Resistência dos Materiais II

Carregamento Axial
Parte I

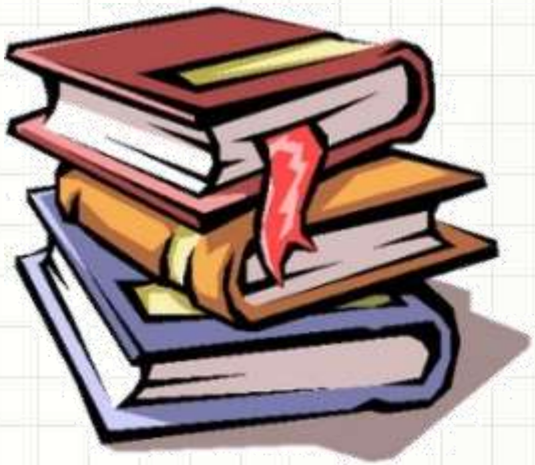
Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

Objetivos

- Conhecer o princípio de Saint-Venant
- Conhecer o princípio da superposição
- Calcular deformações em elementos submetidos a esforço normal
- Calcular reações em problemas estaticamente indeterminados simples

Material de Estudo



Material	**Acesso ao Material**
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 3)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 85-96
Biblioteca Virtual	“Resistência dos Materiais”

Relembrando:

Forma x Deformação

Características das Figuras Planas

- Perímetro, Área...
- Momento Estático → equilíbrio
- Momento de Inércia → estabilidade ao giro

- Mas o que tem a ver isso com resistência?
- Vamos voltar um pouco...

Calcular o alongamento da barra

$A = 0{,}1m^2$
$E = 50GPa$

- Como fazer?

$$\sigma = F/A \qquad \sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = 10.10^6/10^{-1}$$

$$\sigma = 100.10^6 Pa$$

Calcular o alongamento da barra

A = 0,1m²
E = 50GPa

- Como fazer?

$$\sigma = E \cdot \epsilon \qquad \sigma = 100.10^6 Pa$$

$$\epsilon = \sigma / E$$

$$\epsilon = 100.10^6 / 50.10^9$$

$$\epsilon = 2.10^{-3}$$

Calcular o alongamento da barra

A = 0,1m²

E = 50GPa

- Como fazer?

$$\epsilon = 0{,}002\ m/m$$

$$\delta = \epsilon\ .\ L$$

$$\delta = 0{,}002\ .\ 10$$

$$\delta = 0{,}02\ m$$

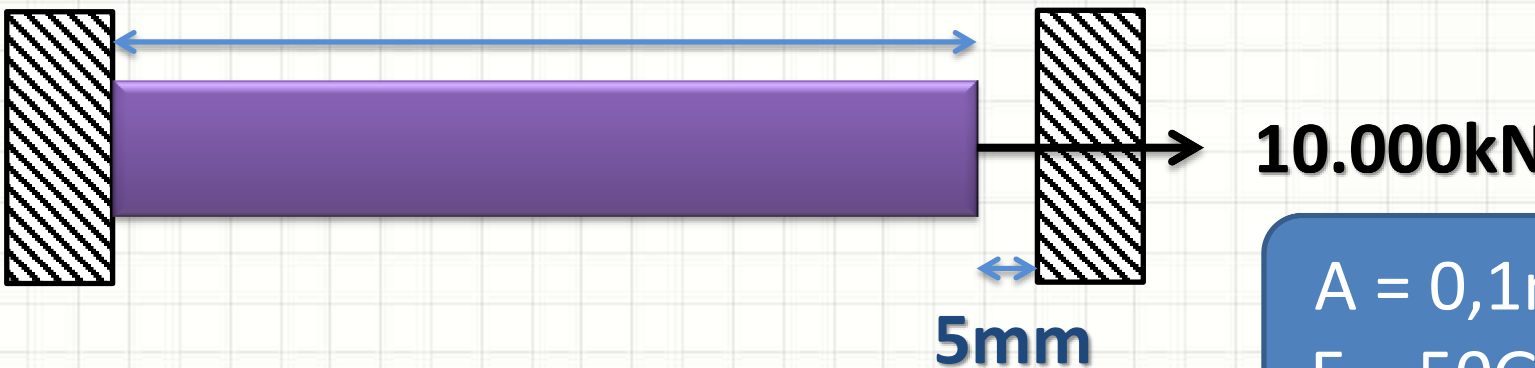
Alongamento com Tensão Média

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = F/A$$

Pressupostos?

- A deformação é livre



A = 0,1m^2

E = 50GPa

$$\delta = 0{,}02\ m$$

#comofaz?

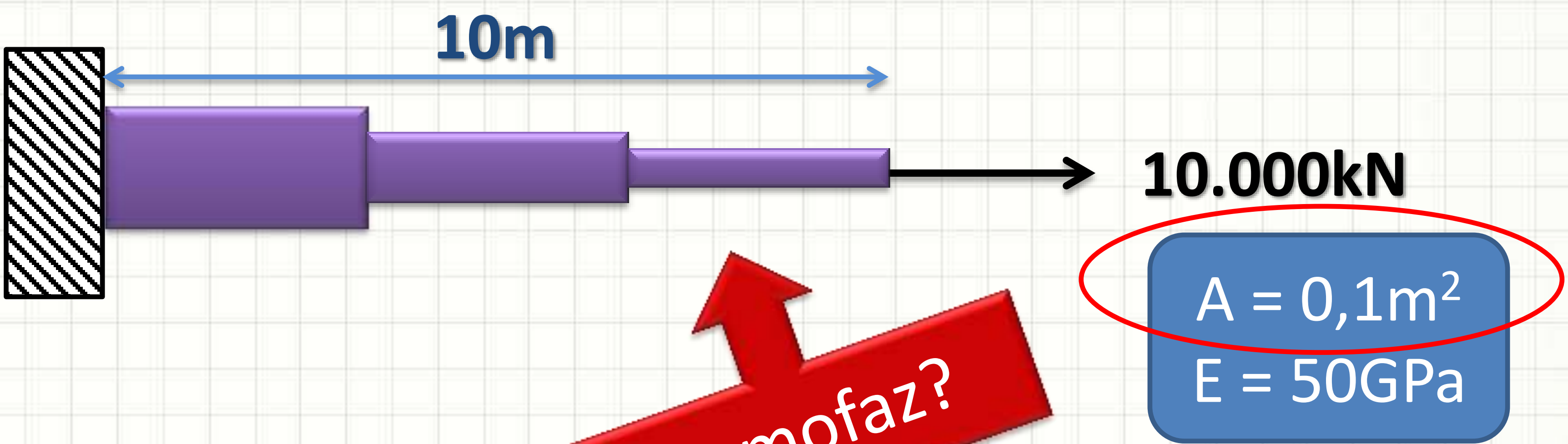
Alongamento com Tensão Média

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = F/A$$

Pressupostos?

- A deformação é livre
- A área é constante



#comofaz?

Alongamento com Tensão Média

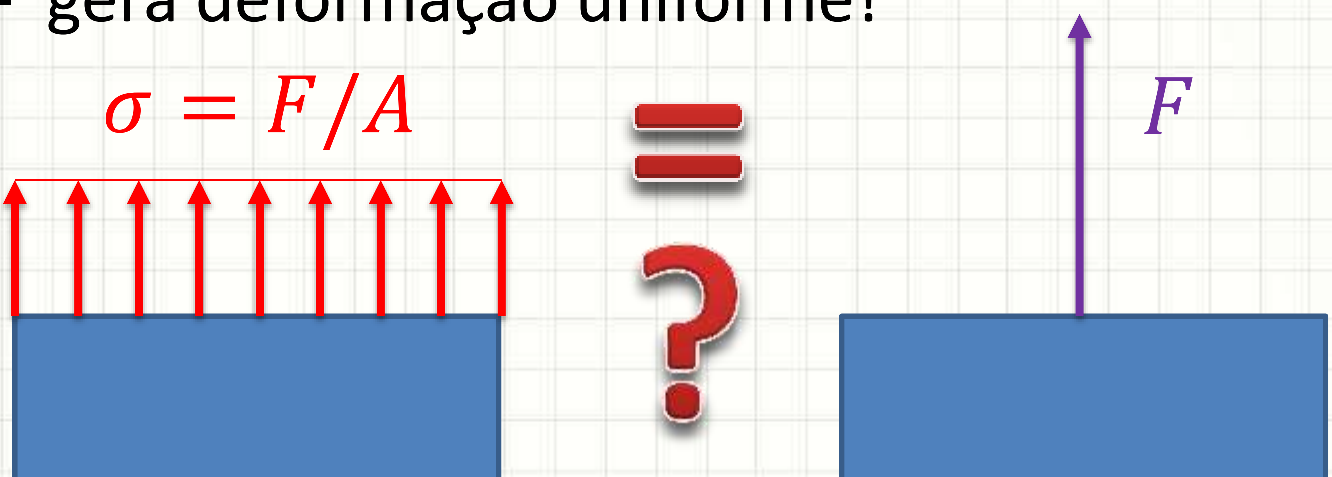
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = F/A$$

Pressupostos?

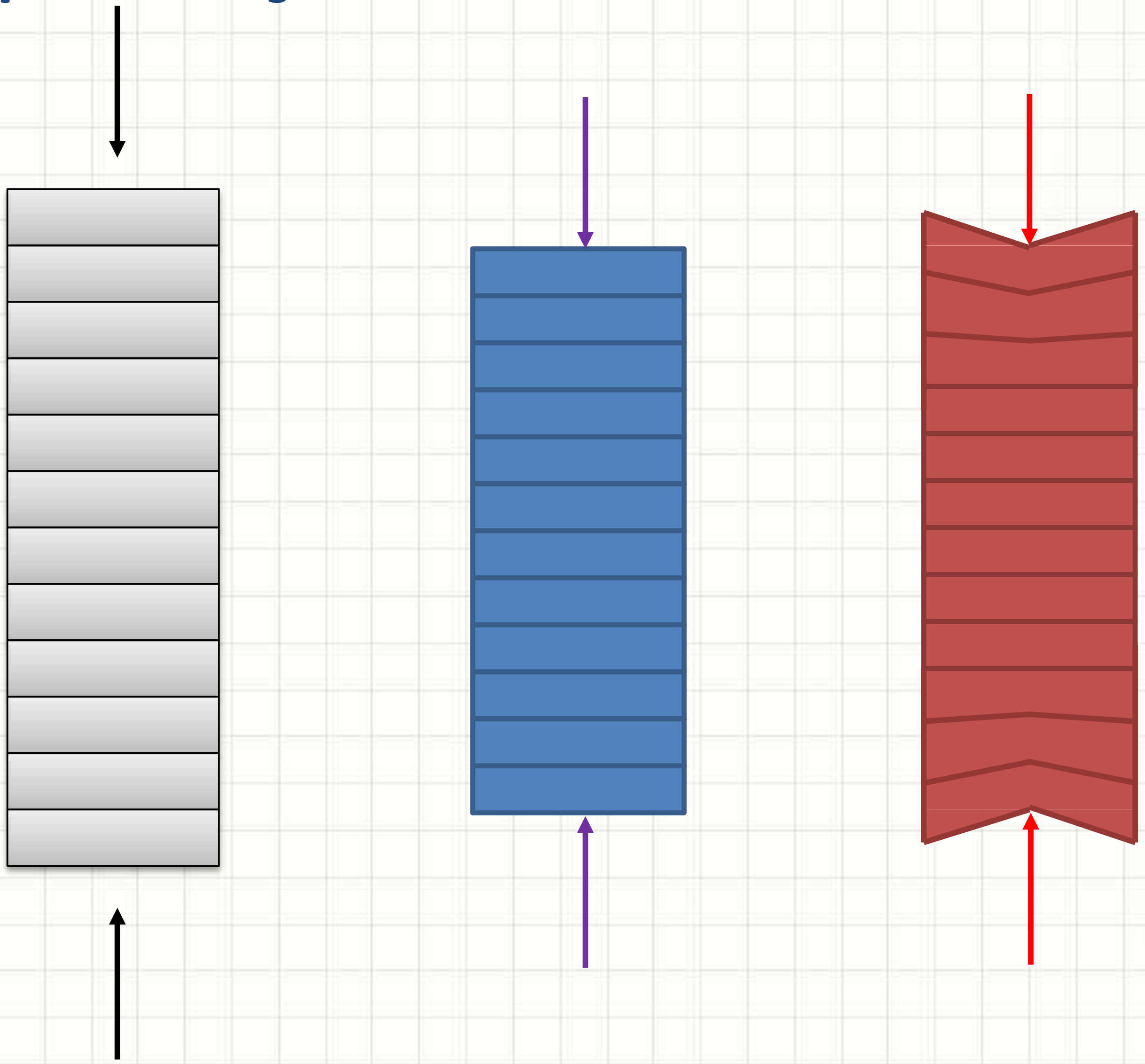
- A deformação é livre
- A área é constante
- Tensão é uniforme e...
  - gera deformação uniforme!

Vamos começar com esse último!



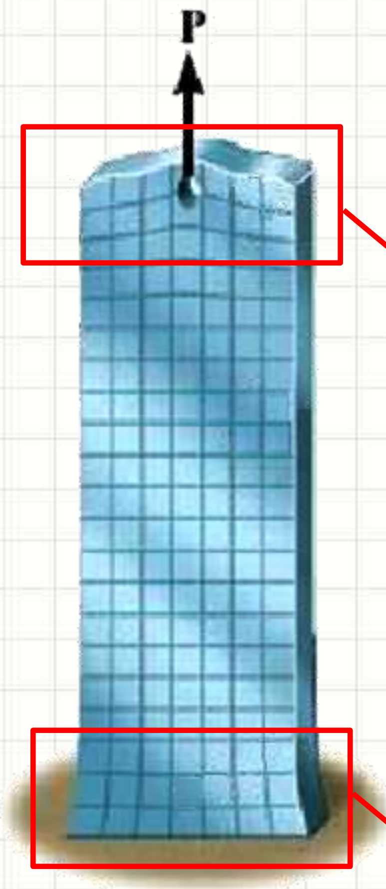
O Princípio de Saint-Venant

Simplificação x Realidade



Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga

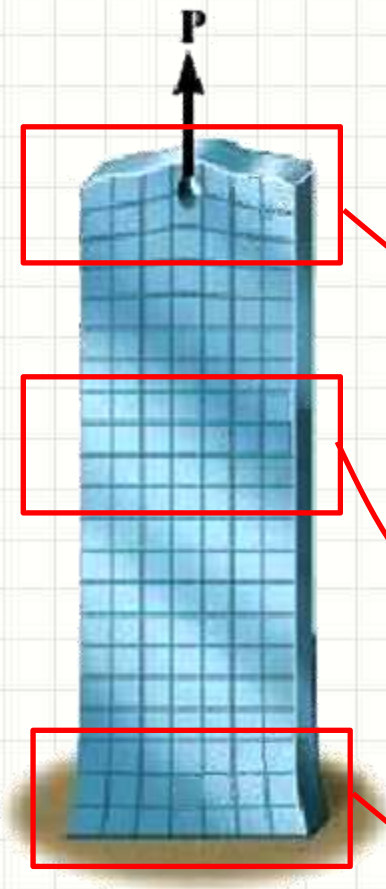


Distorção próxima à carga

Distorção próxima ao apoio (reação!)

Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga



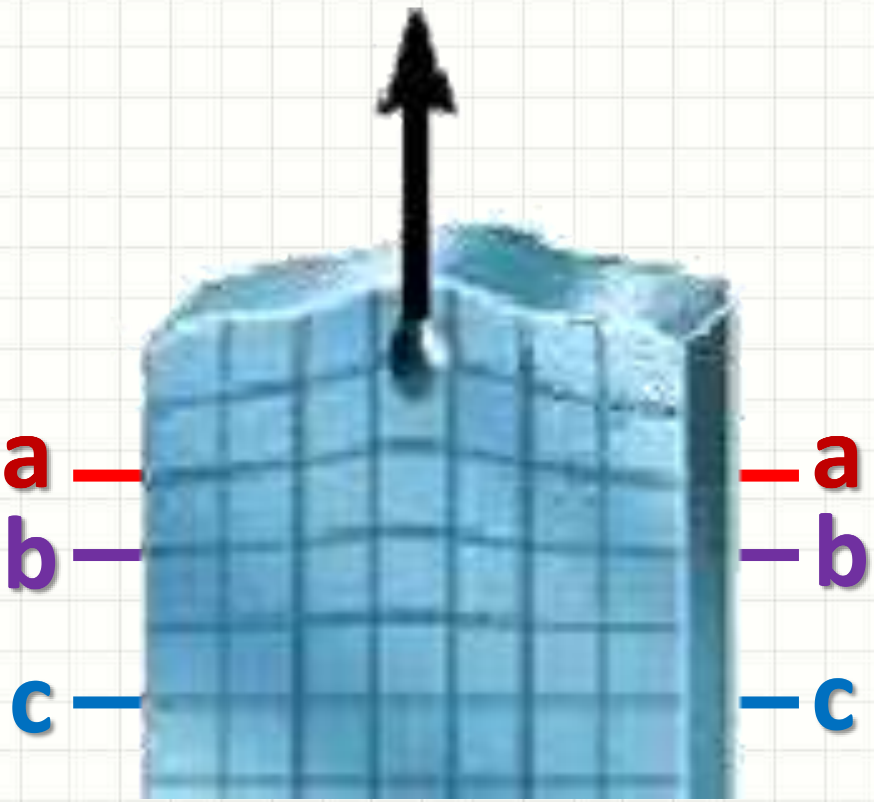
Distorção próxima à carga

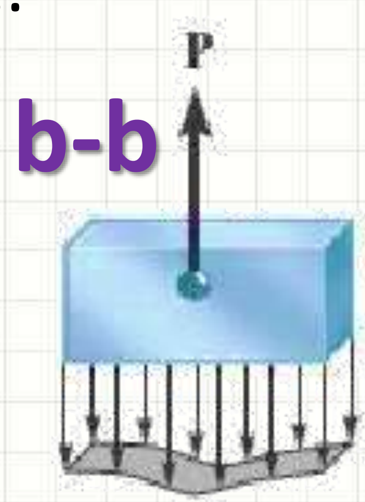
Longe das cargas e apoio...
Permanecem paralelas

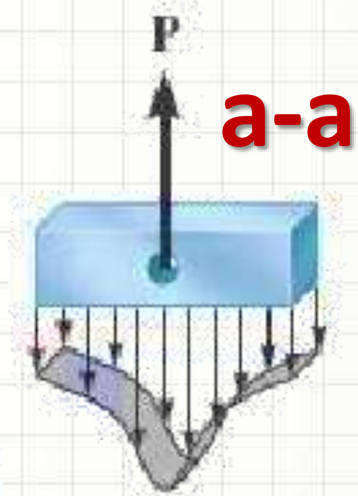
Distorção próxima ao apoio (reação!)

Princípio de Saint-Venant

- A tensão é igual em **a-a**, **b-b** e **c-c**?
  - A tensão se uniformiza...



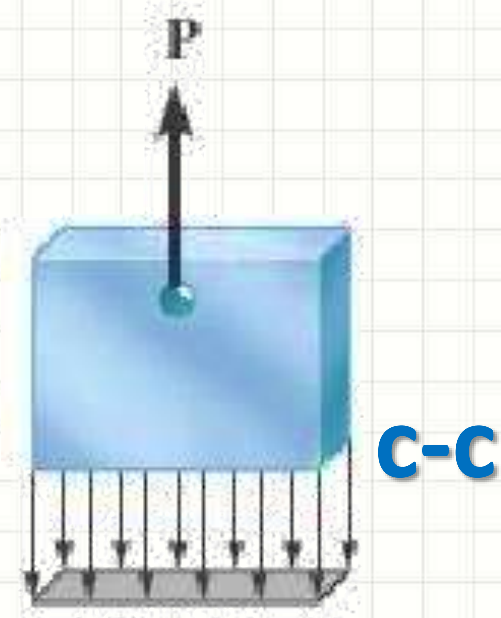




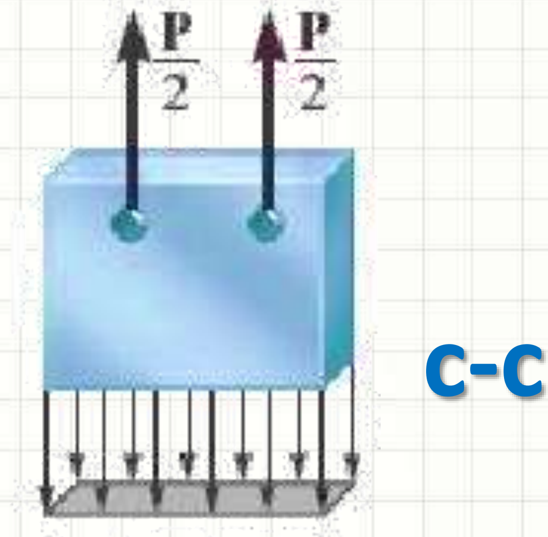
$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

Princípio de Saint-Venant

- Uniformização independe da distribuição da carga!
  - Depende da resultante!



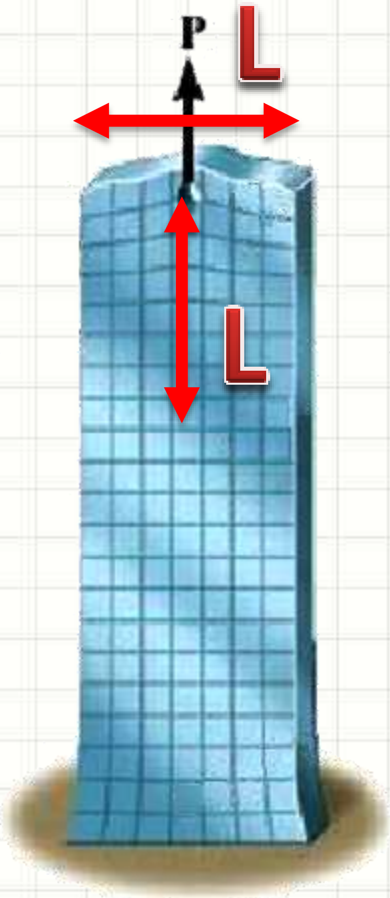
$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$



$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

Princípio de Saint-Venant

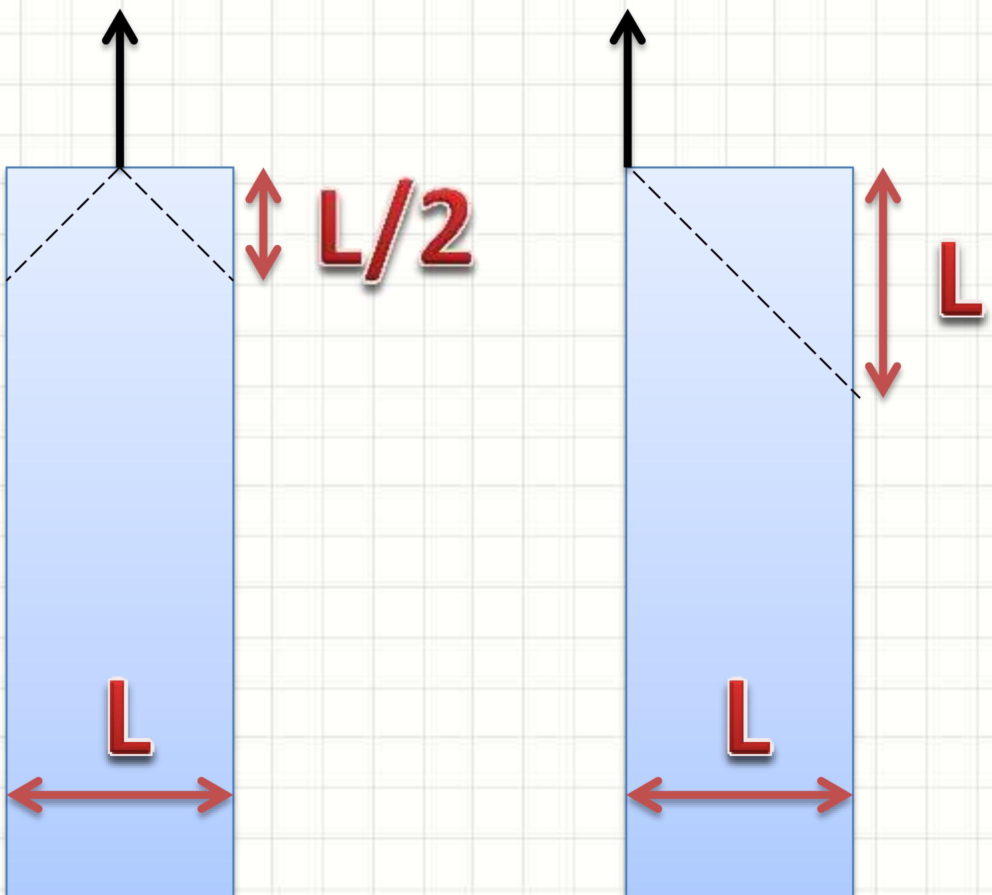
- Quão longe da aplicação se uniformiza?



L por quê?

Princípio de Saint-Venant

- O espraiamento é em 45º
- Mas não há pressuposição de posição!



Deformação Elástica de Corpo em Carga Axial

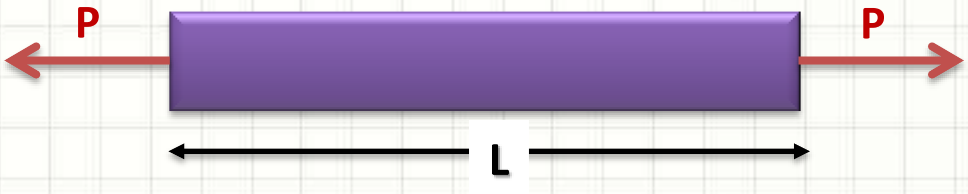
Deformação por Carga Axial

- Vimos que podemos usar as relações

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = P/A$$

$$\delta = L \cdot \epsilon$$



- Podemos reescrever

$$\delta = L \cdot \epsilon$$

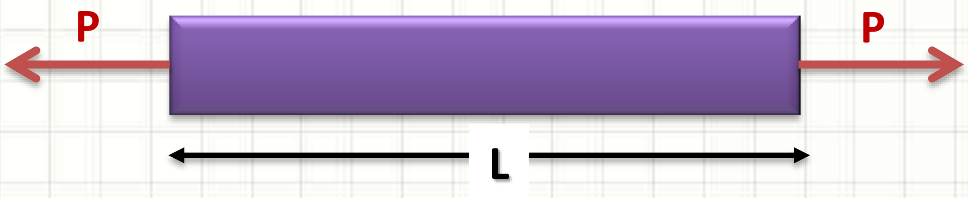
- Como

$$\epsilon = \delta/L$$

Deformação por Carga Axial

- Vimos que podemos usar as relações

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$
$$\sigma = P/A$$
$$\epsilon = \delta/L$$



- Agora, juntemos as equações

$$\frac{P}{A} = E \cdot \epsilon$$

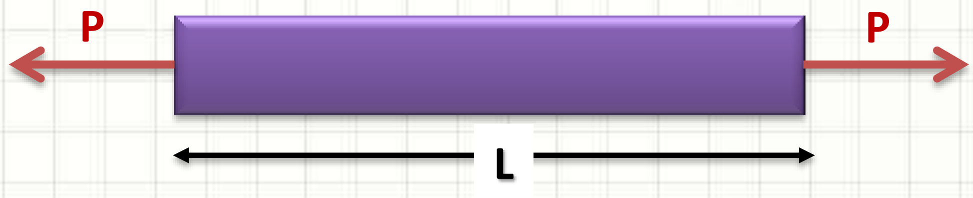
Deformação por Carga Axial

- Vimos que podemos usar as relações

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = P/A$$

$$\epsilon = \delta/L$$

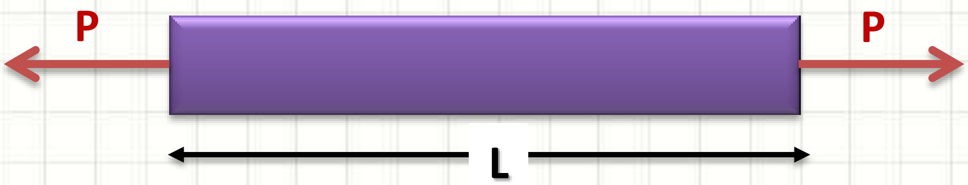


- Agora, juntemos as equações

$$\frac{P}{A} = E \cdot \epsilon \quad \rightarrow \quad \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

Deformação por Carga Axial

- Reorganizando a equação: isolar o **δ**



$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \rightarrow \frac{P.L}{A.E} = \delta$$

$$\boldsymbol{\delta = \frac{P.L}{E.A}}$$

Anotem!

Exercício: Alongamento da Barra

A = 0,2m^2
E = 30GPa

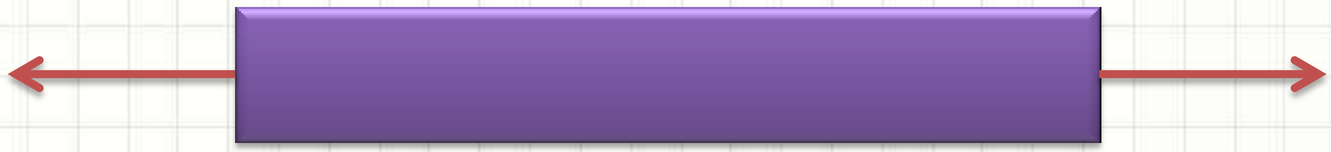
$$\delta = \frac{P.L}{E.A}$$

Deformação Elástica de Barra não Uniforme em Carga Axial

Deformação por Carga Axial

- Deformação com área constante

$$\delta = \frac{P.L}{E.A}$$

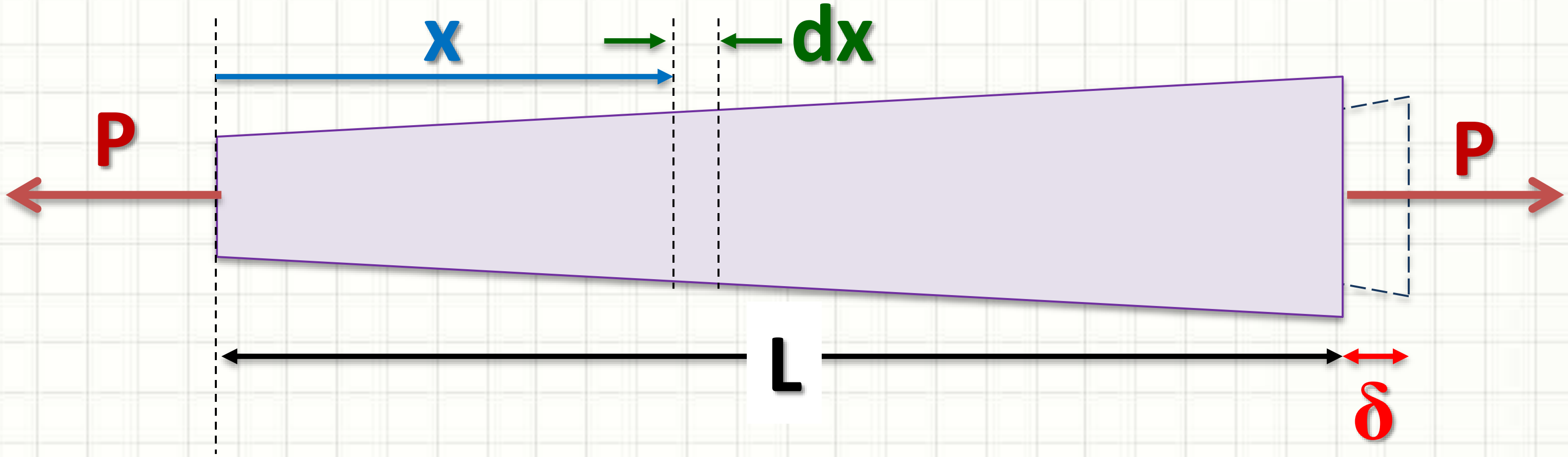


- Será que podemos superar essa limitação?

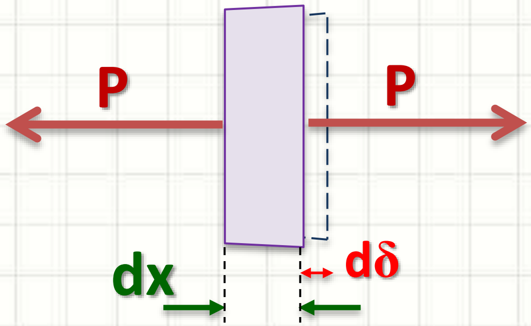
O que fazer quando a área varia?

Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial

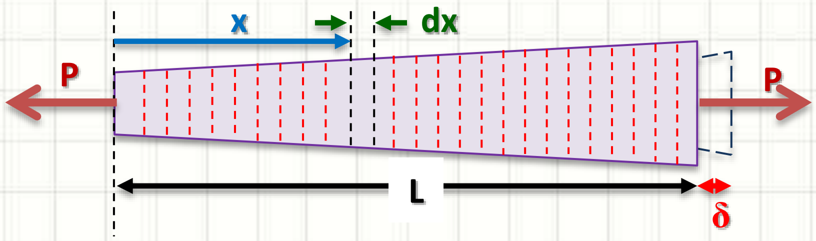


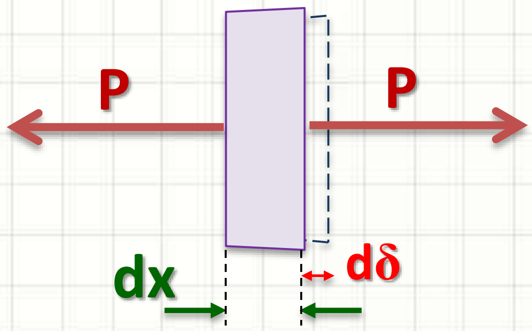
- Como calcular **δ** ? **A=A(x)**
- Vamos calcular a deformação no elemento **dx**



Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial



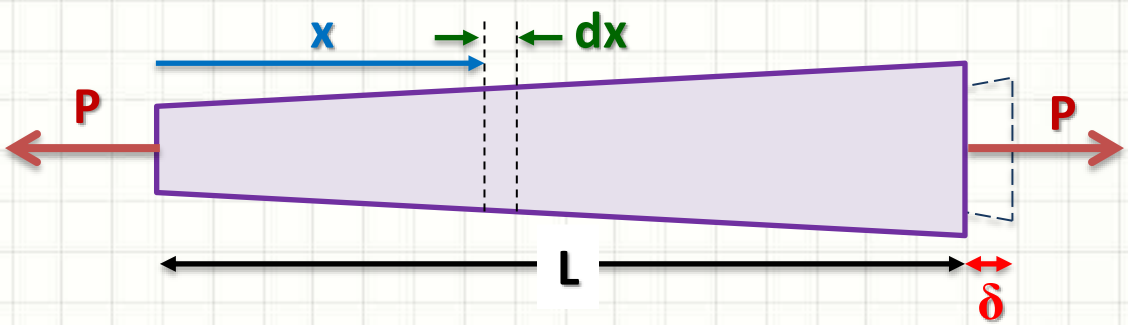


- Como calcular **dδ** ? **A ~ cte.** $\delta = \frac{P.L}{E.A}$?

$$d\delta = \frac{P.\mathrm{dx}}{E.A(x)} \rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P.\mathrm{dx}}{E.A(x)}$$

Deformação por Carga Axial

- Ou seja, para essa viga...



$$\delta = \int_0^L \frac{P.\,dx}{E.\,A(x)} \rightarrow \delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

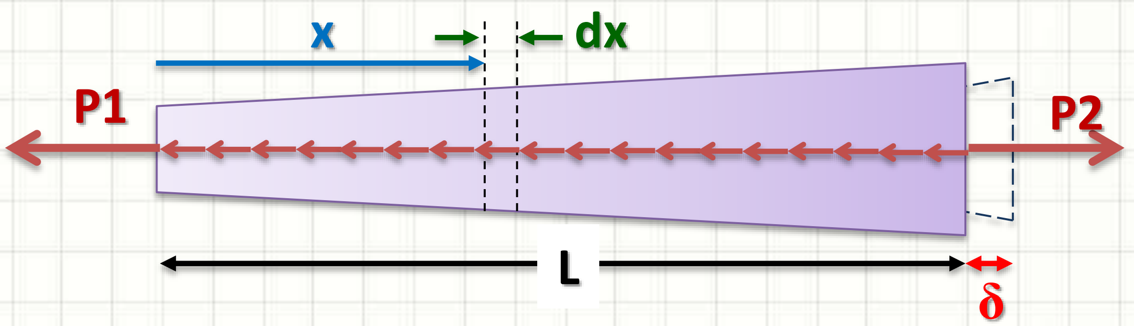
- Mas... E se a área fosse constante?

Compare!

$$\delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A} \rightarrow \delta = \frac{P}{E.\,A}\int_0^L dx \rightarrow \delta = \frac{P.\,L}{E.\,A}$$

Deformação por Carga Axial

- Dá para generalizar ainda mais?

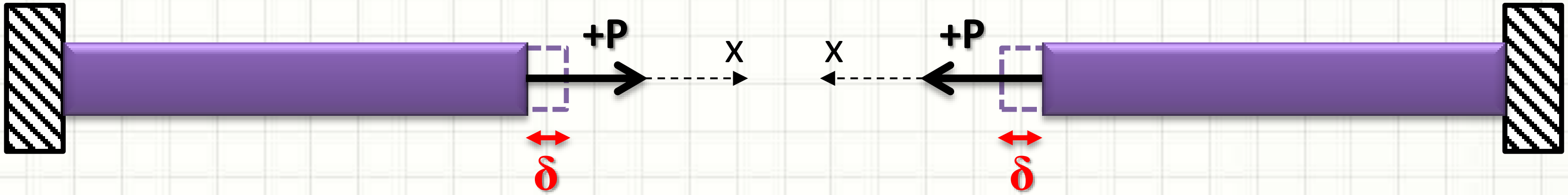


$$\delta = \int_0^L \frac{P.\,\mathrm{dx}}{E.\,A(x)} \rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P(x).\,\mathrm{dx}}{E(x).\,A(x)}$$

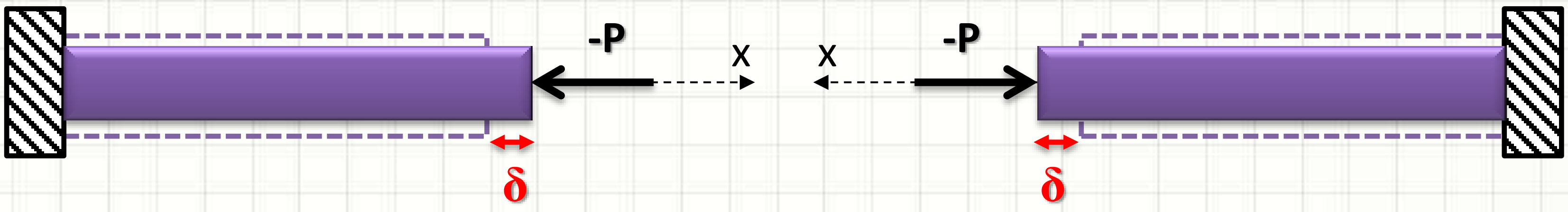
Fórmula Geral

Deformação por Carga Axial

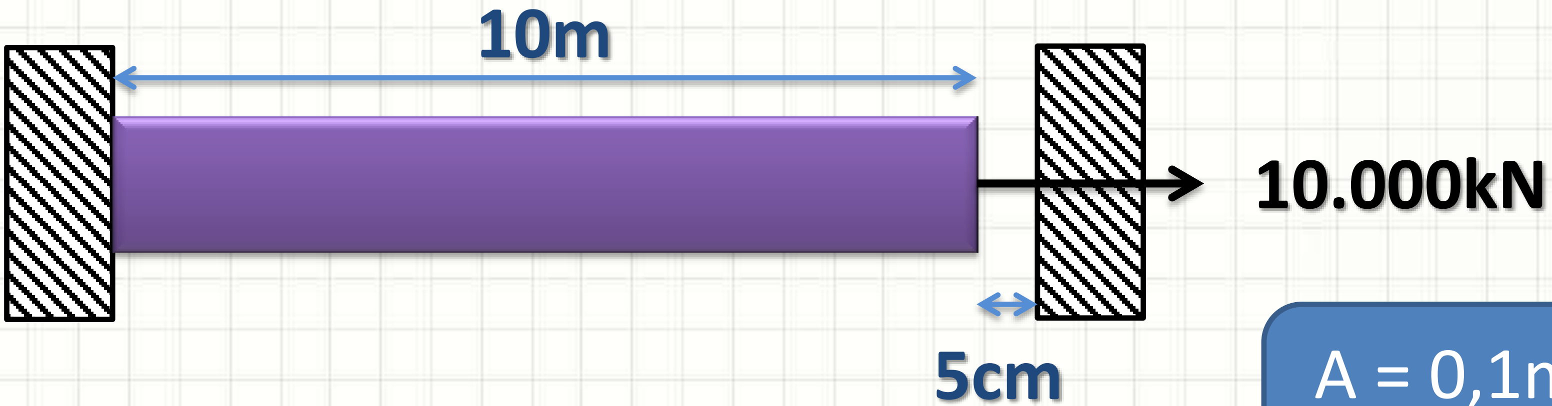
- Convenção de Sinais
- Trações → Alongamentos → +



- Compressões → Contrações → -



Exemplo – O vão é suficiente?



A = 0,1m²
E = 50GPa

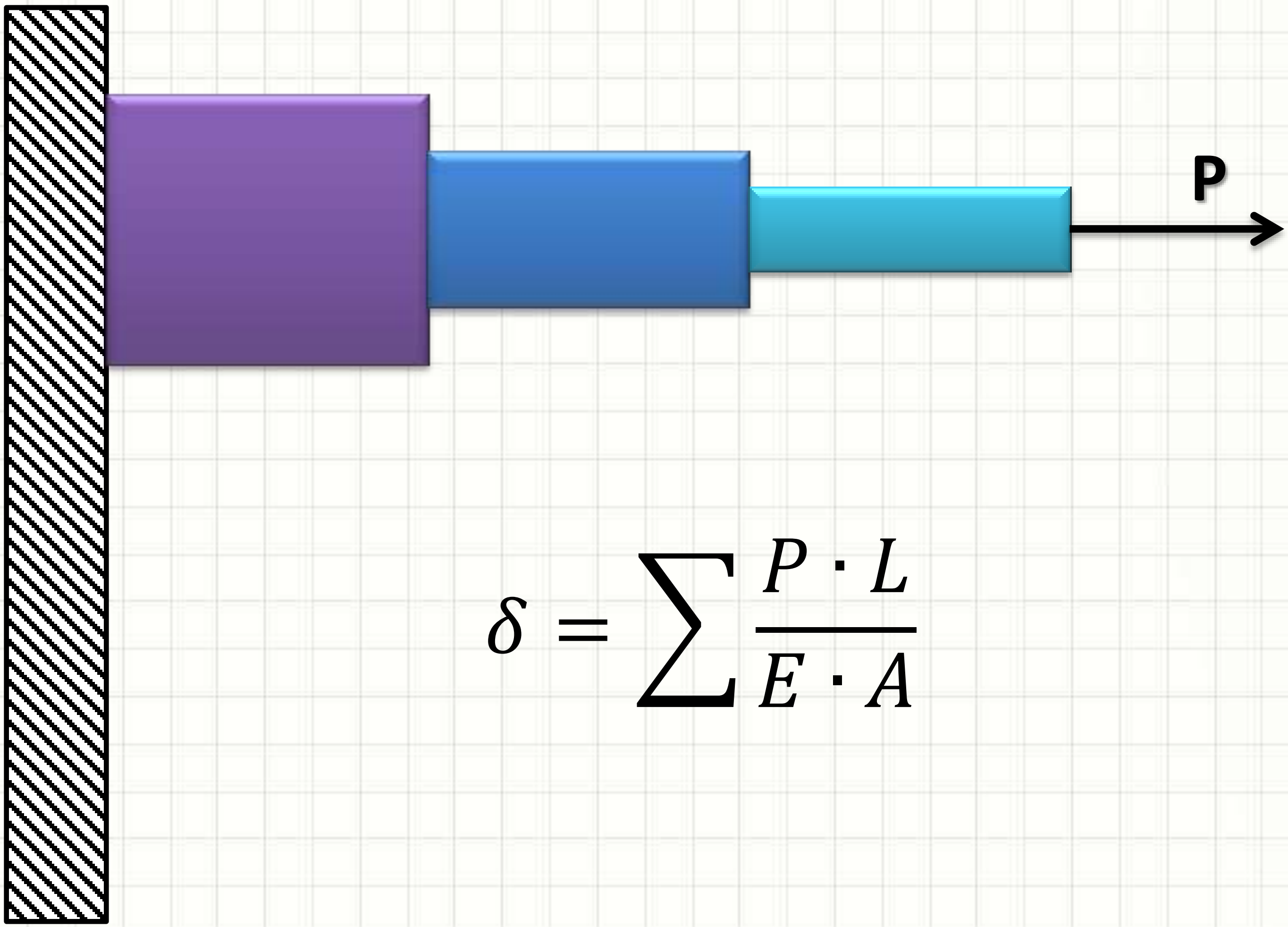
- Se o espaço for suficiente...

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{10^7 \cdot 10}{5.10^{10} \cdot 10^{-1}} = \frac{10^8}{5.10^9}$$

$$\boldsymbol{\delta = 2.10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

Deformação por Carga Axial

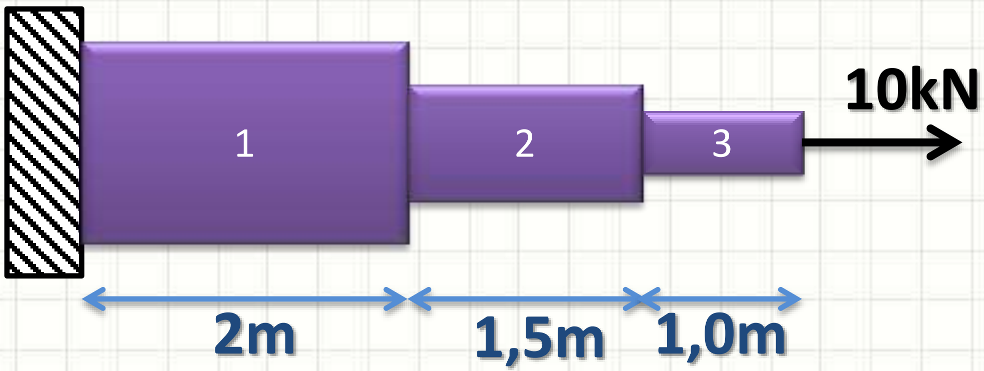
- Barras compostas de várias seções constantes



$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Exercício

- Determine a deformação total



$A_1 = 1m^2$

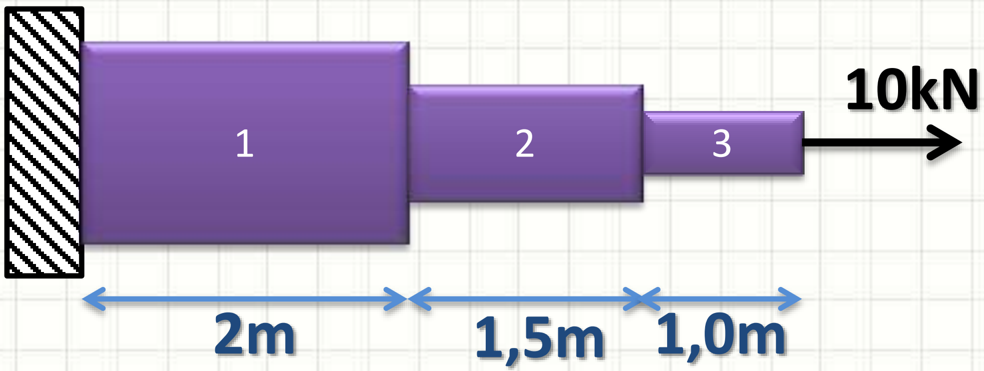
$A_2 = 0{,}8m^2$

$A_3 = 0{,}5m^2$

$E_1 = E_2 = E_3\ 50GPa$

Exercício

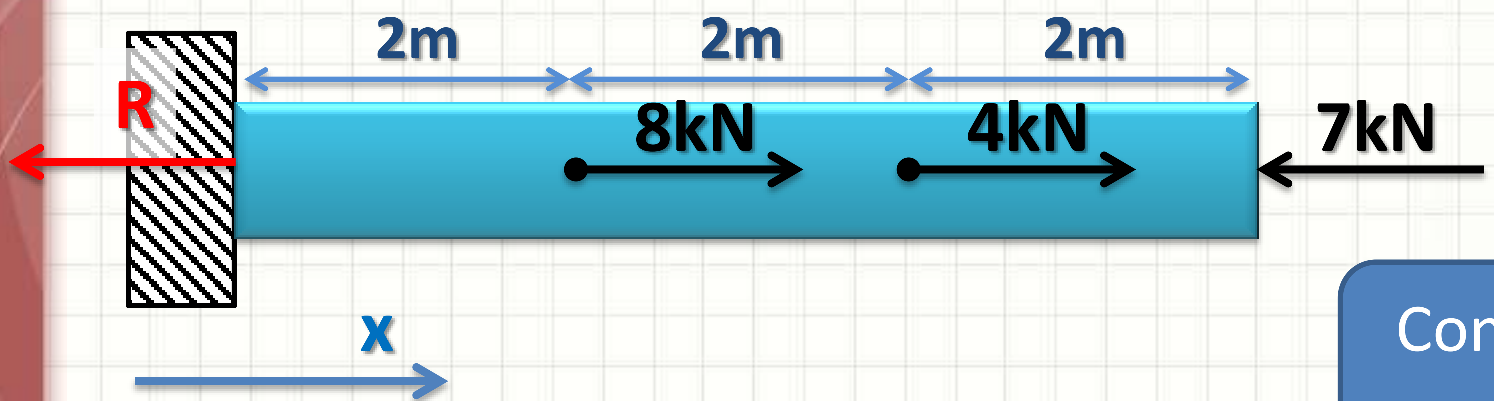
- Determine a deformação total



$A_1 = 1m^2$
$A_2 = 0,8m^2$
$A_3 = 0,5m^2$
$E_1 = E_2 = E_3$ 50GPa

1. Reações
2. Alongamentos parciais
3. Alongamento total

Várias Cargas Axiais



Conhecidos:
E, A

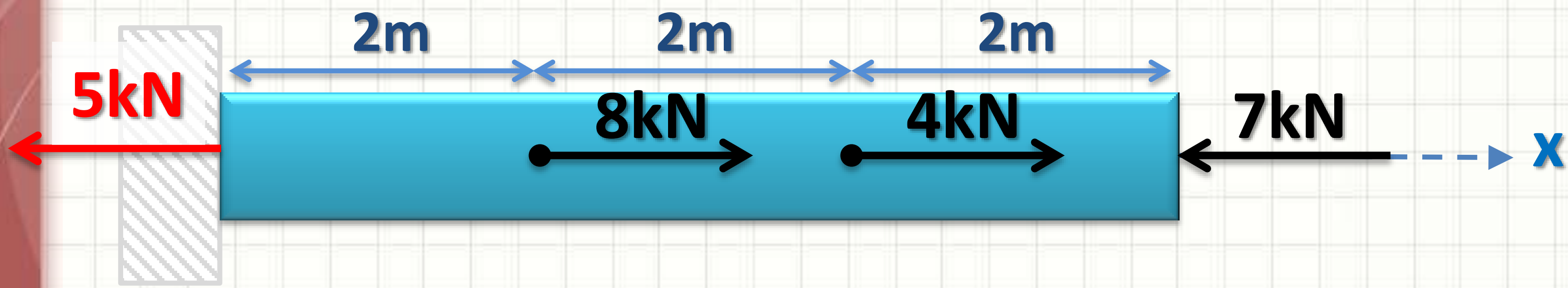
- A reação de apoio é...?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R + 8 + 4 - 7 = 0 \Rightarrow$$ **R = 5kN**

- Ok, mas e a deformação da barra? $\boldsymbol{\delta} = \dfrac{\boldsymbol{P.L}}{\boldsymbol{E.A}}$?

Várias Cargas Axiais

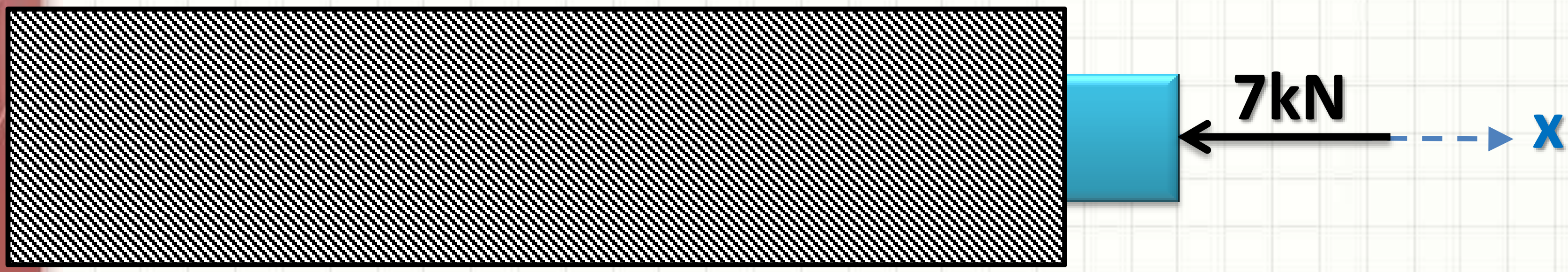


- Qual é o “P”?

$$\delta = \frac{P.L}{E.A}$$

- Dependerá da região da barra!

Várias Cargas Axiais



- Qual é o “P”?
- Suponhamos que a parede venha até aqui...
  - Qual é a carga que chega no engastamento?

-7kN

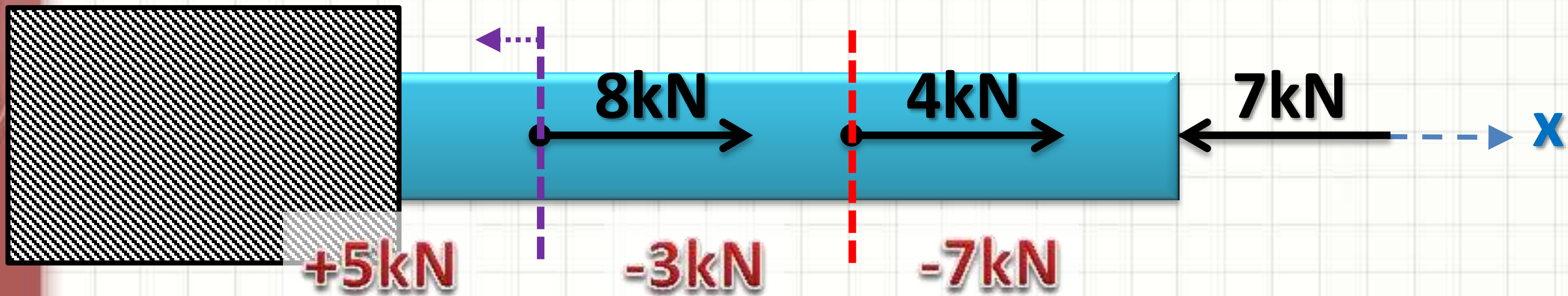
Várias Cargas Axiais

- Qual é o "P"?
- E se, agora, considerarmos a parede até aqui?
  - Qual é a carga que chega no engastamento?

$$4kN - 7kN = -3kN$$

- A partir de onde passa de -7kN para -3kN?

Várias Cargas Axiais

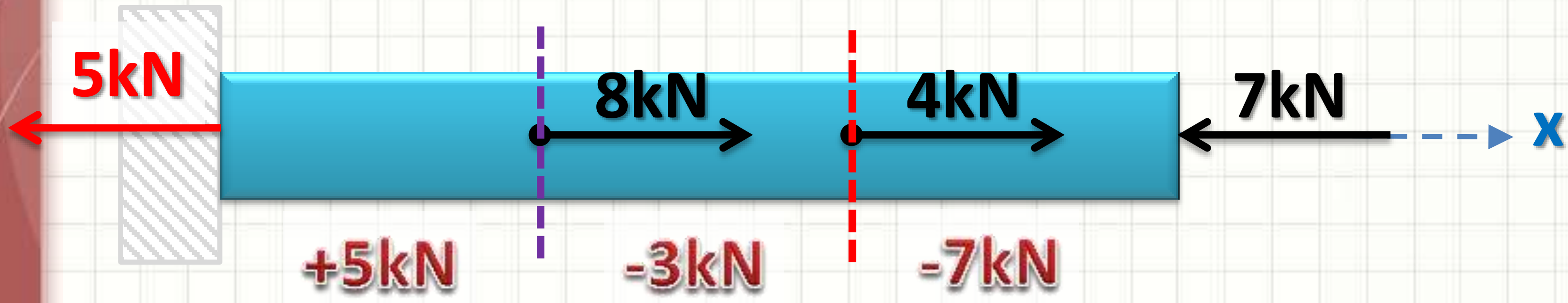


- Qual é o “P”?
- Mudando a parede agora até aqui...
  - Qual é a carga que chega no engastamento?

8kN + 4kN - 7kN = +5kN

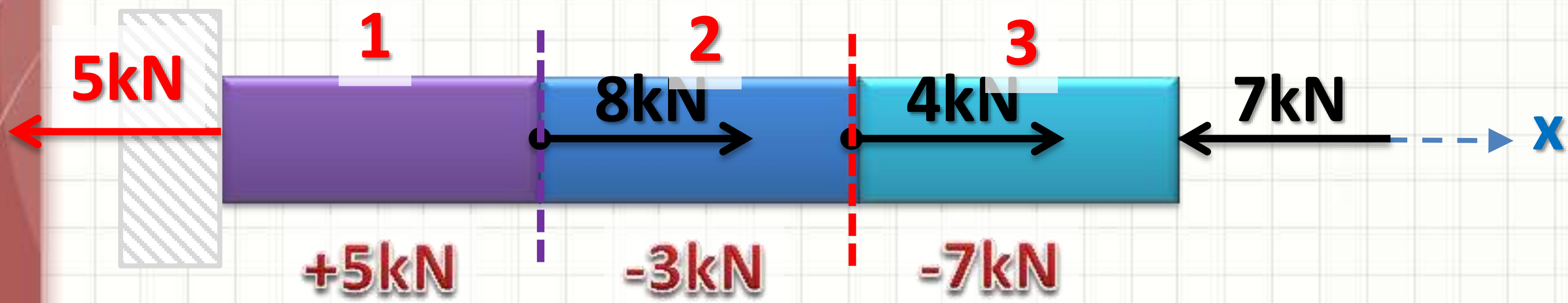
- A partir de onde passa de -3kN para +5kN?

Várias Cargas Axiais

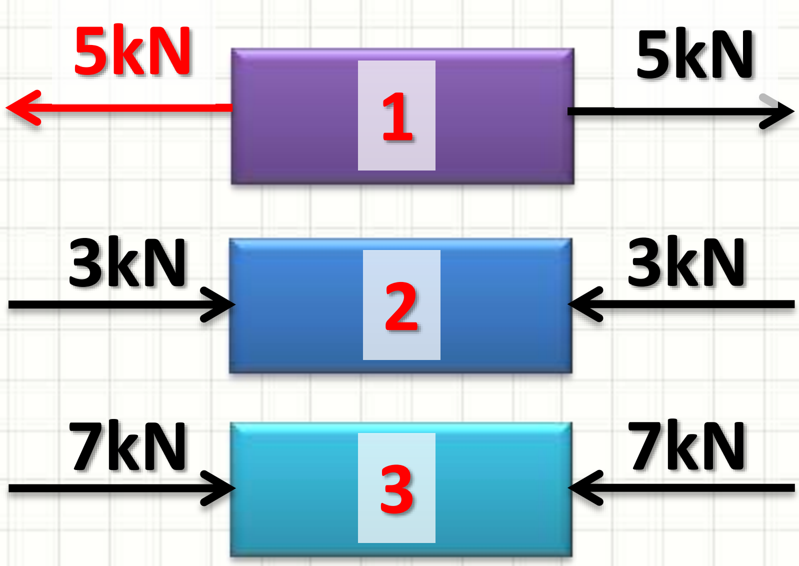


- Na prática, então, há um P para cada trecho

Várias Cargas Axiais



- Na prática, então, há um P para cada trecho



$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E \cdot A} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E \cdot A} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E \cdot A}$$

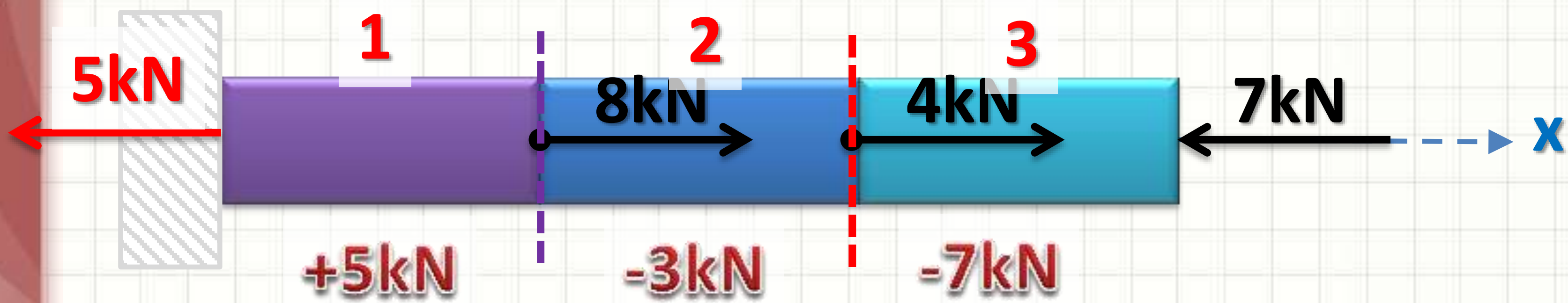
$P_1 = 5\text{kN}$ $P_2 = -3\text{kN}$ $P_3 = -7\text{kN}$

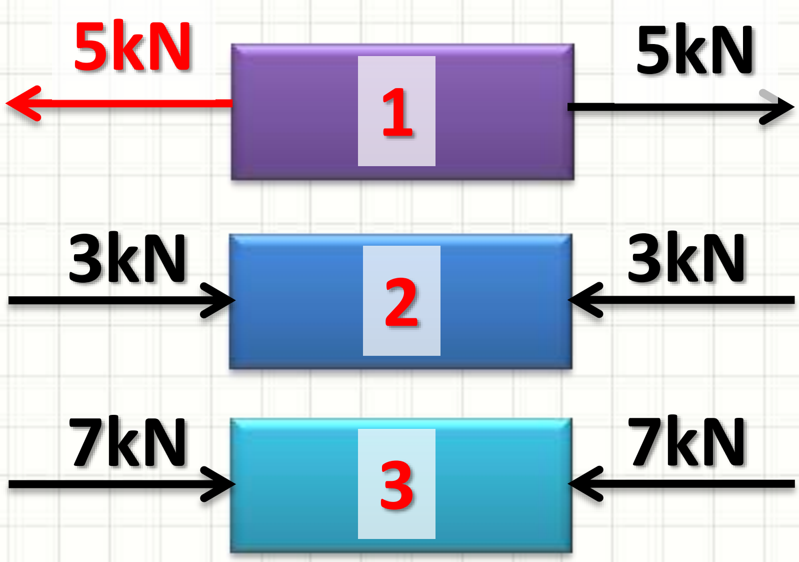
Esforços Solicitantes em cada Trecho

Diagrama de Esforços Normais

Diagrama de Esforços Solicitantes

- No exemplo anterior, vimos:





Será que não tem um jeito **direto** de indicar os esforços reais em cada trecho?

Diagrama de Esforços Normais

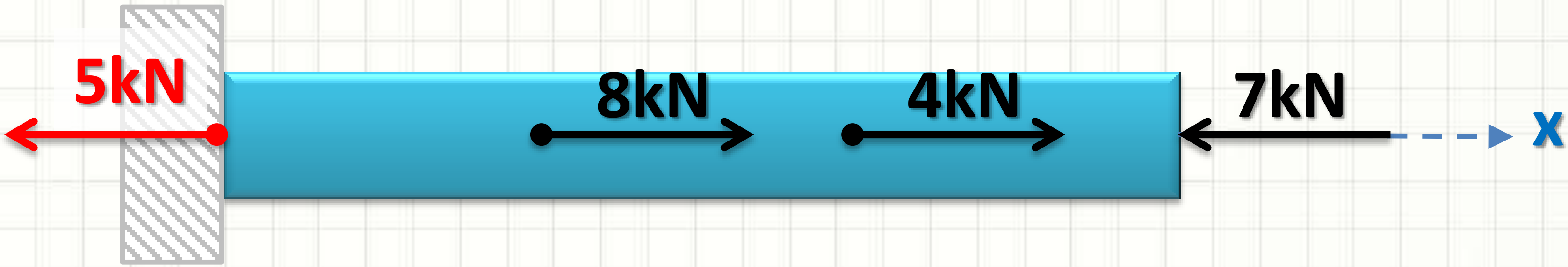


Diagrama de Esforços Normais

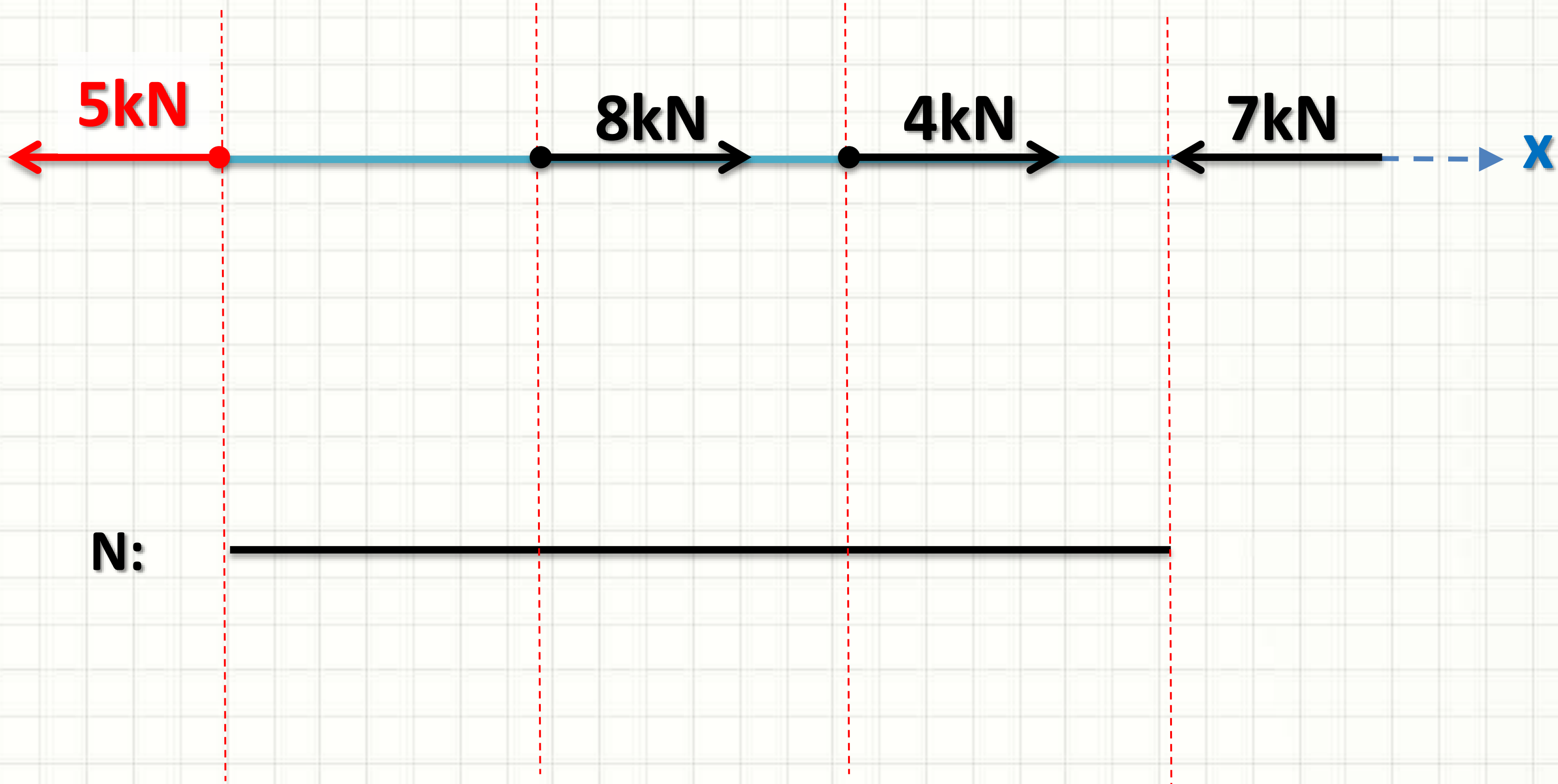


Diagrama de Esforços Normais

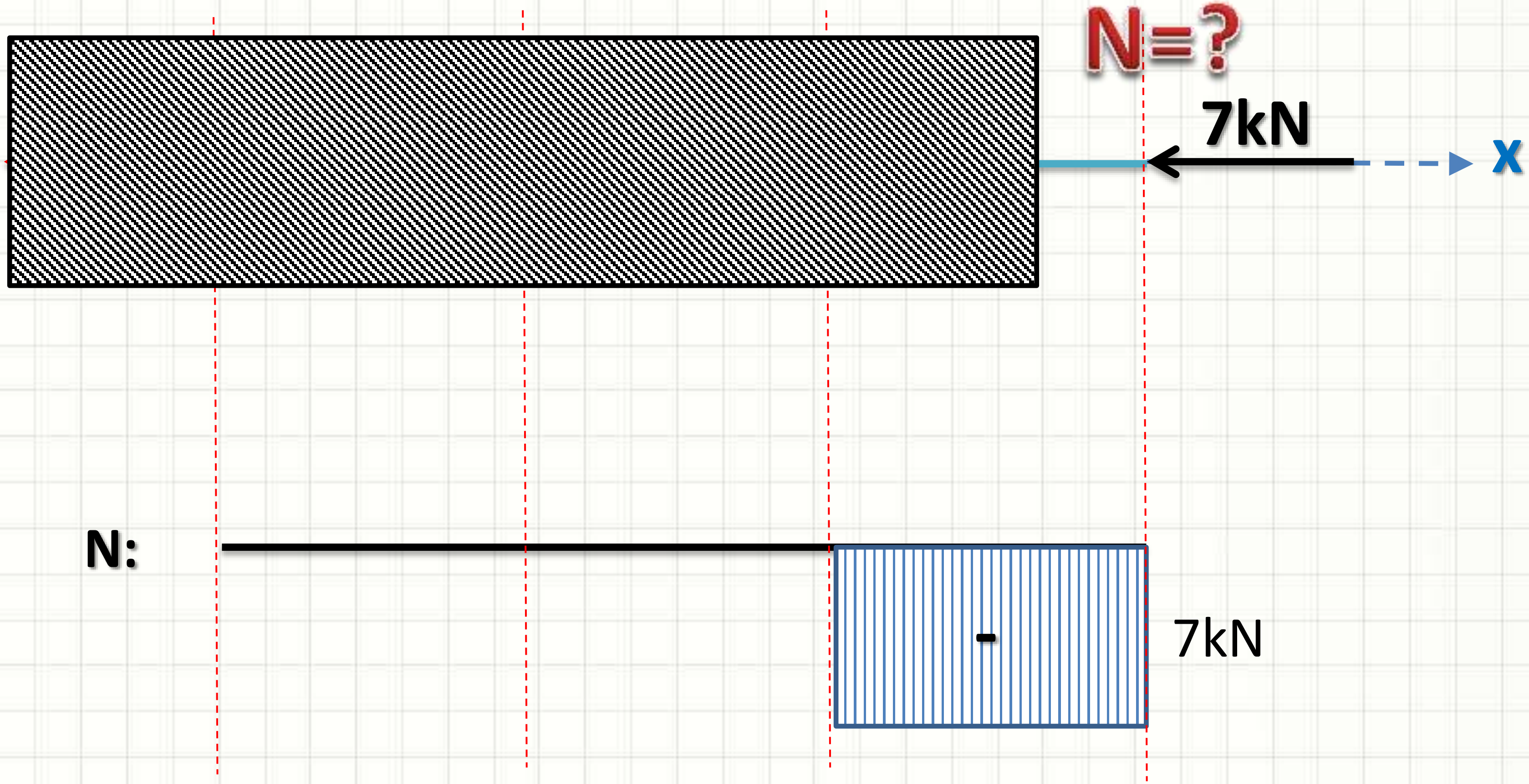


Diagrama de Esforços Normais

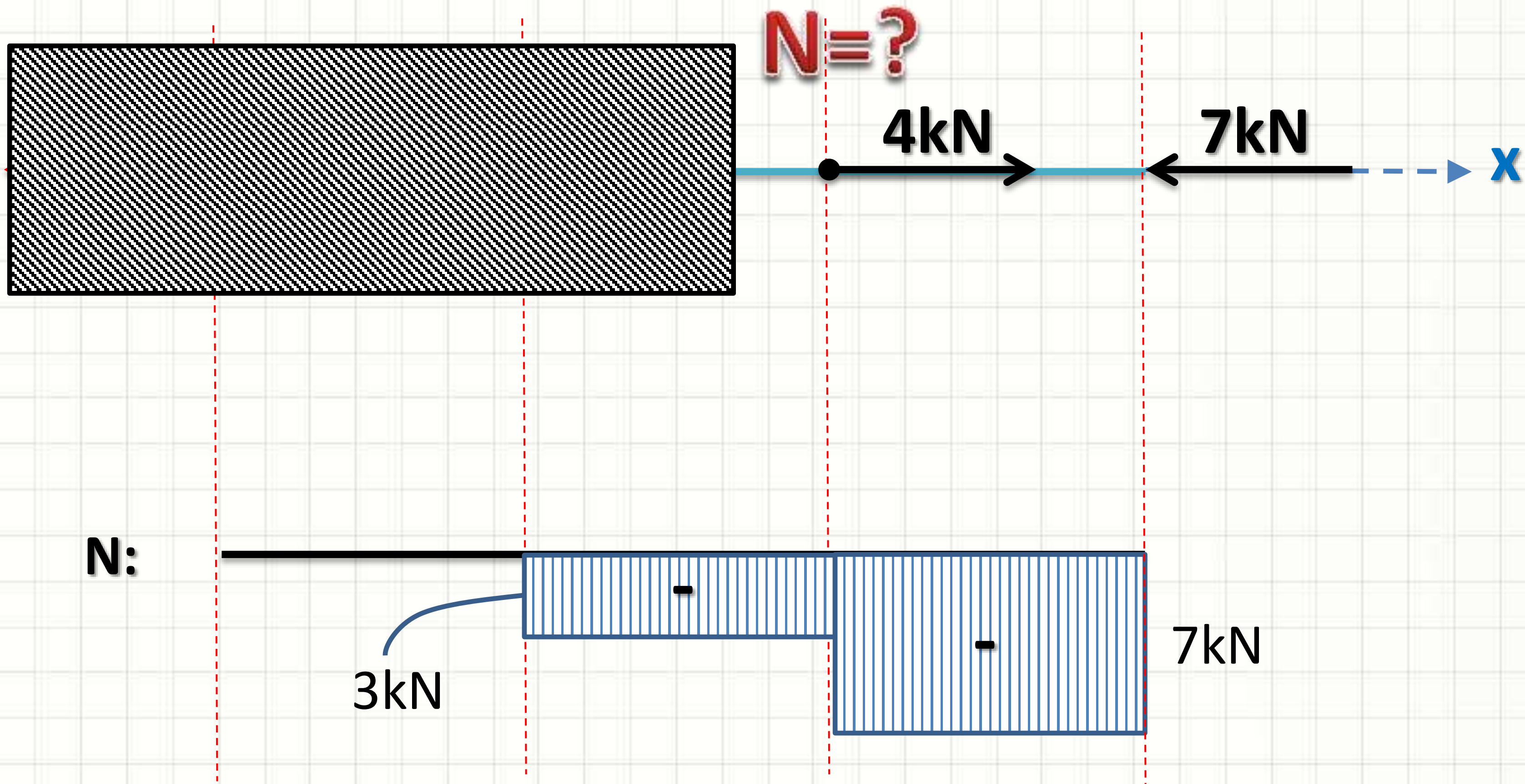


Diagrama de Esforços Normais

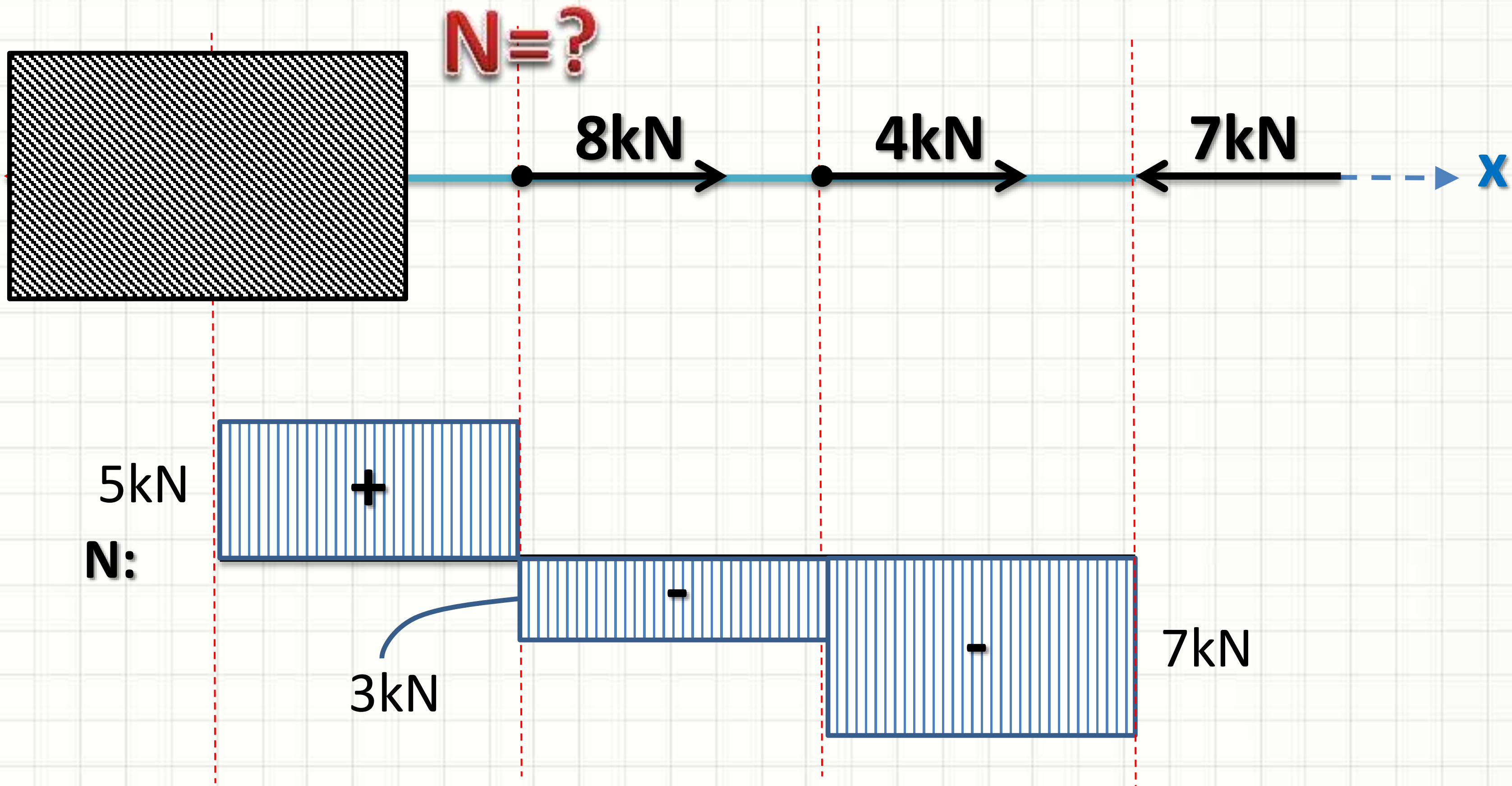
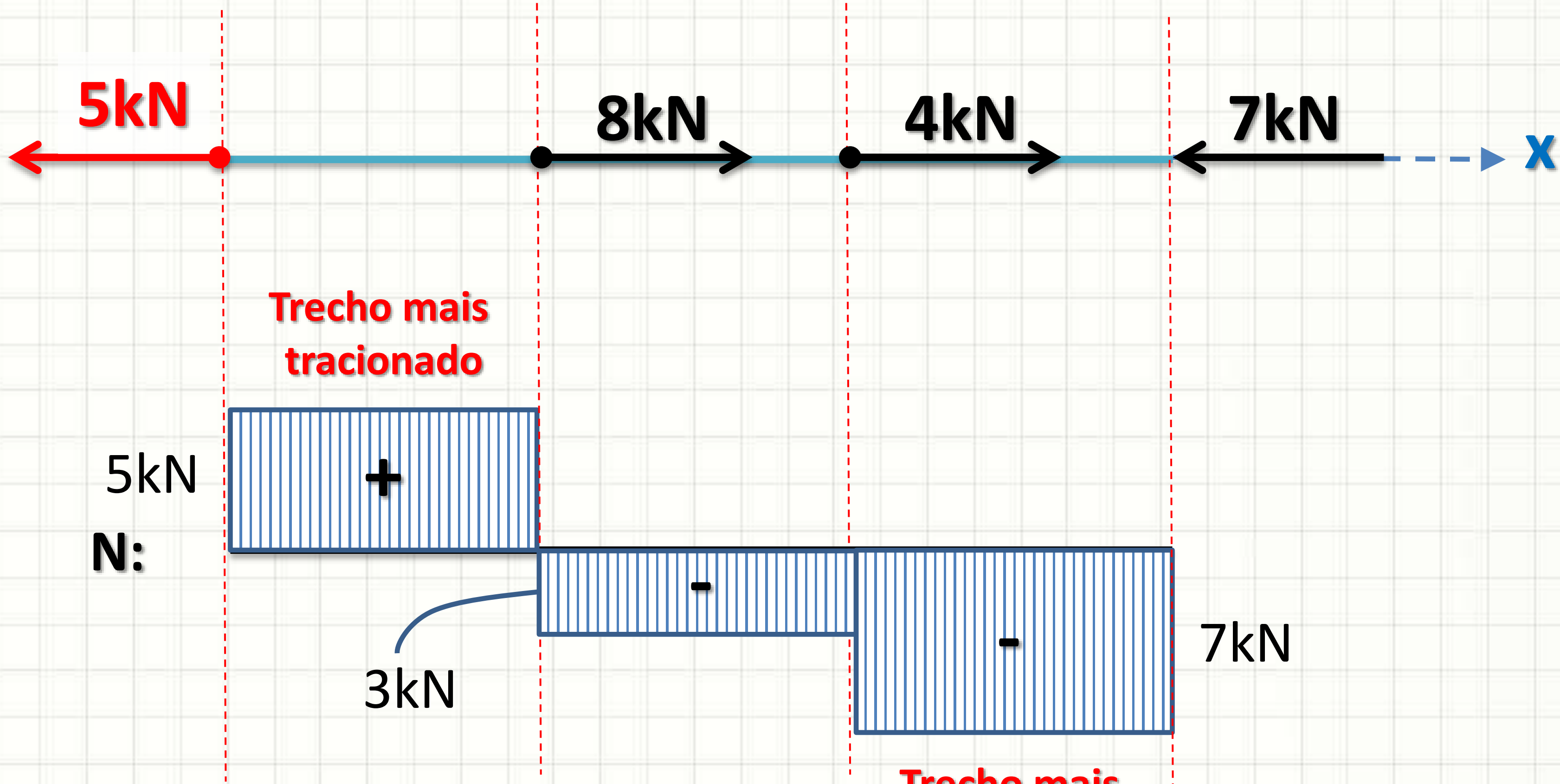
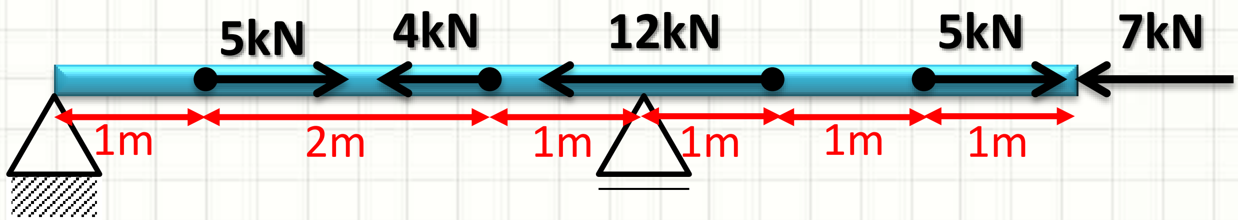


Diagrama de Esforços Normais



$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E \cdot A} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E \cdot A} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E \cdot A}$$

Exercício: Diagrama de Normal



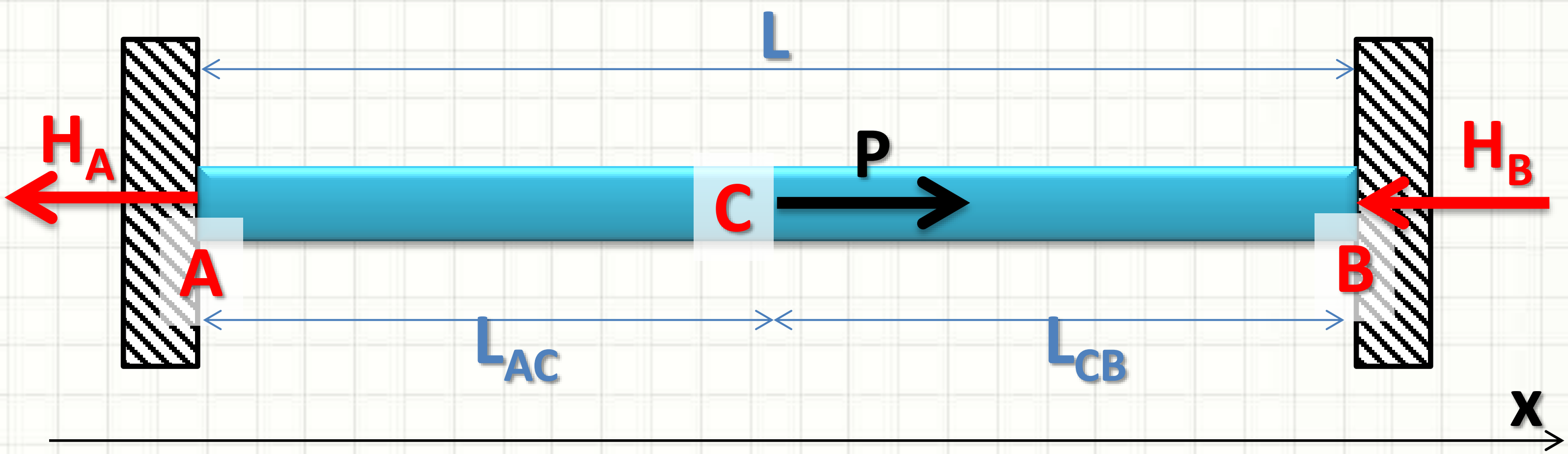
- Etapas
  1. Corpo Livre (identificar reações)
  2. Determinar o equilíbrio estático/reações
  3. Traçado do Diagrama

Pausa para o Café!

Elementos Estaticamente Indeterminados sob Carga Axial

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



- Reações H_A e H_B ... ?

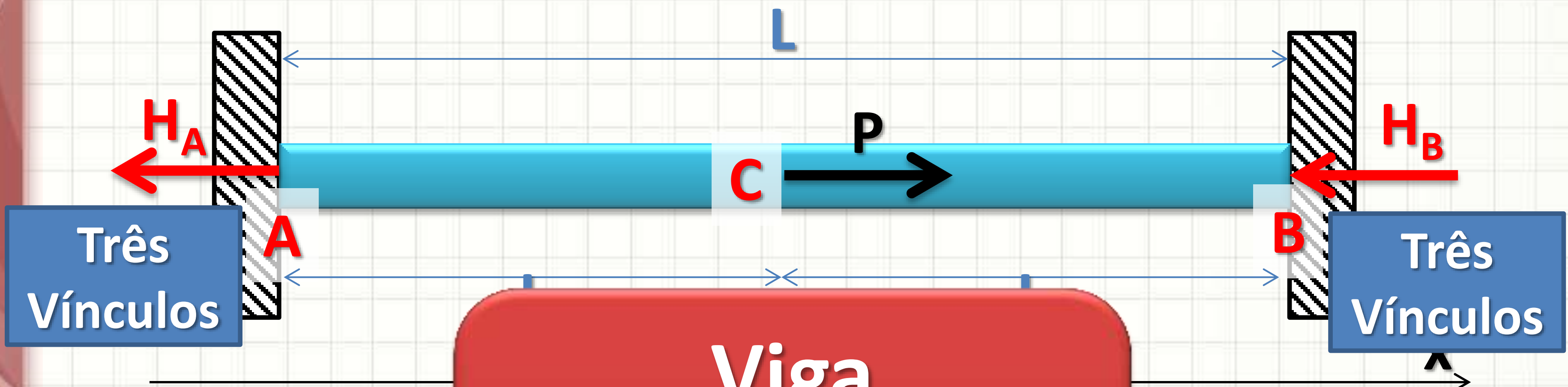
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-H_A + P - H_B = 0 \Rightarrow \mathbf{H_A + H_B = P}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow ? \qquad \sum M = 0 \Rightarrow ?$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



- Reações H ⇒

Viga Estaticamente Indeterminada

$H_A + H_B = P$

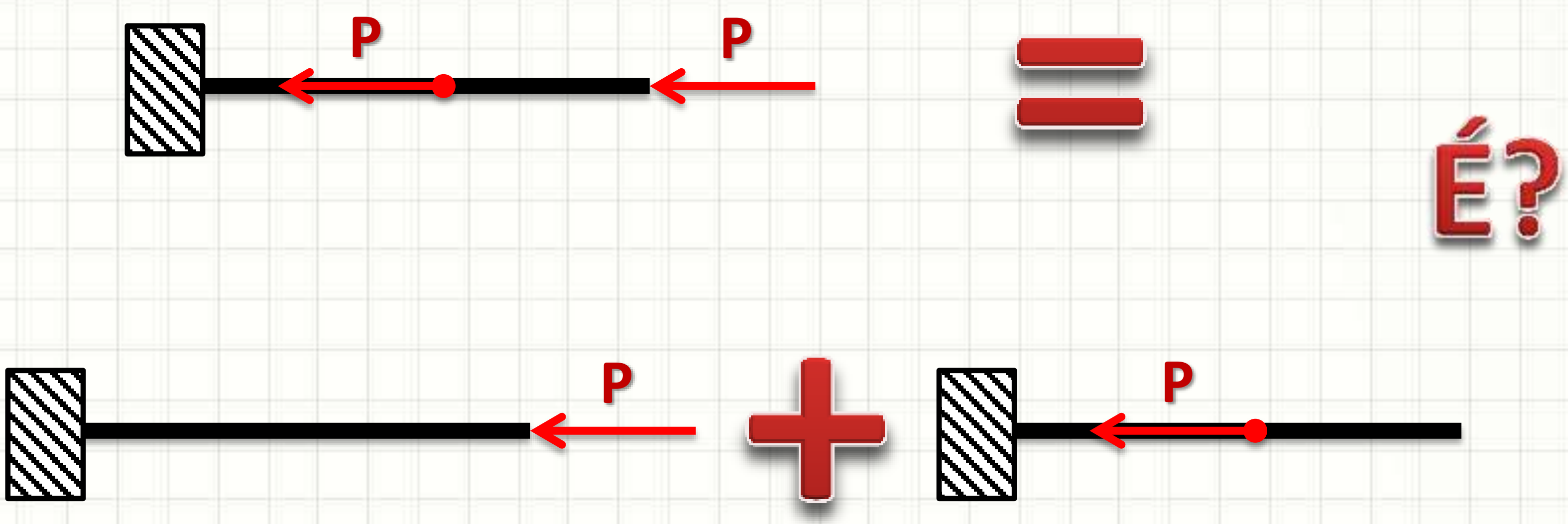
$\sum F_y =$ ⇒ ?

Como superar essa situação?

Superposição de Efeitos

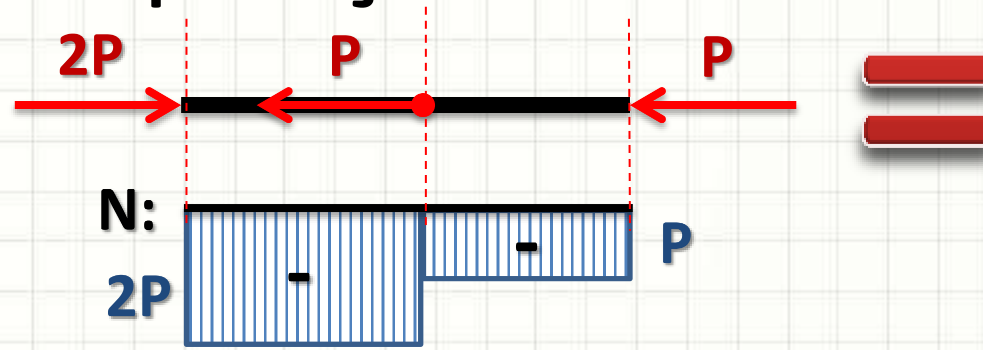
Superposição de Efeitos

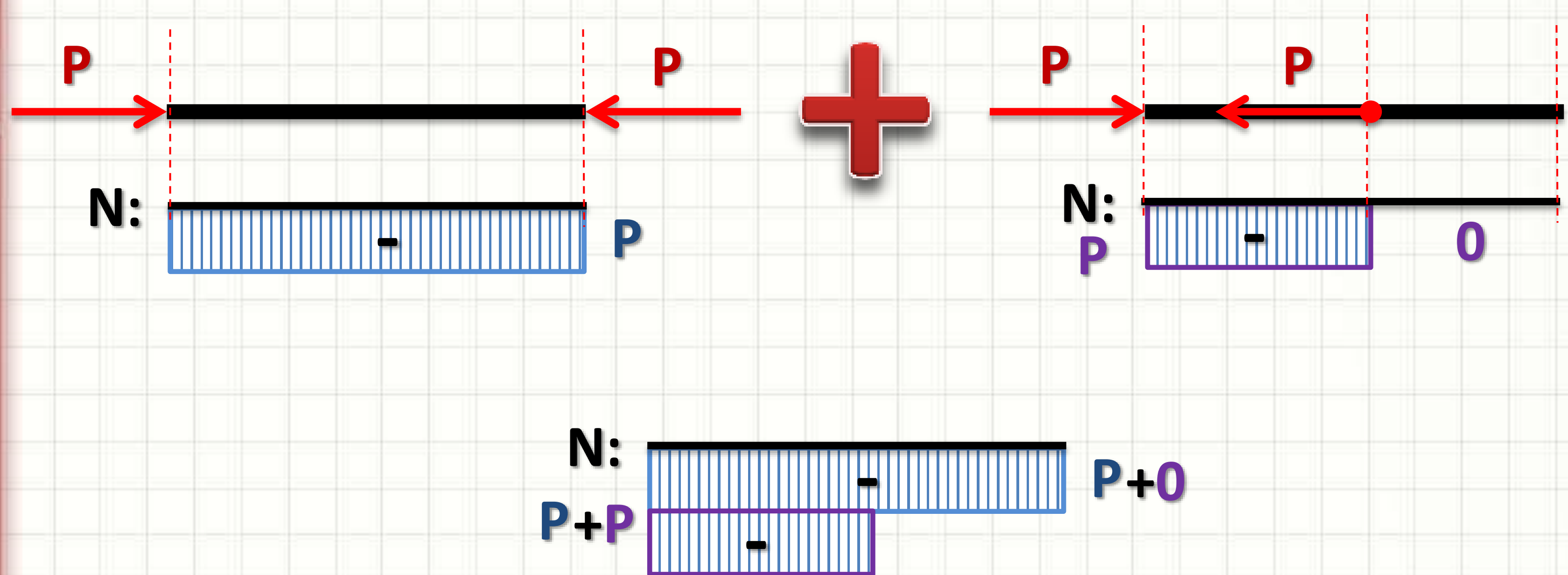
- Princípio da Superposição de Efeitos
  - Subdividir o carregamento em componentes
  - Calcular os efeitos em separado
  - Somar os resultados



Exemplo: Superposição de Efeitos

- Diagramas



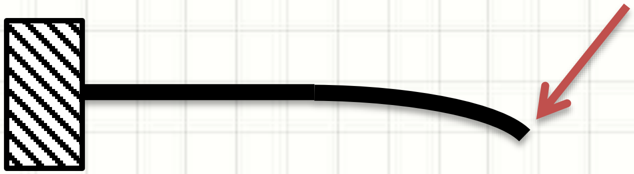


Superposição de Efeitos: Condições

- Carga P: relação linear com σ ou δ
  - Exemplos:

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \delta = \frac{P.L}{E.A}$$

- Não pode alterar a geometria do elemento

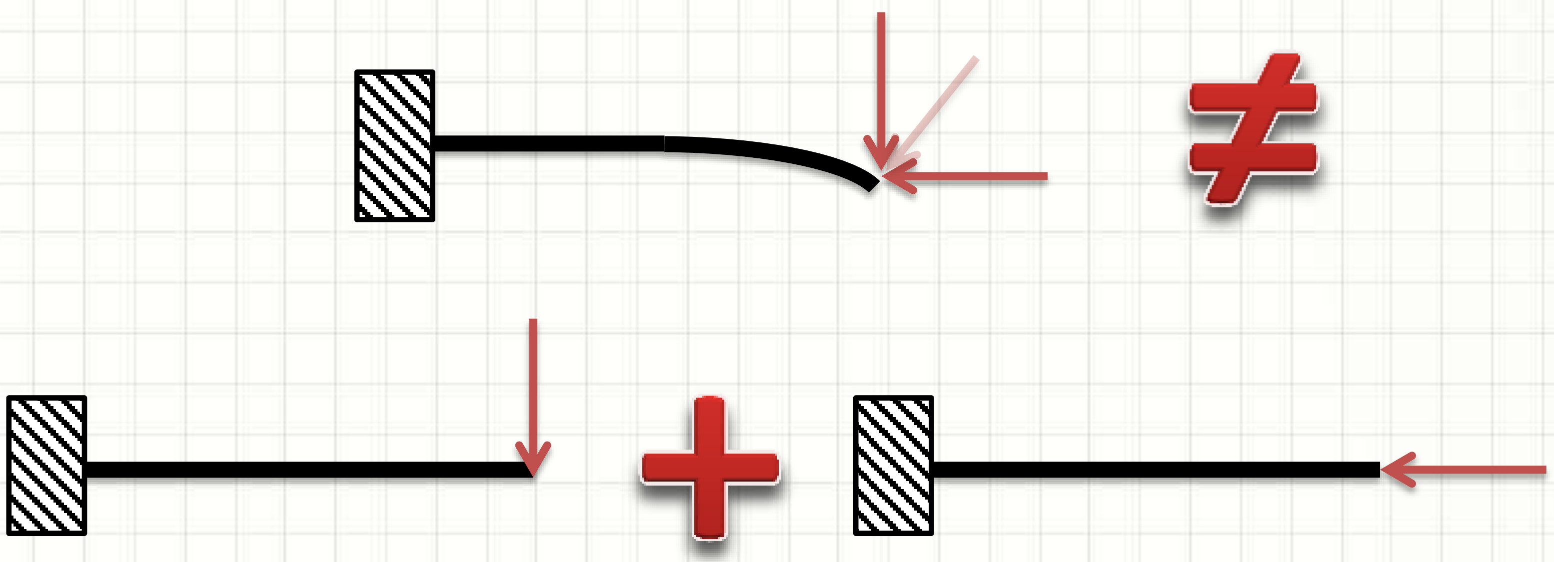


Superposição de Efeitos: Condição

- Carga P: relação linear com σ ou δ
  - Exemplos:

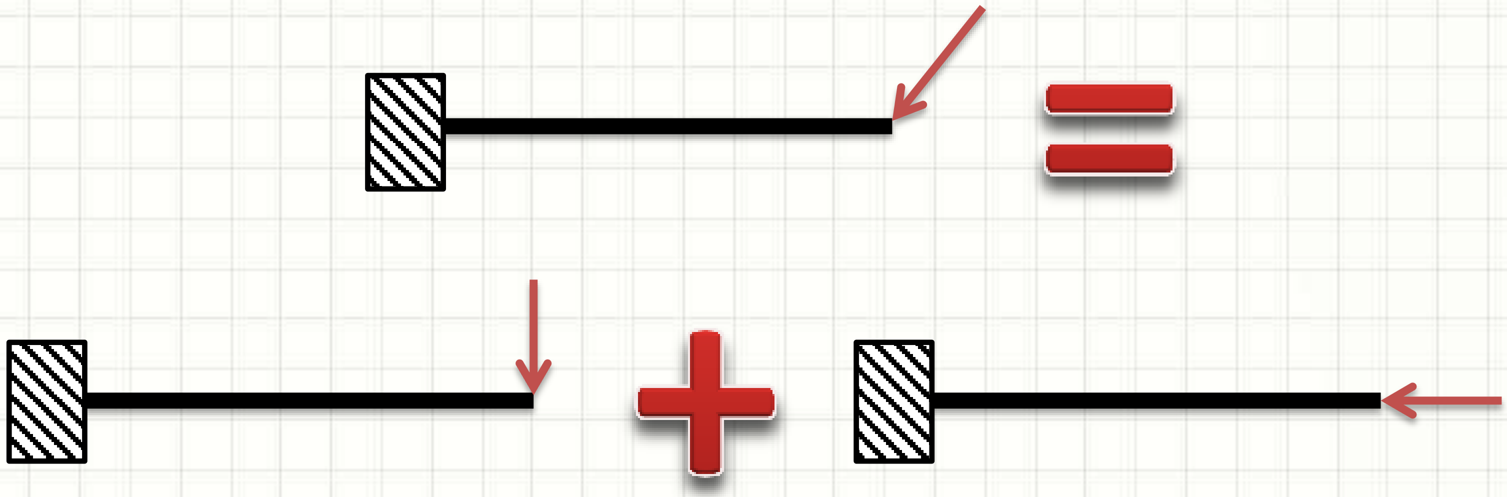
$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \delta = \frac{P.L}{E.A}$$

- Não pode alterar a geometria do elemento



Superposição de Efeitos: Condição

- Neste curso...
  - Cargas sempre proporcionais a σ ou δ
- Em geral, adotamos uma **simplificação**
  - Pouca deformação...



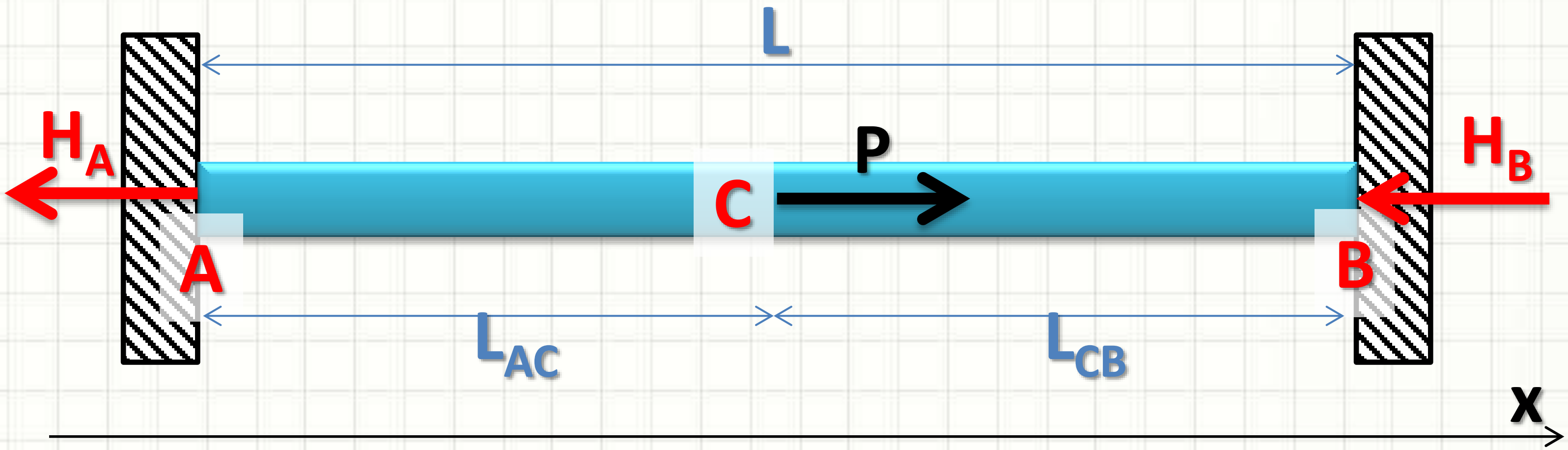
- A menos que especificado diferentemente!

Aplicando a Superposição No

Cálculo de Elementos Estaticamente Indeterminados sob Cargas Axiais

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Como já vimos....



- Reações H_A e H_B ... ?

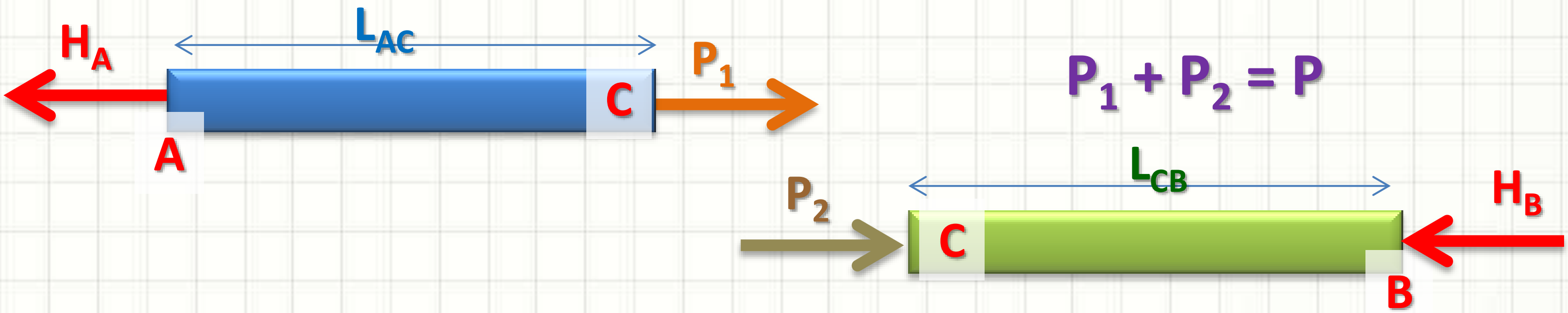
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

Falta uma equação!

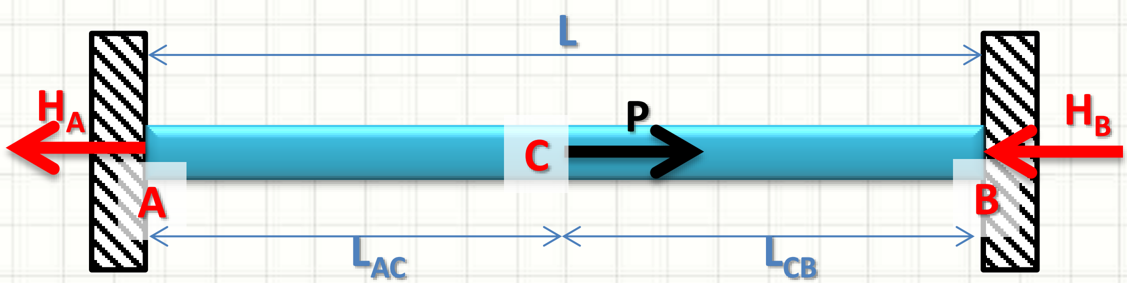
$$-H_A + P - H_B = 0 \Rightarrow \mathbf{H_A + H_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- No equilíbrio, o que se pode dizer de P_1 e P_2?



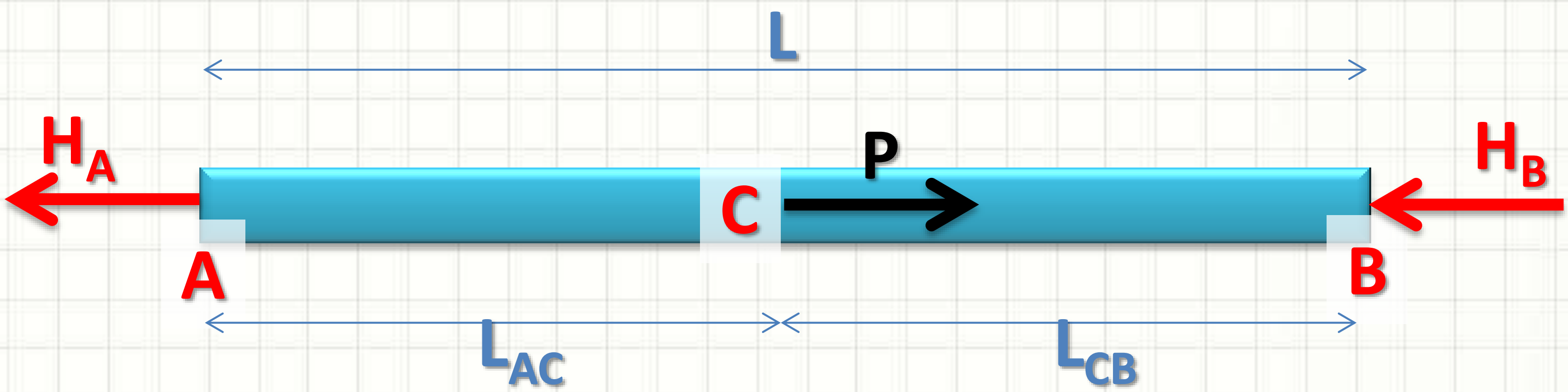
  – Que $\mathbf{P_1 = H_A}$? E $\mathbf{P_2 = H_B}$?
- Isso permite calcular as deformações δ_{AC} e δ_{CB}
- Mas como isso ajuda? Observe e pense:



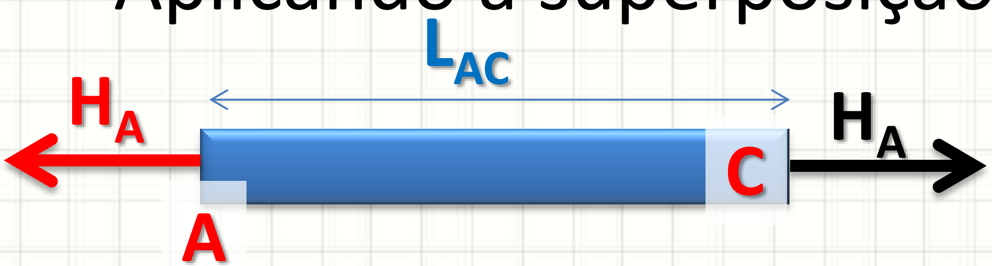
Qual deve ser o valor de $\delta_{AC} + \delta_{CB}$?

Elem. Estaticamente Indeterminados

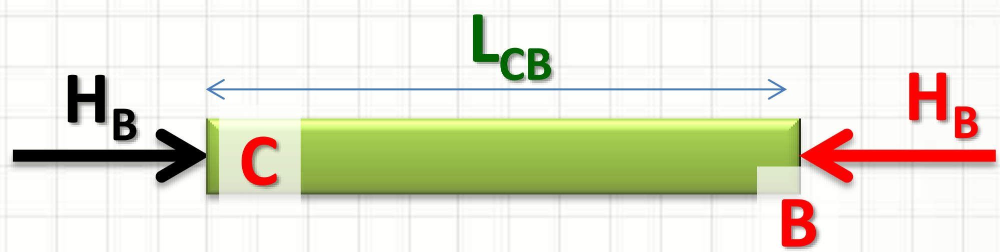
- Sintentizando...



- Aplicando a superposição



$$H_A + H_B = P$$



$$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0$$

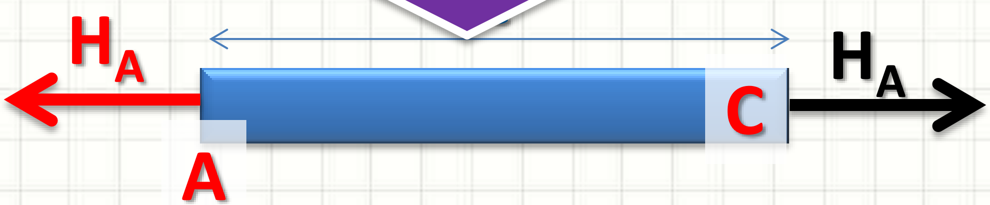
Ele nte l s

- S

A soma da variação de tamanho de cada trecho tem que ser igual à variação total!

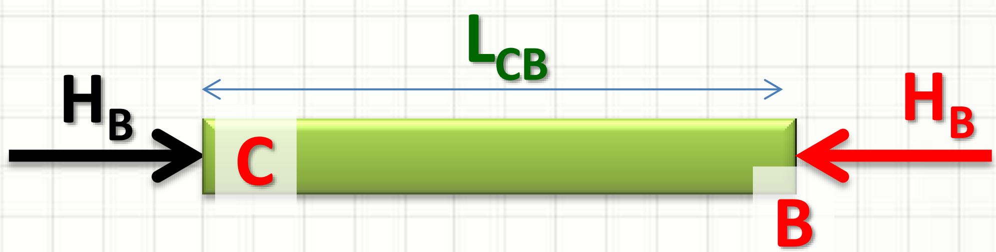
A soma da carga dividida entre as barras é igual à carga aplicada no ponto!

- Aplicand superposição



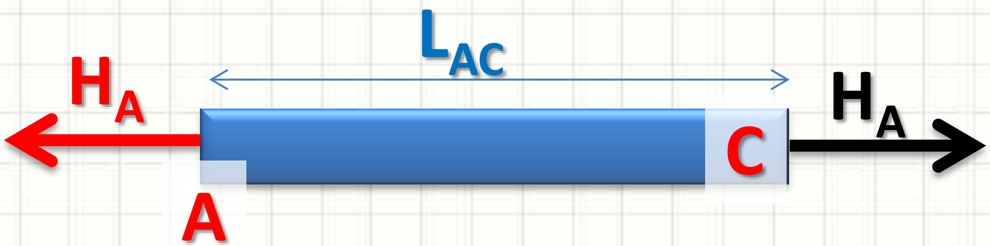
$$H_A + H_B = P$$

$$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0$$



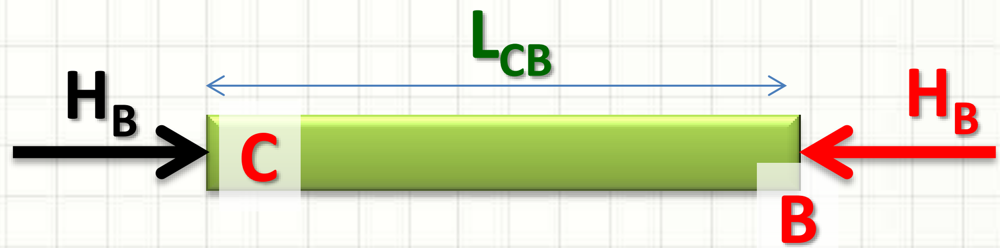
Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...



$H_A + H_B = P$

$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0$



Compressão!

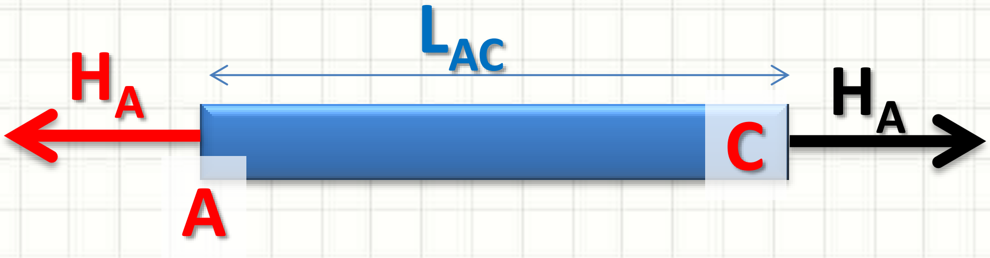
$$\frac{H_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \frac{-H_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0$$

$$H_A = \frac{H_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

$$\boxed{H_A + H_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...



$H_A + H_B = P$

$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0$

essão!

Condição de Equilíbrio

$$\frac{H_A \cdot L_{AC}}{} + \frac{-H_B}{E \cdot A}$$

Condição de Compatibilidade

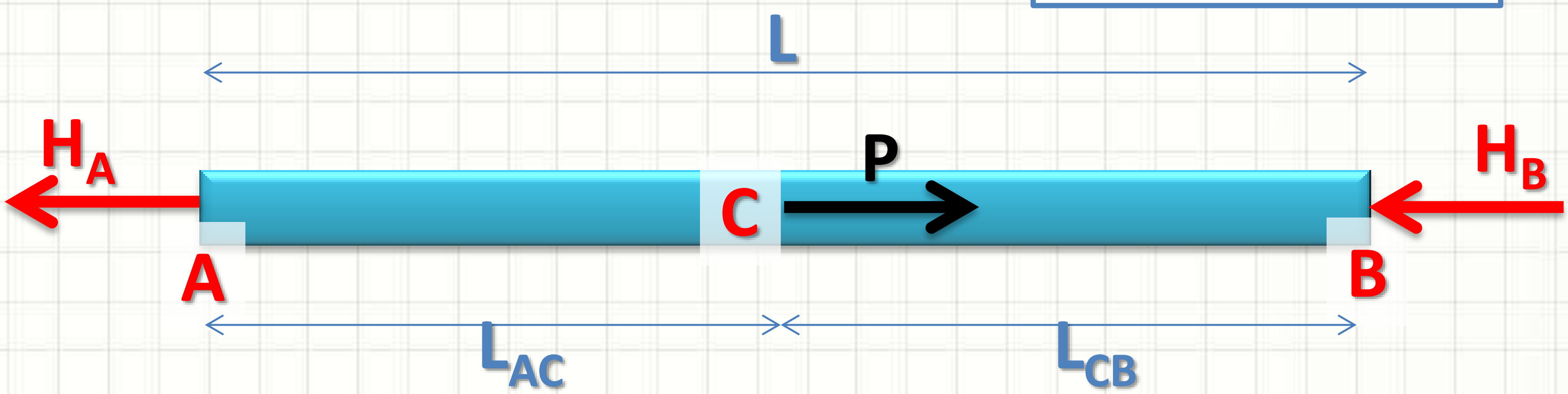
$$= \frac{H_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

$$\boxed{H_A + H_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Analisando o Resultado:

$$H_A + H_B = P$$



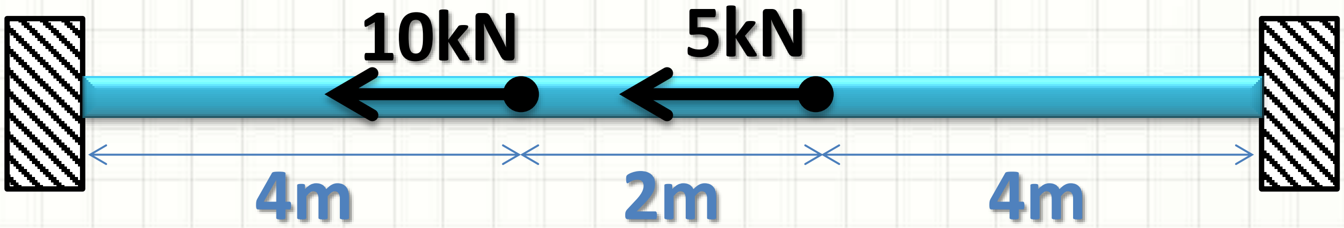
$$H_A = \frac{H_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Se $L_{AC} = L_{CB}$?	$H_A = H_B$	$H_A = P/2$
Se $L_{AC} = 1$ e $L_{CB} = 2$?	$H_A = 2.H_B$	$H_A = 2.P/3$
Se $L_{AC} = 1$ e $L_{CB} = 4$?	$H_A = 4.H_B$	$H_A = 4.P/5$

1 carga, A e E ctes: $H_A = P \,.\, L_{CB}/L$ $H_B = P \,.\, L_{AC}/L$

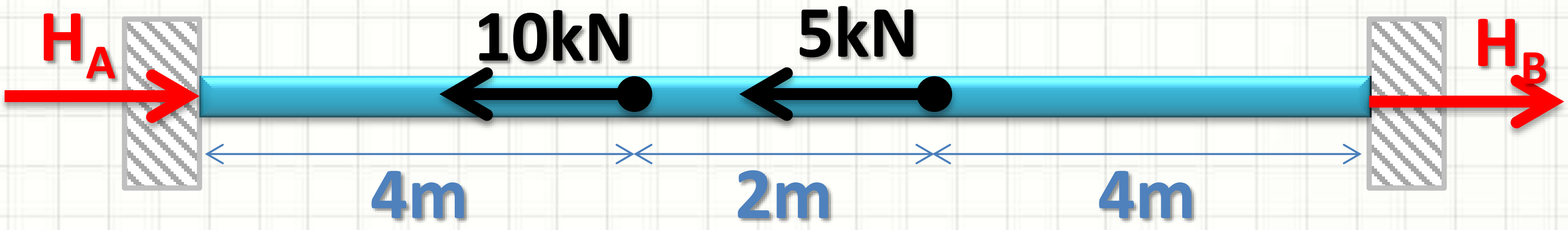
Exercício Exemplo

- Trace o diagrama de normal da viga:



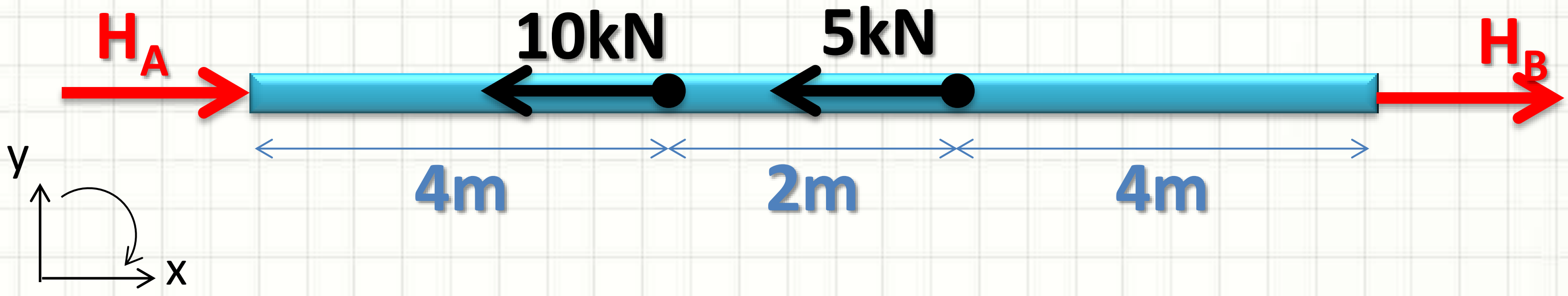
- Etapas
  1. Corpo Livre (identificar reações)
  2. Determinar o equilíbrio estático/reações
  3. Compatibilizar as deformações
  4. Traçado do Diagrama

Exemplo: 1. Corpo Livre



- Não há reações verticais
- Não há momentos envolvidos
- O sentido da reação horizontal é “estimado”
  - Se estiver invertido, ao final ficará com sinal “-”

Exemplo: 2. Equilíbrio Estático



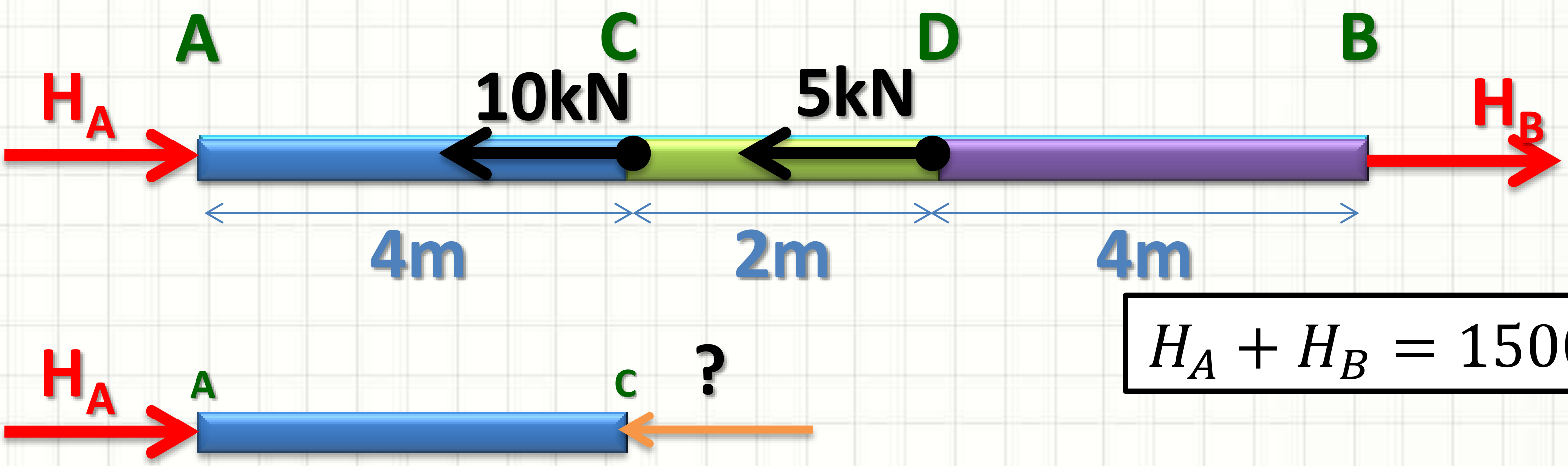
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad H_A - 10000 - 5000 + H_B = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow ?$$

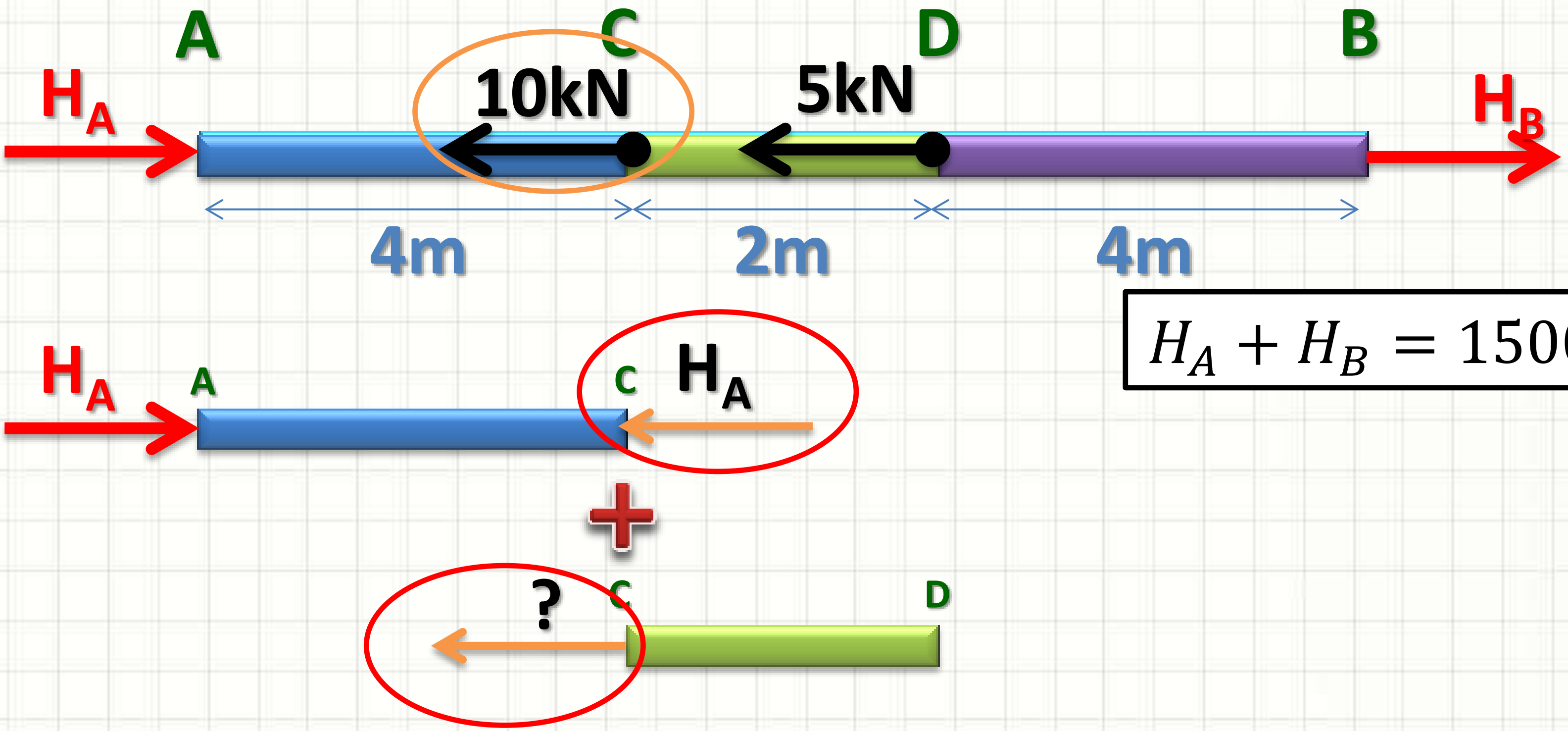
$$\sum M = 0 \Rightarrow ?$$

Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

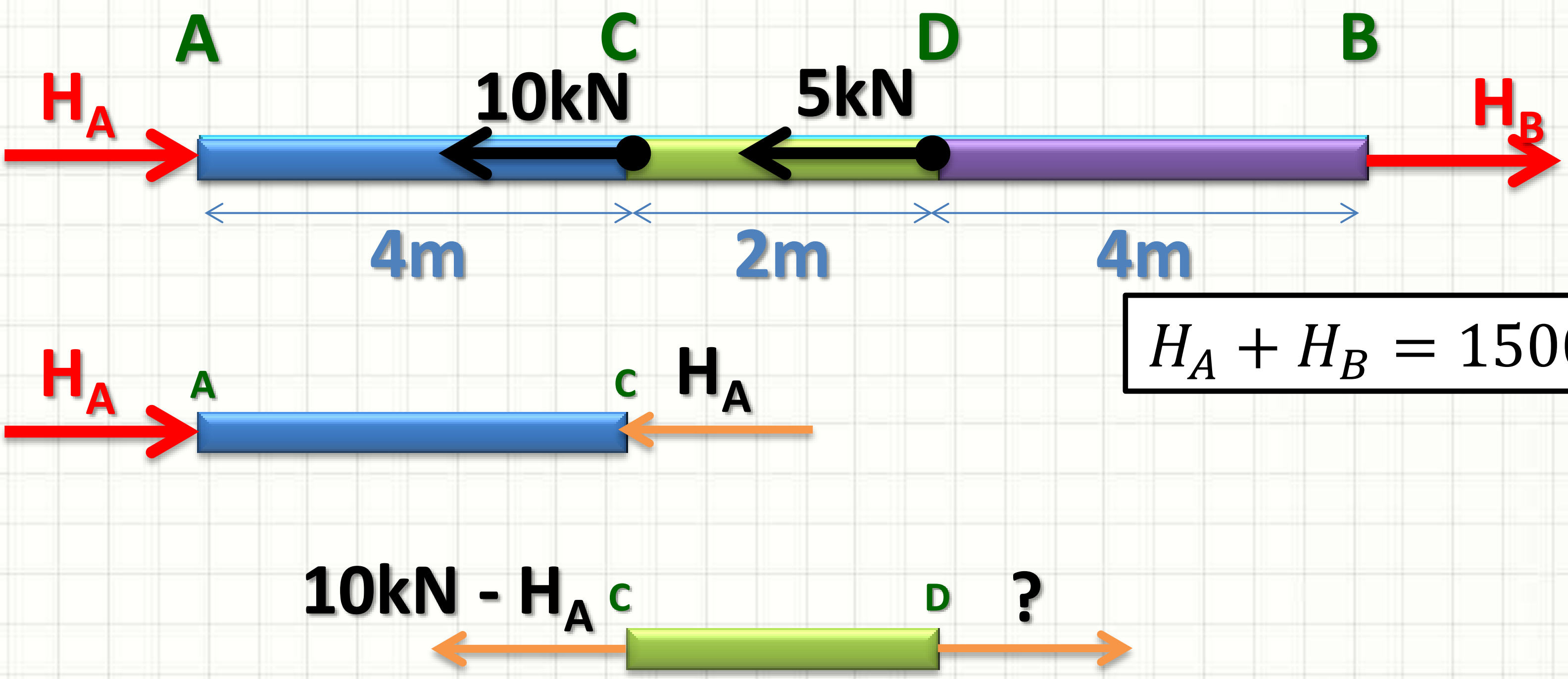
Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$H_A + H_B = 15000$$

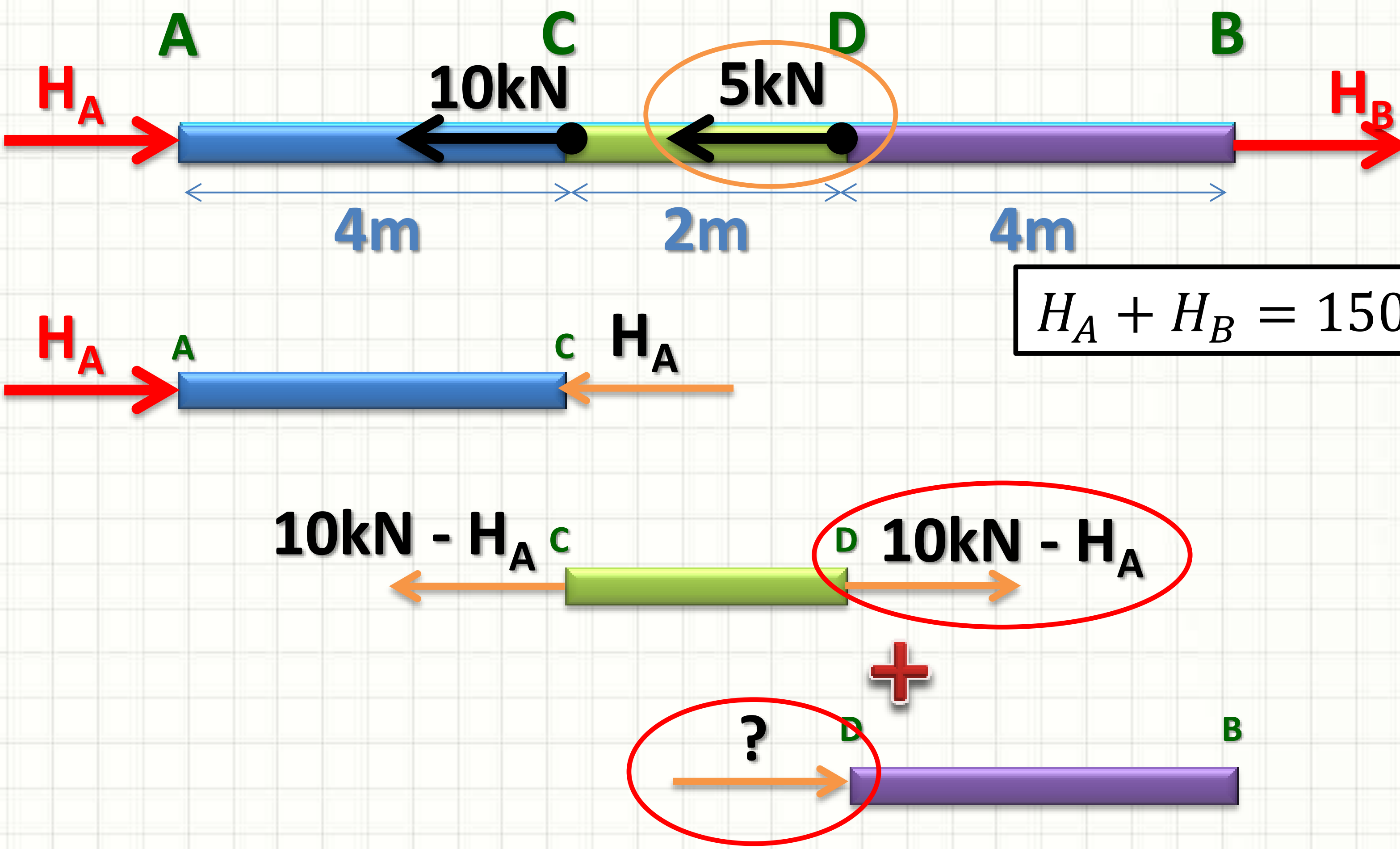
$$10000 = H_A + ? \quad \rightarrow \quad ? = 10000 - H_A$$

Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

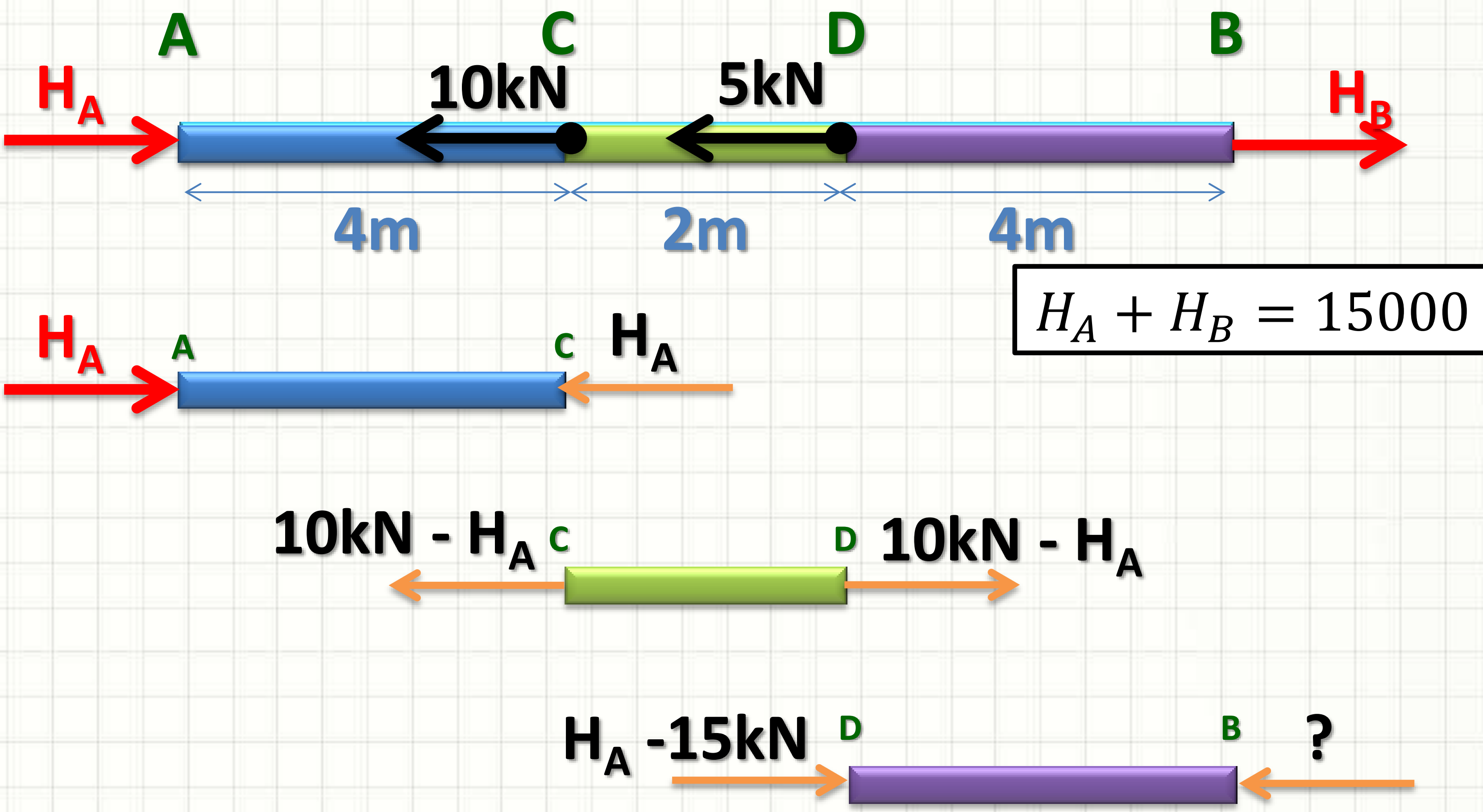
Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

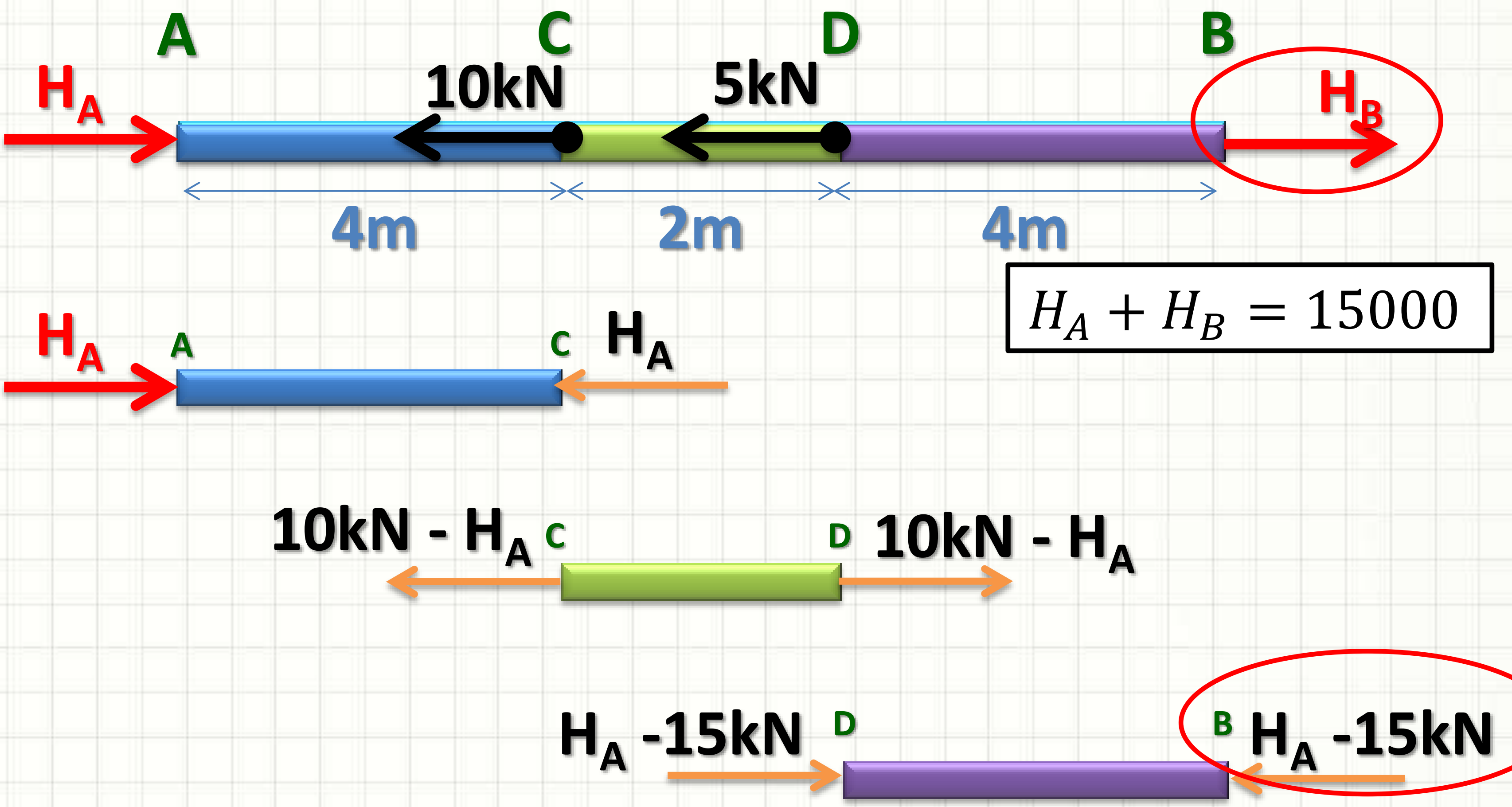
$$5000 = -(10000 - H_A) - ? \quad \rightarrow \quad ? = H_A - 15000$$

Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

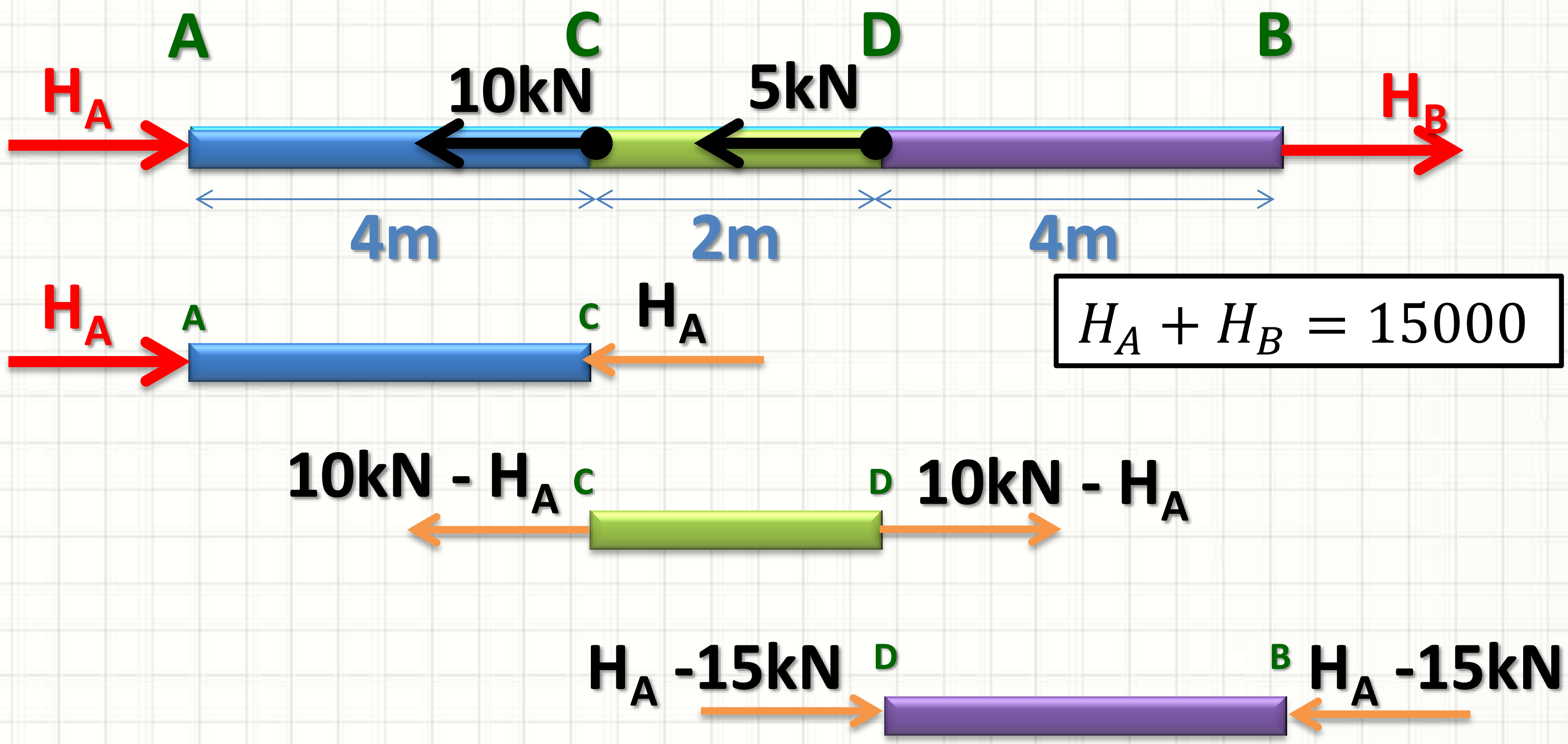
Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$H_A + H_B = 15000$$

$$H_B = -(H_A - 15000) \quad \rightarrow \quad H_A + H_B = 15000$$

Exemplo: 3. Compat. Deformações



$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

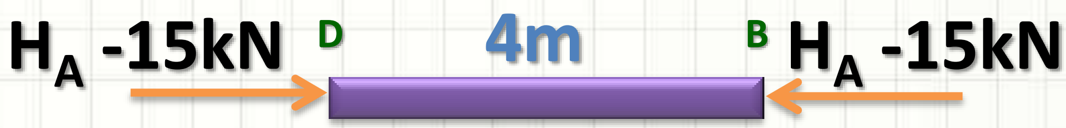
- Qual a deformação total $\delta_{AC} + \delta_{CD} + \delta_{DB}$?

$$\boxed{\delta_{AC} + \delta_{CD} + \delta_{DB} = 0}$$

Exemplo: 3. Compat. Deformações

$$\boxed{H_A + H_B = 15000}$$

$$\boxed{\delta_{AC} + \delta_{CD} + \delta_{DB} = 0}$$



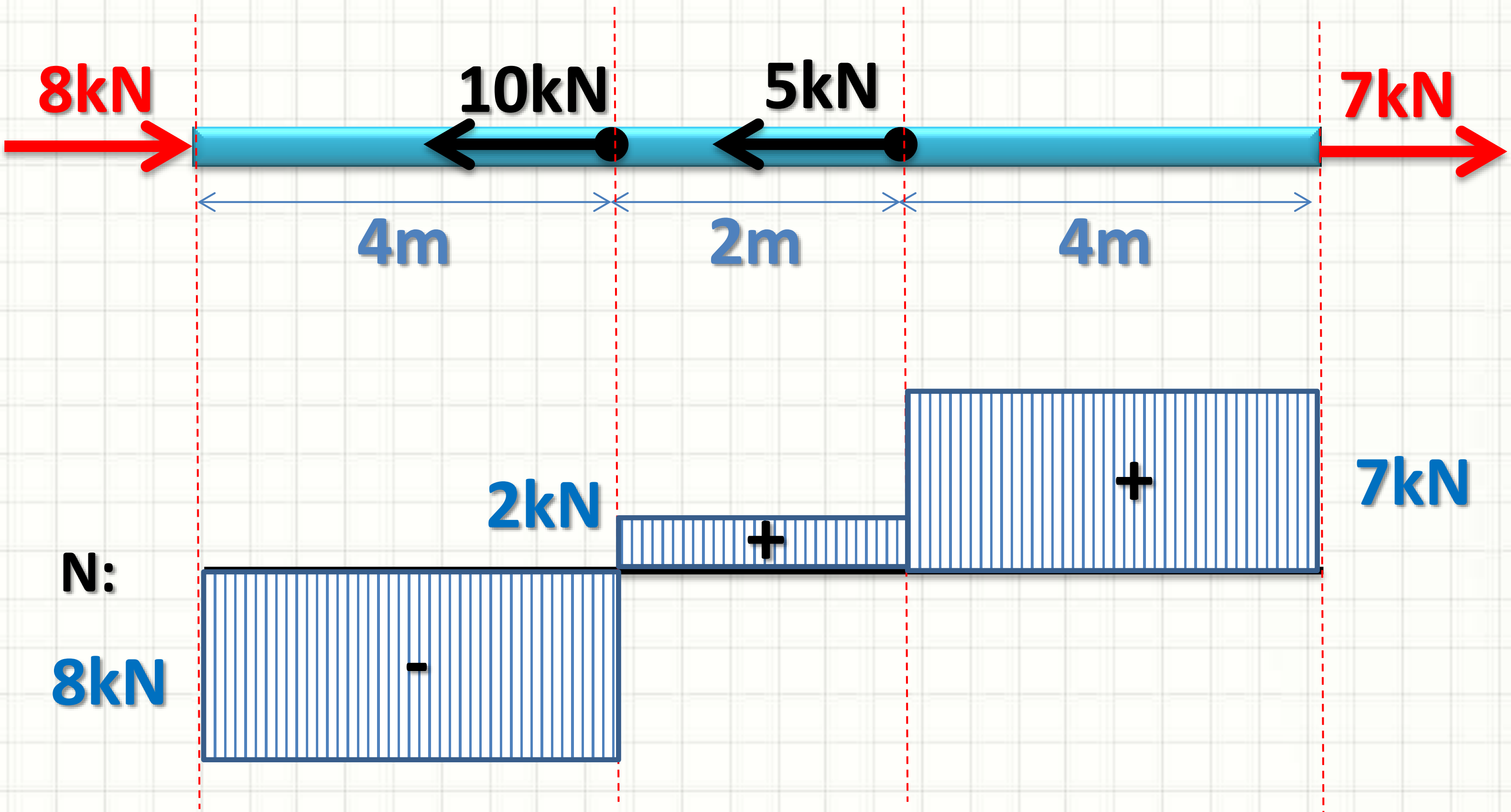
$$\frac{-H_A \cdot 4}{E \cdot A} + \frac{+(10000 - H_A) \cdot 2}{E \cdot A} + \frac{-(H_A - 15000) \cdot 4}{E \cdot A} = 0$$

$$\frac{-4.H_A - 2.H_A + 20000 - 4.H_A + 60000}{E \cdot A} = 0$$

$$-10.H_A + 80000 = 0.E.A$$

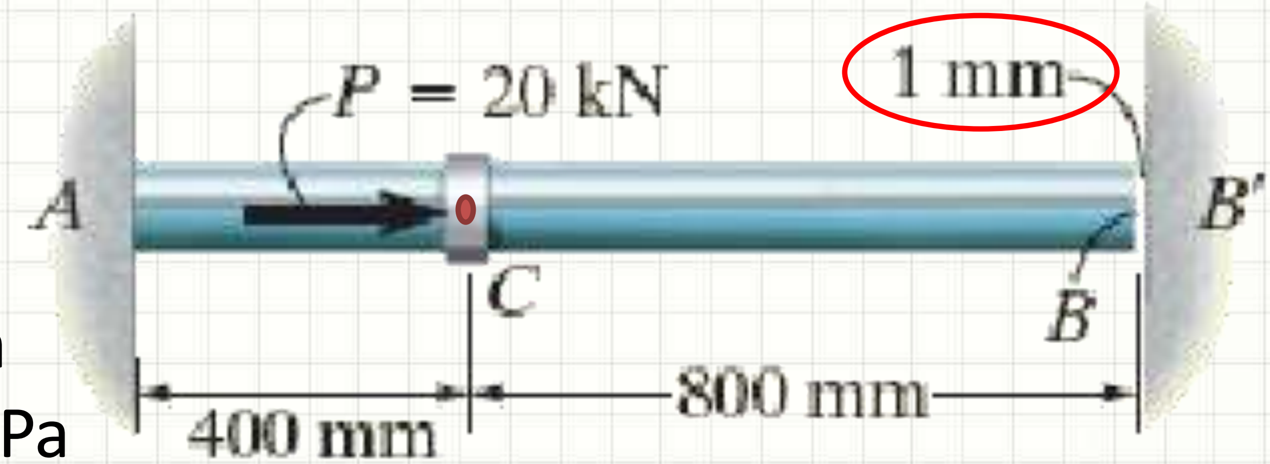
$$\boxed{H_A = 8000N} \qquad \boxed{H_B = 7000N}$$

Exemplo: 4. Traçado dos Diagramas



Exercício

Exercício Exemplo



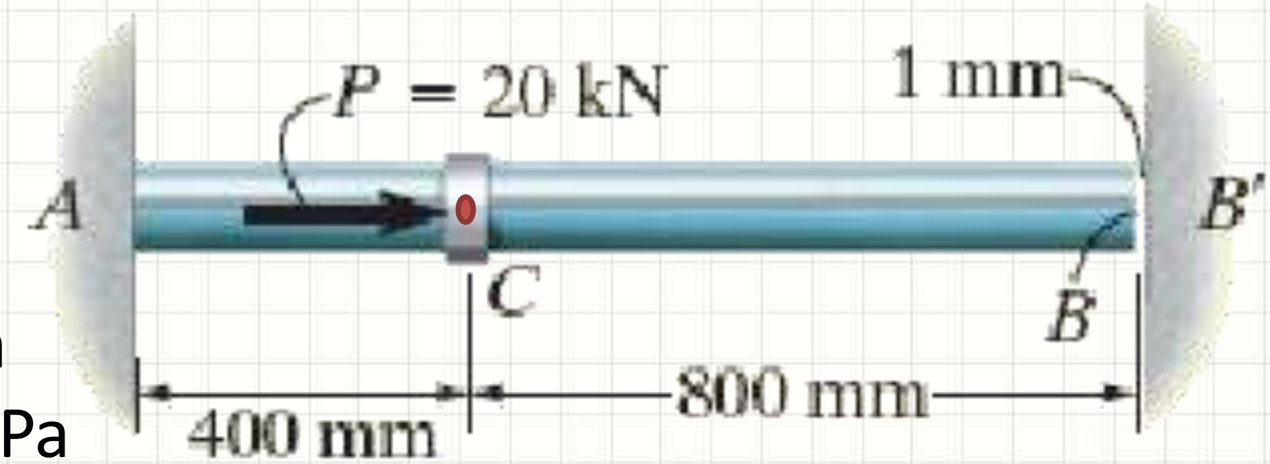
ϕ = 5mm
E = 200GPa

- Qual o alongamento se fosse livre em B?

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{2.10^4 \cdot 4.10^{-1}}{2.10^{11} \cdot 6{,}25.10^{-6}.\pi} = 2.10^{-3}m$$

- Como resolver?

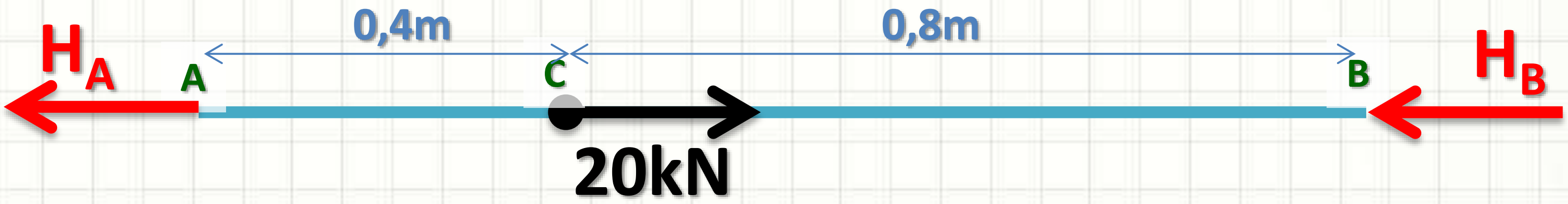
Exercício Exemplo



ϕ = 5mm

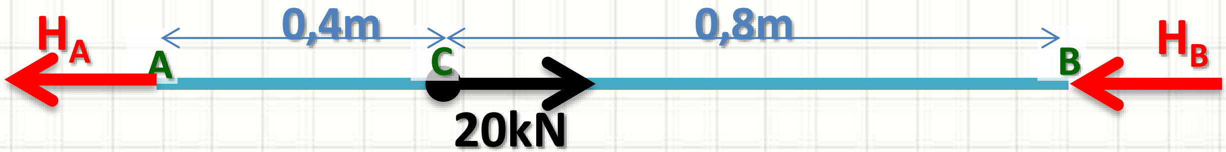
E = 200GPa

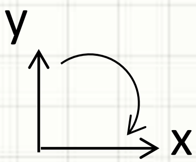
- Vamos admitir que vai encostar...
- Diagrama de corpo livre



Exercício Exemplo

ϕ = 5mm
E = 200GPa

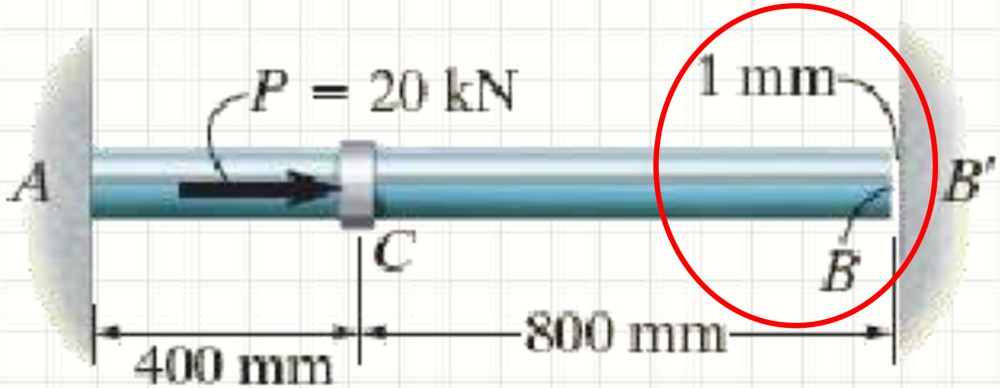




- Reações H_A e H_B ... ?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad -H_A + P - H_B = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{H_A + H_B = 20kN}}$$

- Para resolver: compat. de deformações

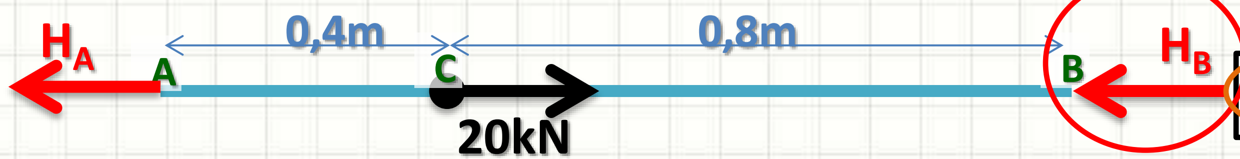


$\delta_{AC} + \delta_{CB} = ?$

$\boxed{\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0{,}001}$

Exercício Exemplo

ϕ = 5mm
E = 200GPa



$H_A + H_B = 20kN$

$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0{,}001m$

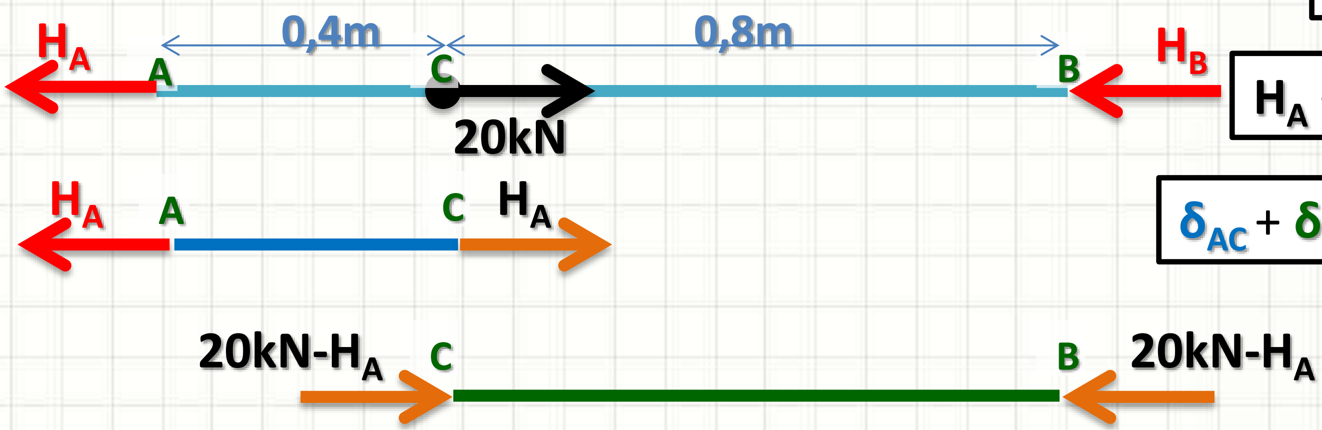
- Decompondo as partes

$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0{,}001m$

$$\frac{H_A \cdot 0{,}4}{E \cdot A} + \frac{-(20000 - H_A) \cdot 0{,}8}{E \cdot A} = 0{,}001$$

Exercício Exemplo

ϕ = 5mm
E = 200GPa



$H_A + H_B = 20kN$

$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0{,}001m$

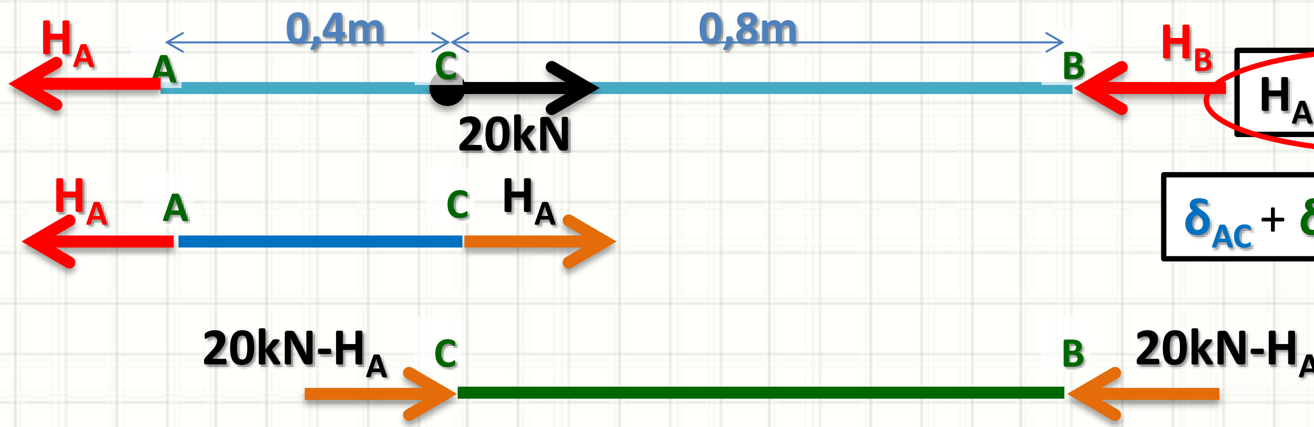
$$\frac{H_A \cdot 0{,}4}{E \cdot A} + \frac{-(20000 - H_A) \cdot 0{,}8}{E \cdot A} = 0{,}001$$

$$\frac{0{,}4.H_A}{E \cdot A} + \frac{0{,}8.H_A - 16000}{E \cdot A} = 0{,}001$$

$$1{,}2.H_A - 16000 = 0{,}001.E.A$$

Exercício Exemplo

$\phi = 5mm$
$E = 200GPa$



$H_A + H_B = 20kN$

$\delta_{AC} + \delta_{CB} = 0{,}001m$

$$1{,}2.H_A - 16000 = 0{,}001.E.A$$

$$1{,}2.H_A - 16000 = 0{,}001.200.10^9.\pi.0{,}0025^2$$

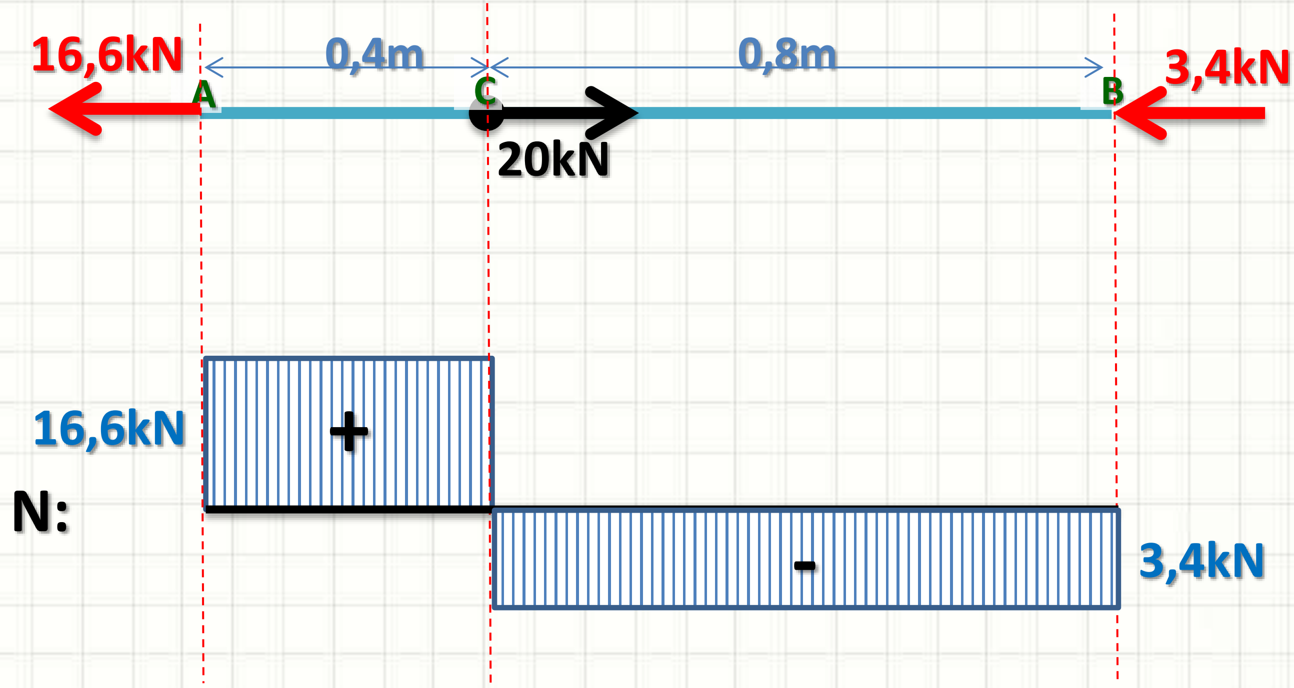
$$1{,}2.H_A - 16000 = 10^{-3}.200.10^9.\pi.6{,}25.10^{-6}$$

$$1{,}2.H_A - 16000 = 1250.\pi$$

$$H_A = (1250.\pi + 16000)/1{,}2$$

$\boxed{H_A = 16{,}6kN}$ $\boxed{H_B = 3{,}4kN}$

Exercício Exemplo - Diagrama



Para Treinar

Para Treinar em Casa

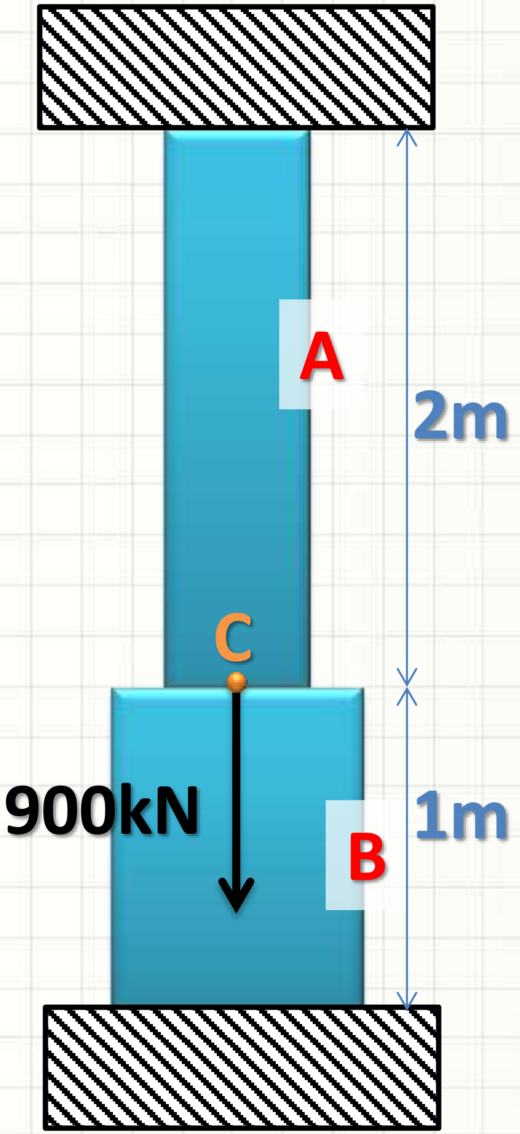
- Aço A-36: E = 200GPa
- Concreto de Alta Resistência: E = 35GPa
- Hibbeler (Bib. Virtual)
  - Pág. 91 a 106
- Mínimos:
  - Exercícios 4.1, 4.5, 4.10, 4.29
  - Exercícios 4.31, 4.33
- Extras:
  - Exercícios 4.2 a 4.4, 4.6, 4.7, 4.21, 4.30
  - Exercícios: 4.34, 4.36, 4.37

Exercício no SAVA

Exercício – Entrega Individual

- Calcule as reações de apoio
- Trace o Diagrama de Normal
- Calcule o deslocamento em C
  - – Dica: é a deformação da barra A!

- $\phi_A = 0{,}5m \qquad \phi_B = 1m$
- $E_A = E_B = 50GPa$



Conclusões

Resumo

- Existe relação entre carga e deformação
- Influenciam: Elastic. (E) / Área (A) / Comprim. (L)
- Podemos “decompor” problemas (superposição)
- Estaticamente Indeterminados?
  - Compatibilidade de deslocamentos
- **<u>Exercitar</u>: Hibbeler / Lista Aula 3**

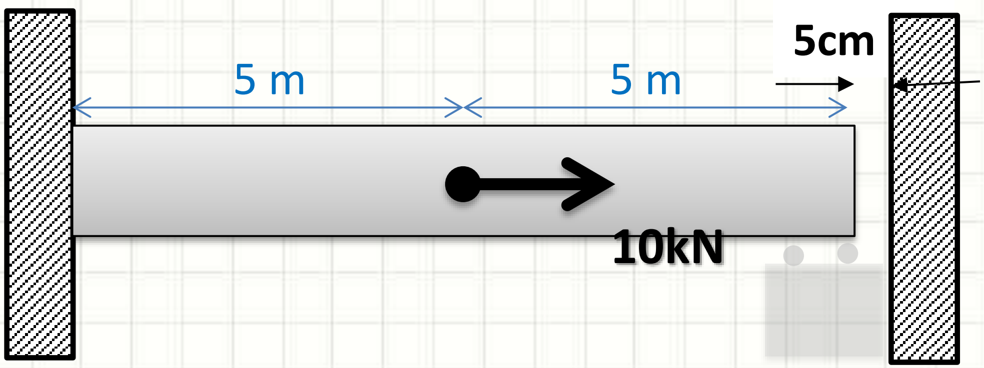
- Únicas preocupações com cargas axiais?
  - Flambagem e Temperatura
  - Concentração de tensão
  - Deformação Inelástica

Perguntas?

Exercício em Sala

Exercício – Individual, para **Agora**!

- Calcule as reações nas paredes abaixo



$A = 10^{-5} m^2$
$E = 10 GPa$

$$\delta = \frac{P.L}{E.A}$$