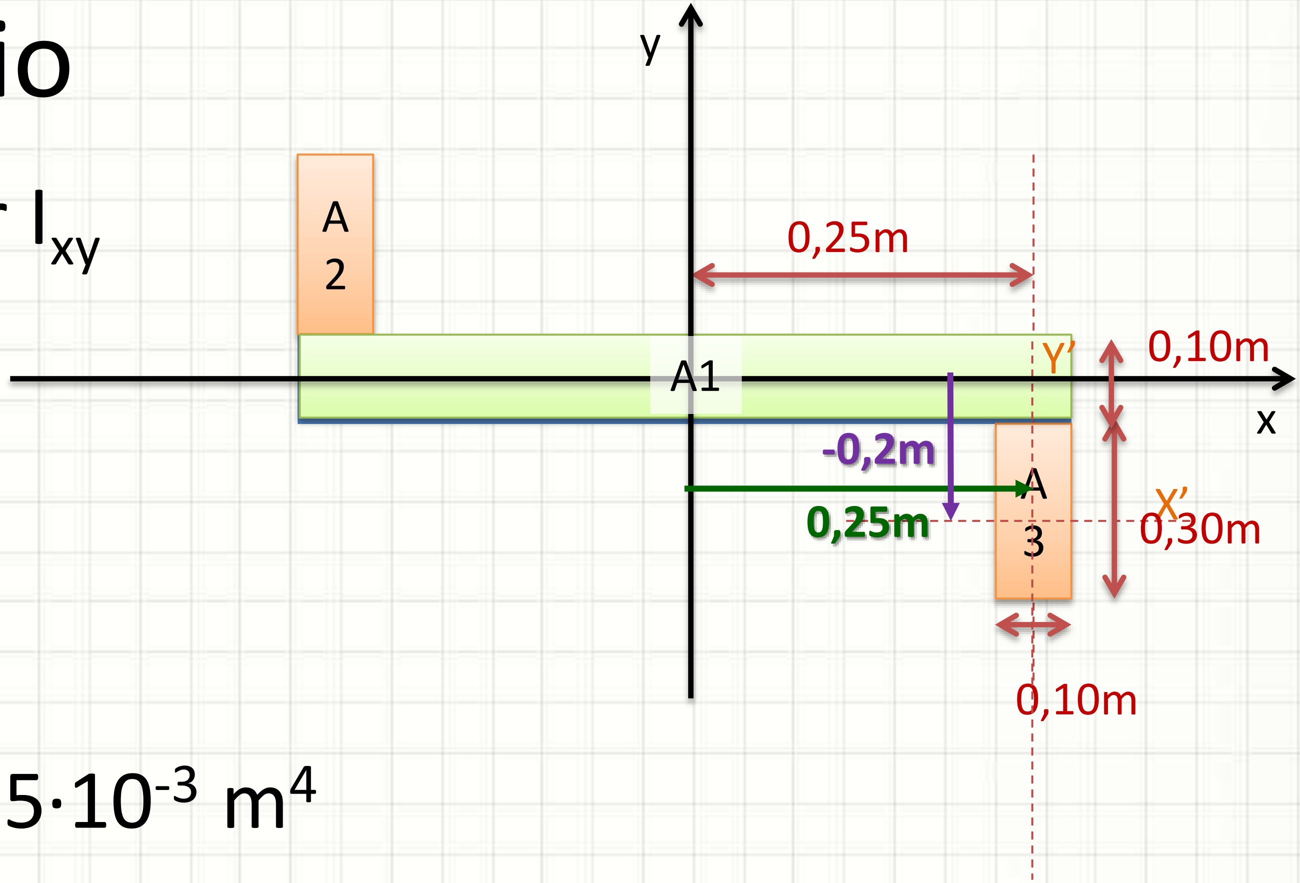
$$I_{A1xy} = 0\ m^4$$

$$I_{A2xy} = I_{A2x'y'} + A_2 \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{A2xy} = 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot (-0{,}25) \cdot 0{,}2 = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$$

Exercício

- Calcular I_{xy}



$$I_{A1xy} = 0$$

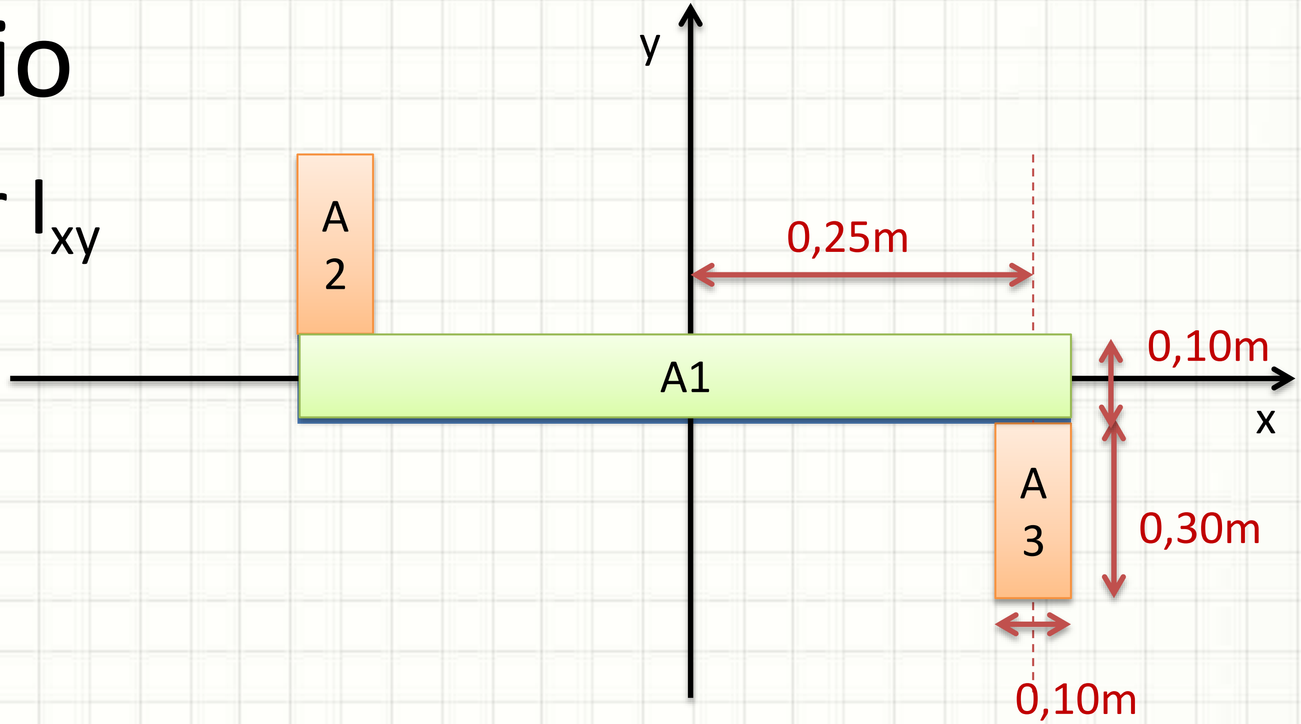
$$I_{A2xy} = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$$

$$I_{A3xy} = I_{A3x'y'} + A_3 \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{A3xy} = 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}25 \cdot -(0{,}2) = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$$

Exercício

- Calcular I_{xy}



$I_{A1xy} = 0$

$I_{A2xy} = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$

$I_{A3xy} = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^4$

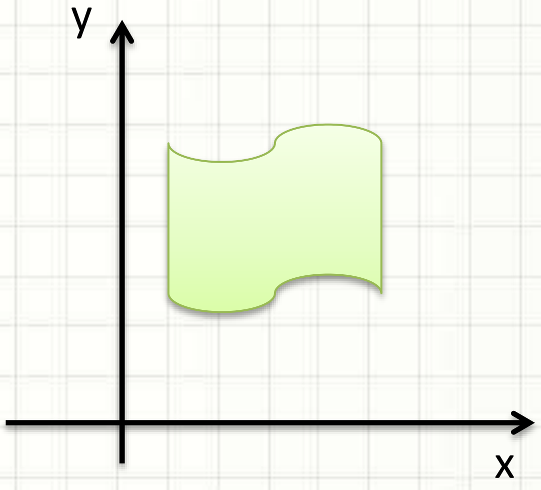
- $I_{xy} = I_{A1xy} + I_{A2xy} + I_{A3xy} =$

  $= 0 - 1{,}5 \cdot 10^{-3} - 1{,}5 \cdot 10^{-3} = \mathbf{-3{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^4}$

Rotação de Eixos de Inércia

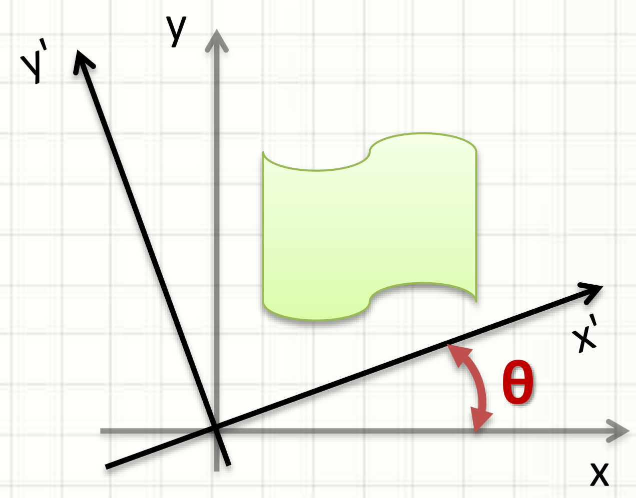
Rotação de Eixos

- Conhecidos I_x, I_y e I_{xy}



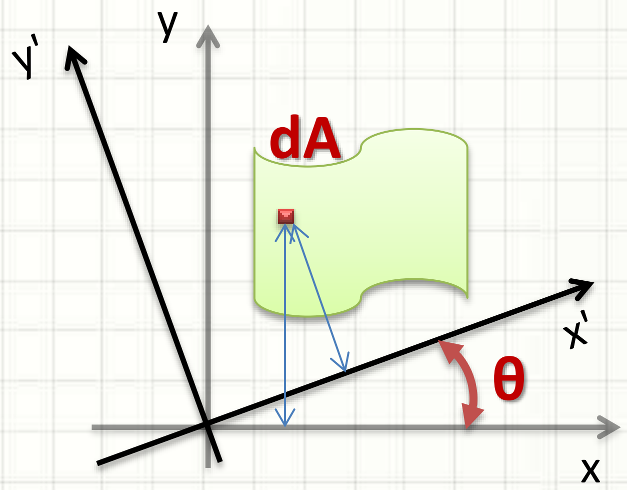
Rotação de Eixos

- Conhecidos I_x, I_y e I_{xy}
- Como calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$?



Rotação de Eixos

- Conhecidos I_x, I_y e I_{xy}
- Como calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$?



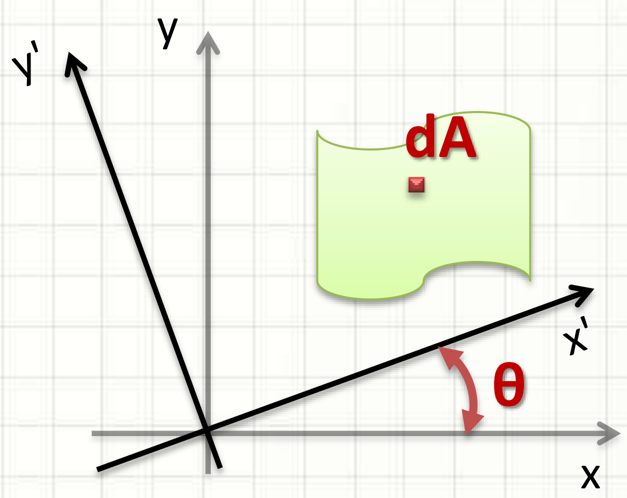
$$I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 \cdot dA$$

- $x' = x.\cos\theta + y.\text{sen}\,\theta$
- $y' = y.\cos\theta - x.\text{sen}\,\theta$
- Realizando a integral de $I_{x'}$ e $I_{y'}$...

Rotação de Eixos

- Relações:



$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

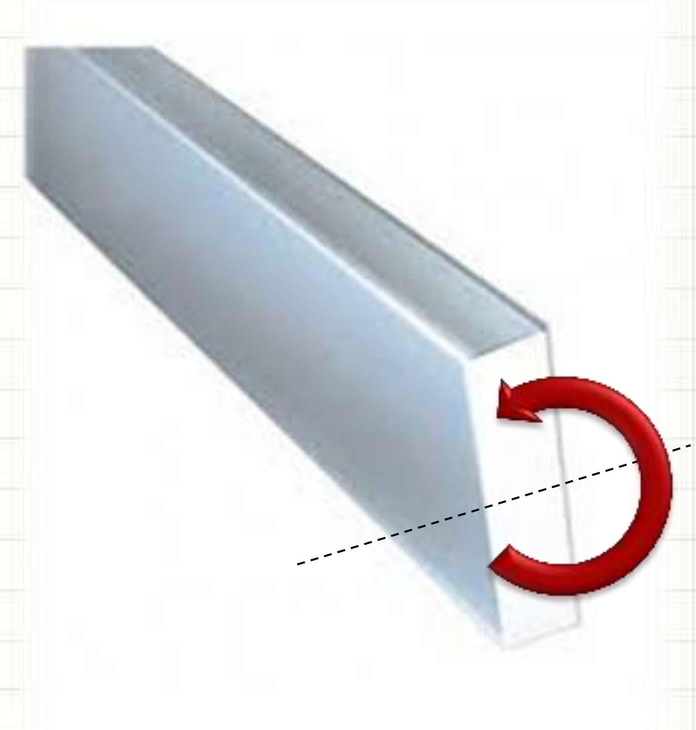
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta + I_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

J_o permanece o mesmo! **Por quê?**

Encontrando Eixos de Maior e Menor Inércia

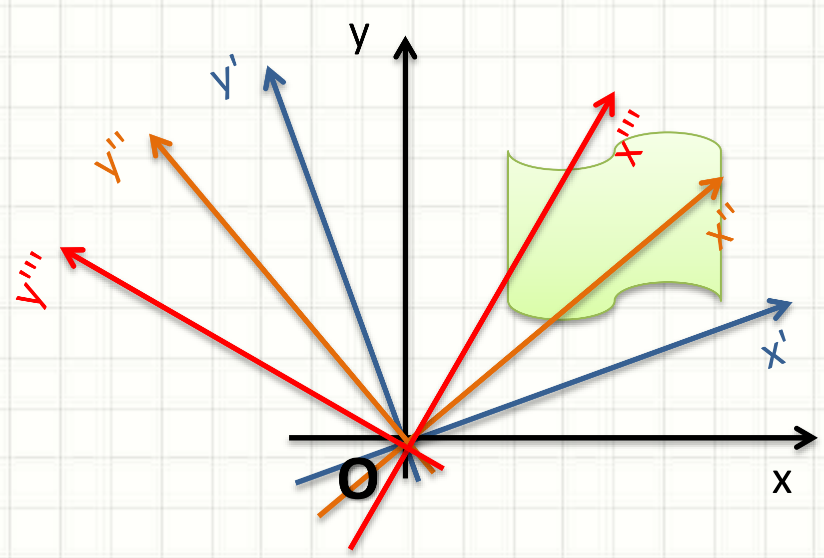
Eixos de Maior e Menor Inércia

- Maior momento de inércia: maior resistência
  - Máximo I, máxima resistência à flexão



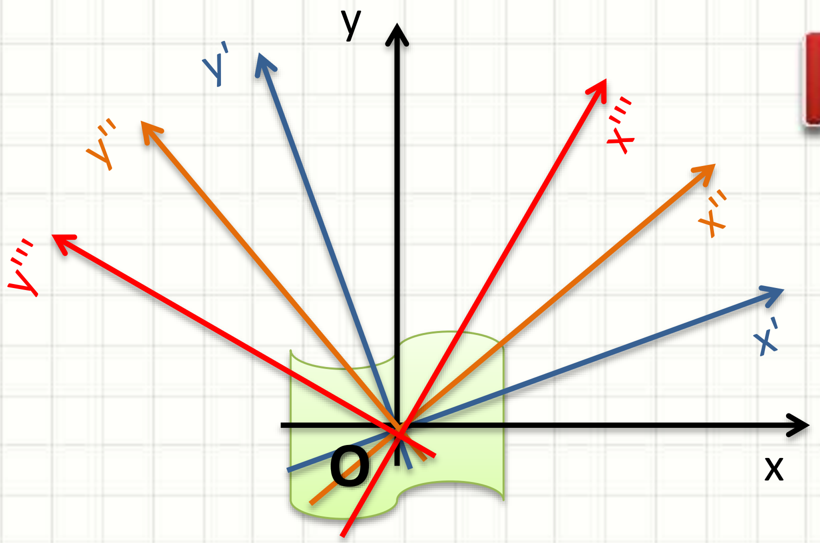
Eixos de Maior e Menor Inércia

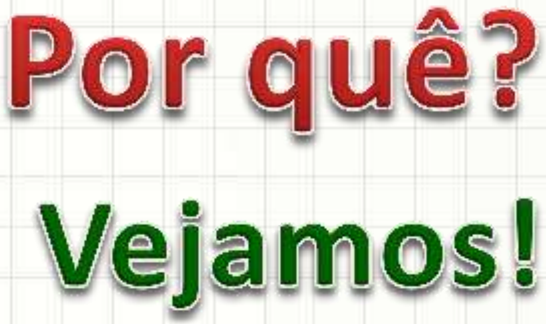
- Para um dado centro de inércia O...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y



Eixos de Maior e Menor Inércia

- Para um dado centro de inércia O...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y
- ***De especial interesse***: **O** no centroide





Eixos de Maior e Menor Inércia

- Como encontrar eixos de máximo e mínimo?
  a) Calcula-se I_x, I_y e I_{xy} para <u>eixos convenientes</u>
  b) Verifica-se este ângulo:

$$\theta_p = \frac{atan\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

- Se θ_p **for 0**, são eixos de máximo e mínimo
  – Recebem o nome de **eixos principais**
- Se θ_p **não for 0**, θ_p indica a rotação necessária

Eixos Centrais de Maior e Menor Inércia

- Se θ_p **não for 0**, θ_p indica a rotação necessária
- Pode-se calcular os novos máximos e mínimos

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}$$

Eixos Centrais e Figuras Simétricas

- Se eixos são centrais e figura tem simetria...

$$\mathbf{I_{xy} = 0}$$

- Qual o valor θ_p de, nesse caso?

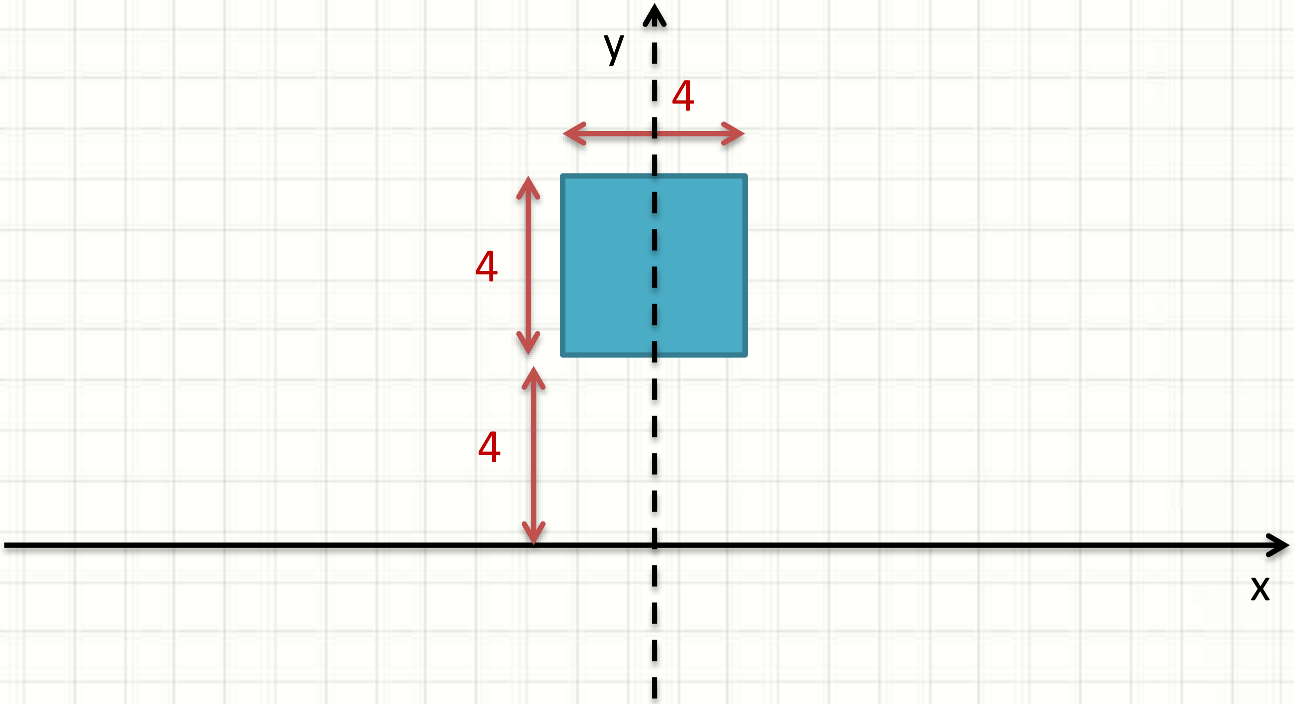
$$\theta_p = \frac{atan\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

Nesse caso: qualquer eixo central é também um eixo principal!

Exercício

Exercício

- Verifique se os eixos são eixos principais



$$\theta_p = \frac{atan\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

Para Treinar

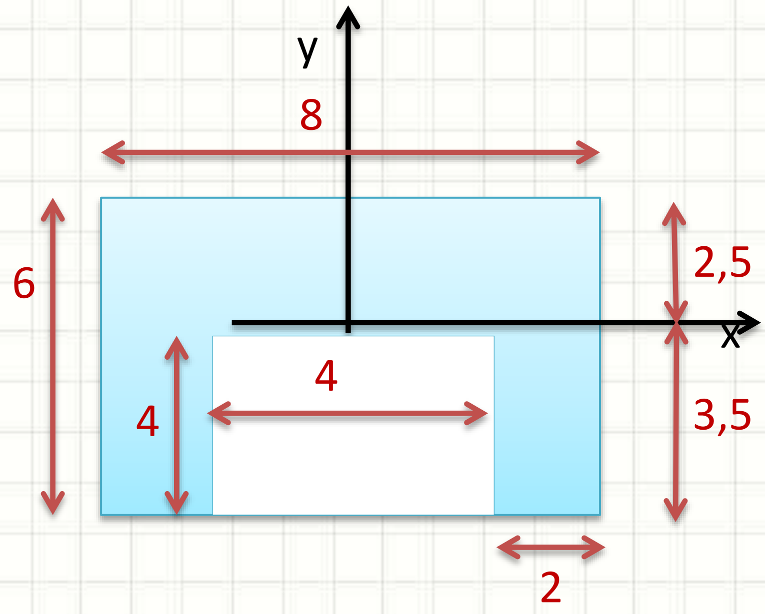
Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercícios A.2 a A.6
  - Exercício A.11

Exercício no SAVA

Exercício – SAVA – Individual

- Calcule o I_x, o I_y e o I_{xy} no centroide
- Verifique se esses já são os eixos principais
- Se não forem, determine-os e seus I_x, I_y e I_{xy}.



Conclusões

Resumo

- Momento de Inércia e Momento Polar de Inércia
- Produto de Inércia
- Eixos Centrais de Inércia
- Translação e Rotação de Eixos
- Eixos Principais de Inércia
- **<u>Exercitar</u>: Exercícios Hibbeler / Mat. Didático**

- Onde entra a resistência?
  - Vamos começar pelos **esforços axiais**
  - Tração e Compressão

Perguntas?

Exercício em Sala

Exercício – Individual, para **Agora**!

- Calcule Ix da figura abaixo