# Resistência dos Materiais II

# Torção
# Parte I

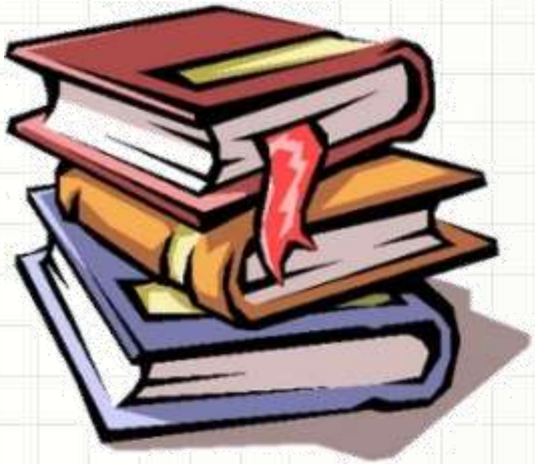
Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

# Objetivos

- Compreender a deformação por torção
- Compreender os esforços de torção
- Determinar distribuição de tensões de cisalhamento por torção
- Determinar cisalhamento pela transmissão de potência

# Material de Estudo



| Material | Acesso ao Material |
| --- | --- |
| Apresentação | http://www.caetano.eng.br/<br>(Resistência dos Materiais II – Aula 5) |
| Material Didático | Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 125 a 139. |
| Biblioteca Virtual | “Resistência dos Materiais” |

## Relembrando:

# Carregamentos Axiais

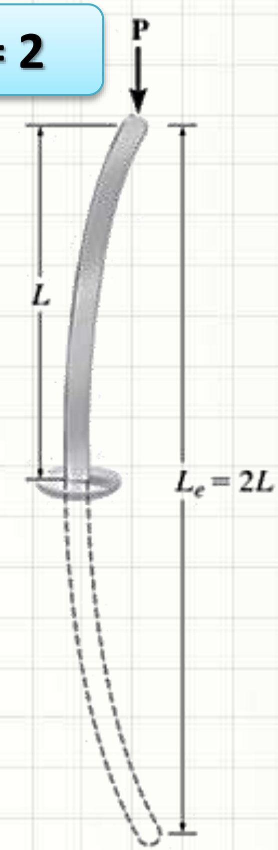
# Flambagem

- Como determinar a Carga Crítica $P_{cr}$ ?

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2}$$

**Momento de Inércia**

**K = 2**

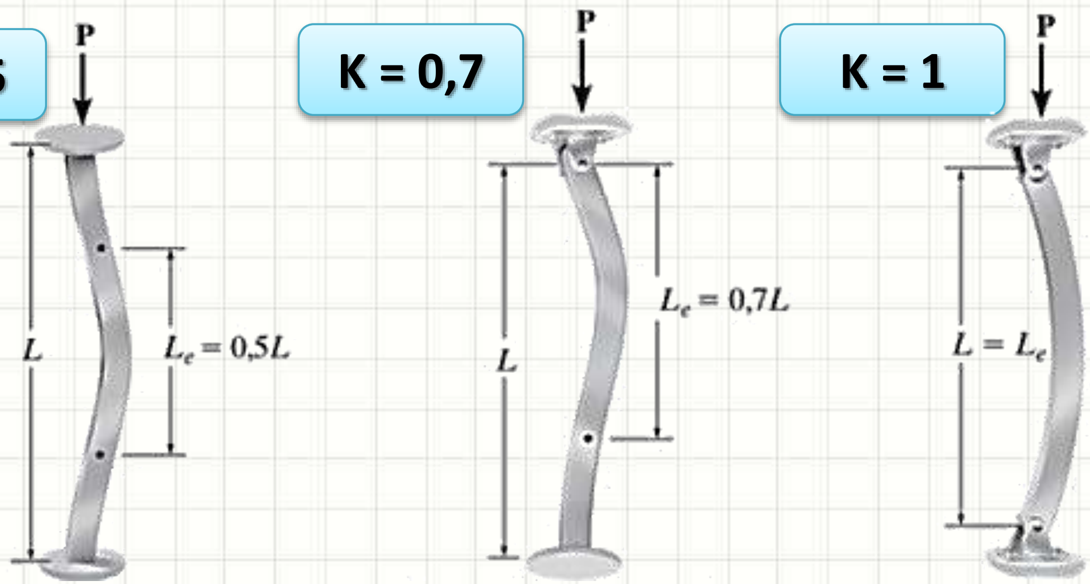



- K depende do tipo de apoio

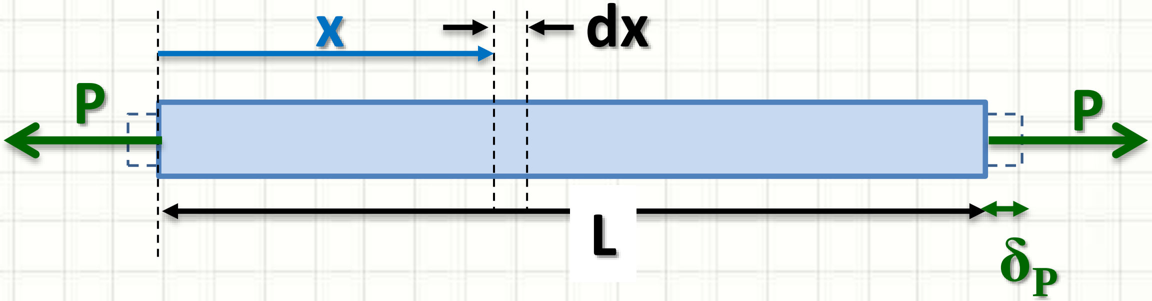
**K = 0,5**

**K = 0,7**

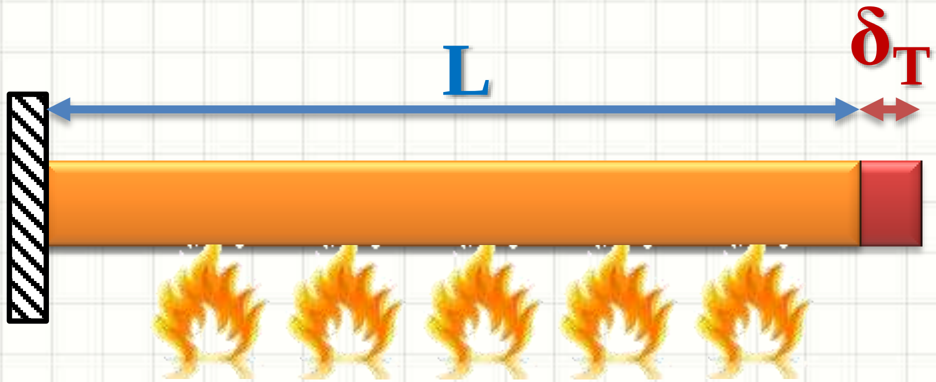
**K = 1**



# Carregamentos e Deformações Axiais



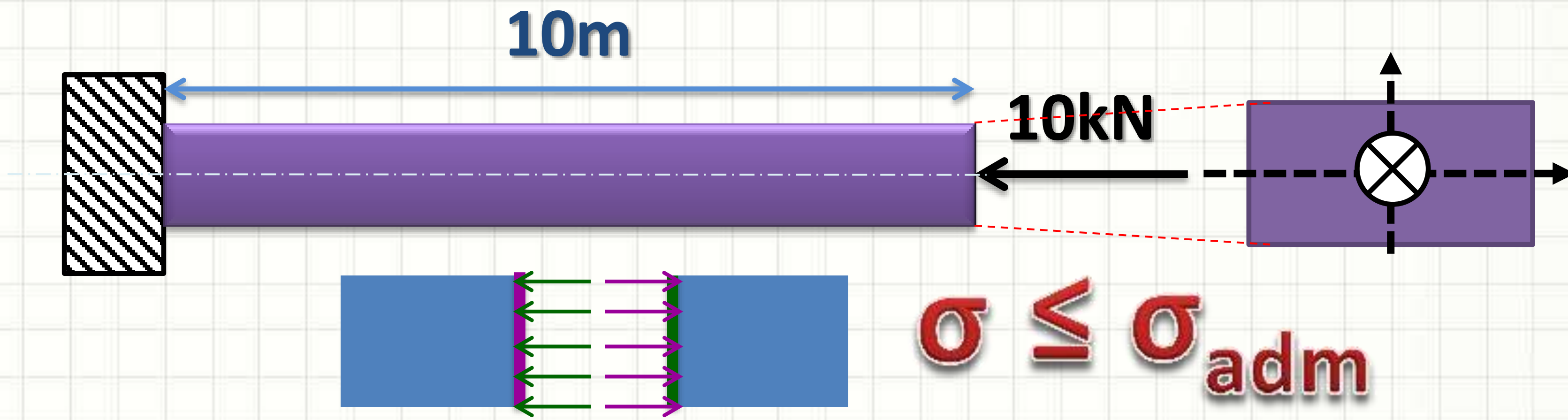

$$\delta_P = \frac{P.L}{E.A}$$



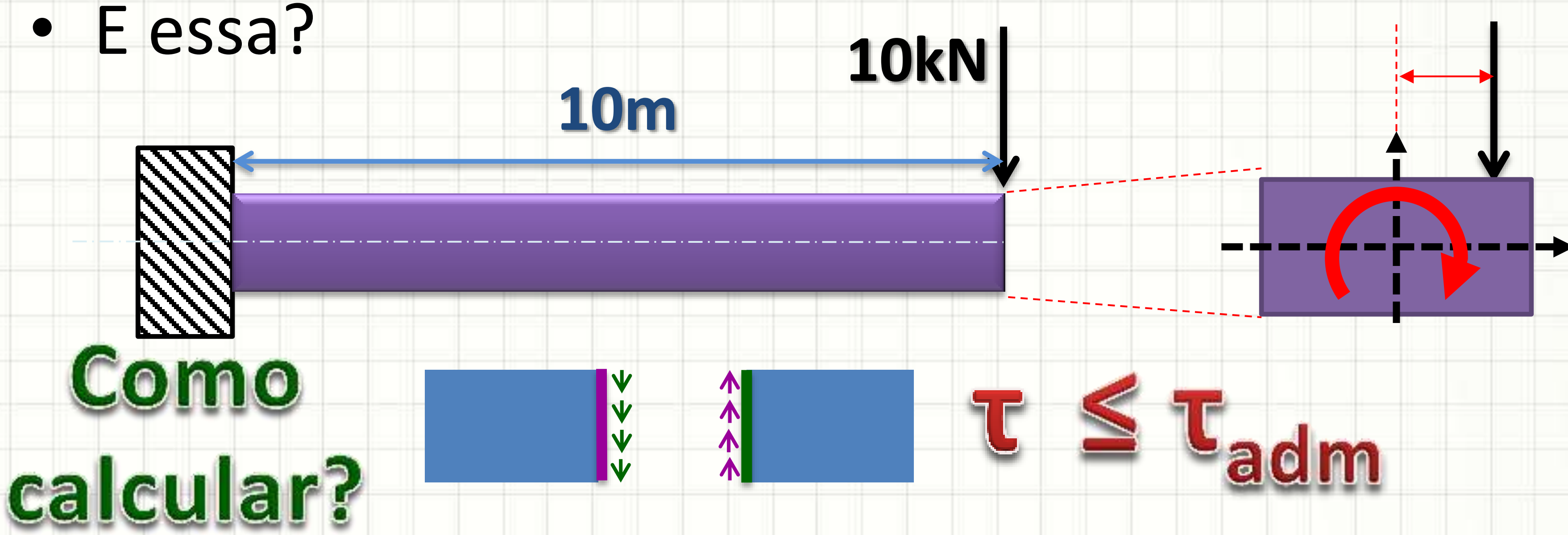

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

# Carregamentos Axiais

- Essa é uma carga axial

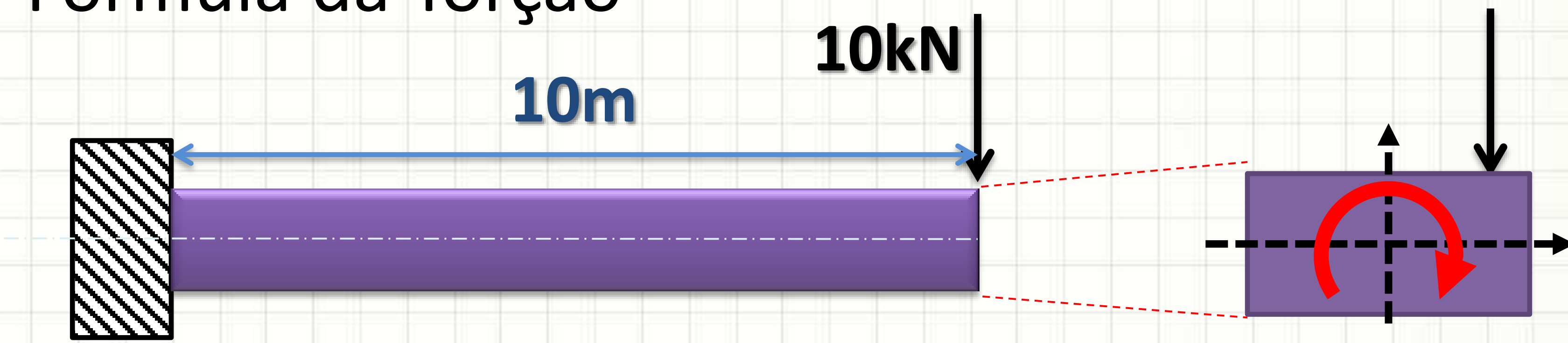



- E essa?



# Cisalhamento na Torção

- Fórmula da Torção



# Cisalhamento na Torção

- Fórmula da Torção


- Algo parecido com...

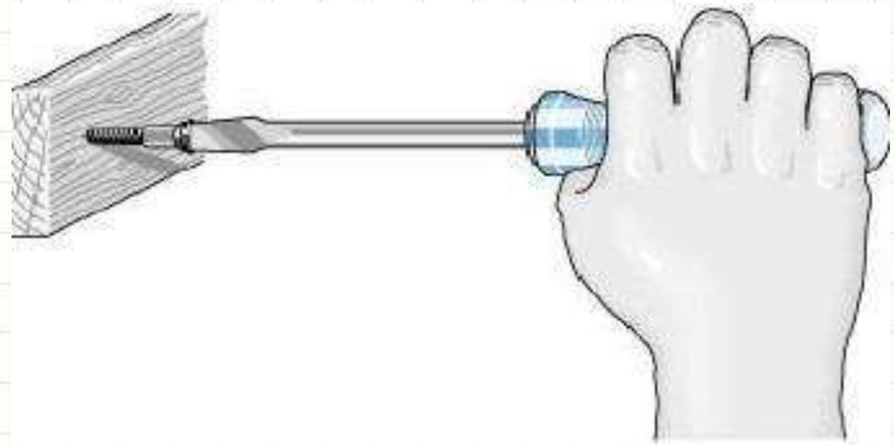
$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$

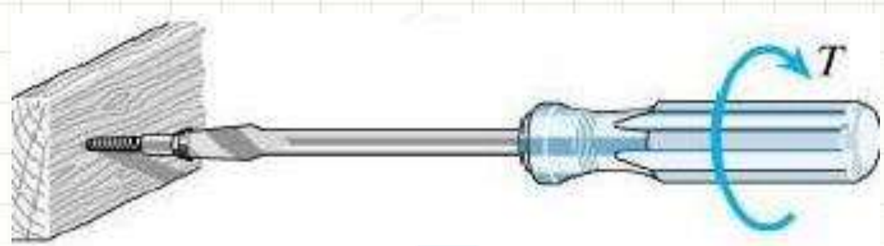
Parecido?

# Deformação de Eixo Circular por Torção

# Deformação por Torção

- O que é torção?

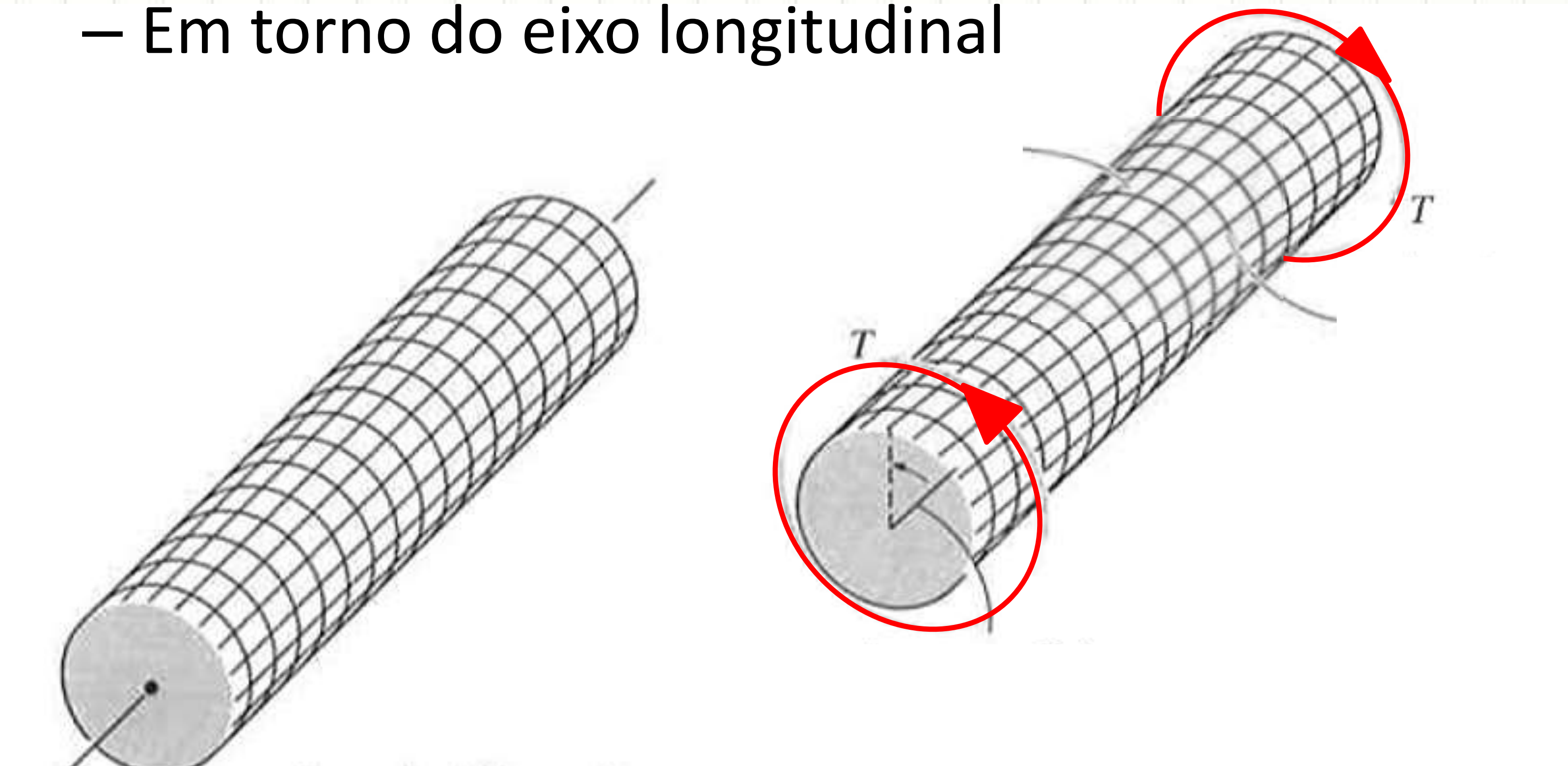





**Torque**

# Deformação por Torção

- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - Em torno do eixo longitudinal

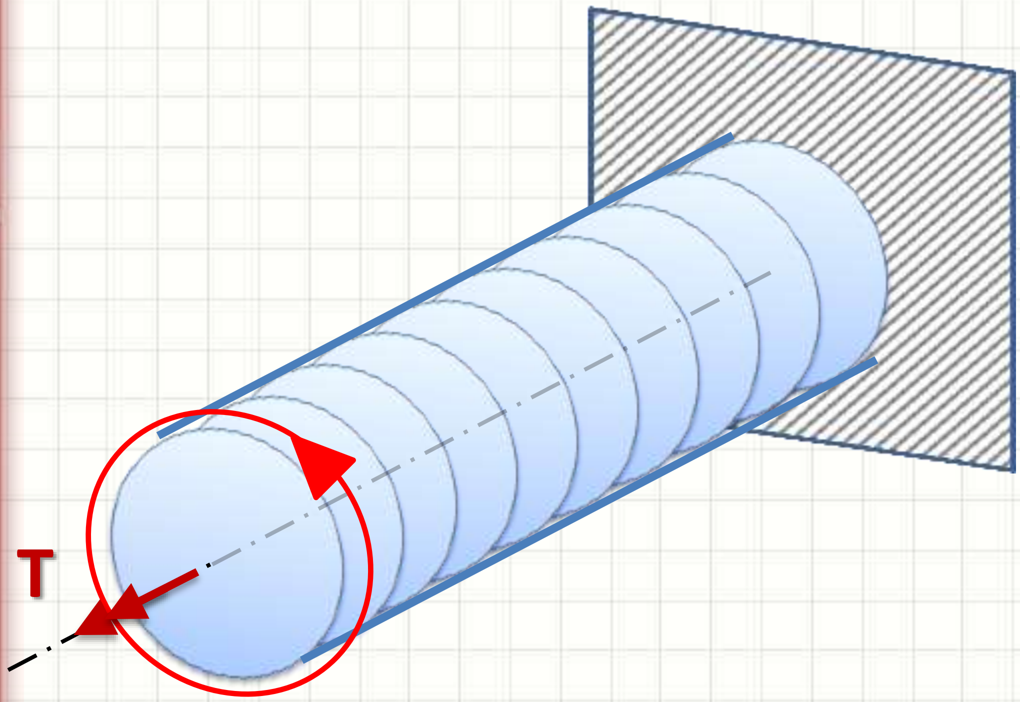



Antes da deformação
(a)

Após a deformação
(b)

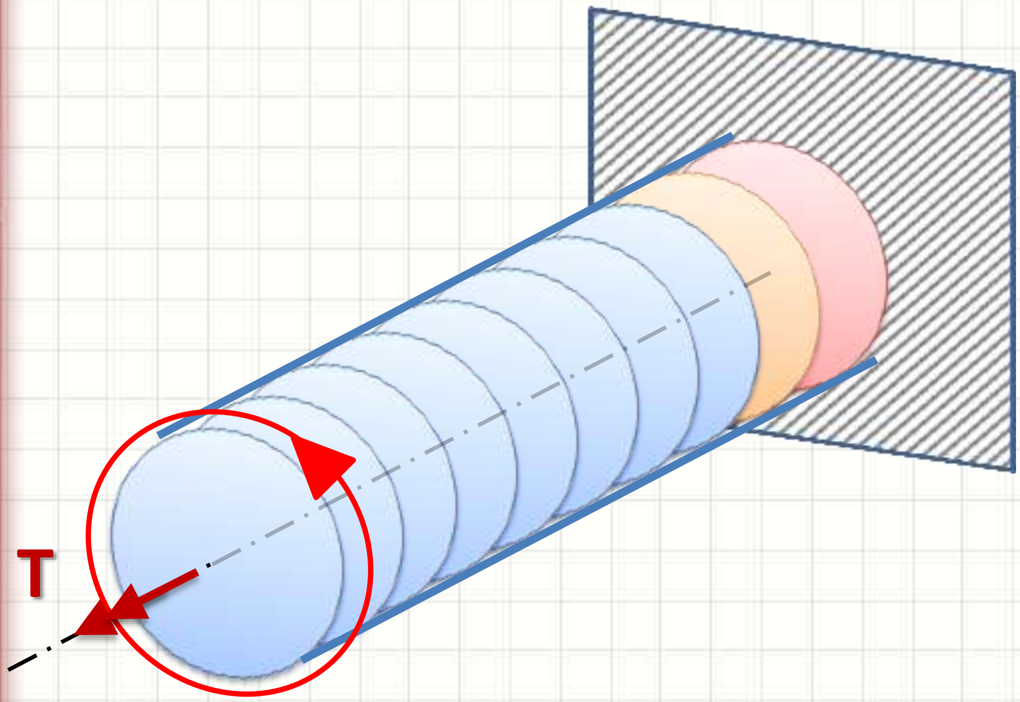
# Deformação por Torção

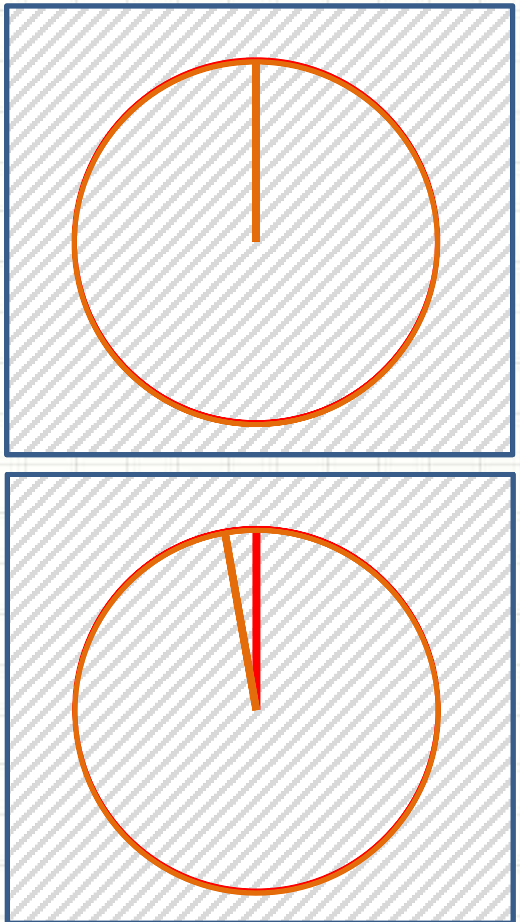
- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  – Em torno do eixo longitudinal



# Deformação por Torção

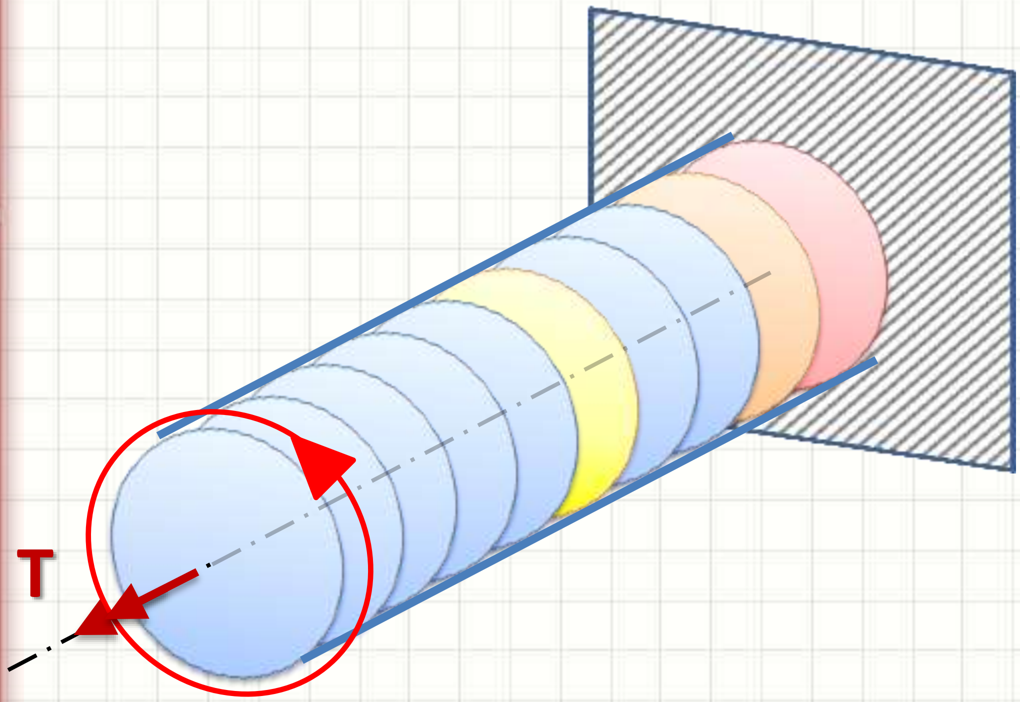
- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - – Em torno do eixo longitudinal

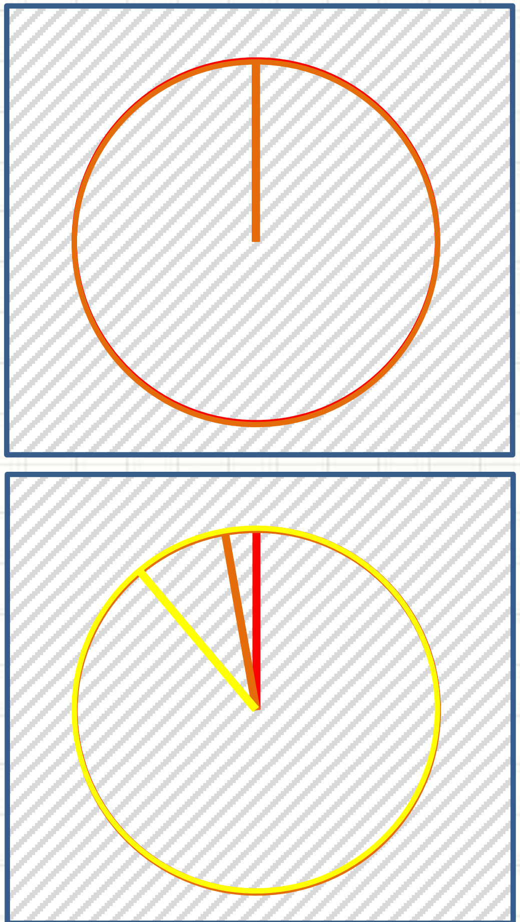


# Deformação por Torção

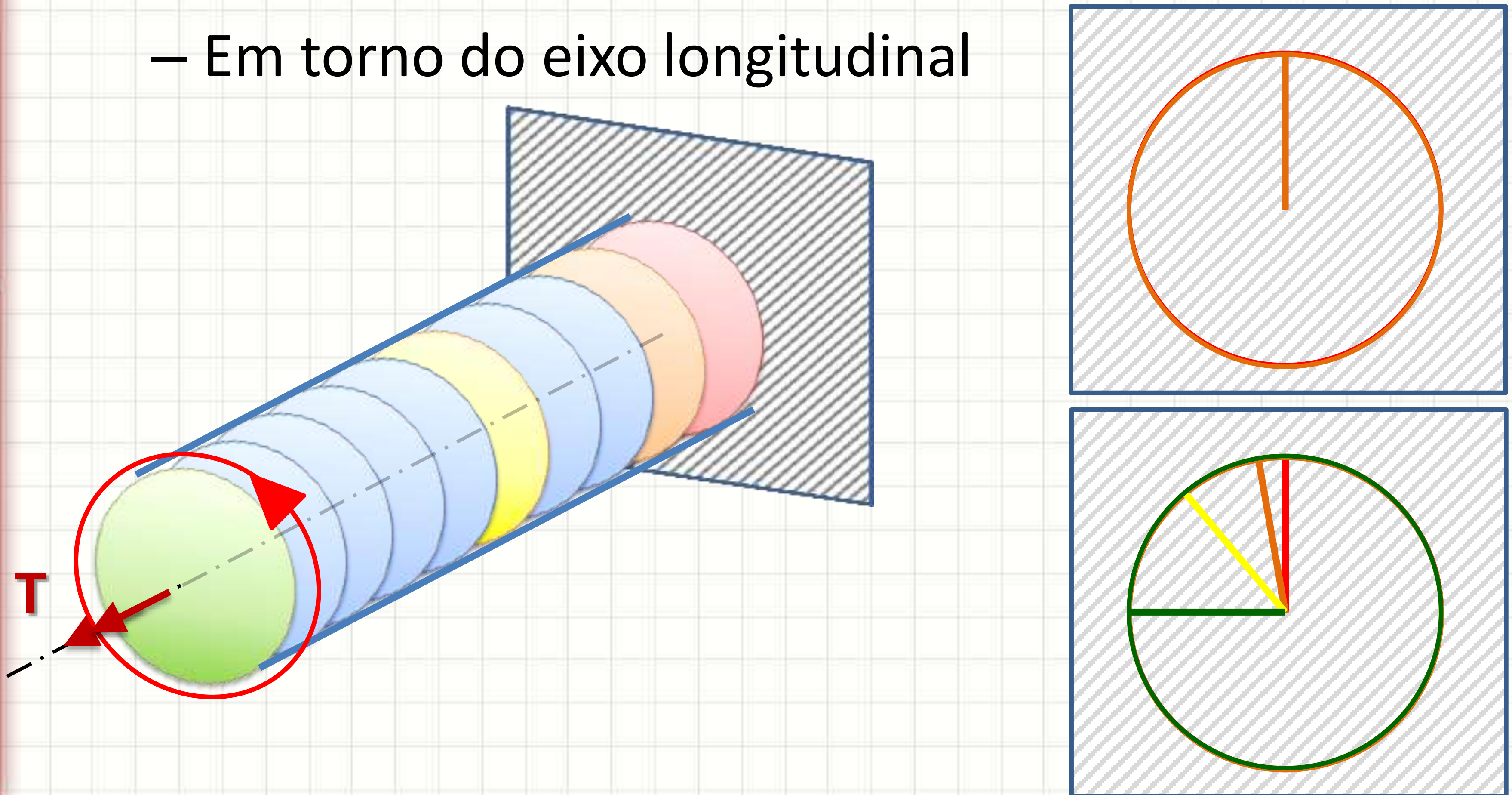
- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - Em torno do eixo longitudinal



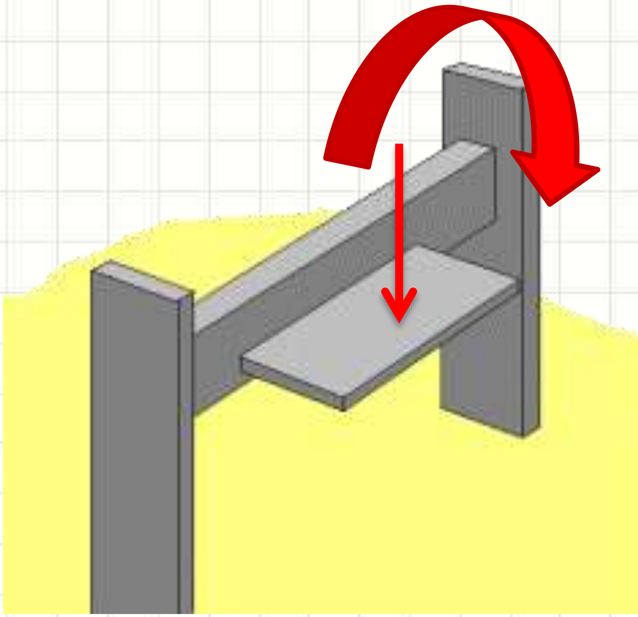
# Deformação por Torção

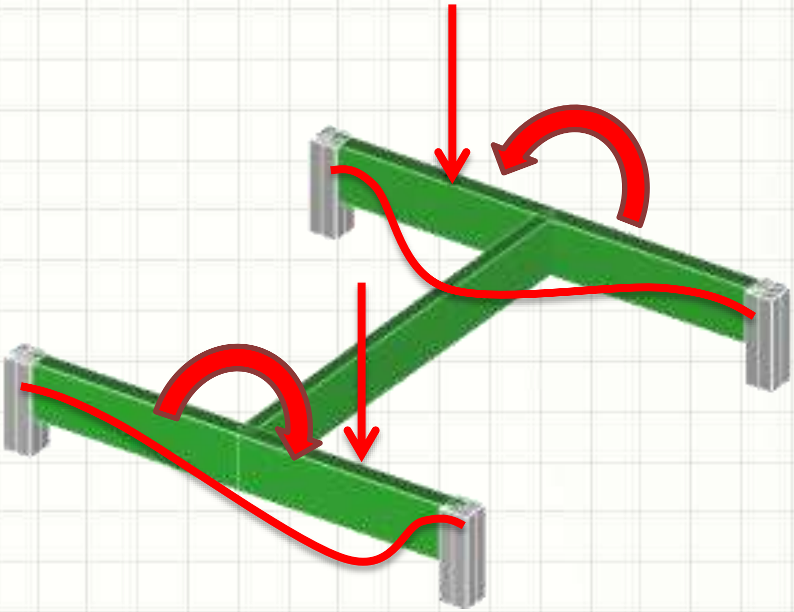
- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - Em torno do eixo longitudinal



# Onde Ocorre a Torção?

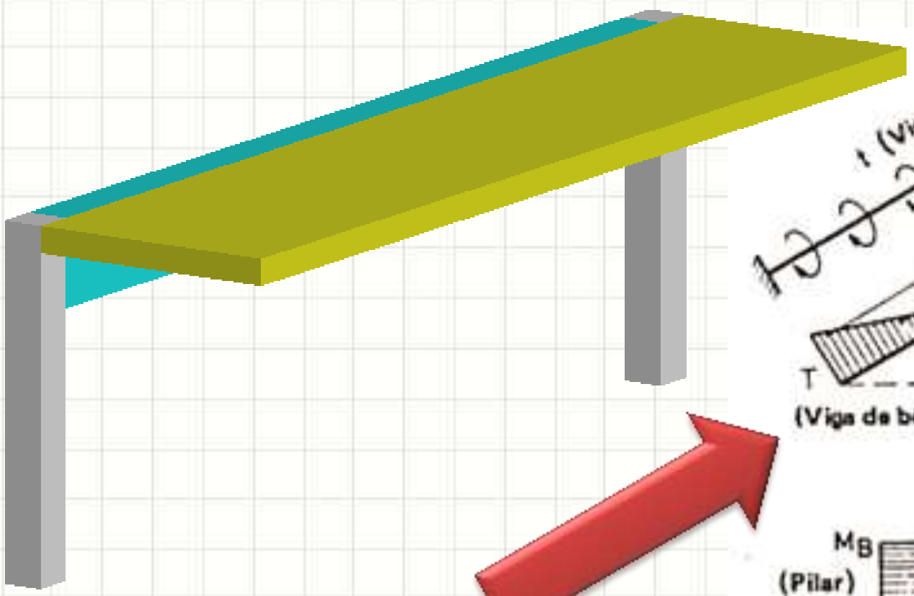
- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?

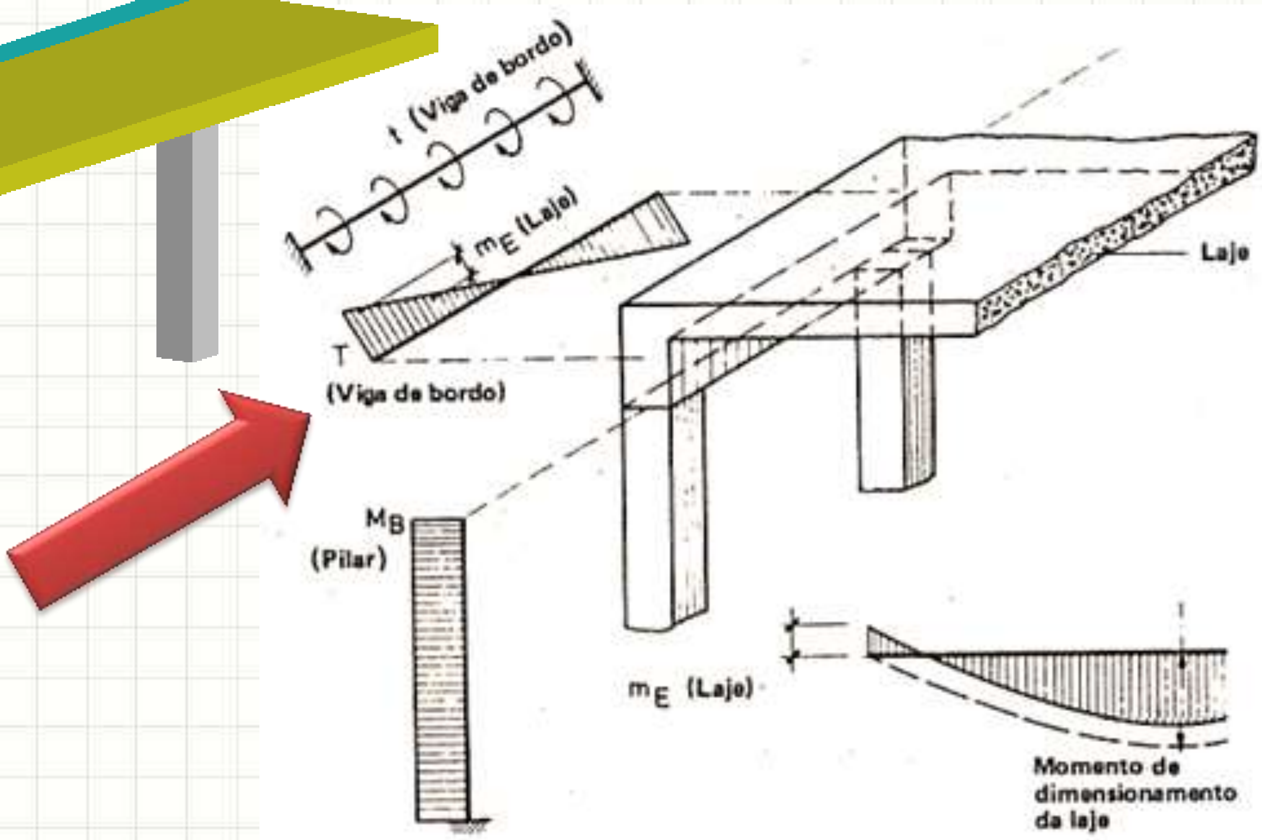




# Onde Ocorre a Torção?

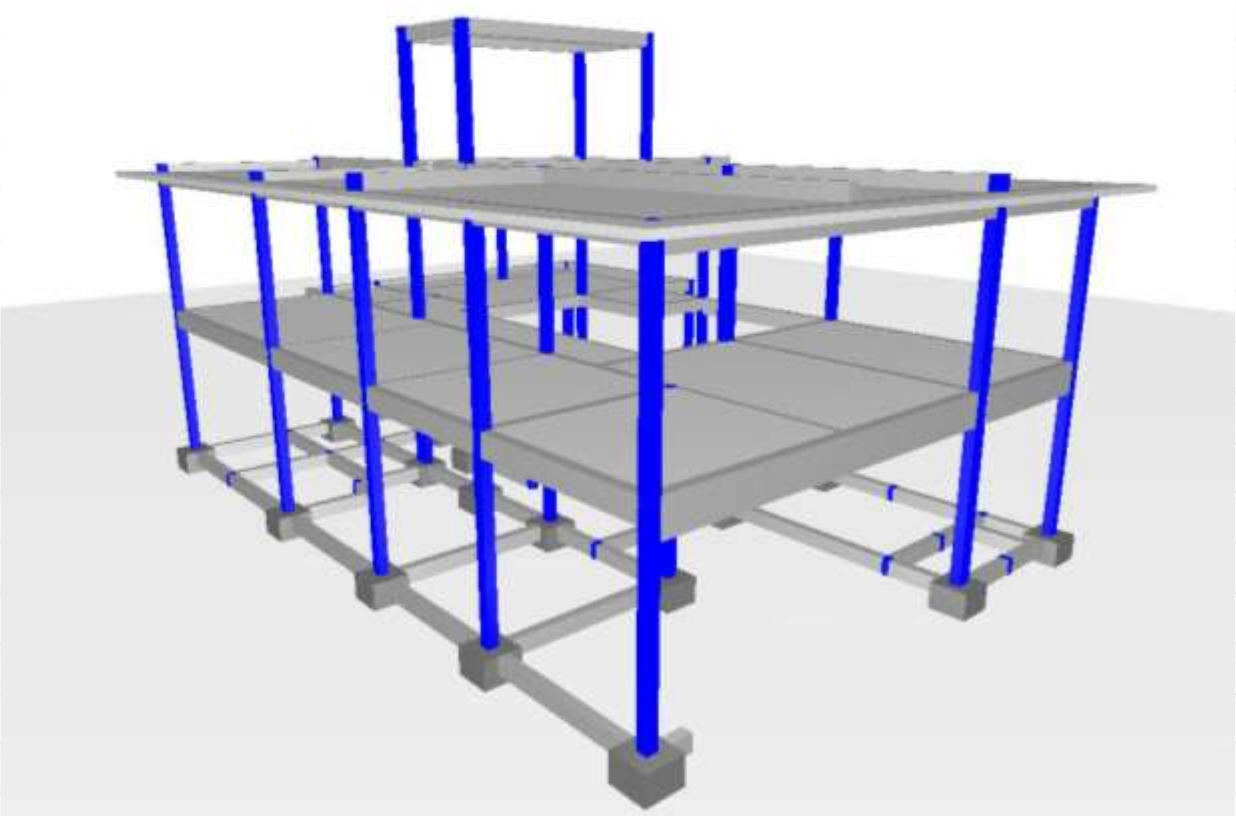
- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?





# Onde Ocorre a Torção?

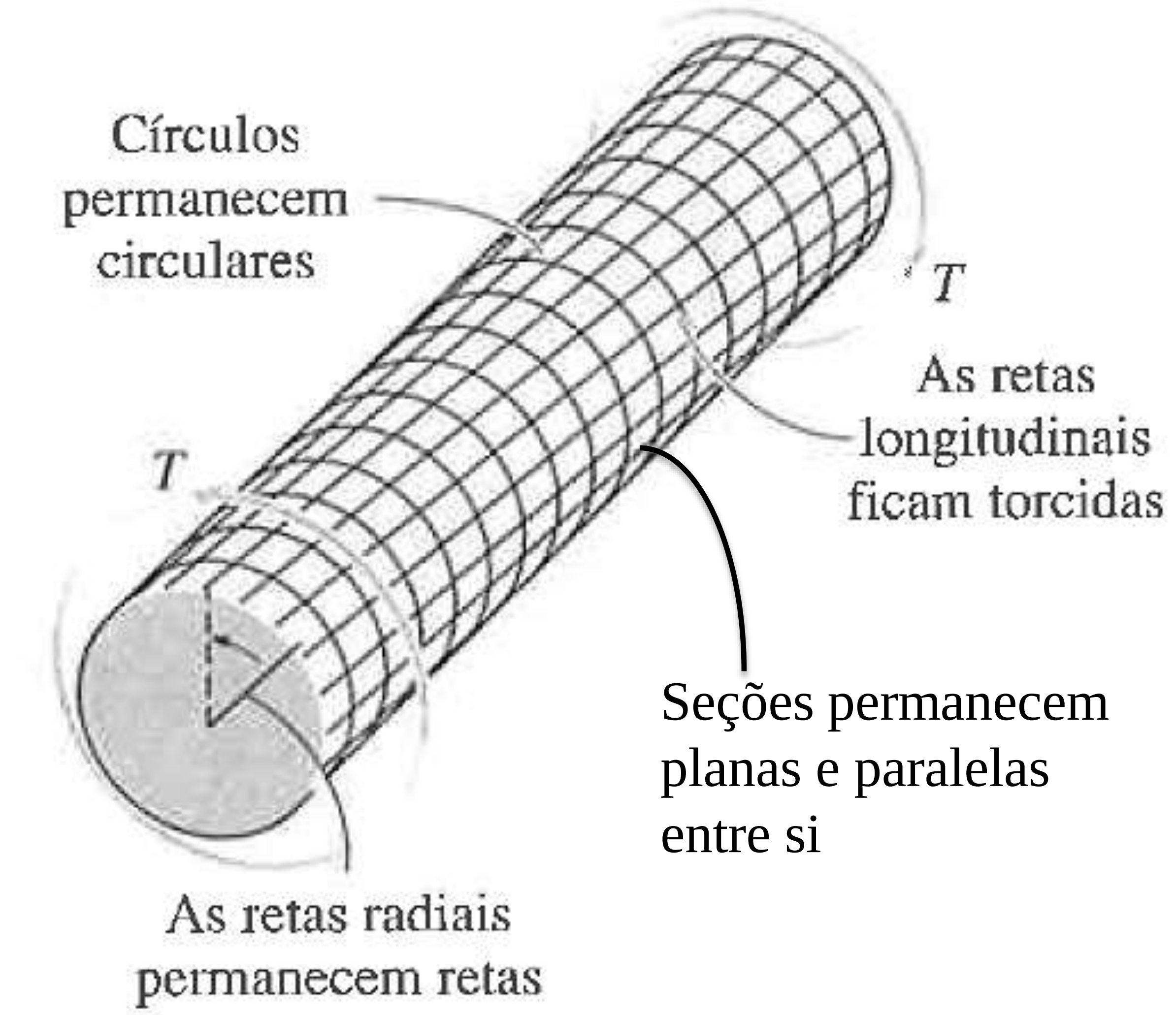
- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



# Entendendo Melhor a Deformação na Torção

# Deformação por Torção

- Vamos observar a deformação de perto



# Deformação por Torção

- Vamos observar a deformação de perto


**Deformações Pequenas:**

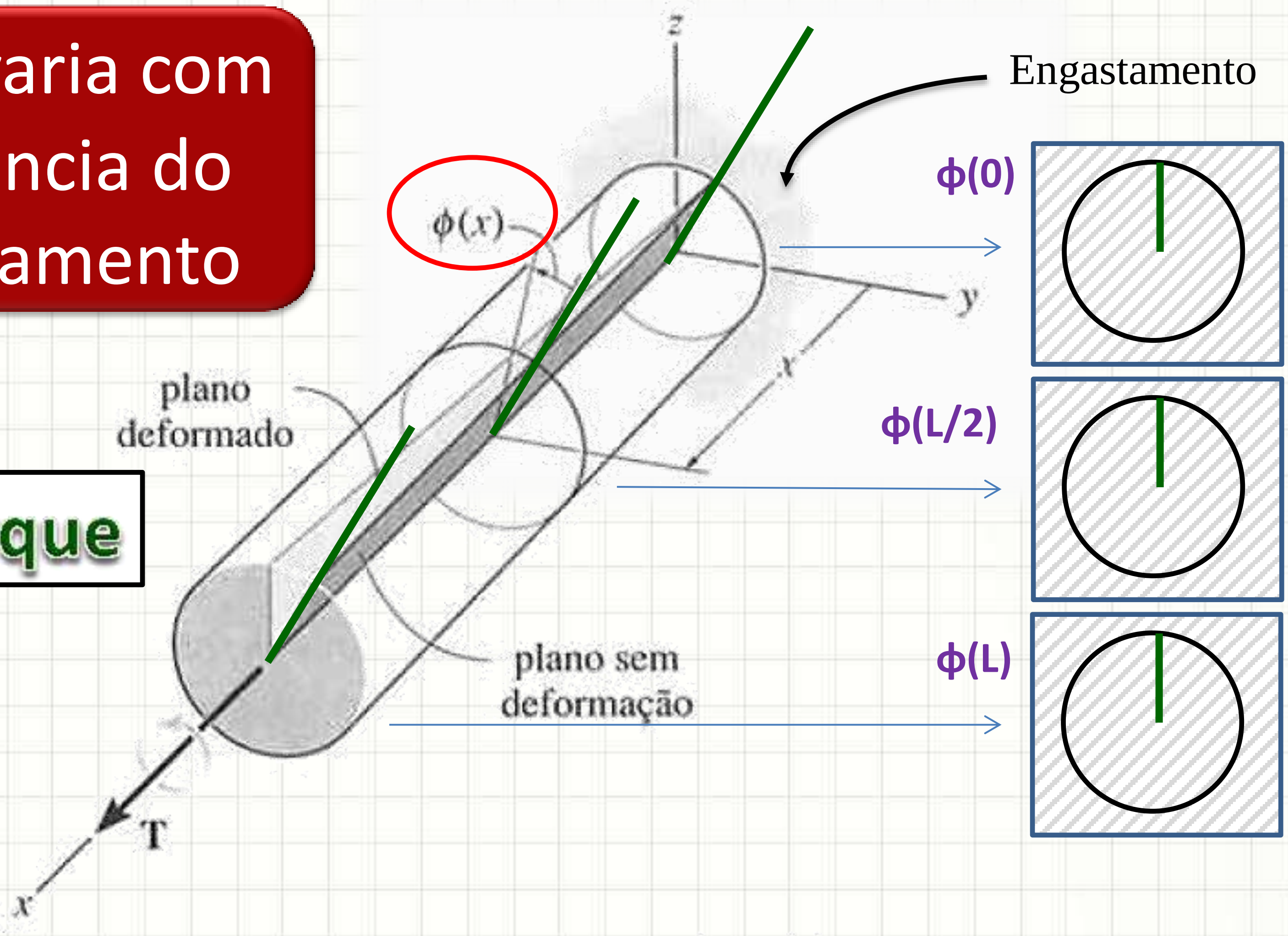
- Raio não muda
- Comprimento não muda

# Ângulo de Torção

- Pode-se definir a deformação por ângulo $\phi(x)$

$\phi(x)$ : varia com a distância do engastamento

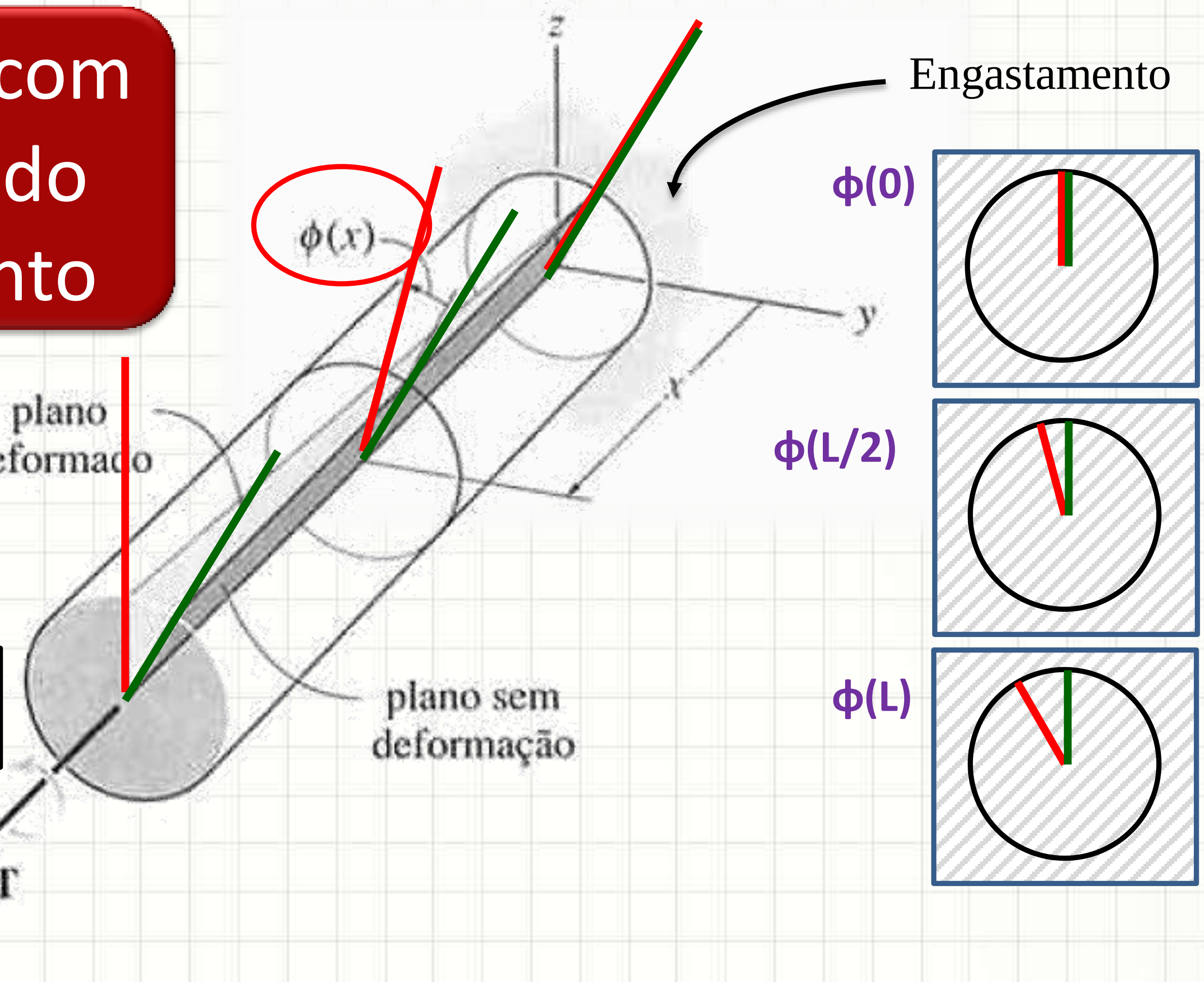
**Sem Torque**



# Ângulo de Torção

- Pode-se definir a deformação por ângulo $\phi(x)$

**$\phi(x)$ : varia com a distância do engastamento**




**Sem Torque**

**Com Torque**

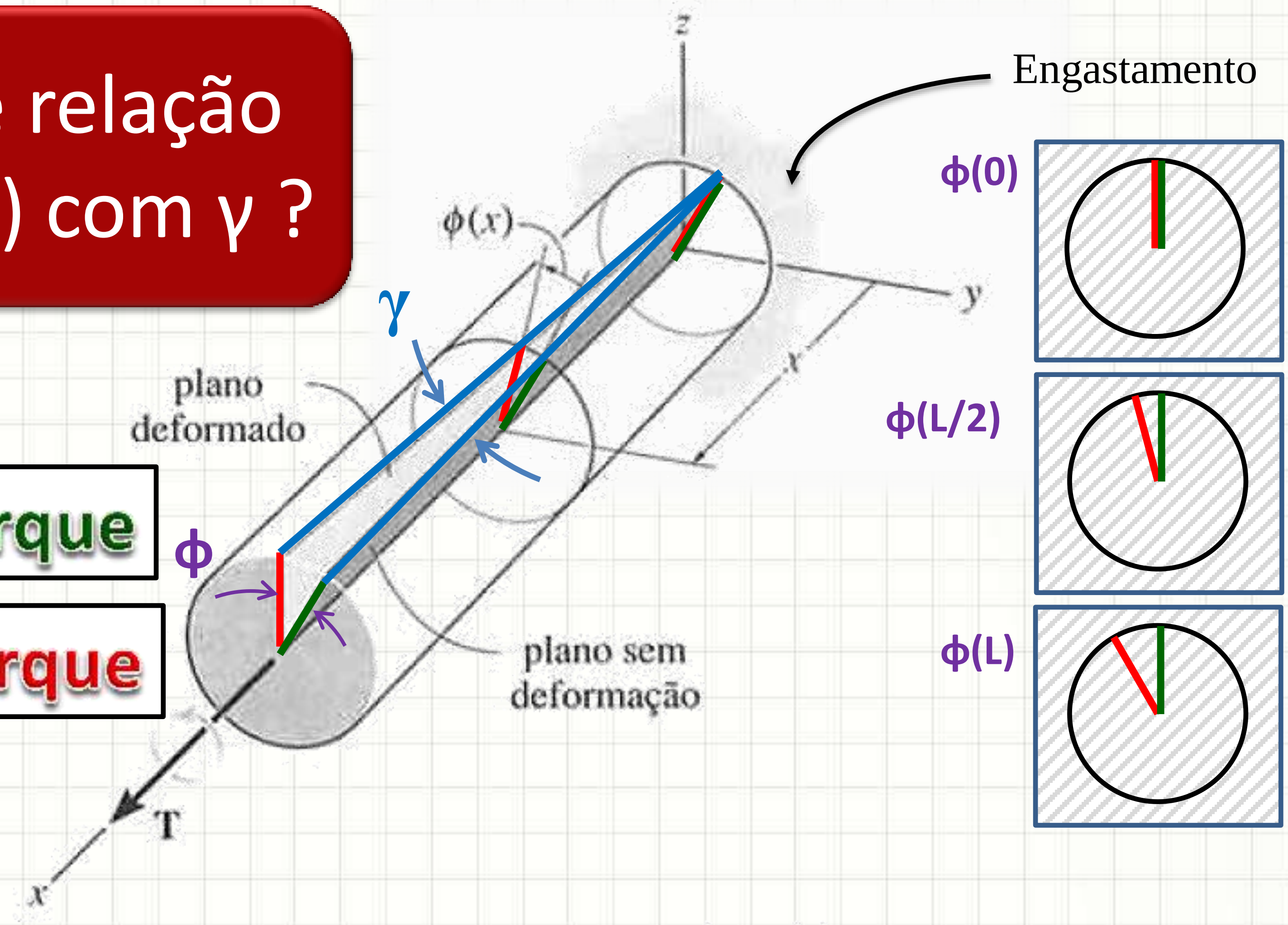
# Ângulo de Torção

- Pode-se definir a deformação por ângulo ϕ(x)

Existe relação de ϕ(x) com γ ?

**Sem Torque**

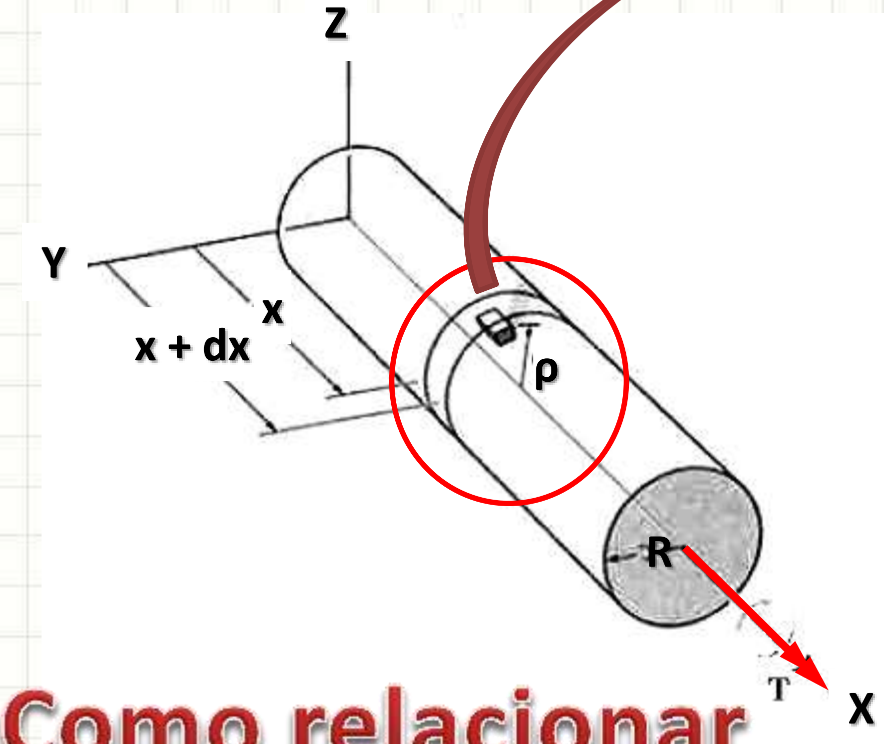
**Com Torque**

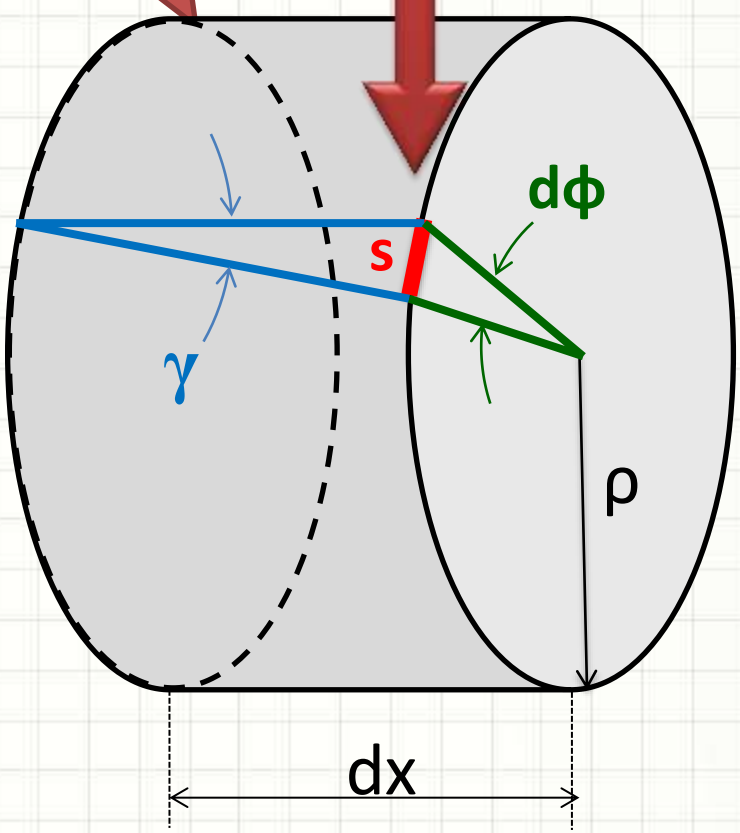


# Ângulo de Torção

- Vamos entender melhor esse $\phi(x)$

Quanto mede?

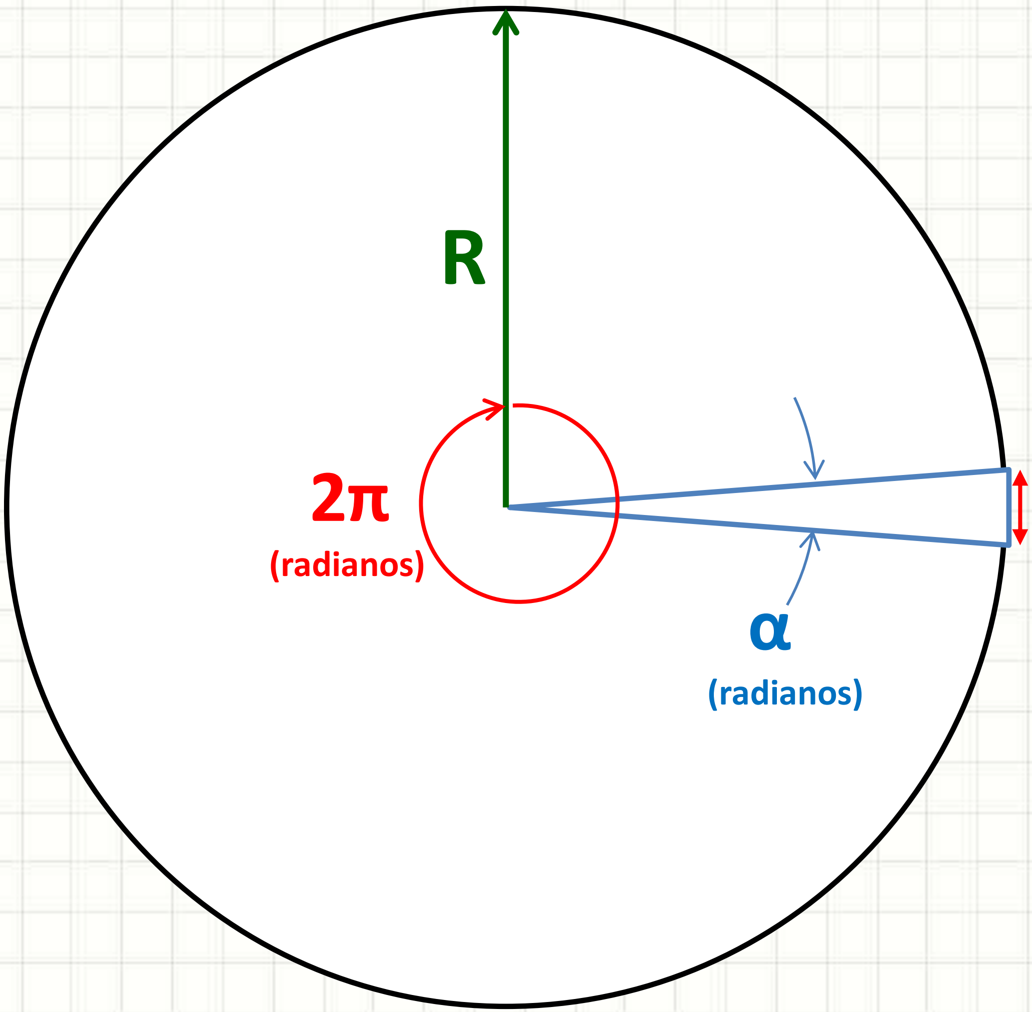



Como relacionar $\gamma$ com $d\phi$ ?

# Ângulo de Torção

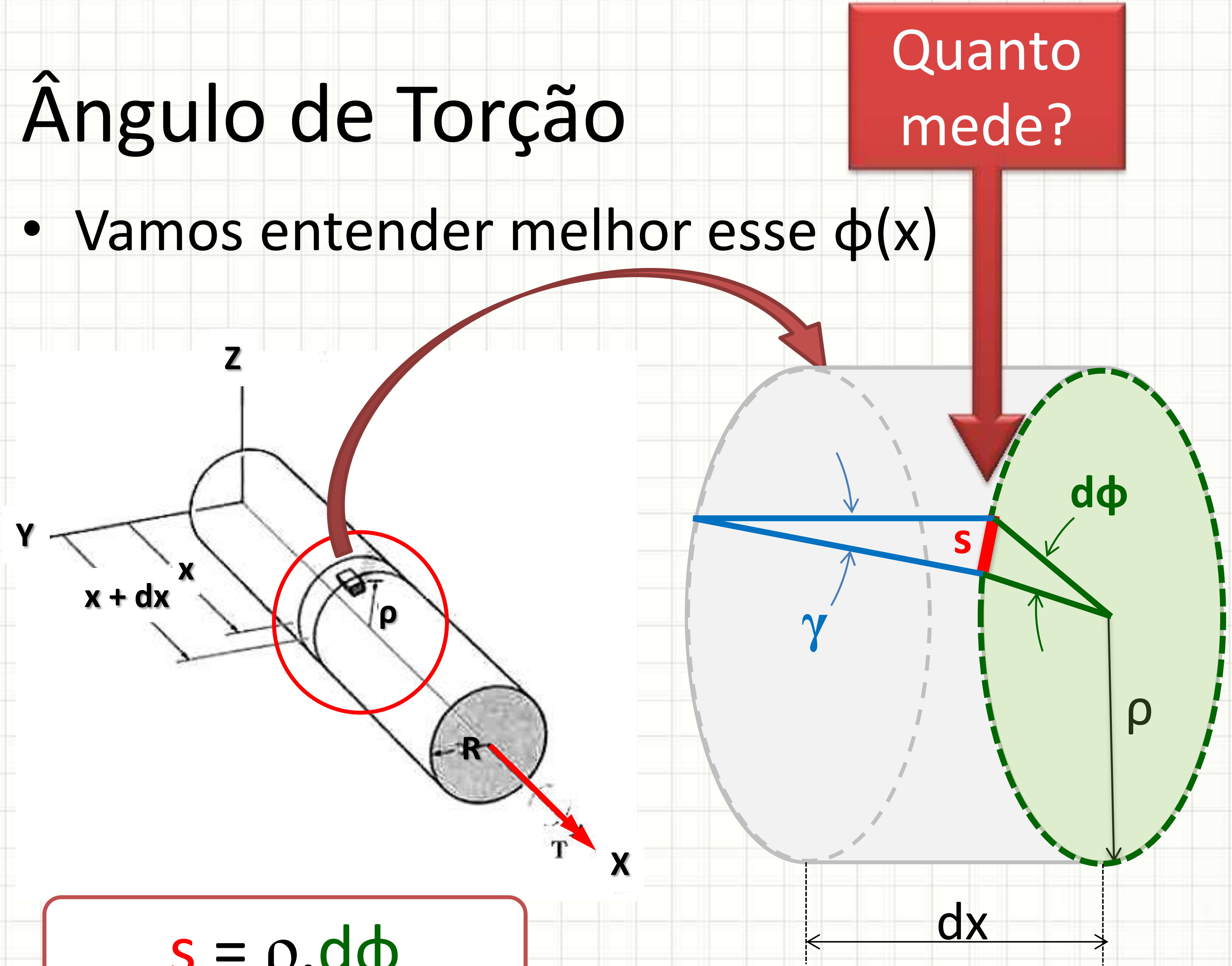
- Relembremos a relação trigonométrica




- Perímetro?
  - $2\pi . R$
- E do arco?
  - $\alpha . R$

# Ângulo de Torção

- Vamos entender melhor esse ϕ(x)

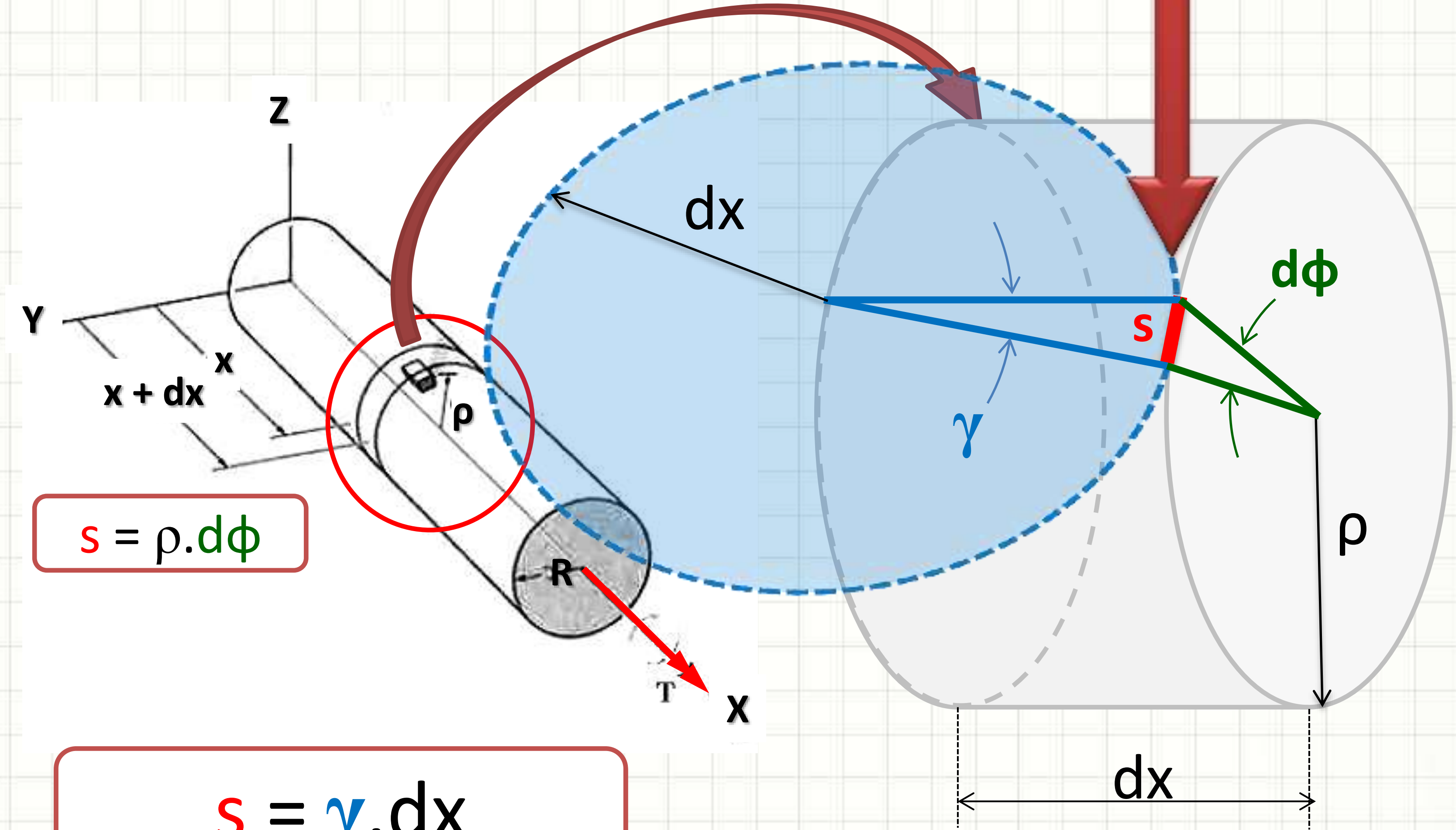



$$s = \rho . d\phi$$

# Ângulo de Torção

- Vamos entender melhor esse $\phi(x)$

Quanto mede?



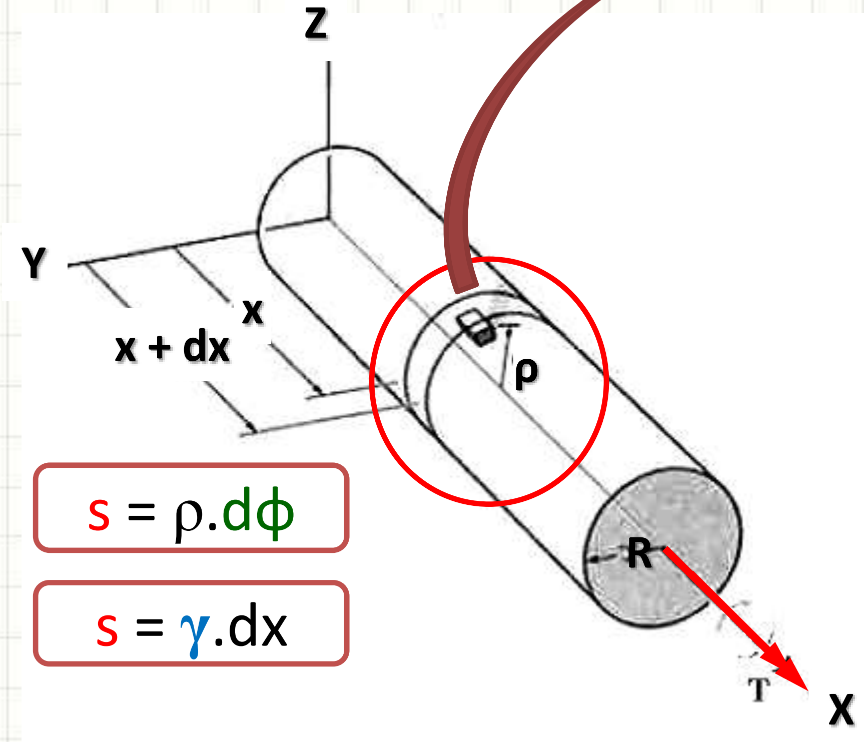

$s = \rho . d\phi$

$s = \gamma . dx$

# Ângulo de Torção

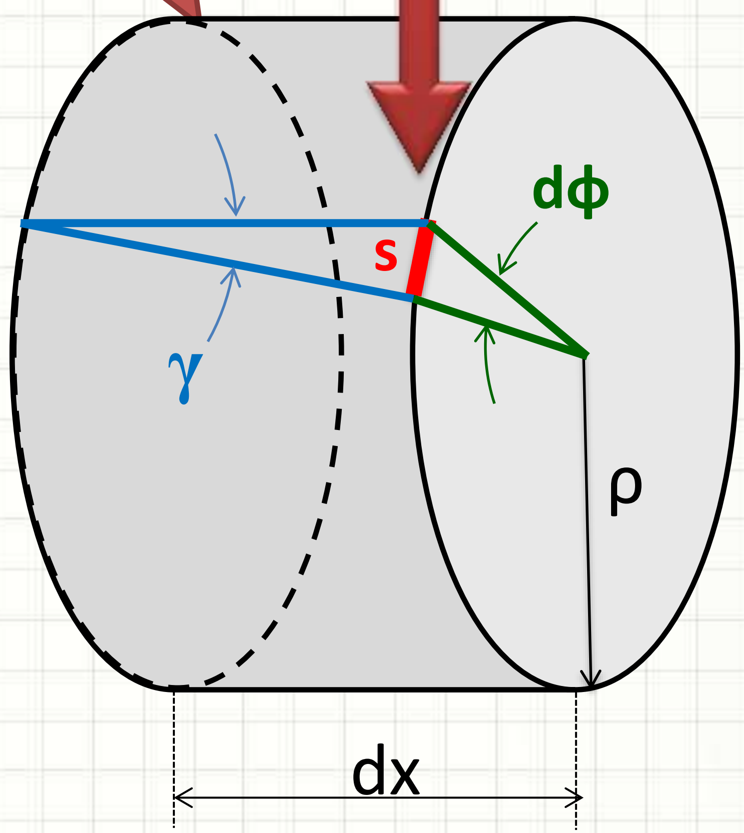
- Vamos entender melhor esse $\phi(x)$

Quanto mede?




$s = \rho . d\phi$

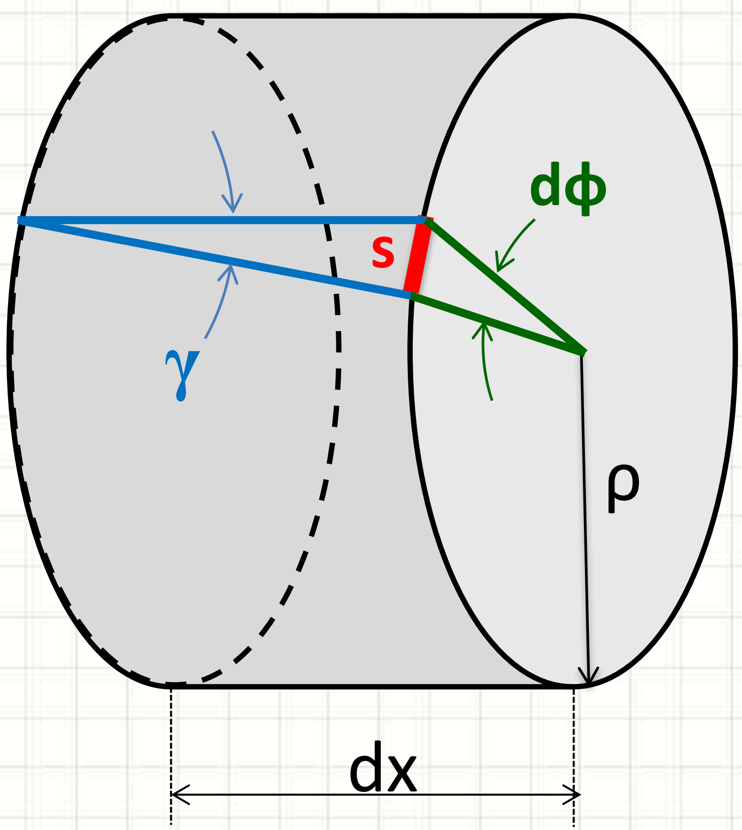
$s = \gamma . dx$




$$\rho . d\phi = \gamma . dx$$

# Ângulo de Torção

- Portanto...




$$\rho . d\phi = \gamma . dx$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

$\gamma$: deformação de cisalhamento

# Analogia entre γ e ε

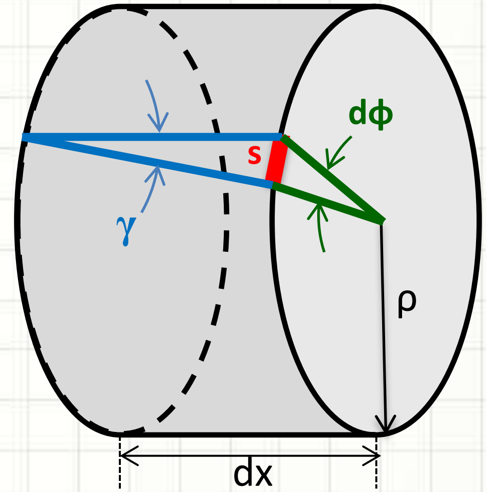
- Para materiais elásticos:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Lei de Hooke

$\sigma$ : Tensão Normal

$E$ : Módulo de Elasticidade




$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

- E para o cisalhamento?

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

$\tau$ : Tensão de Cisalhamento

$G$ : Módulo de Cisalhamento

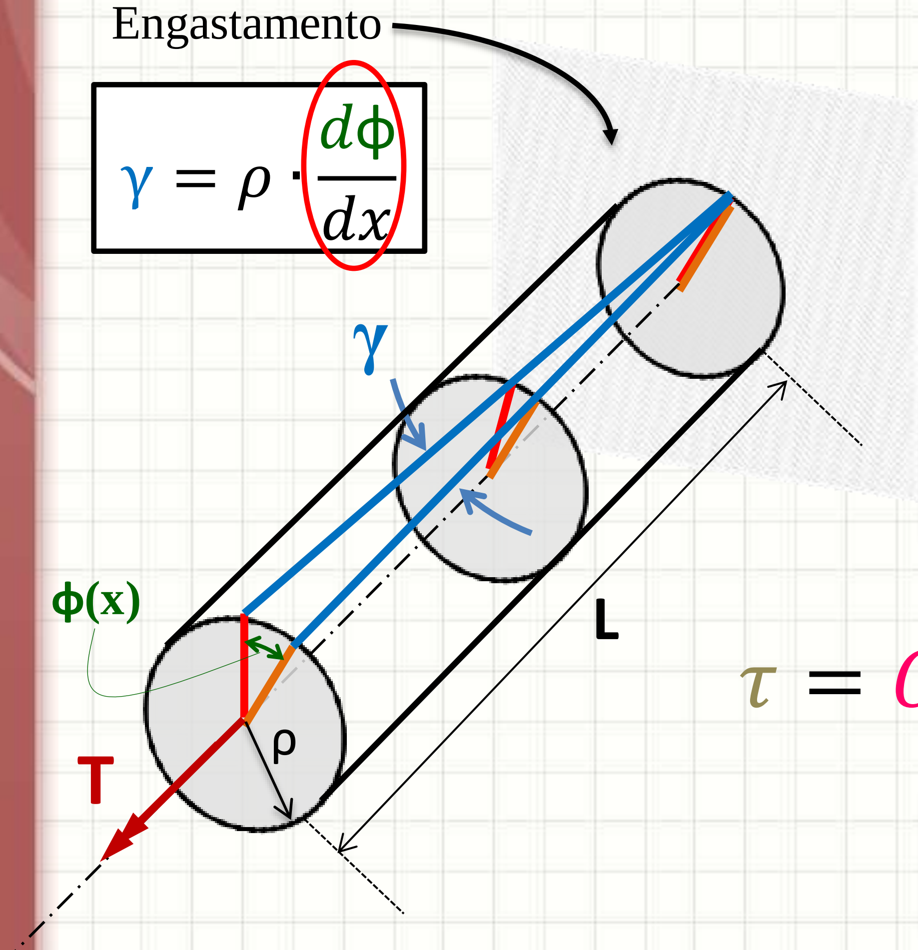
# Ângulo de Torção na Torção Pura

- Na torção pura, $\frac{d\phi}{dx} = constante: \theta$

$$\boxed{\theta = \frac{\phi}{L}}$$

- $[\theta]$: rad/m

$$\boxed{\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}}$$




$$\boxed{\gamma = \rho \cdot \theta}$$

Quanto maior o raio ρ...
Maior o γ

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau = G \cdot \rho \cdot \theta}$$

Quanto maior o raio ρ...
Maior o $\tau$

# Exercício

- Considere uma barra de seção circular de raio 0,1m que, em sua superfície externa, sofre um cisalhamento de 20MPa.
- Sabendo que o  módulo de cisalhamento do material é de 40GPa, quanto é a rotação da seção transversal em rads/m?

$$\boxed{\tau = G \cdot \rho \cdot \theta}$$

# Exercício

- Considere uma barra de seção circular de raio 0,1m que, em sua superfície externa, sofre um cisalhamento de 20MPa.
- Sabendo que o  módulo de cisalhamento do material é de 40GPa, quanto é a rotação da seção transversal em rads/m?

$$\boxed{\tau = G \cdot \rho \cdot \theta} \qquad \theta = \frac{\tau}{G \cdot \rho} \qquad \theta = \frac{20.10^6}{40.10^9 \cdot 10^{-1}}$$

$$\boxed{\theta = 5.10^{-3} rad/m}$$

# A Fórmula da Torção

## em Barras Homogêneas de Materiais Elásticos Isotrópicos

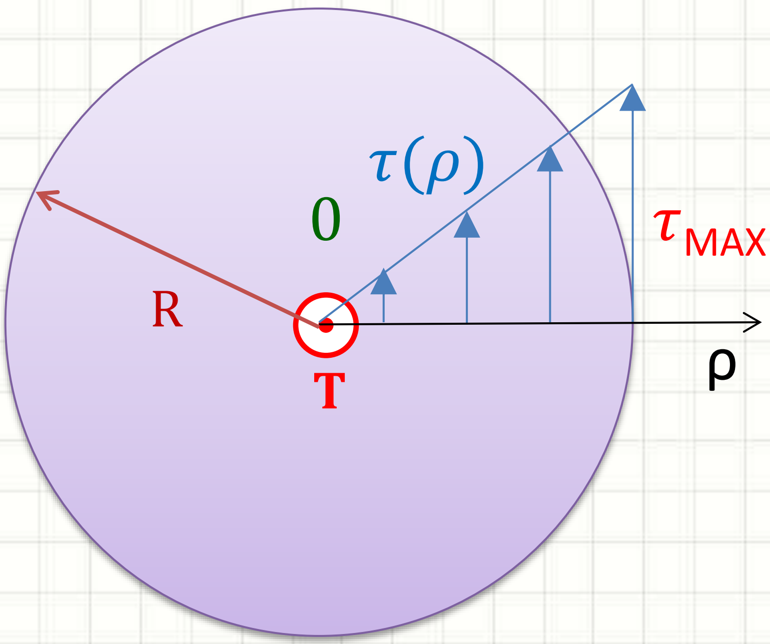
# A Fórmula Torção

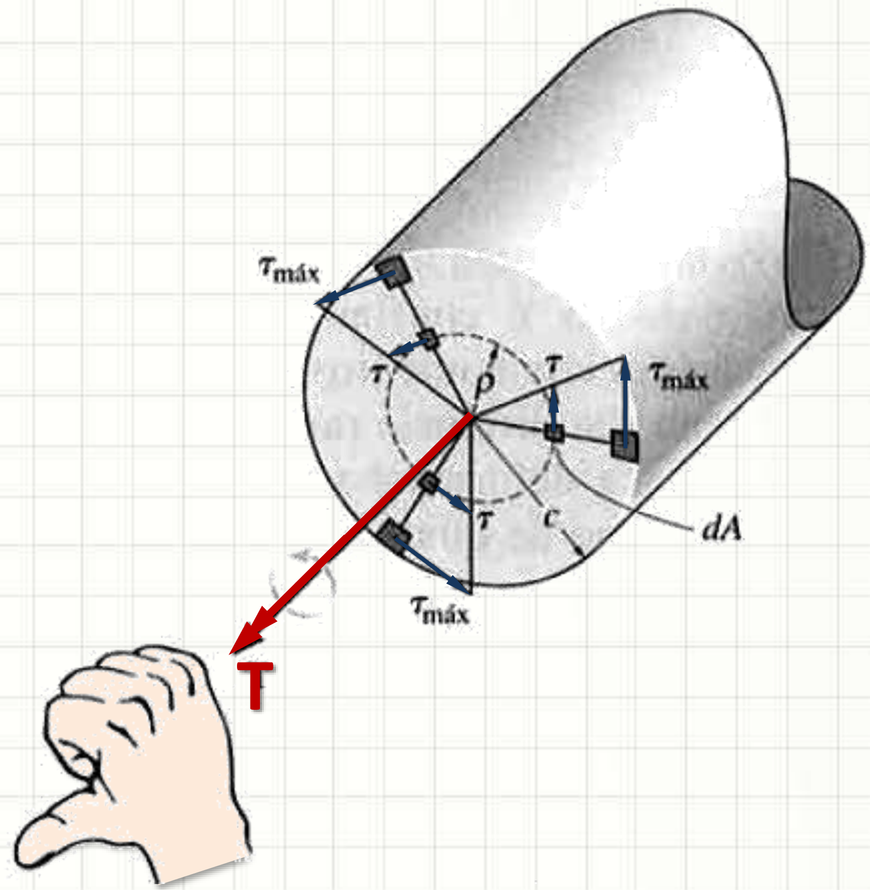
**$\rho = 0 \rightarrow \tau = 0$**

**$\rho = R \rightarrow \tau = máx$**

- Visualizando a equação:

$$\boxed{\tau = G \cdot \rho \cdot \theta}$$

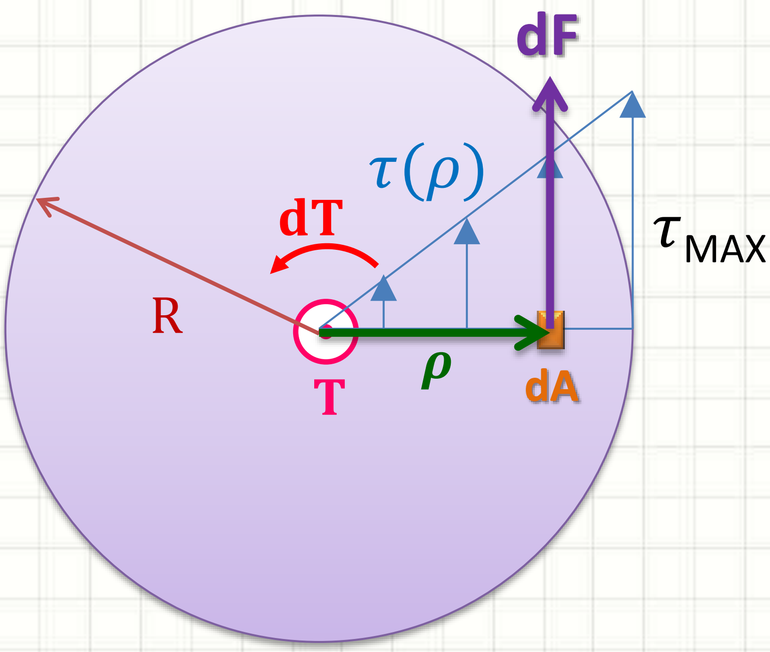


# A Fórmula Torção

- Qual a relação de **τ** com o torque **T**?

$\boxed{\sigma = F/A} \rightarrow \boxed{\tau = F/A} \rightarrow \boxed{F = \tau . A}$




$dF = \tau . dA$

$dT = \rho . dF \rightarrow dT = \rho . \tau . dA$

- Mas...

$$T = \int_A dT \rightarrow$$

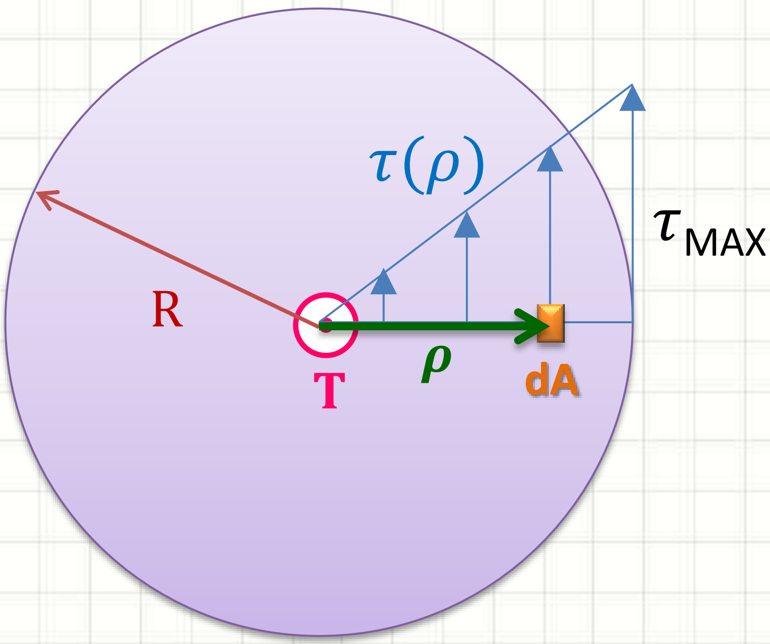
$$T = \int_A \rho . \tau . dA$$

# A Fórmula Torção

$$\boxed{T = \int_A \rho \,.\, \tau \,.\, dA}$$

- Ocorre que existe relação linear entre $\tau$ e $\tau_{MAX}$

$$\tau = \frac{\rho}{R} \,.\, \boldsymbol{\tau_{MAX}}$$




$$T = \int_A \rho \,.\, \frac{\rho}{R} \,.\, \tau_{MAX} \,.\, dA$$

$$T = \int_A \rho^2 \frac{\tau_{MAX}}{R} \,.\, dA$$

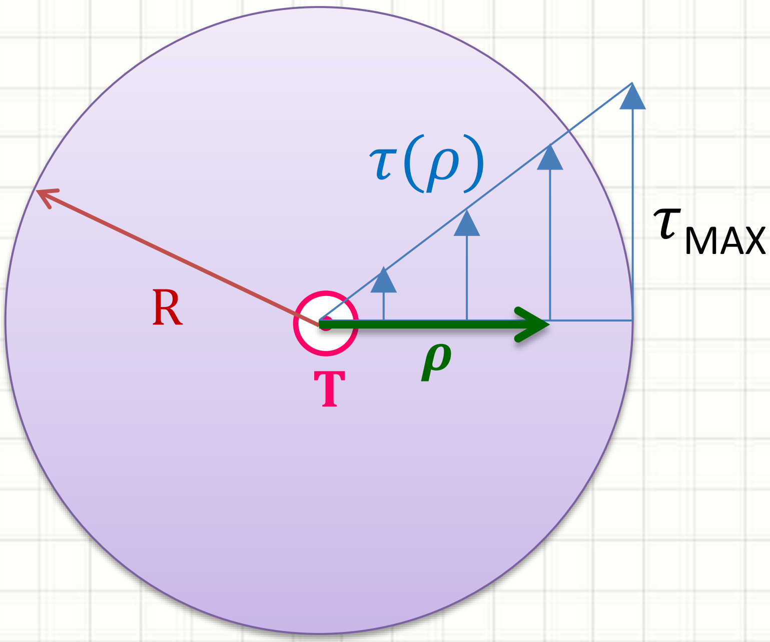
$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R} \boxed{\int_A \rho^2 \,.\, dA}$$

$$\boxed{T = \frac{\tau_{MAX}}{R} \,.\, J}$$

# A Fórmula Torção

- Define-se assim a **Fórmula da Torção**:

$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R} . J$$



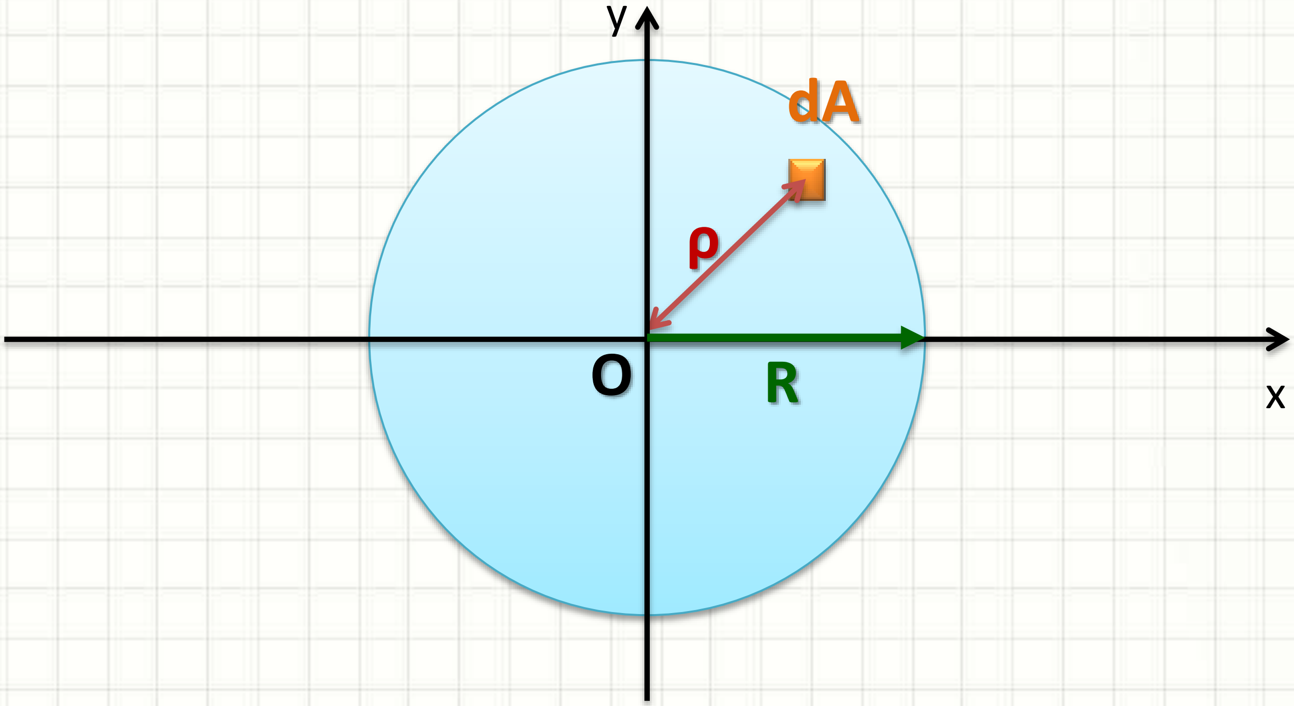

Ou, mais útil...

$$\tau_{MAX} = \frac{T . R}{J}$$

$$\tau(\rho) = \frac{T . \rho}{J}$$

# Exemplo para Eixo Maciço

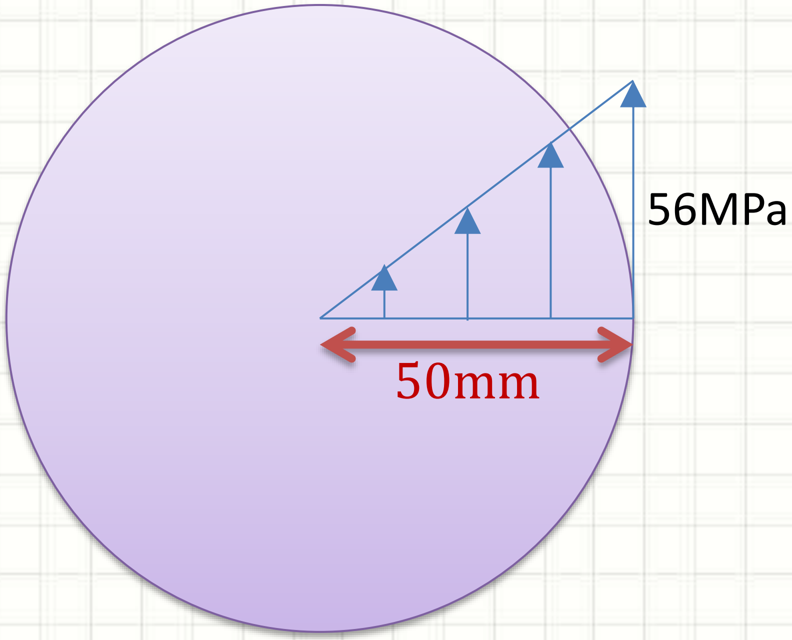
- J, para uma barra maciça de seção circular, é...




$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\boldsymbol{\pi \cdot R^4}}{\mathbf{2}}$$

# Exercício

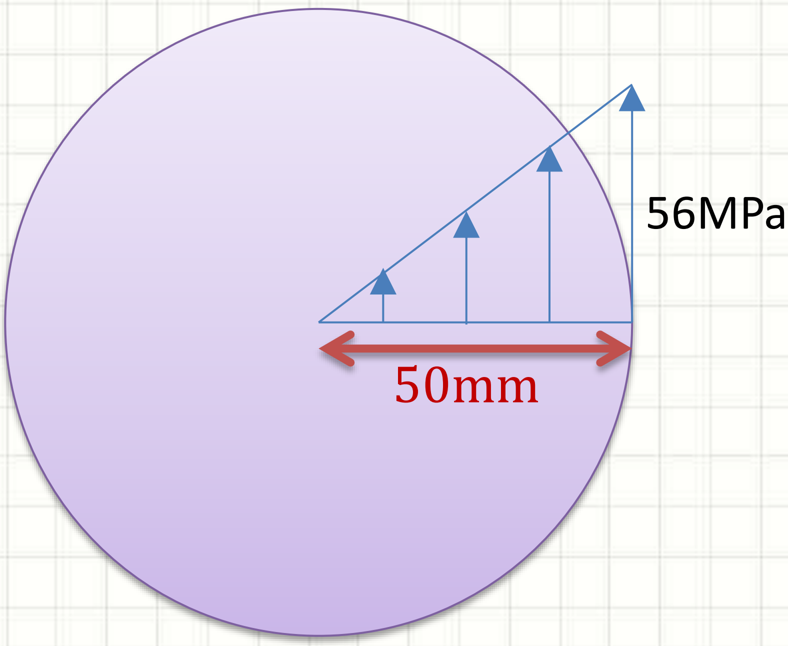
- Uma barra engastada de comprimento 10m e R=50mm está submetida à seguinte distribuição de cisalhamento




- Calcule o torque total agindo sobre a barra

# Exercício

- L=10m R=50mm T=?




- Sabemos que...

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$

- Logo...

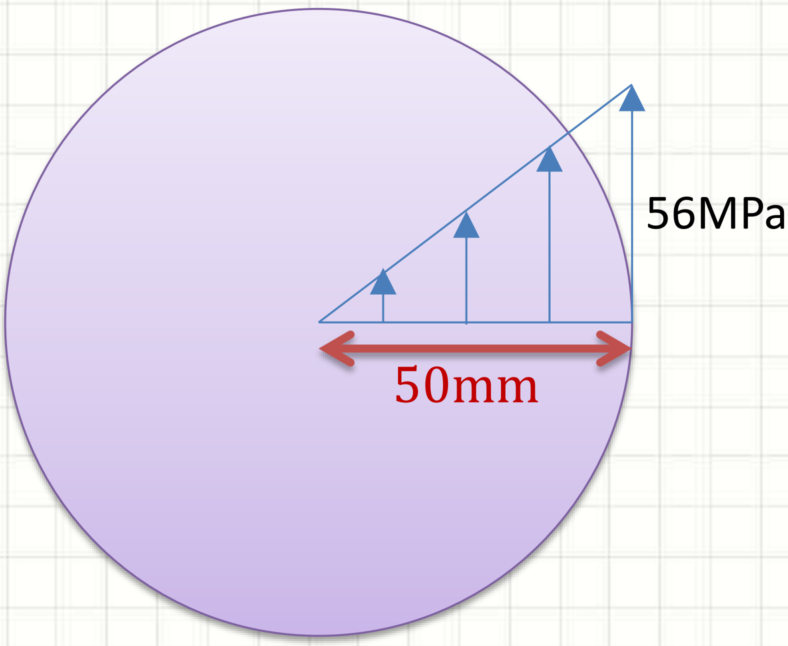
$$T = \frac{\tau_{MAX}.J}{R}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}.\pi.R^4}{R.2}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}.\pi.R^3}{2}$$

# Exercício

- L=10m     R=50mm     T=?




- Então...

$$T = \frac{\tau_{MAX}.\pi.R^3}{2}$$

$$T = \frac{56.10^6.\pi.(5.10^{-2})^3}{2}$$

$$T = 28.\pi.125$$

$$\boldsymbol{T = 10995,572N.m}$$
$$\boldsymbol{\cong 11kN.m}$$

# Exemplo para Eixo Tubular

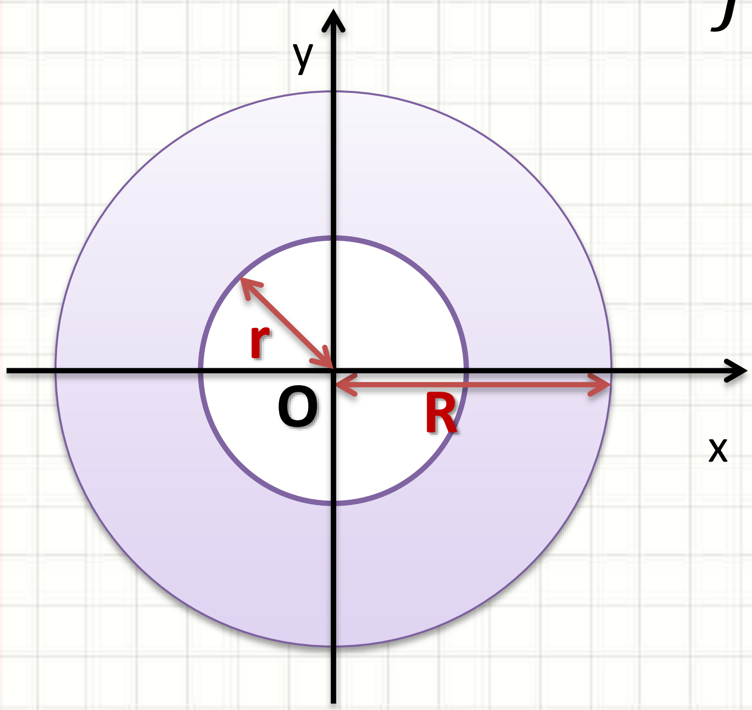
- No eixo tubular, há uma região vazia... J=?

$$J = J_{cheio} - J_{vazio}$$

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} - \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

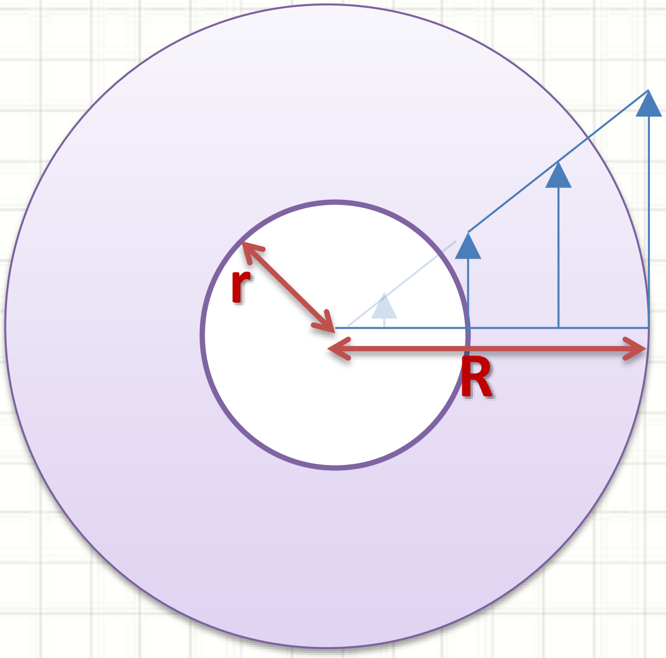
$$J = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$



# Eixo Tubular: Torção/Cisalhamento

- Distribuição de cisalhamento

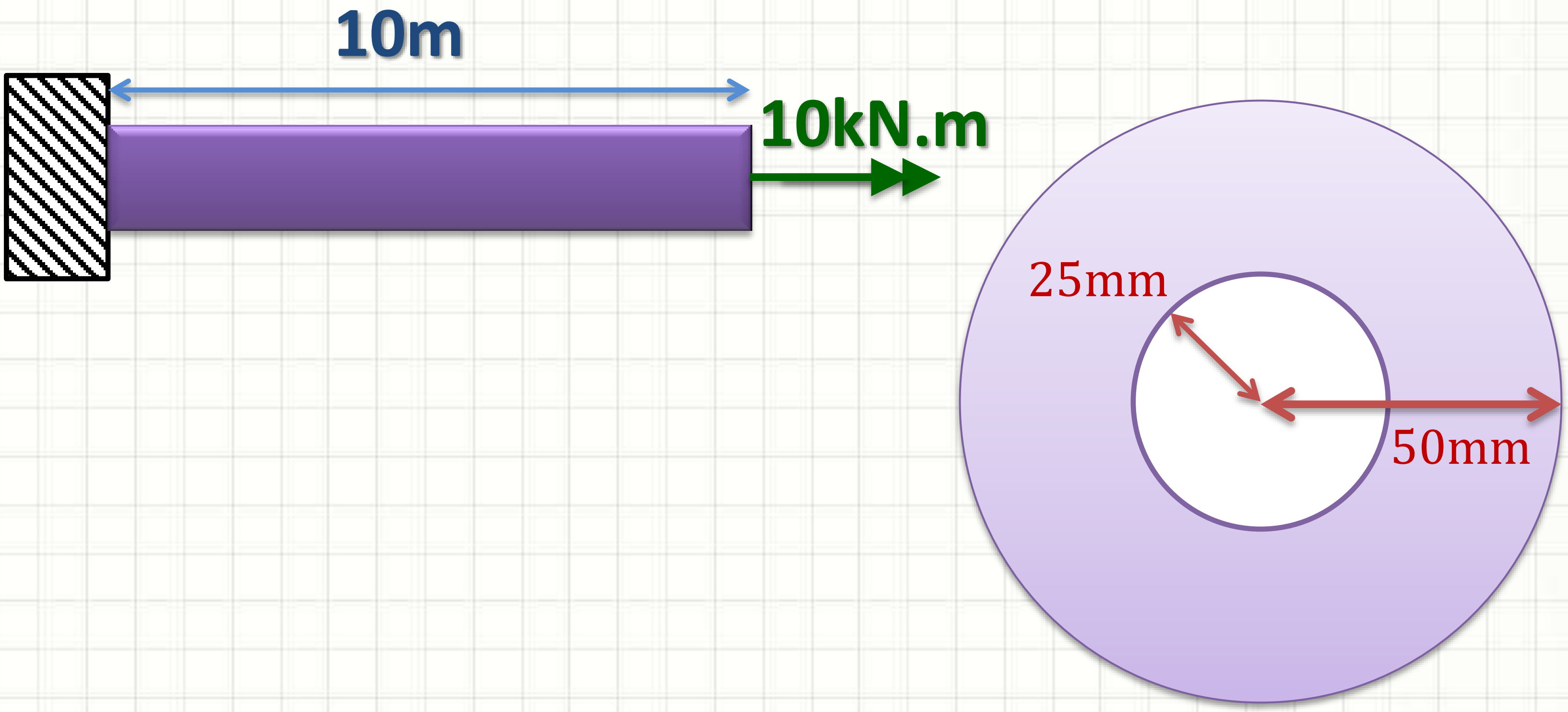



$$\tau_{min} = \frac{T.r}{J}$$

# Exercício Pré-Intervalo

# Exercício

- Sabendo que o $\tau_{adm}$ = 50MPa, verifique se a barra resiste ao torque aplicado. Calcule o cisalhamento na parte interna do tubo.

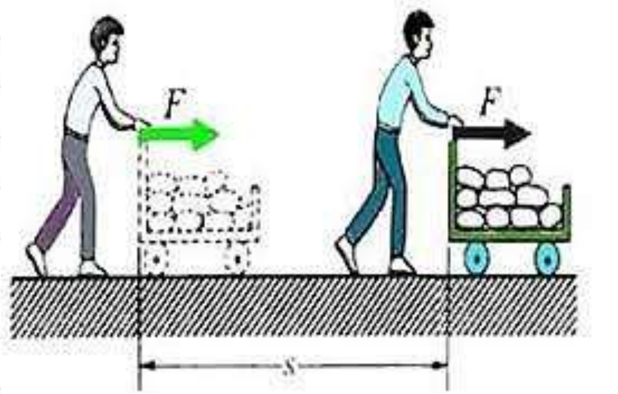


# Pausa para o Café!

# Transmissão de Potência por Torção

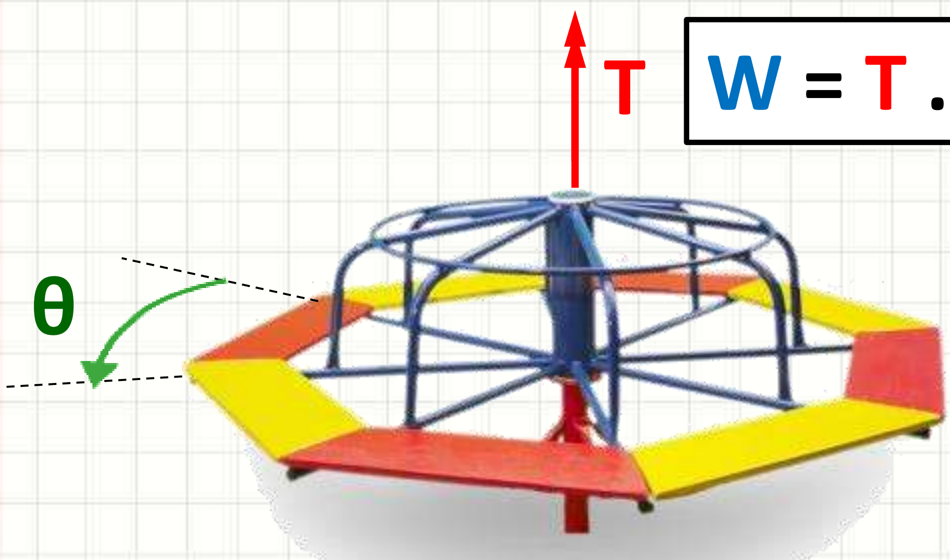
# Trabalho do Torque

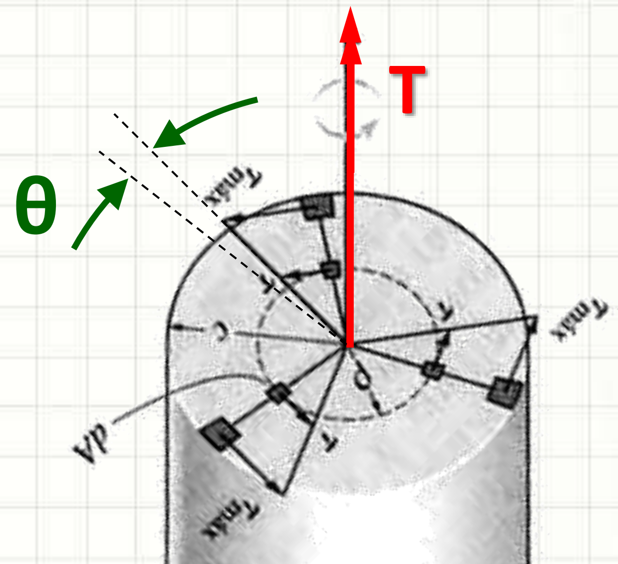
- **Trabalho**: força x deslocamento




- O torque **T** é força que causa deslocamento **θ**

$$\boxed{W = T \cdot \theta}$$



# A Potência do Torque

- **Trabalho**: força x deslocamento $W = T \cdot \theta$

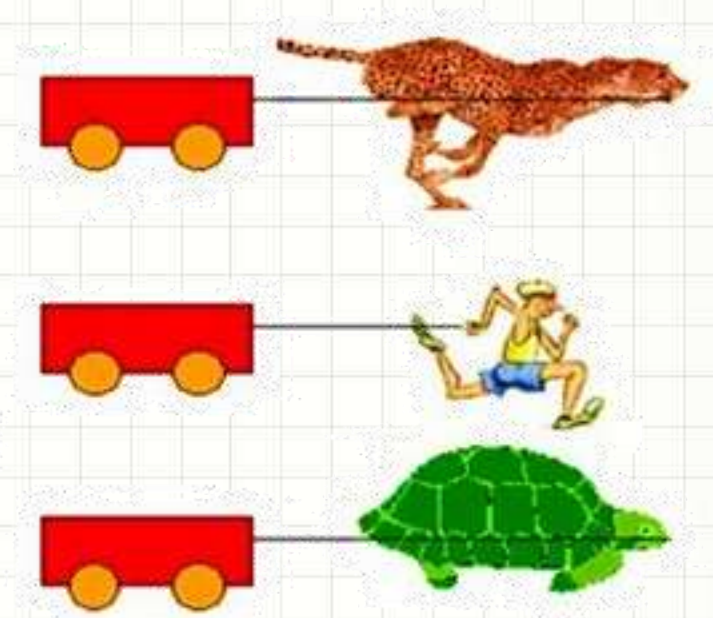
  [T]: N.m [θ]: rad

- **Potência**: trabalho / unidade de tempo
  - Com que velocidade esse trabalho é feito?

Watts

$$P = \frac{W}{t}$$

Segundos



  - Logo...

$$P = T\,\frac{\theta}{t}$$

# A Potência do Torque

- **Trabalho**: força x deslocamento $\boxed{W = T \,.\, \theta}$

  [T]: N.m [θ]: rad

- **Potência**: trabalho / unidade de tempo

Watts $\rightarrow$ $\boxed{P = T \dfrac{\theta}{t}}$ $\leftarrow$ Radianos / Segundos ?

  – Logo...

$$\boxed{P = T \,.\, \omega}$$

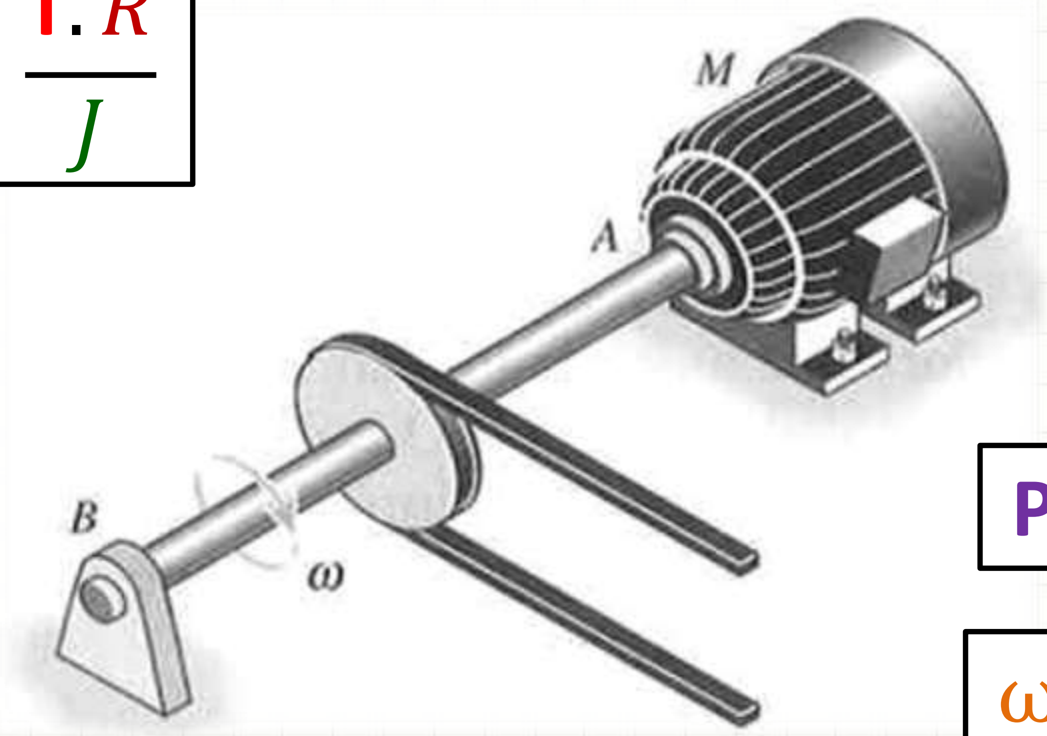
$$\boxed{\omega = 2.\pi.f}$$

P : potência, em Watts
T : torque, em N.m
ω : vel. angular, em rad/s
f : frequência em Hz (rot/s)

# Exercício

- Calcule o diâmetro do eixo maciço de aço
  - P = 3750W, f = 175 rpm, $\tau_{ADM}$=100MPa

$$\tau_{MAX} = \frac{\mathbf{T}.R}{J}$$




$$\mathbf{P} = \mathbf{T} . \omega$$

$$\omega = 2.\pi.\mathbf{f}$$

# Exercício

- Calcule o **diâmetro** do eixo maciço de aço
  - P = 3750W, f = 175 rpm, $\tau_{ADM}$=100MPa

$$\underbrace{\boxed{\tau_{MAX} = \frac{\mathrm{T}.R}{J}} \qquad \boxed{J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}}}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2.\mathrm{T}.\cancel{R}}{\pi \cdot R^{\cancel{4}}} \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{2.\mathrm{T}}{\pi \cdot R^3} \rightarrow$$

$$R^3 = \frac{2.\mathrm{T}}{\pi \cdot \tau_{MAX}} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{2.\mathrm{T}}{\pi \cdot \tau_{MAX}}}$$

# Exercício

- Calcule o diâmetro do eixo maciço de aço
  - P = 3750W, f = 175 rpm, $\tau_{ADM}$=100MPa

$$R = \sqrt[3]{\frac{2.T}{\pi \cdot \tau_{MAX}}}$$

$$\boxed{P = T.\omega}$$

$$\boxed{\omega = 2.\pi.f}$$

$$\rightarrow P = T.2.\pi.f \rightarrow T = \frac{P}{2.\pi.f} \rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{2.P}{2.\pi^2.f \cdot \tau_{MAX}}}$$

# Exercício

- Calcule o diâmetro do eixo maciço de aço
  - P = **3750W**, f = **175 rpm**, $\tau_{ADM}$=**100MPa**

$$R = \sqrt[3]{\frac{2.T}{\pi \cdot \tau_{MAX}}}$$

$$\boxed{P = T\,.\,\omega}$$

$$\boxed{\omega = 2.\pi.f}$$

$$\rightarrow \; P = T\,.2.\pi.f \; \rightarrow \; T = \frac{P}{2.\pi.f} \rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{2.P}{2.\pi^2.f \cdot \tau_{MAX}}}$$

# Exercício

- Calcule o diâmetro do eixo maciço de aço
  - P = **3750W**, f = **175 rpm**, $\tau_{ADM}$=**100MPa**
  - P = **3750W**
  - f = 175 rpm = 175/60 rps = **2,917Hz**
  - $\tau_{ADM}$= 100MPa = **$10^8$ Pa**

$$R = \sqrt[3]{\frac{2.P}{2.\pi^2.f \cdot \tau_{MAX}}} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{2.3750}{2.\pi^2.2{,}917 \cdot 10^8}}$$

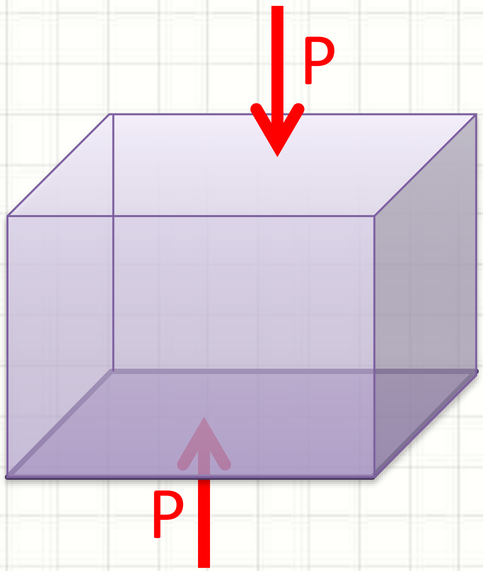
$$R = 0{,}01092m$$

$$\boxed{D \cong 2{,}2cm}$$

# Rompimento

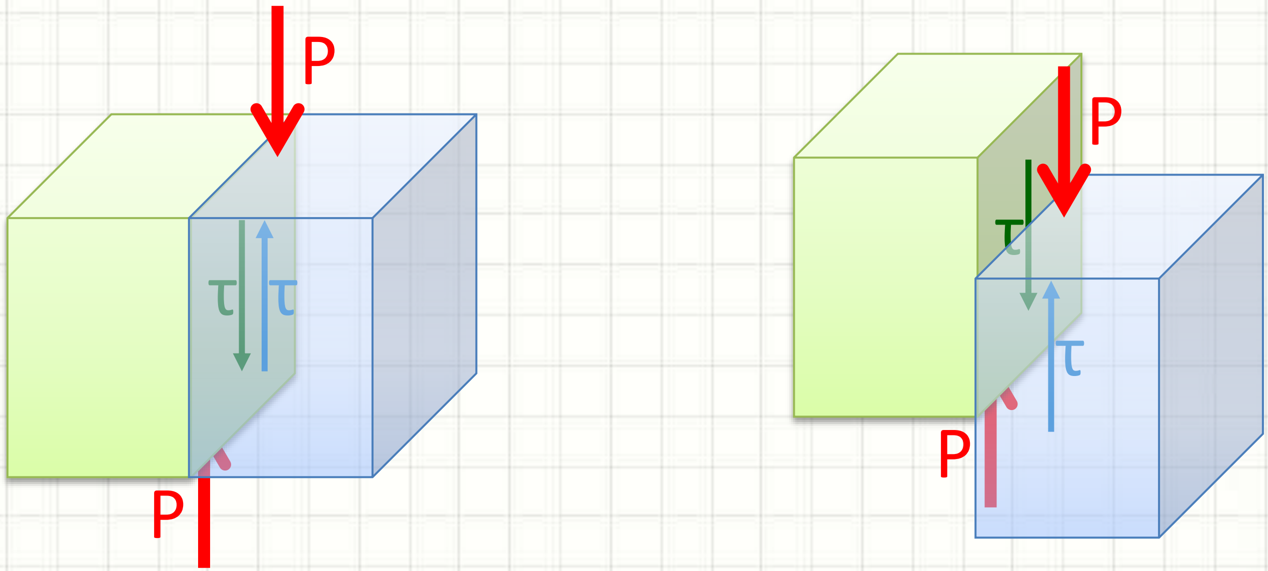
# Rompimento por Torção

- O rompimento por cisalhamento simples...
  - É no plano dessas forças



# Rompimento por Torção

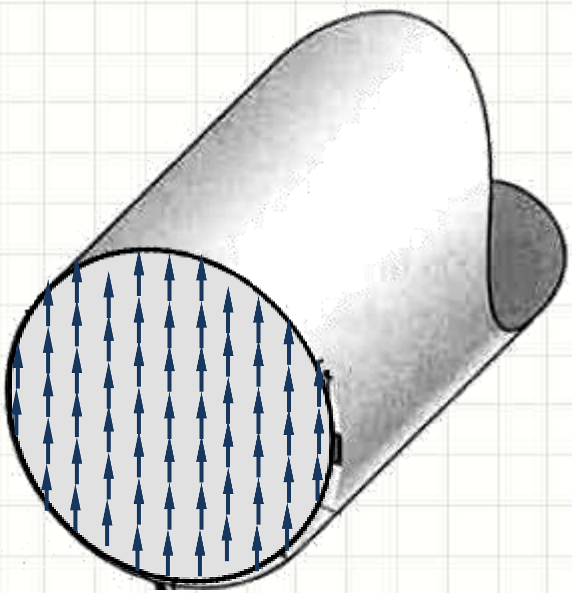
- O rompimento por cisalhamento simples...
  - É no plano dessas forças

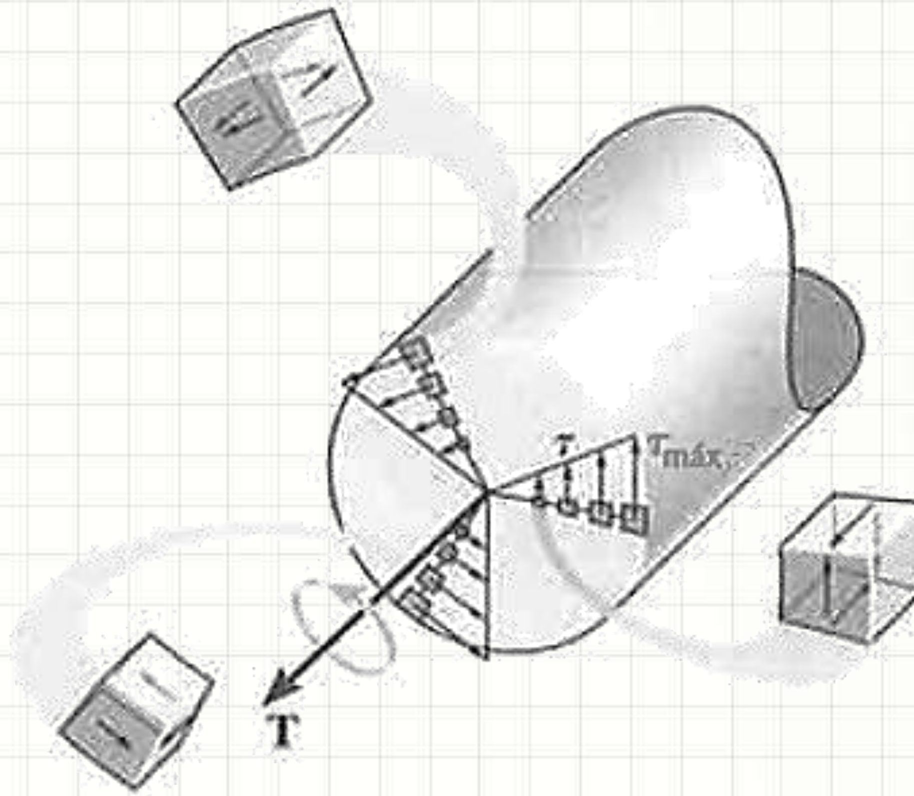



- É isso que ocorre na torção?

# Rompimento por Torção

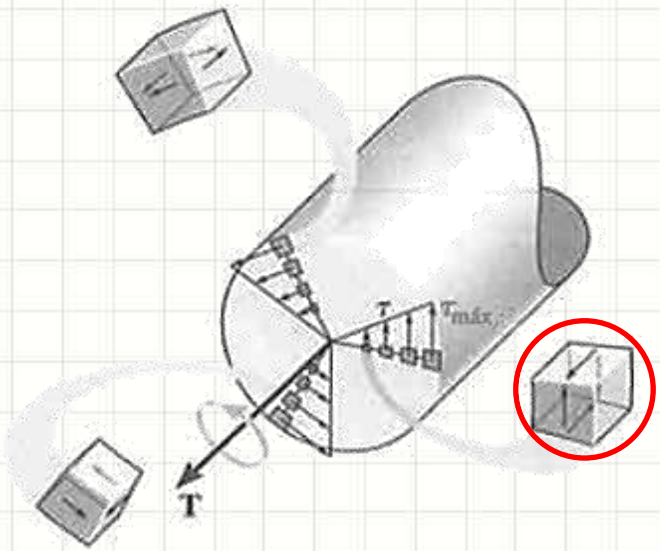
- Na torção, o rompimento é helicoidal!
  - Por quê?

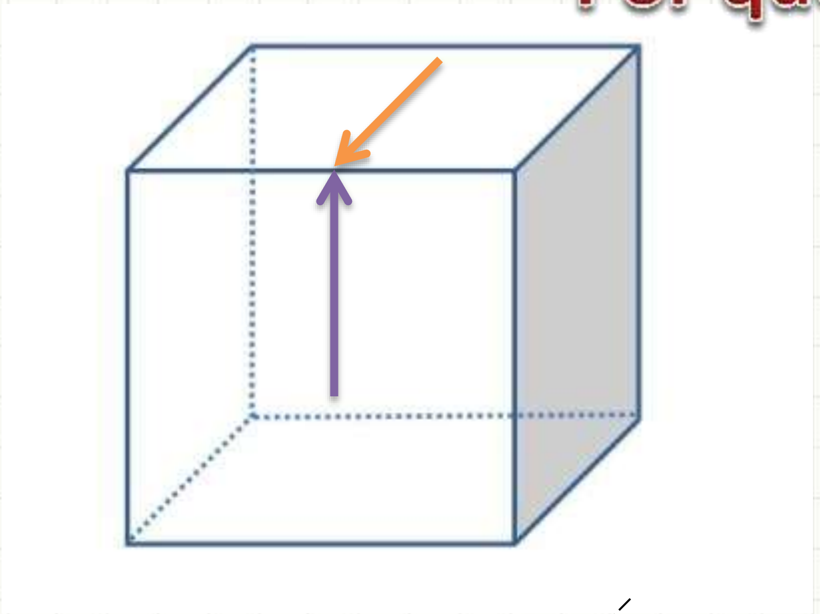


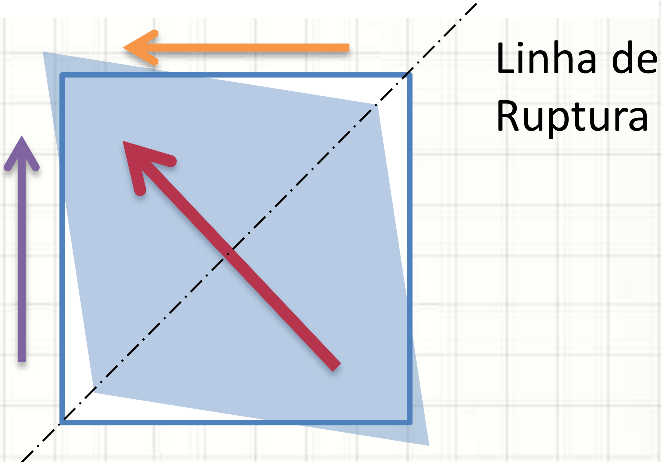


# Rompimento por Torção

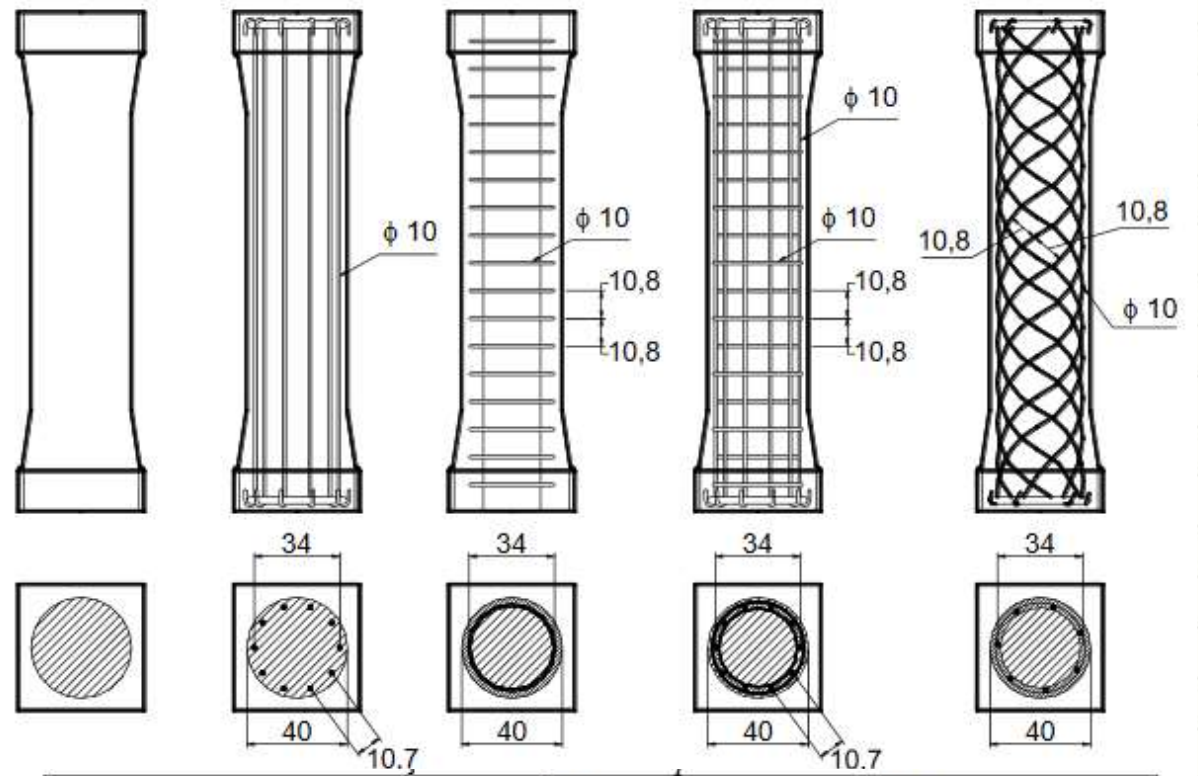
- Na torção, o rompimento é helicoidal! **Por quê?**
  - Por quê?





# Armadura para Torção




| Seção | Momento Torçor de Primeira fissura | Momento Torçor de Ruptura |
|---|---|---|
| Sem armaduras | 2330 | 2330 |
| Com armadura longitudinal | 2330 | 2380 |
| Com armadura transversal | 2500 | 2500 |
| Com armaduras longitudinal e transversal | 2470 | 3780 |
| Com armadura helicoidal | 2700 | > 7000* |
| * A máquina de ensaio não levou a seção à ruptura | | |

# Para Treinar

# Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercícios 5.1, 5.2, 5.5, 5.34
- Extras:
  - Exercícios 5.3, 5.9, 5.14, 5.35, 5.37

# Para Treinar em Casa

**Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia**

| Materiais | | Densidade (mg/m³) | Módulo de elasticidade E (GPa) | Módulo de elasticidade transversal G (GPa) | Tensão de escoamento (MPa) tração | Tensão de escoamento (MPa) compressão | Tensão de escoamento (MPa) cisalhamento | Tensão última (MPa) tração | Tensão última (MPa) compressão | Tensão última (MPa) cisalhamento | Alongamento % em corpo de prova de 50mm | Coeficiente de Poisson | coeficiente de expansão termica x10-6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ligas de Aluminio Forjado | 2014-T6 | 2,79 | 73,1 | 27 | 414 | 414 | 172 | 469 | 469 | 290 | 10 | 0,35 | 23 |
| | 6061-T6 | 2,71 | 68,9 | 26 | 255 | 255 | 131 | 290 | 290 | 186 | 12 | 0,35 | 24 |
| Ligas de Ferro Fundido | cinza ASTM 20 | 7,19 | 67,0 | 27 | - | - | - | 179 | 669 | - | 0,6 | 0,28 | 12 |
| | Maleável ASTM A-197 | 7,28 | 172 | 68 | - | - | - | 276 | 572 | - | 5 | 0,28 | 12 |
| Ligas de Cobre | Latão vermelho C83400 | 8,74 | 101 | 37 | 70,0 | 70,0 | - | 241 | 241 | - | 35 | 0,35 | 18 |
| | Bronze C86100 | 8,83 | 103 | 38 | 345 | 345 | - | 655 | 655 | - | 20 | 0,34 | 17 |
| Ligas de Magnésio | Am 1004-T61 | 1,83 | 44,7 | 18 | 152 | 152 | - | 276 | 276 | 152 | 1 | 0,30 | 26 |
| Ligas de Aço | Estrutural A-36 | 7,85 | 200 | 75 | 250 | 250 | - | 400 | 400 | - | 30 | 0,32 | 12 |
| | Inoxidavel 304 | 7,86 | 193 | 75 | 207 | 207 | - | 517 | 517 | - | 40 | 0,27 | 17 |
| | Aço-ferramenta L2 | 8,16 | 200 | 75 | 703 | 703 | - | 800 | 800 | - | 22 | 0,32 | 12 |
| Ligas de Titânio | Ti-6A1-4V | 4,43 | 120 | 44 | 924 | 924 | - | 1000 | 1000 | - | 16 | 0,36 | 9,4 |

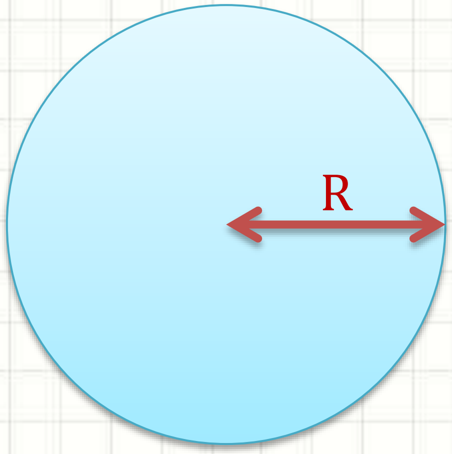
| Materiais | | Densidade (mg/m³) | Módulo de elasticidade E (GPa) | Módulo de elasticidade transversal G (GPa) | Tensão de escoamento (MPa) tração | Tensão de escoamento (MPa) compressão | Tensão de escoamento (MPa) cisalhamento | Tensão última (MPa) tração | Tensão última (MPa) compressão | Tensão última (MPa) cisalhamento | Alongamento % em corpo de prova de 50mm | Coeficiente de Poisson | coeficiente de expansão termica |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concreto | Baixa resistência | 2,38 | 22,1 | - | - | - | 12 | - | - | - | - | 0,15 | 11 |
| | Alta resistência | 2,38 | 29,0 | - | - | - | 38 | - | - | - | - | 0,15 | 11 |
| Plástico Reforçado | Keviar 49 | 1,45 | 131 | - | - | - | - | 717 | 483 | 20,3 | 2,8 | 0,34 | - |
| | 30% de vidro | 1,45 | 72,4 | - | - | - | - | 90 | 131 | - | - | 0,34 | - |
| Madeira Estrutural de Alta Qualidade | Abeto Douglas | 0,47 | 13,1 | - | - | - | - | 2,1 | 26 | 6,2 | - | 0,29 | - |
| | Abeto Branco | 3,60 | 9,65 | - | - | - | - | 2,5 | 36 | 6,7 | - | 0,31 | - |

Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**

# Exercício no SAVA

# Exercício – Entrega Individual

- Um eixo de comprimento 10m e R=10cm está submetido ao T = 80kN.m.
- Calcule $\tau_{MAX}$ e a potência transmitida a 5000RPM na configuração abaixo:



# Conclusões

# Resumo

- Torção: deformações medidas pelos ângulos
  - Deformação linear depende do raio!
- Tensão de cisalhamento máxima: f(T,R,J)
- Eixos: rotação → potência máxima admissível
- **Exercitar**: Exercícios Hibbeler

---

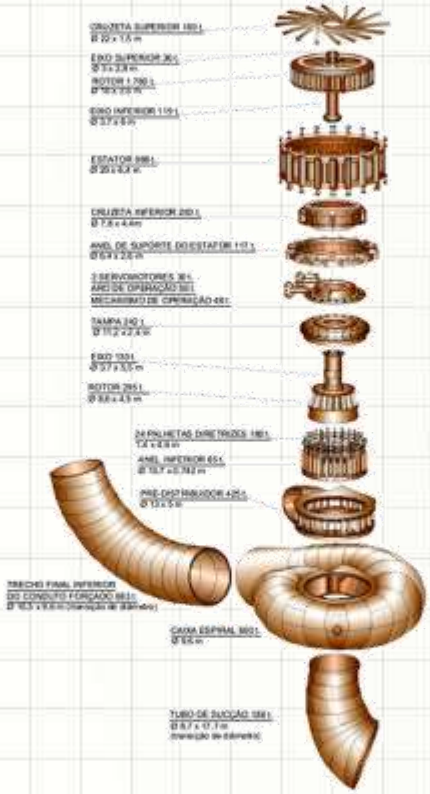
- E a deformação total da torção?
- Como calcular o ponto de máxima torção?

# PERGUNTAS?

# Exercício em Sala

# Exercício – Individual, para **Agora**!

- A turbina de uma usina hidrelétrica tem **600MW de potência**, girando um eixo com uma **frequência de 60RPM**,com um **torque de 600 MN.m**.
- Sabendo que, para o material usado, a **tensão de cisalhamento admissível é 250MPa**, *calcule o raio do eixo da turbina*.



$$\boxed{T = \frac{\tau_{MAX}}{R}.J}$$

$$\boxed{J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R \cong 1,15m}}$$