



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

TORÇÃO PARTE II

Prof. Dr. Daniel Caetano

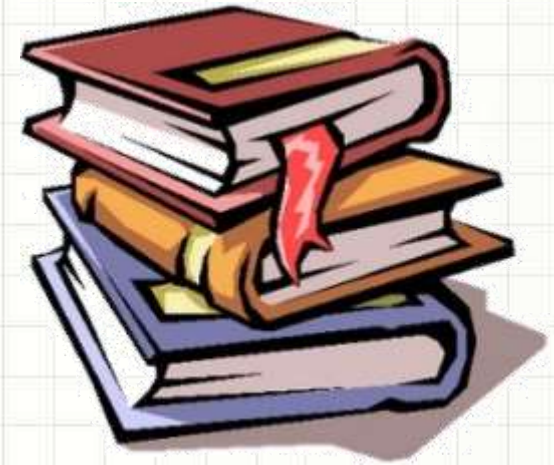
2018 - 2

Objetivos

- Calcular deformações por torção
- Capacitar para o traçado de diagramas de momento torsor em barras



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Resistência dos Materiais II – Aula 6)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 139 a 150.

Biblioteca Virtual

“Resistência dos Materiais”

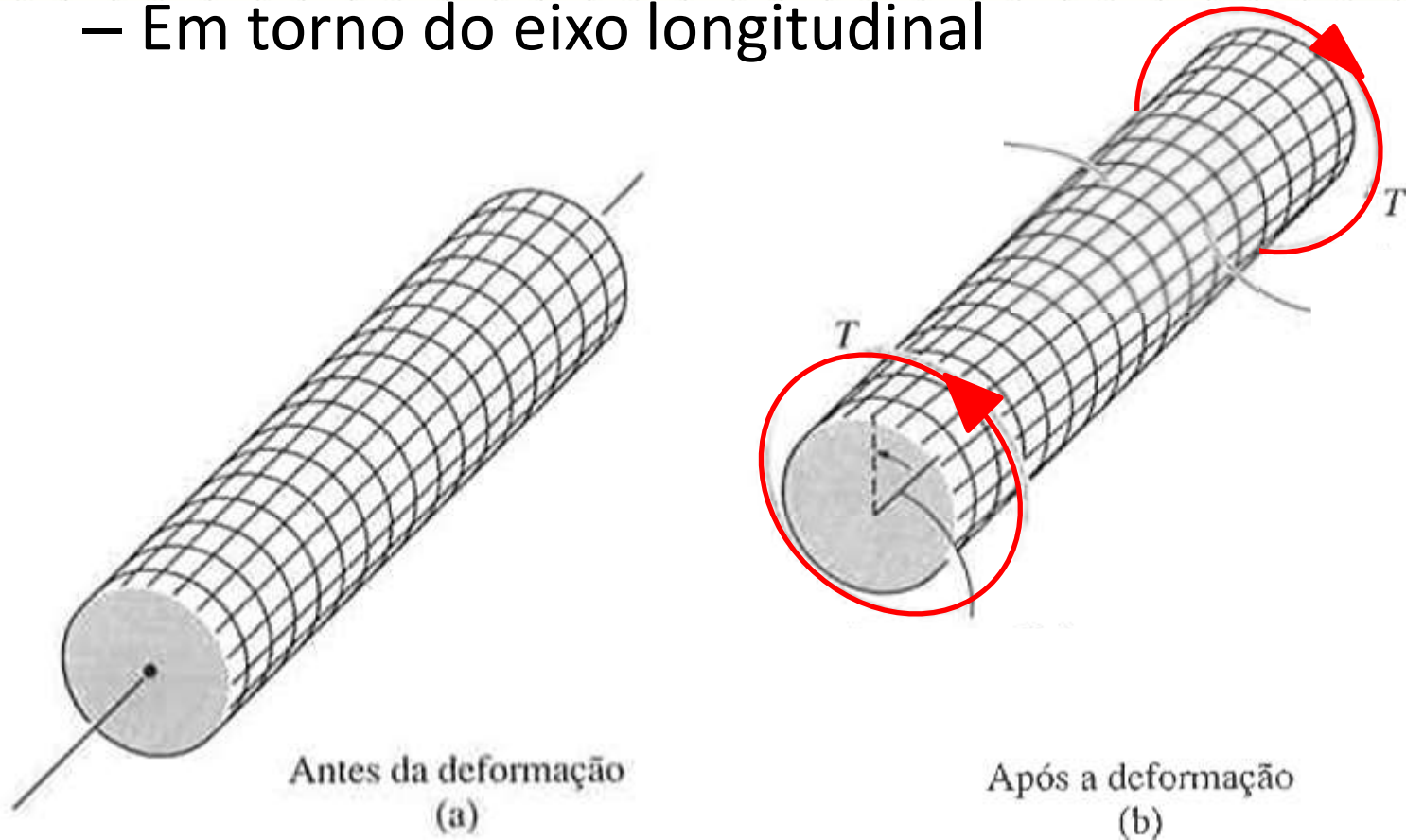


RELEMBRANDO:

CISALHAMENTO E A TORÇÃO

Deformação por Torção

- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
 - Em torno do eixo longitudinal



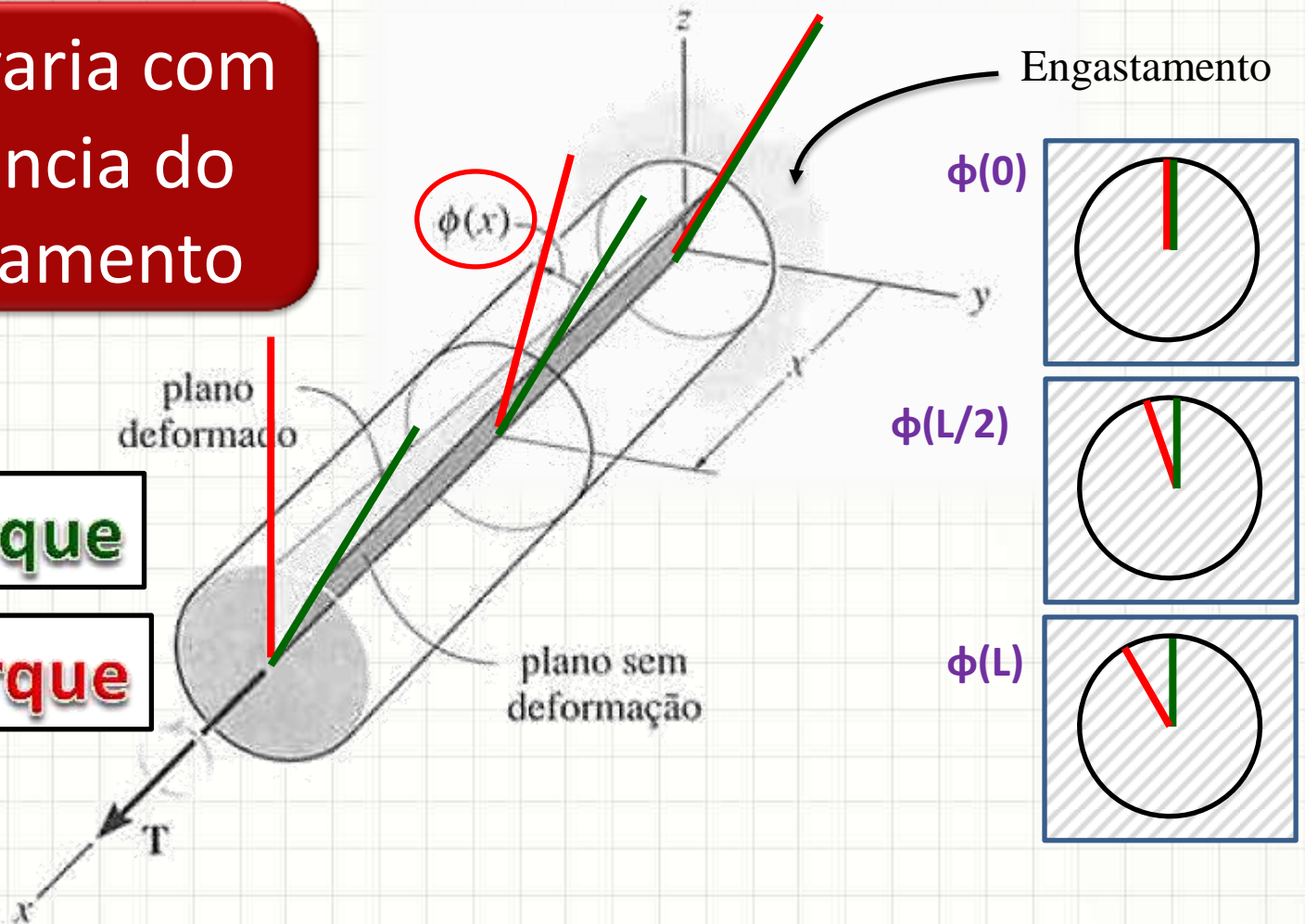
Ângulo de Torção

- Defini-se a deformação pelo ângulo $\phi(x)$

$\phi(x)$: varia com a distância do engastamento

Sem Torque

Com Torque



Cisalhamento na Torção

- Fórmula da Torção



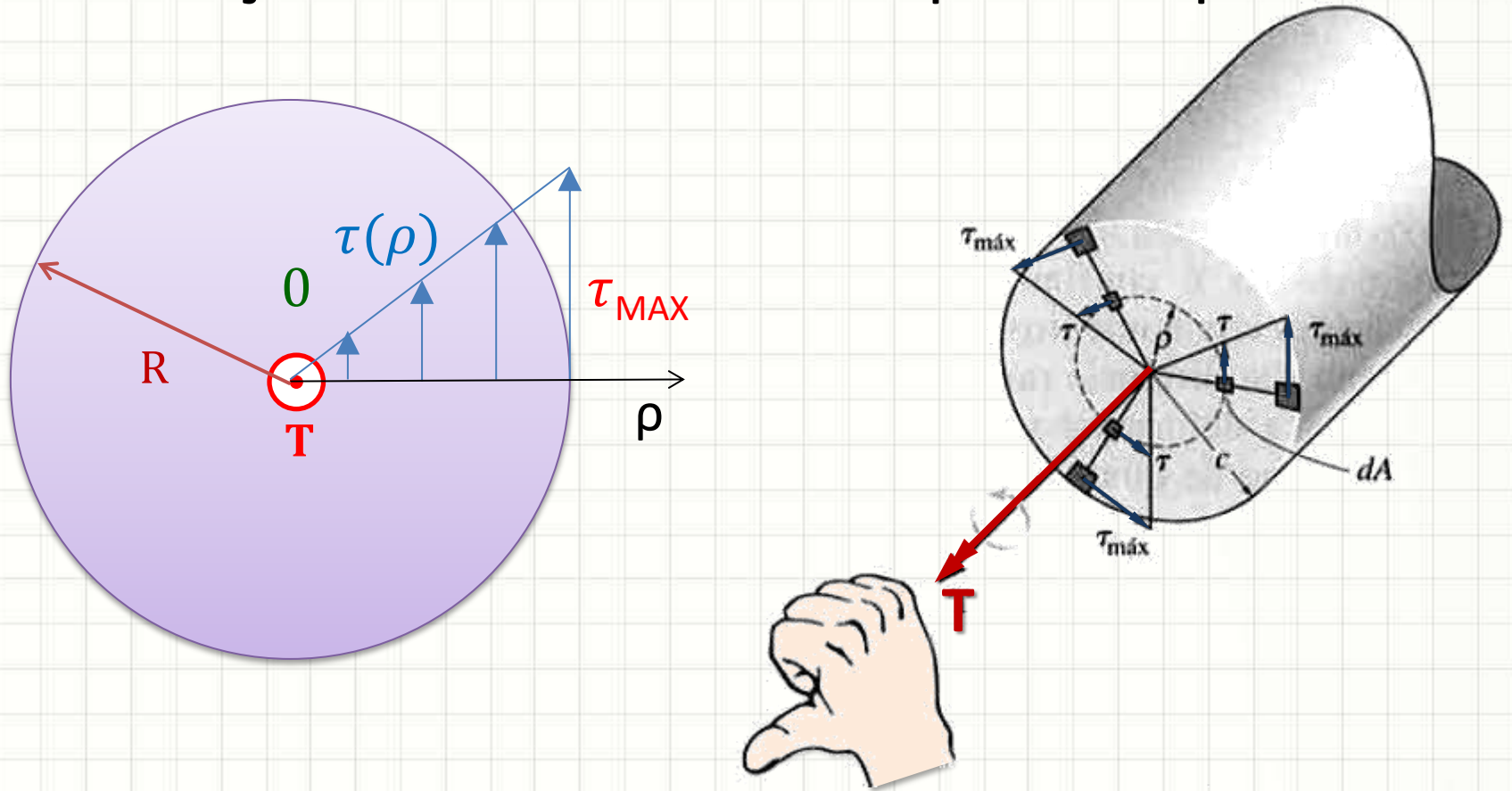
$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J}$$

$$\tau(\rho) = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

- $\tau(\rho)$? τ_{MAX} ?
– O que era, mesmo?

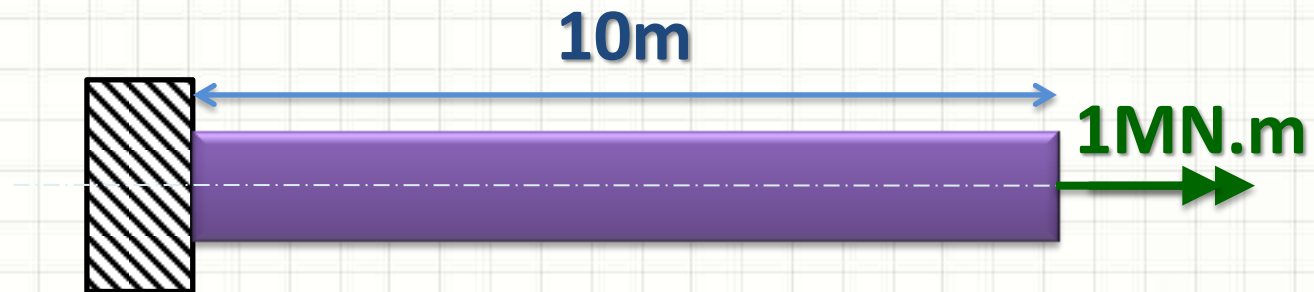
Cisalhamento na Torção

- Esforços internos causados pelo torque

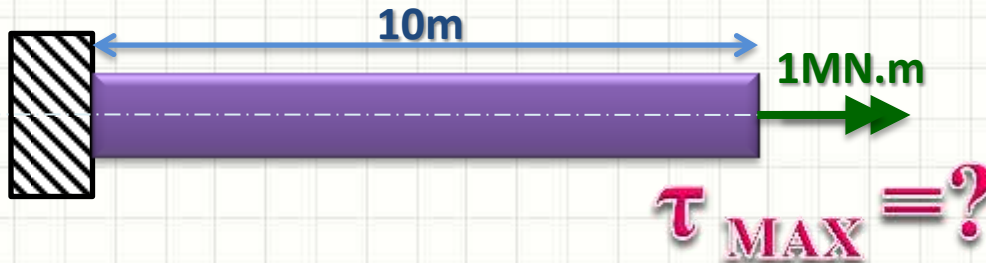


Exercício

- Um momento torçor de $1\text{MN}\cdot\text{m}$ age sobre um eixo de aço, $G=50\text{GPa}$, com raio $0,1\text{ m}$ (seção circular). Qual é o cisalhamento máximo na barra?



Exercício



$$G = 50\text{GPa}$$

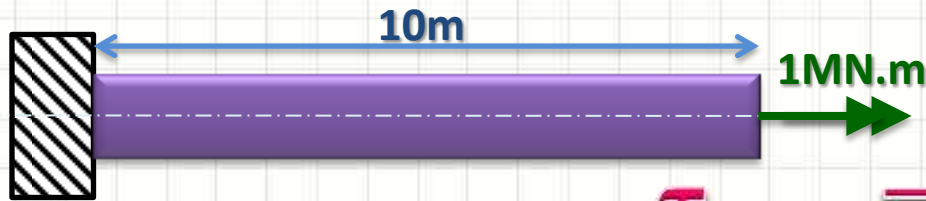
$$R = 0,1\text{ m}$$

Passo 1: Calcular J

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \rightarrow J = \frac{\pi \cdot (10^{-1})^4}{2} \rightarrow$$

$$J = \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{2} \rightarrow J = 5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \text{ m}^4$$

Exercício



$$G = 50\text{GPa}$$

$$R = 0,1\text{ m}$$

$$J = 5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \text{ m}^4$$

$$\tau_{MAX} = ?$$

Passo 2: Calcular τ_{MAX}

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{10^6 \cdot 10^{-1}}{5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi} \rightarrow$$

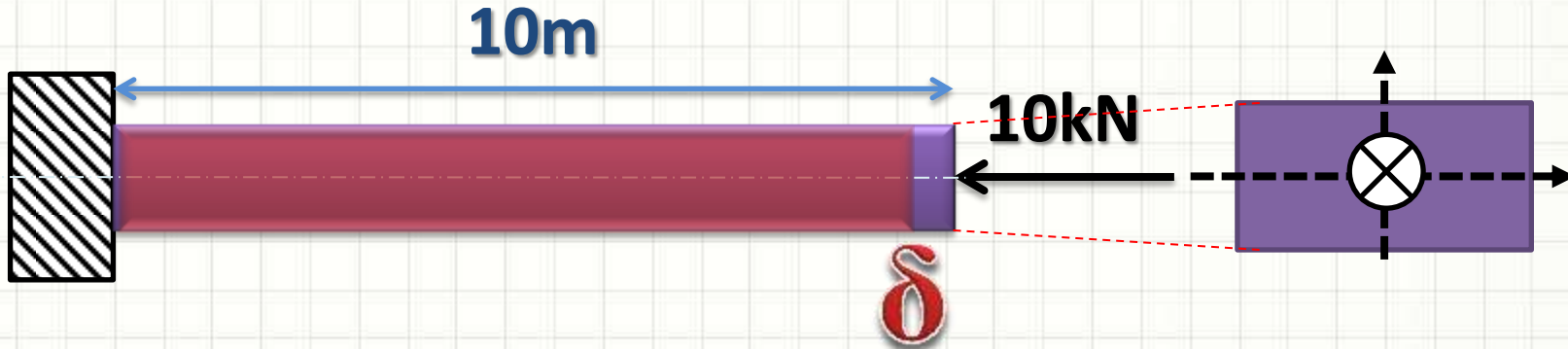
$$\tau_{MAX} = \frac{10^{10}}{5 \cdot \pi} \rightarrow \tau_{MAX} \cong 637\text{MPa}$$



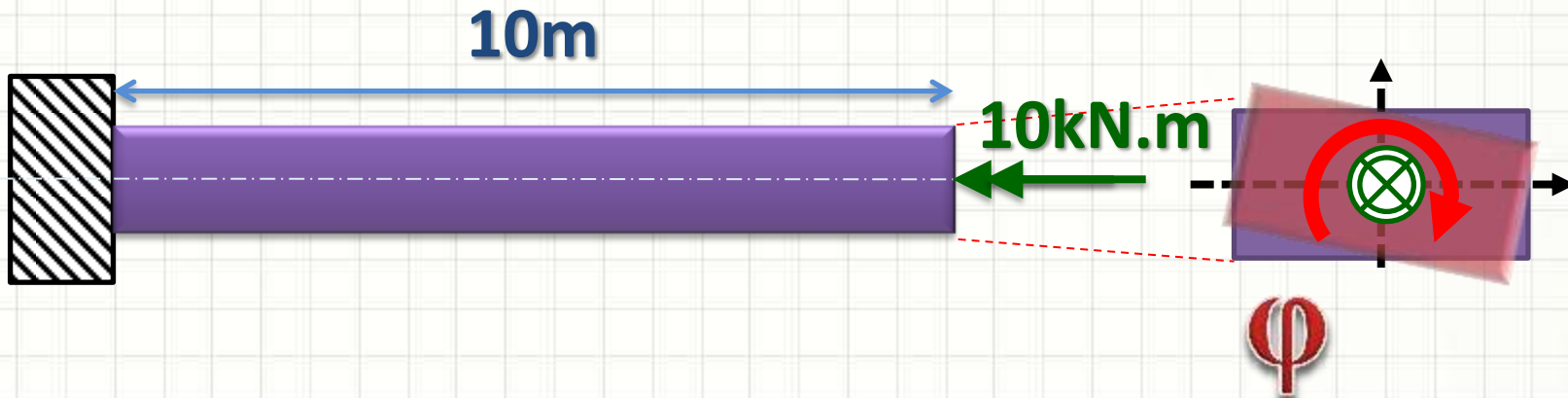
DEFORMAÇÃO POR TORÇÃO

Deformações Axiais x Torcionais

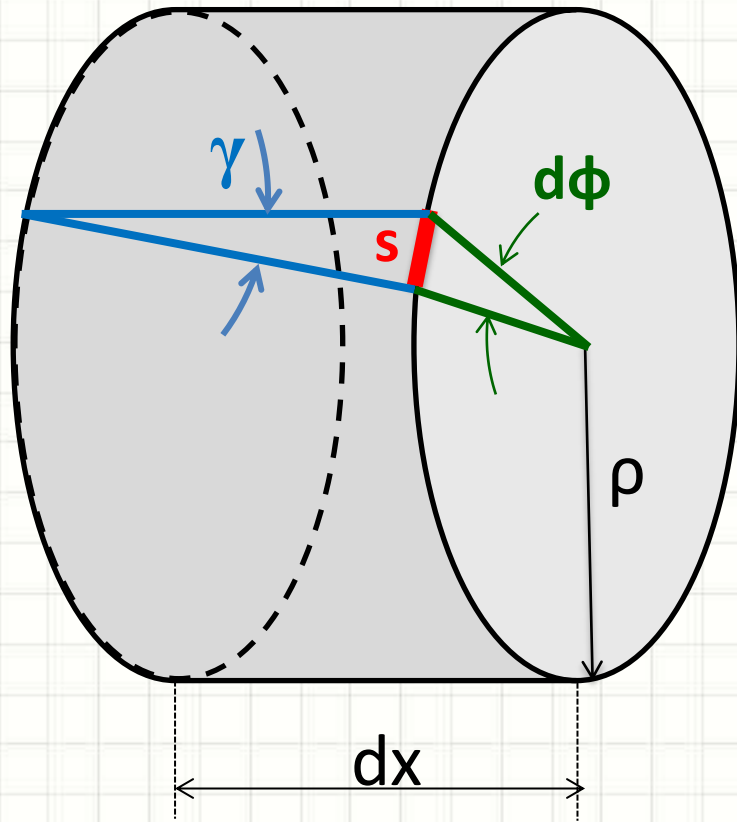
- Nos lembramos da deformação axial



- Como calcular a deformação torcional?



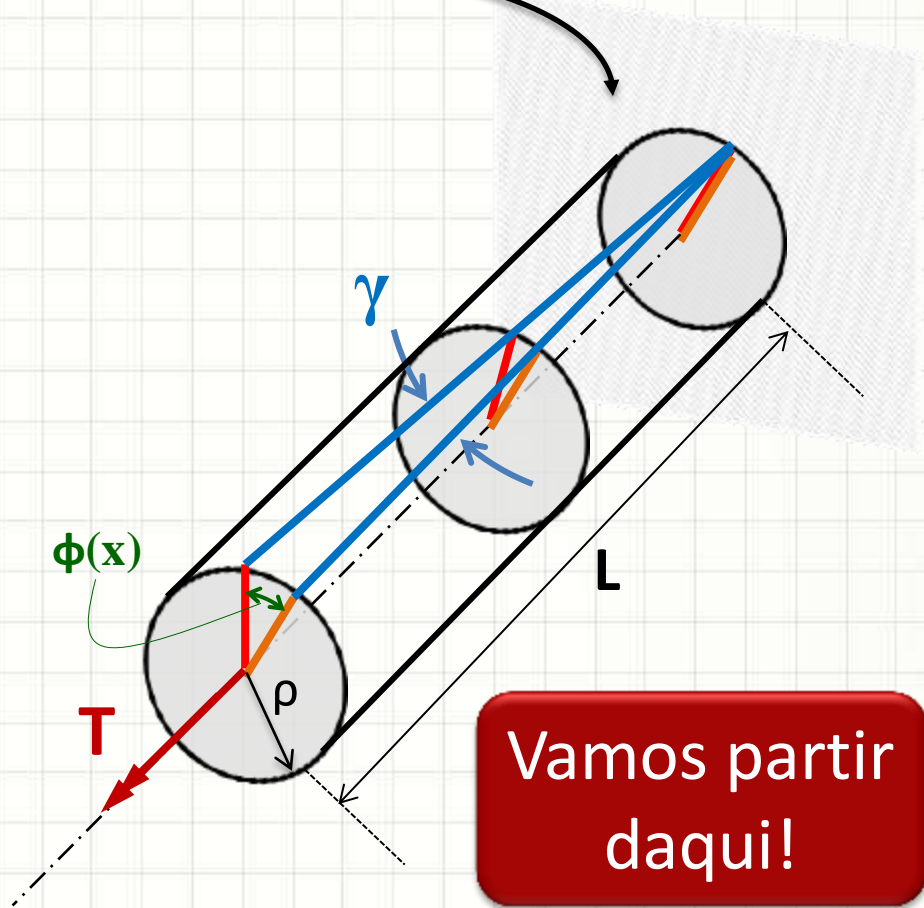
Deformação por Torção



$$\rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

Engastamento



Vamos partir daqui!

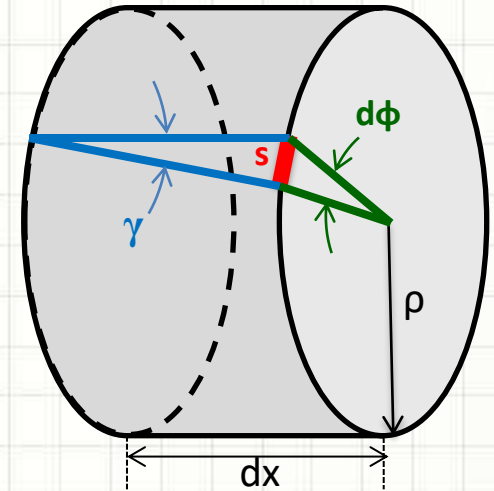


CÁLCULO DO ÂNGULO DE TORÇÃO

Ângulo de Torção

- De maneira geral:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$



- Queremos calcular ϕ

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx} \rightarrow d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

- Mas, pela lei de hooke...

$$\tau = G \cdot \gamma \rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

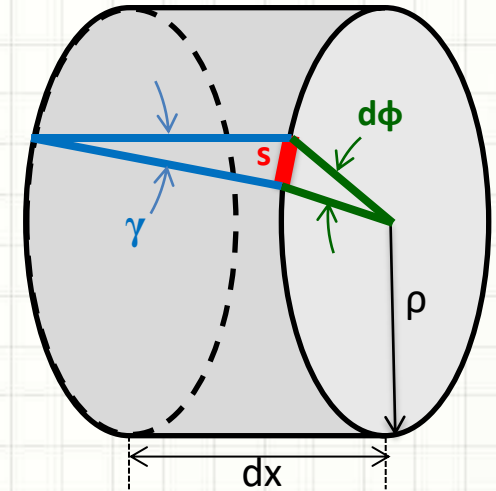
Ângulo de Torção

- Juntando...

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

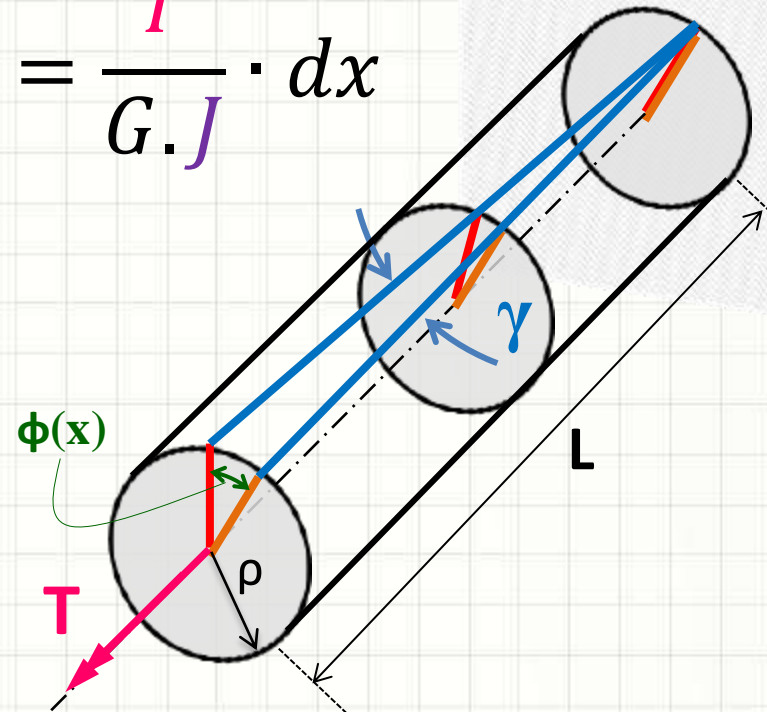
... com...

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$



$$d\phi = \frac{T \cdot \cancel{\rho}}{G \cdot J} \cdot \frac{dx}{\cancel{\rho}} \rightarrow d\phi = \frac{T}{G \cdot J} \cdot dx$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T}{G \cdot J} \cdot dx$$



Ângulo de Torção

- Considerando T , G e J constantes...

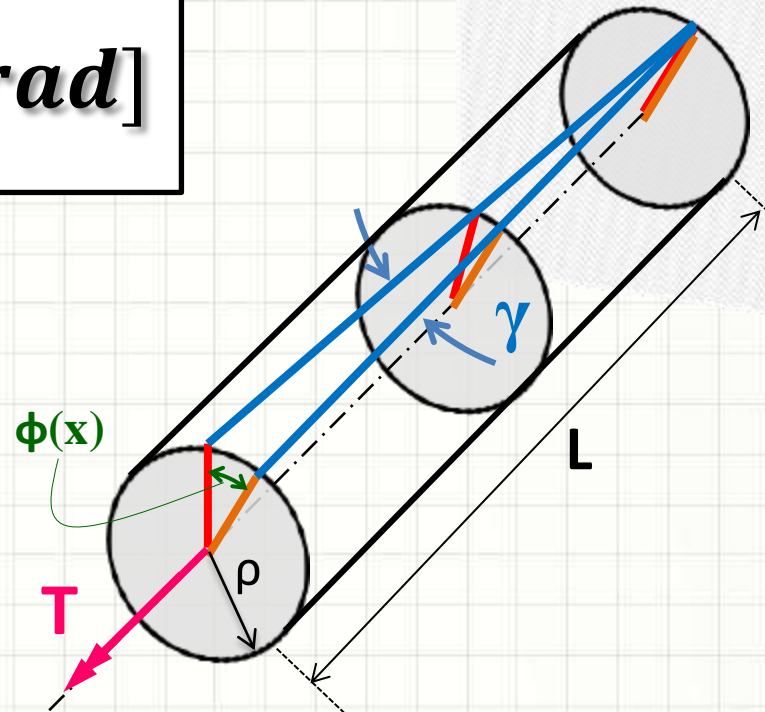
$$\phi = \int_0^L \frac{T}{G \cdot J} \cdot dx \rightarrow \phi = \frac{T}{G \cdot J} \cdot \int_0^L dx$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \text{ [rad]}$$

- Fórmula geral

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{G(x) \cdot J(x)} \cdot dx$$

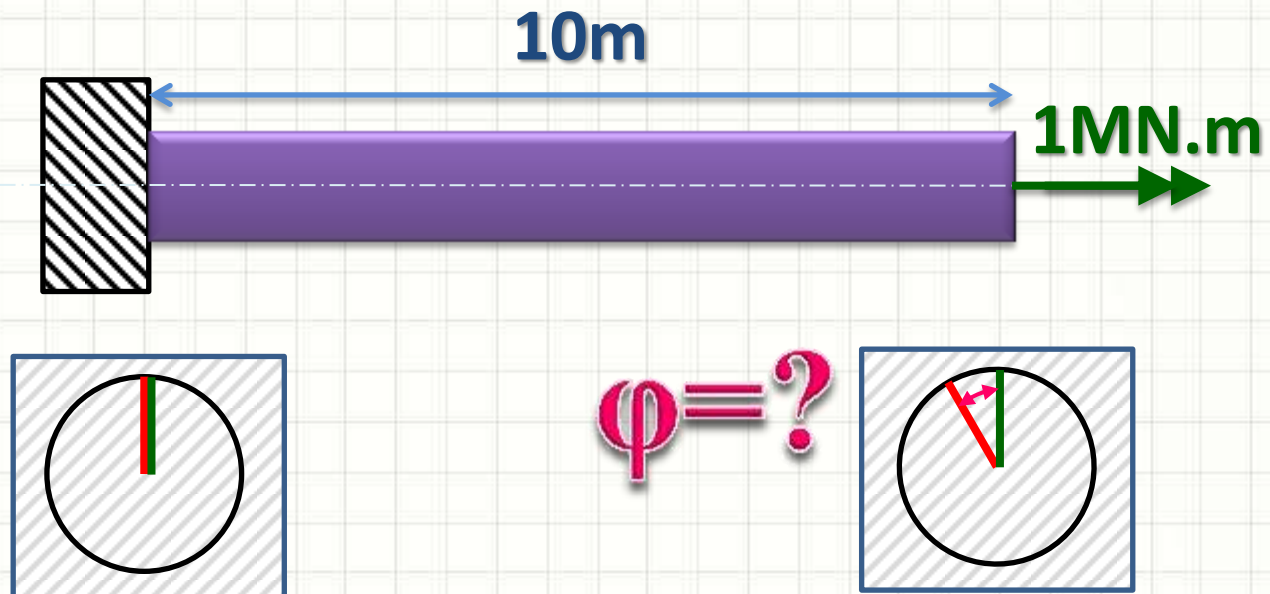




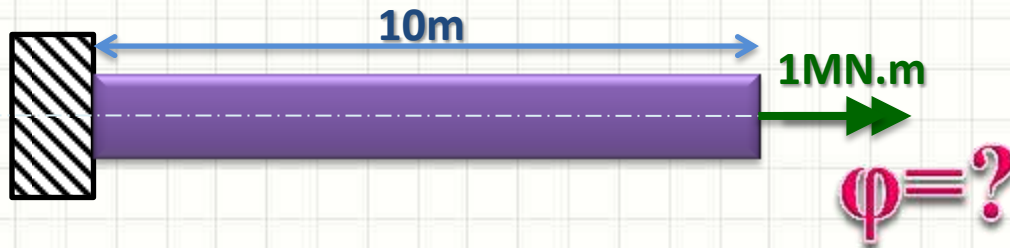
**EXERCÍCIO:
ÂNGULO DE TORÇÃO**

Exercício

- Um momento torçor de $1\text{MN}\cdot\text{m}$ age sobre um eixo de aço, $G=50\text{GPa}$, com raio $0,1\text{ m}$ (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?



Exercício



$$G = 50\text{GPa}$$

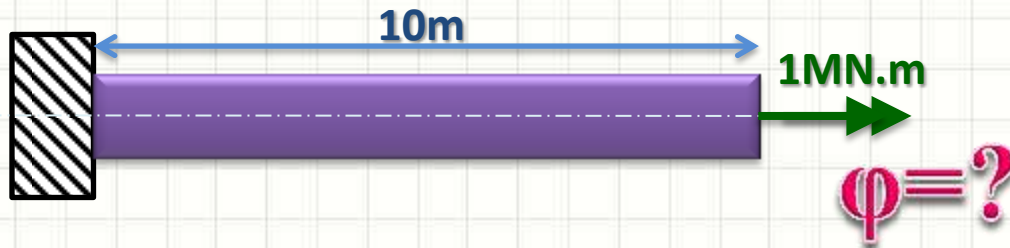
$$R = 0,1\text{ m}$$

Passo 1: Calcular J

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \rightarrow J = \frac{\pi \cdot (10^{-1})^4}{2} \rightarrow$$

$$J = \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{2} \rightarrow J = 5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \text{ m}^4$$

Exercício



$$G = 50\text{GPa}$$

$$R = 0,1\text{ m}$$

$$J = 5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \text{ m}^4$$

Passo 2: Calcular ϕ

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \rightarrow \phi = \frac{10^6 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi} \rightarrow$$

$$\phi = \frac{100}{5 \cdot 5 \cdot \pi} \rightarrow \phi = \frac{100}{25 \cdot \pi} \rightarrow \phi \cong 1,27 \text{ rad}$$



RESUMO DE FÓRMULAS

Fórmulas para Torção

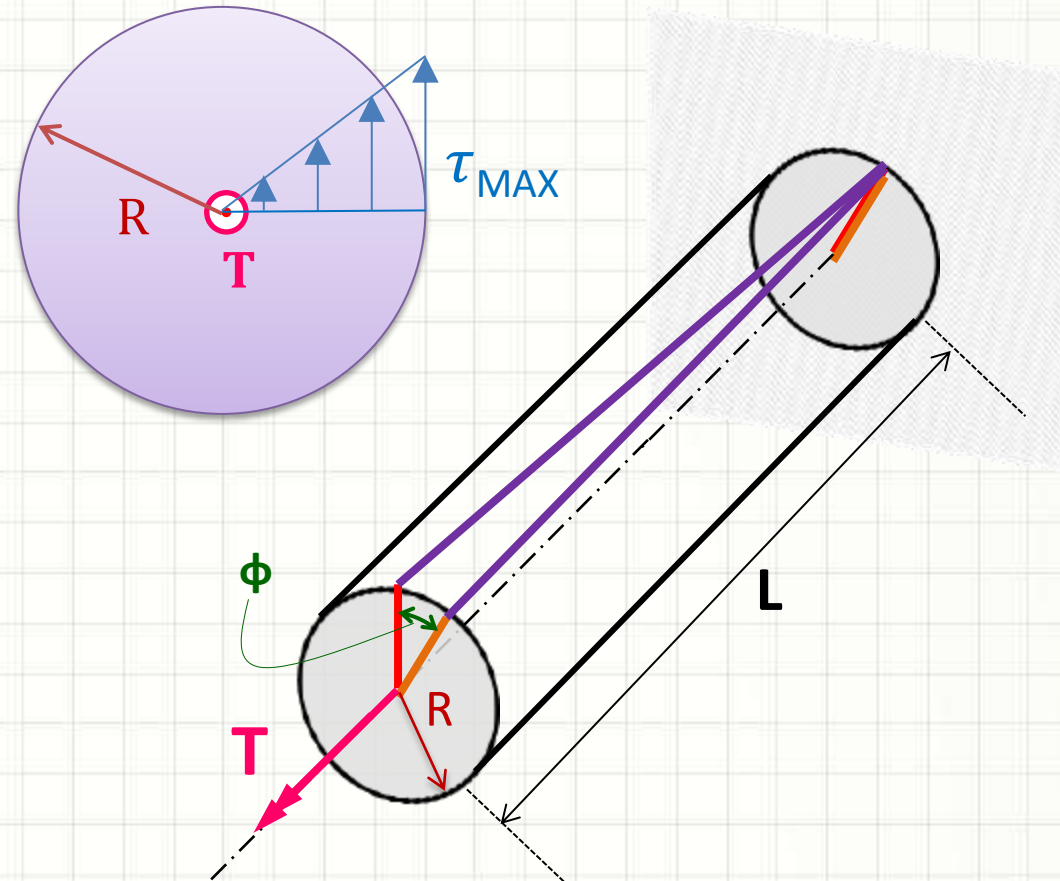
- Pelo que vimos até agora...
 - Apenas seções circulares!

Dependemos sempre do T!

$$\tau_{MAX} = \frac{T}{J} \cdot R$$

$$P = T \cdot \omega$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$



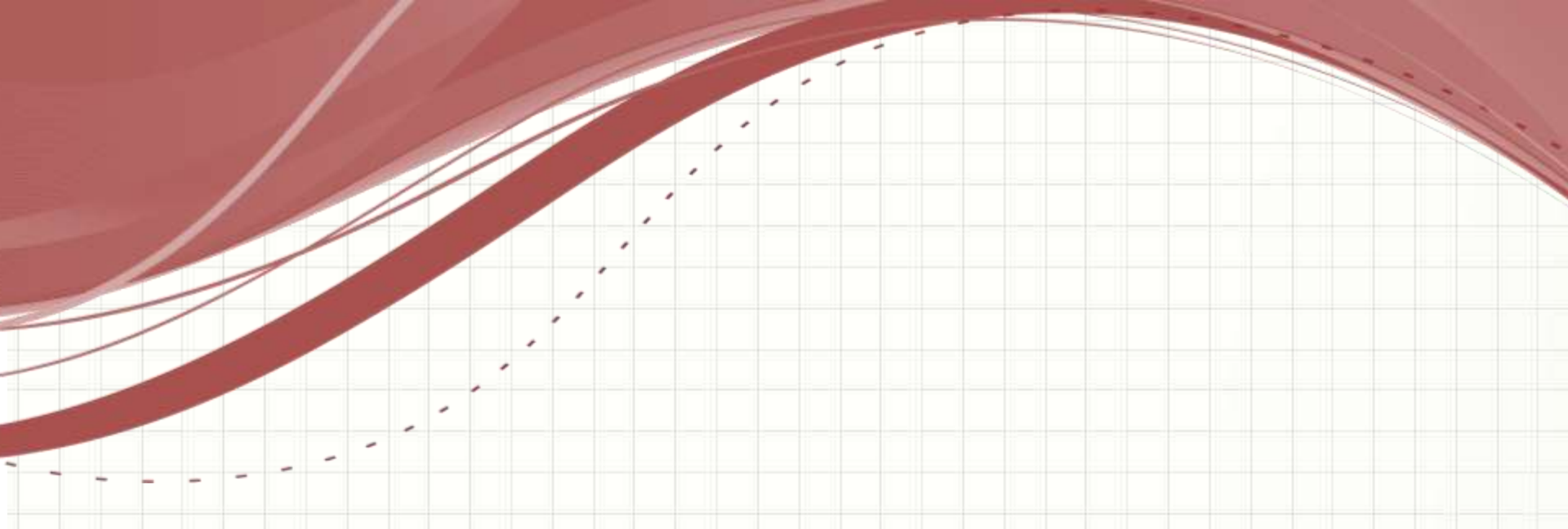
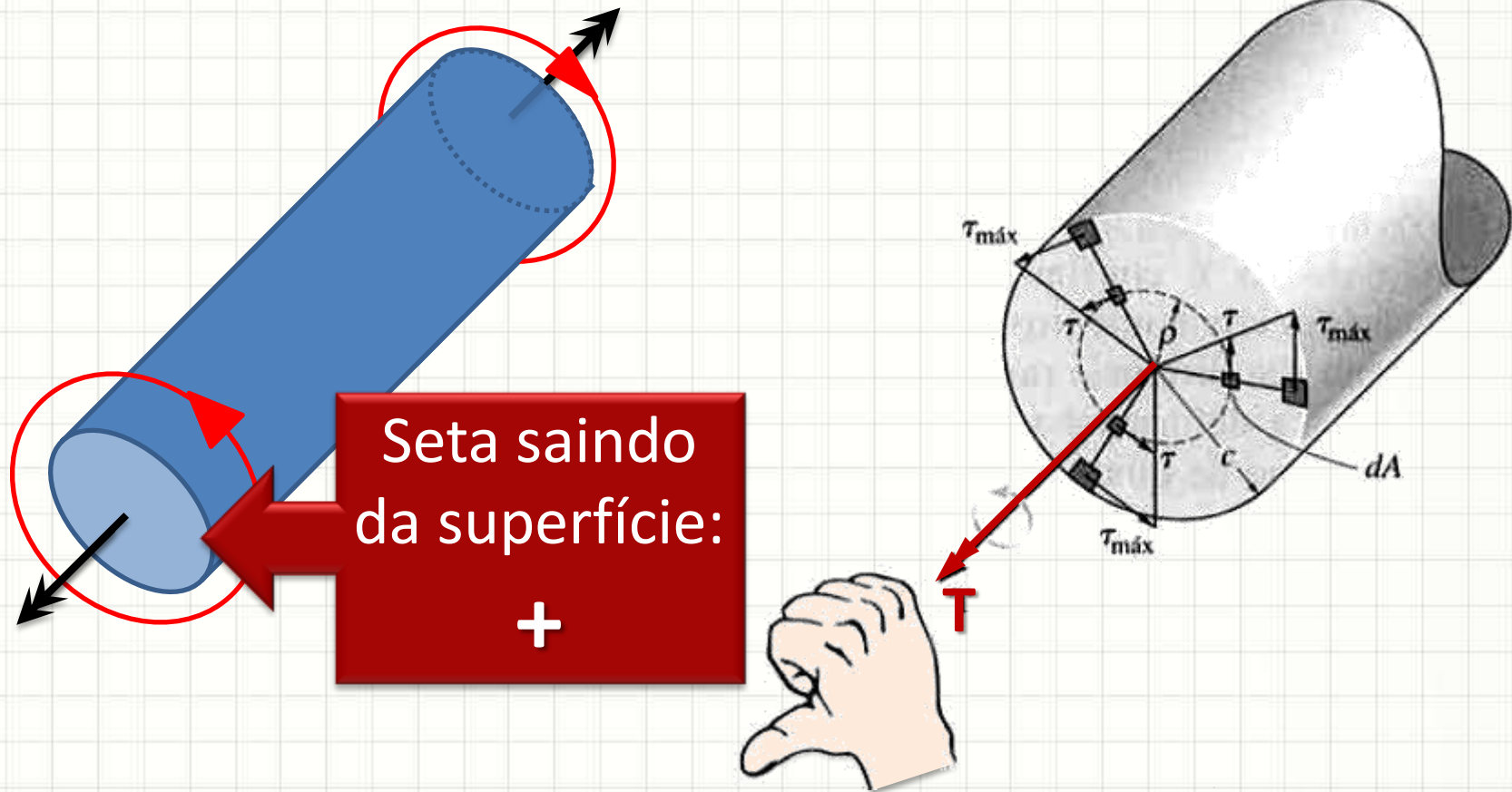


DIAGRAMA DE MOMENTO TORSOR

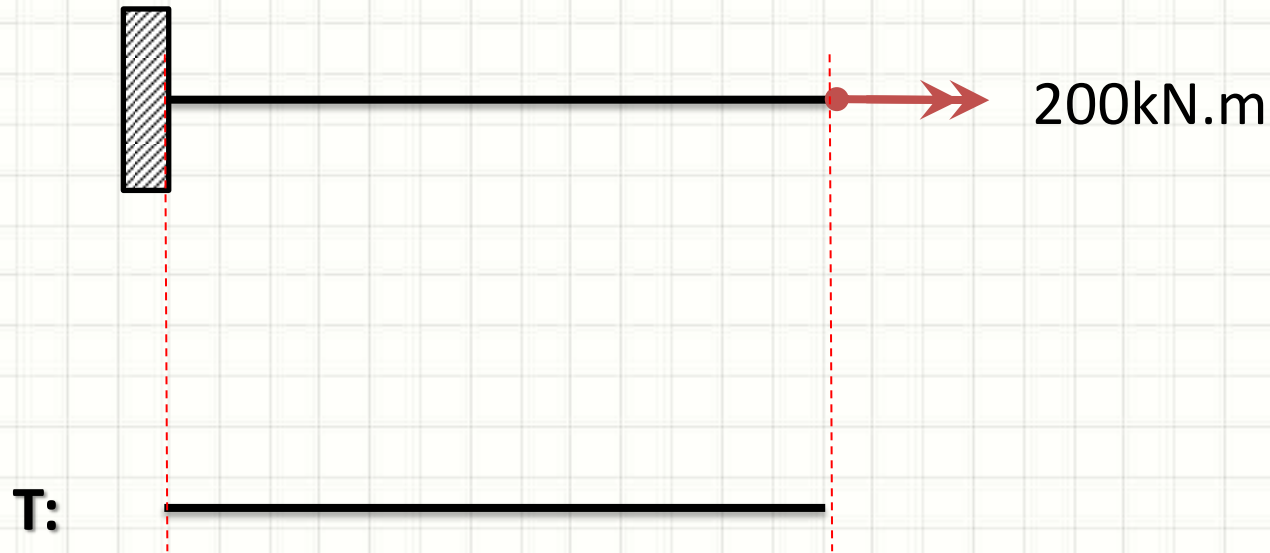
Convenção de Sinais

- Sinal é dado pela regra da mão direita



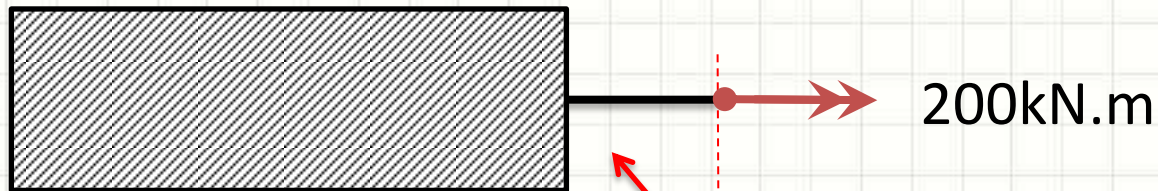
Diagramas Planos

- Momentos Torsores Concentrados



Diagramas Planos

- Momentos Torsores Concentrados



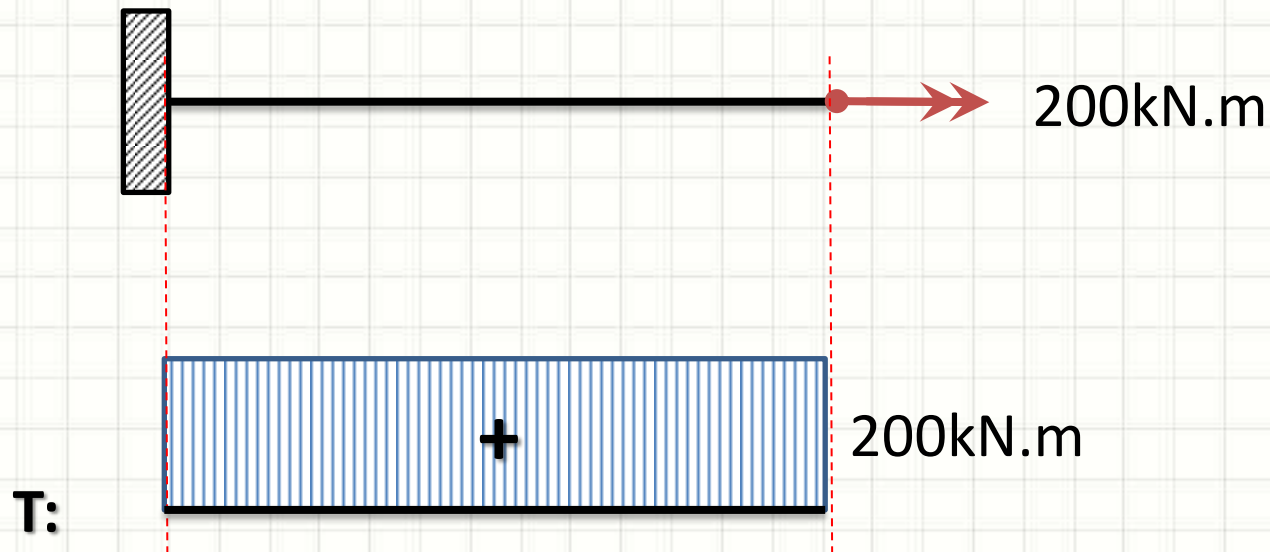
T = ?

T:



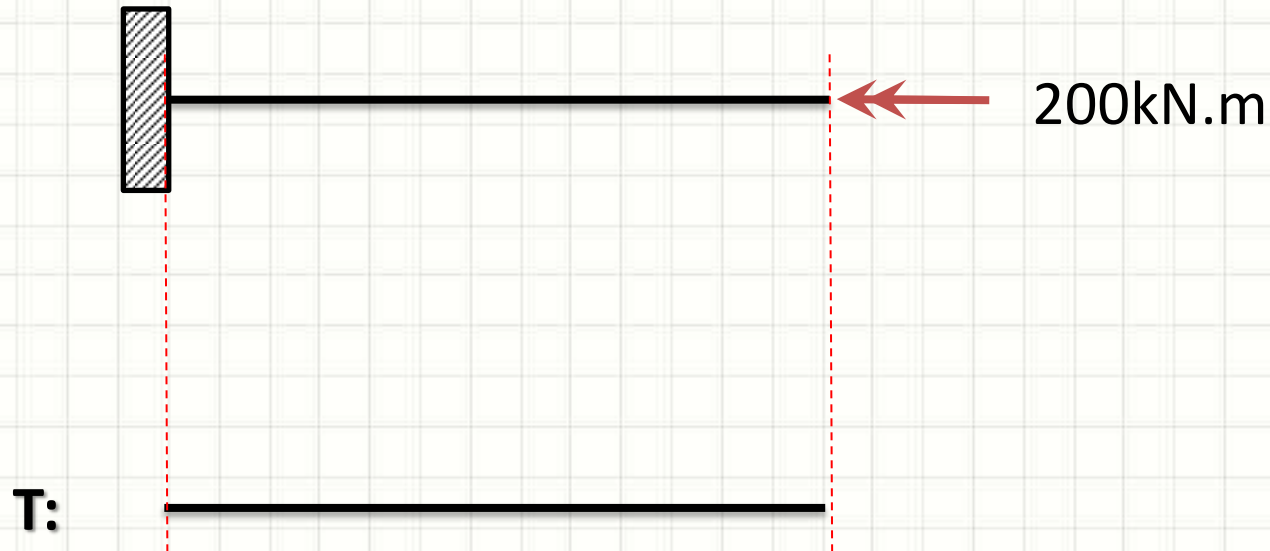
Diagramas Planos

- Momentos Torsores Concentrados



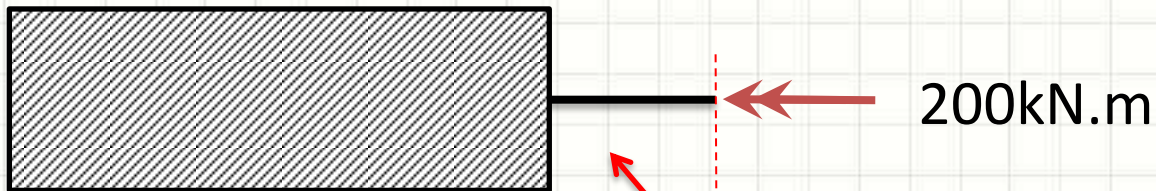
Diagramas Planos

- Momentos Torsores Concentrados



Diagramas Planos

- Momentos Torsores Concentrados



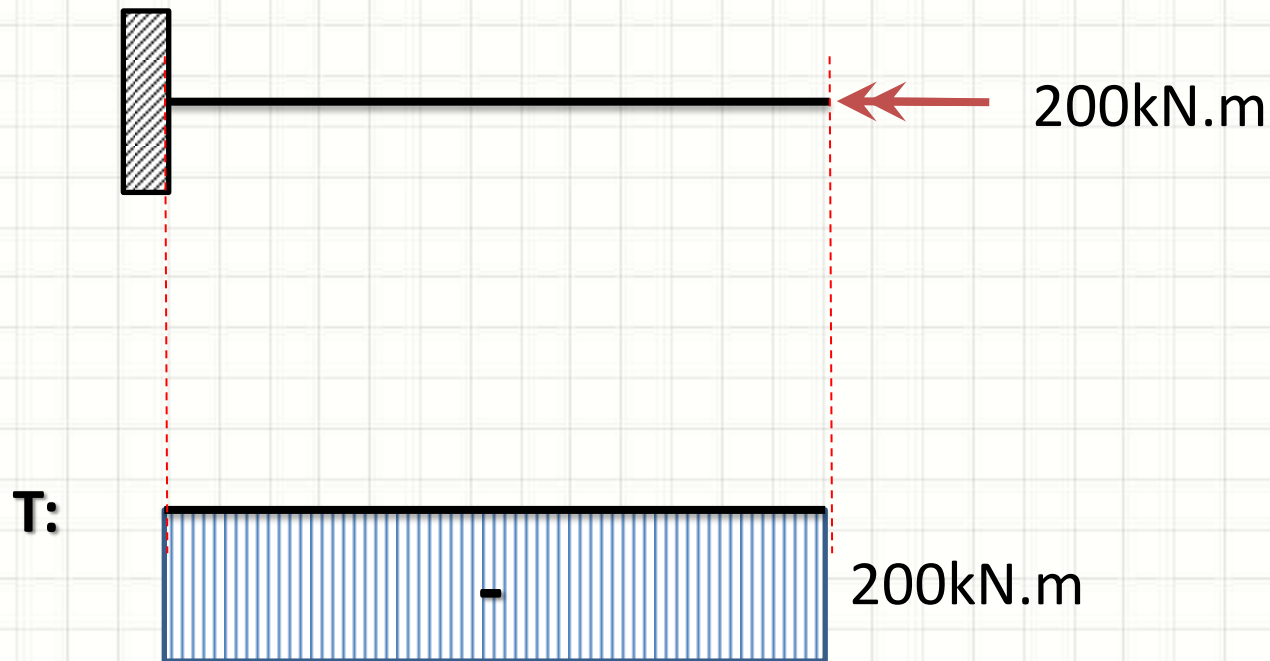
T = ?

T:



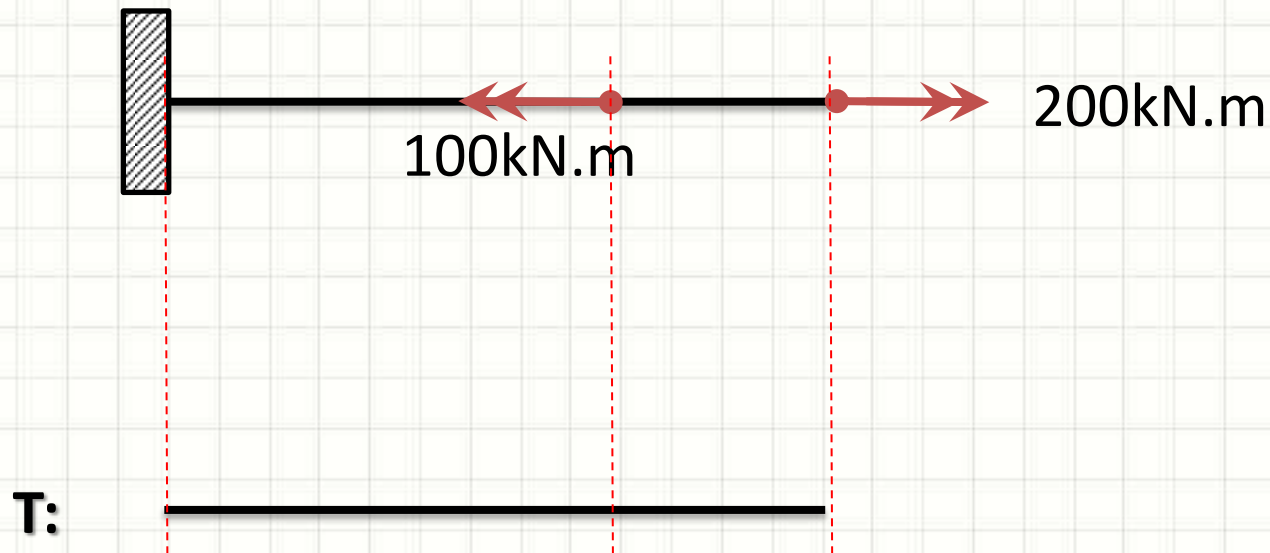
Diagramas Planos

- Momentos Torsores Concentrados



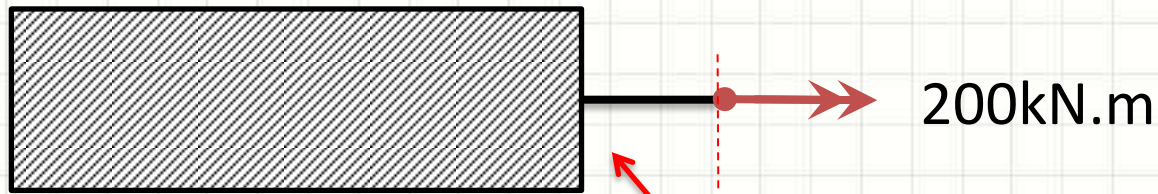
Diagramas Planos

- Vários Momentos Torsores Concentrados



Diagramas Planos

- Vários Momentos Torsores Concentrados



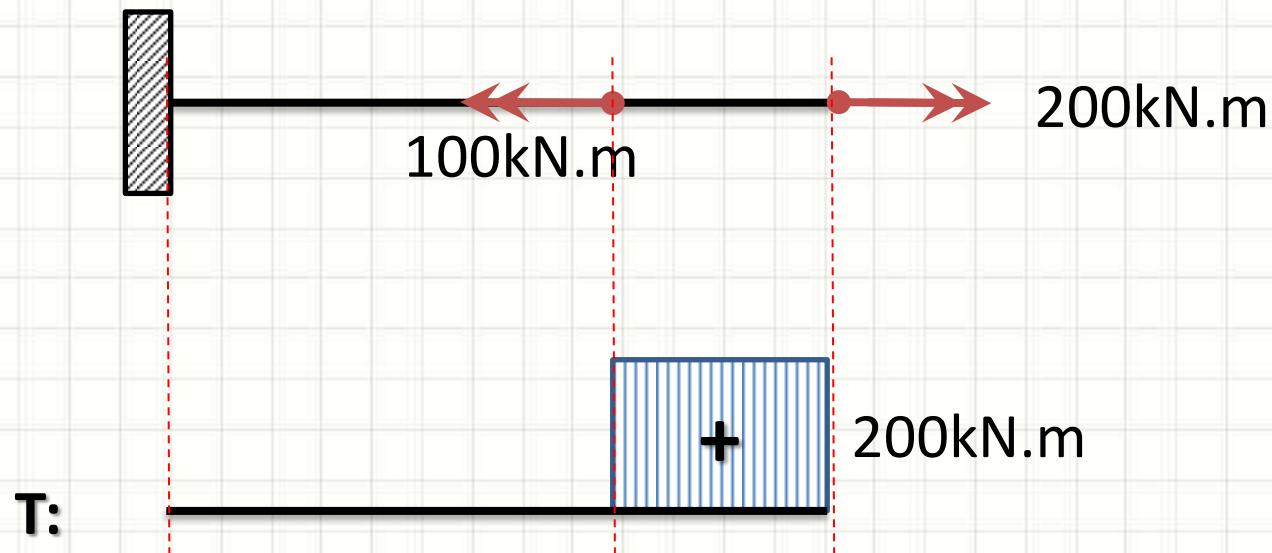
T = ?

T:



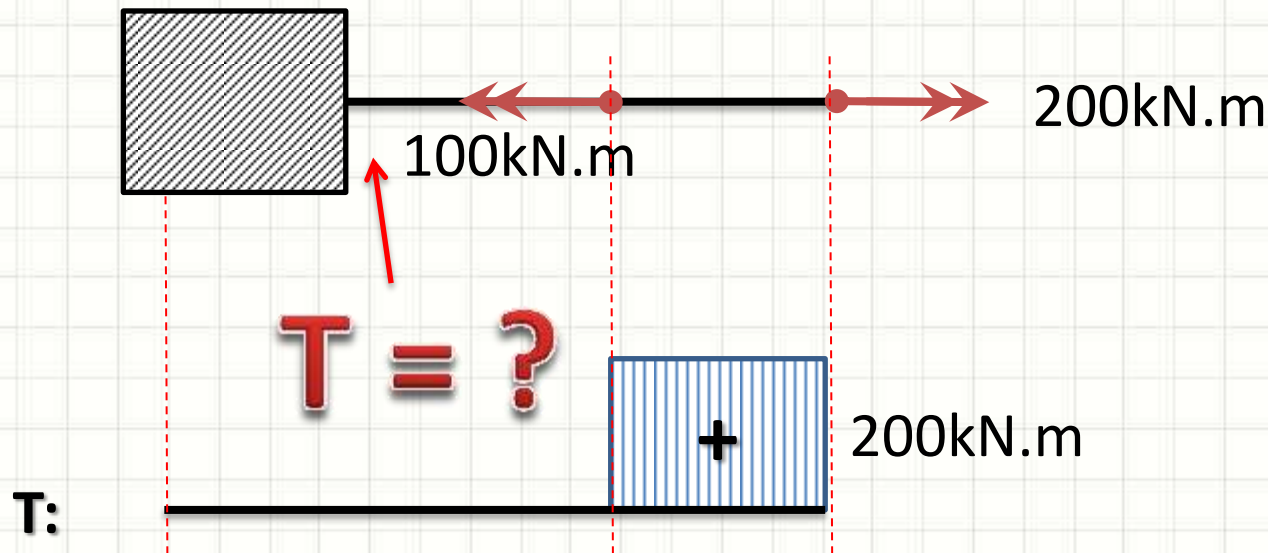
Diagramas Planos

- Vários Momentos Torsores Concentrados



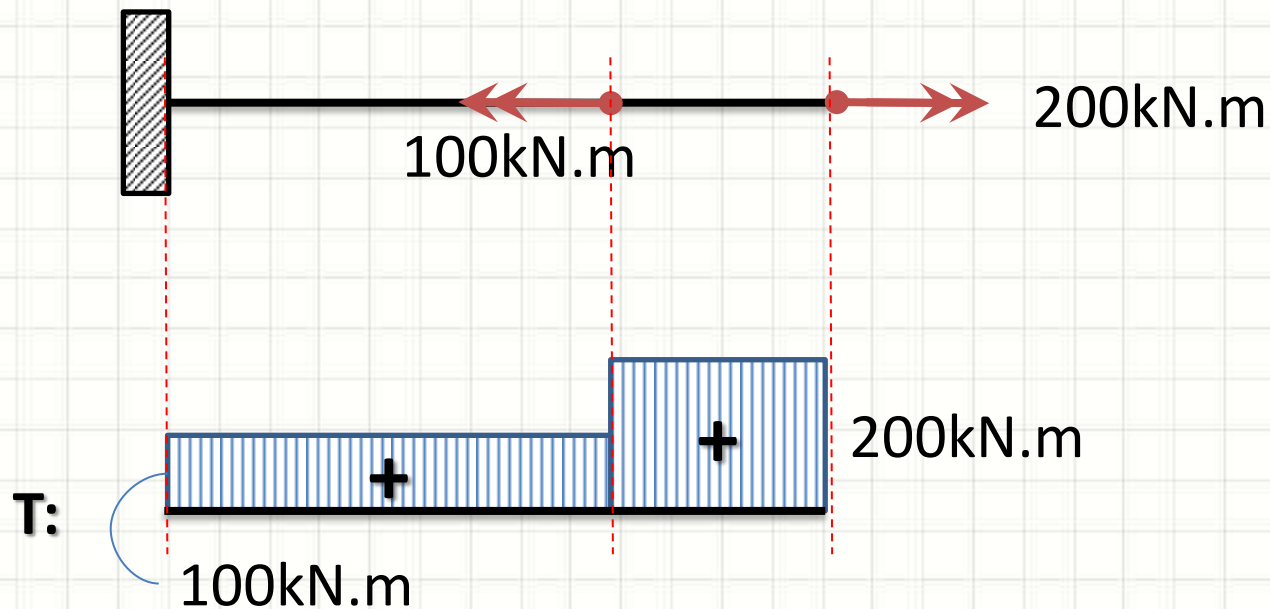
Diagramas Planos

- Vários Momentos Torsões Concentrados



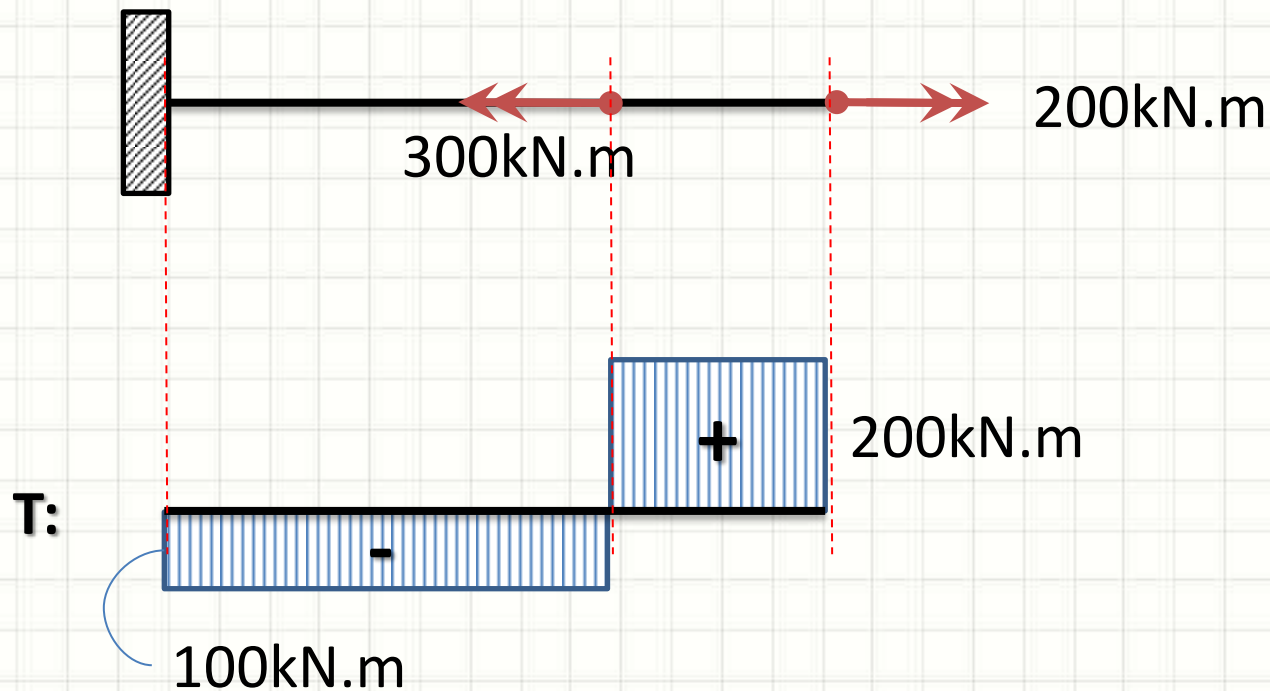
Diagramas Planos

- Vários Momentos Torsores Concentrados



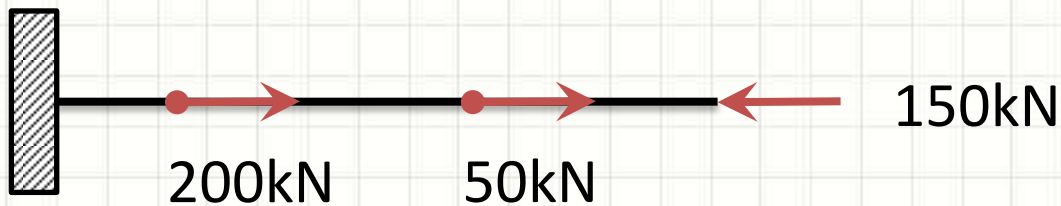
Diagramas Planos

- Vários Momentos Torsores Concentrados

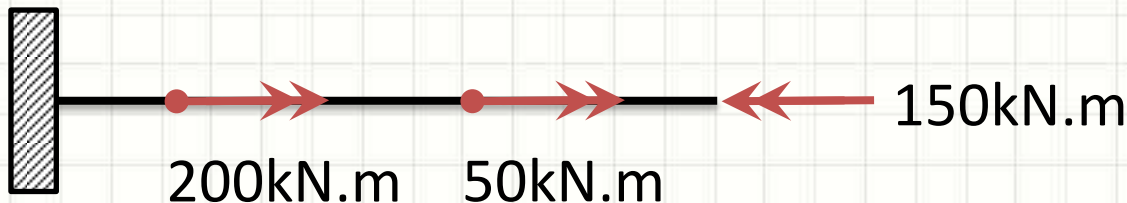


ATENÇÃO: Força Normal x Torque

- Essas são forças **normais** (tração/compressão)



- Esses são **torques** (momentos torçores)



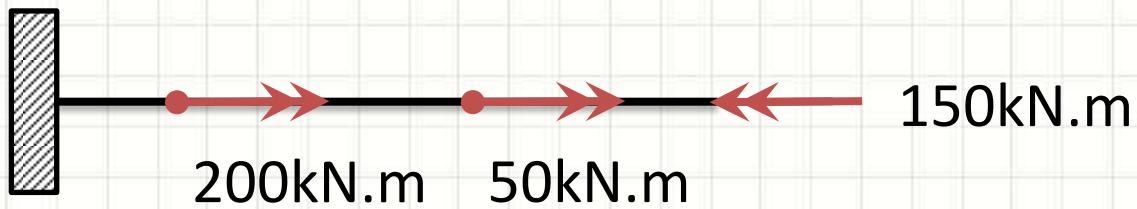
São esforços diferentes!



EXERCÍCIO PRÉ-INTERVALO

Exercício

- Traçar o diagrama de momentos torsores





PAUSA PARA O CAFÉ

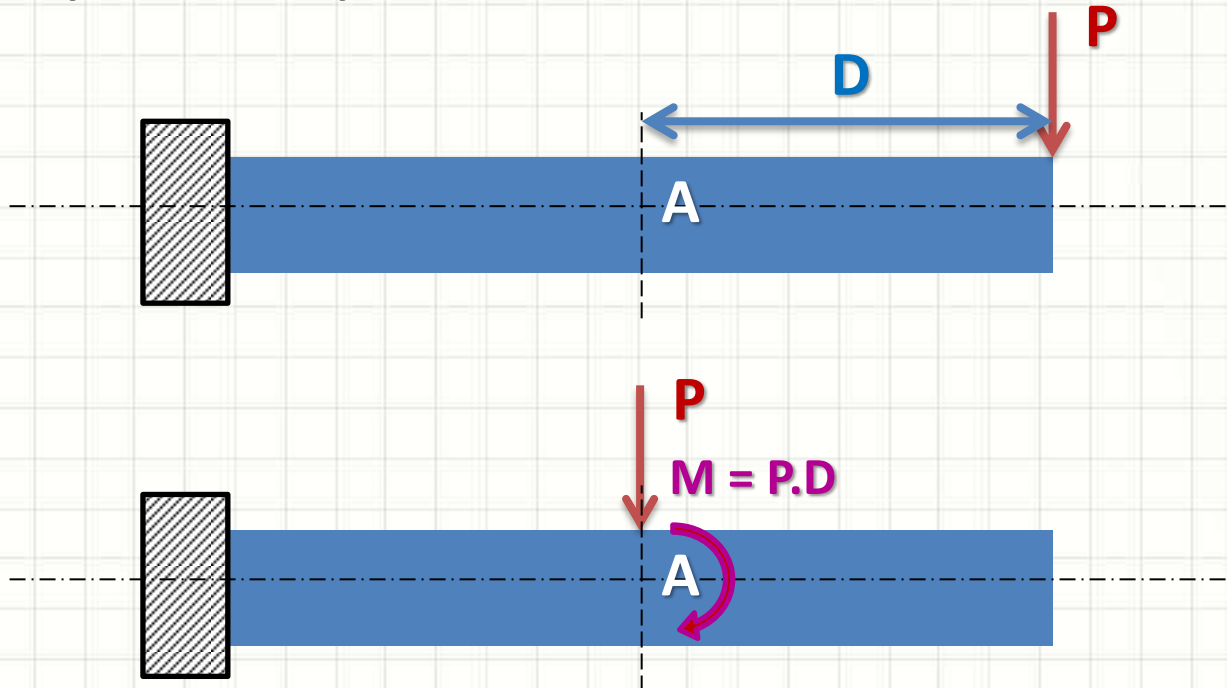


BREVE RECORDAÇÃO/INTRODUÇÃO:

SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES

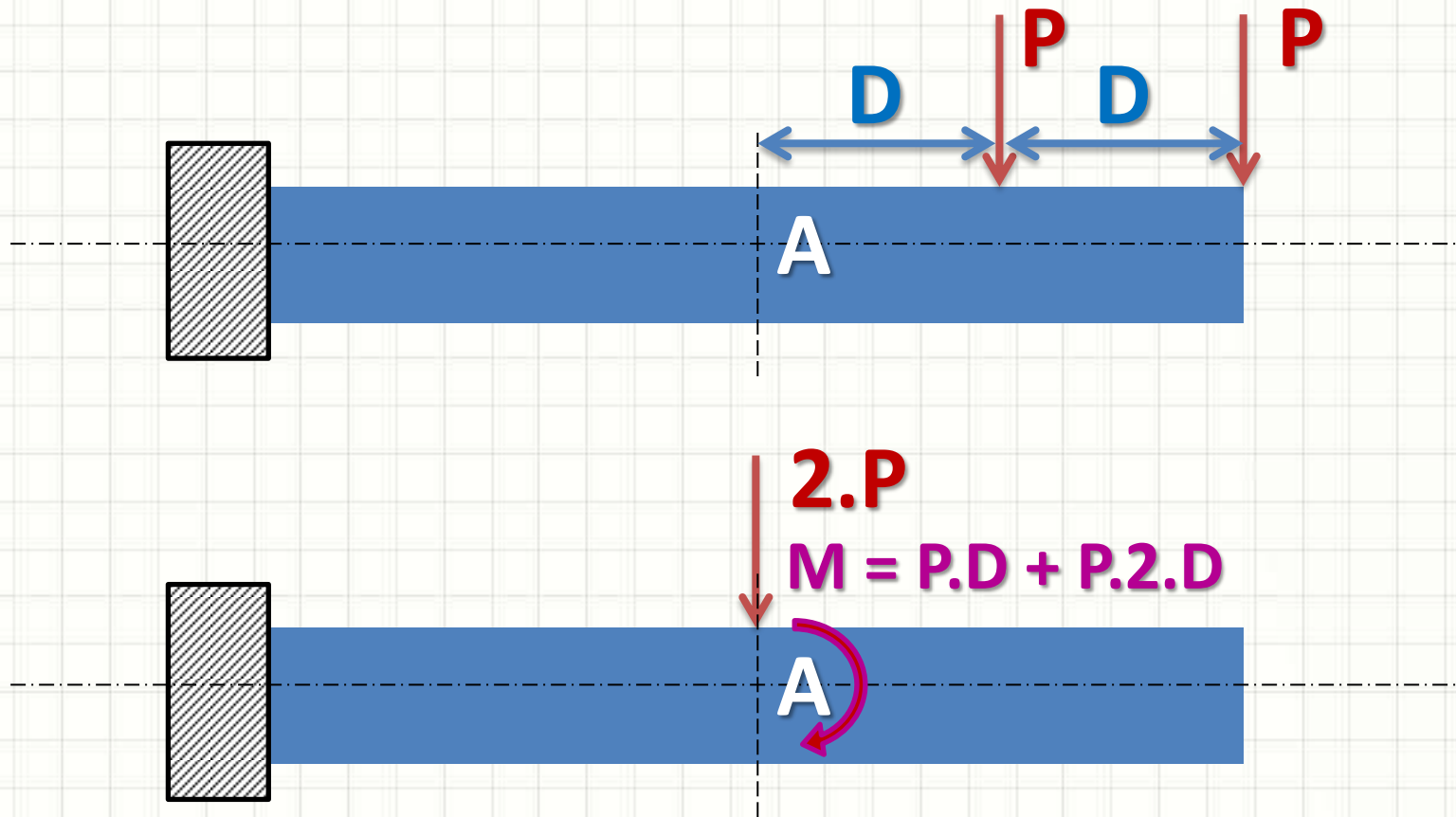
Sistemas de Forças ME

- Quando, para seção transversal específica:
 - Configurações de forças diferentes...
 - Esforços solicitantes iguais
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Outro exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Outro exemplo: Do ponto de vista de **A**

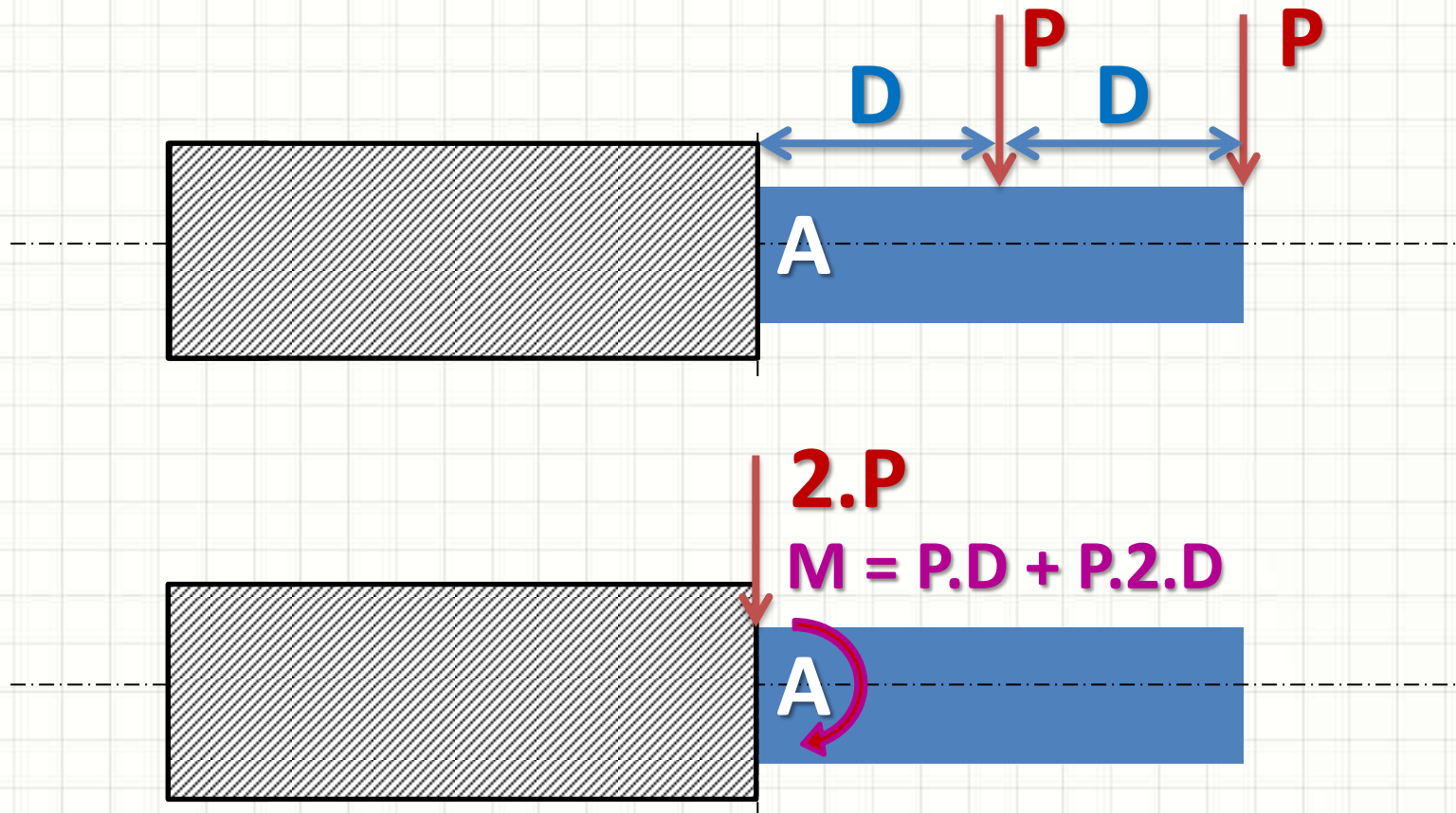
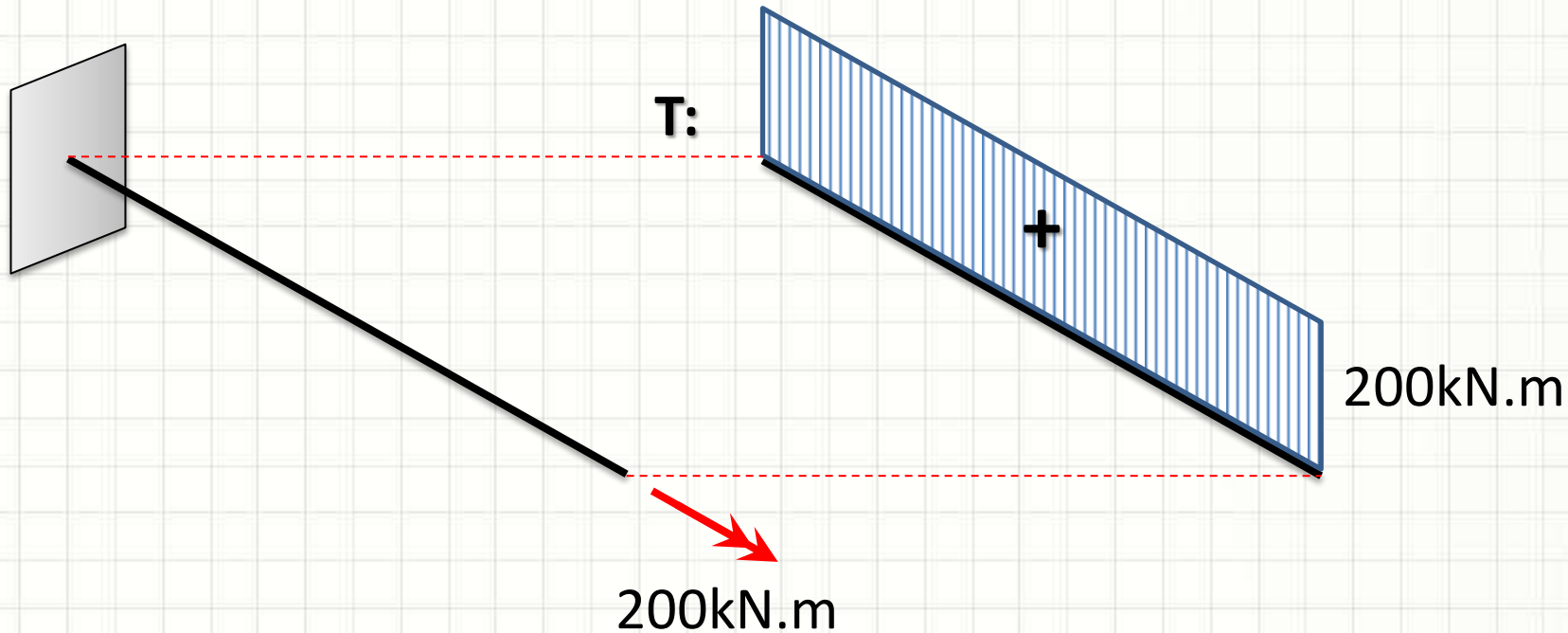




DIAGRAMA DE MOMENTO TORSOR TRIDIMENSIONAL

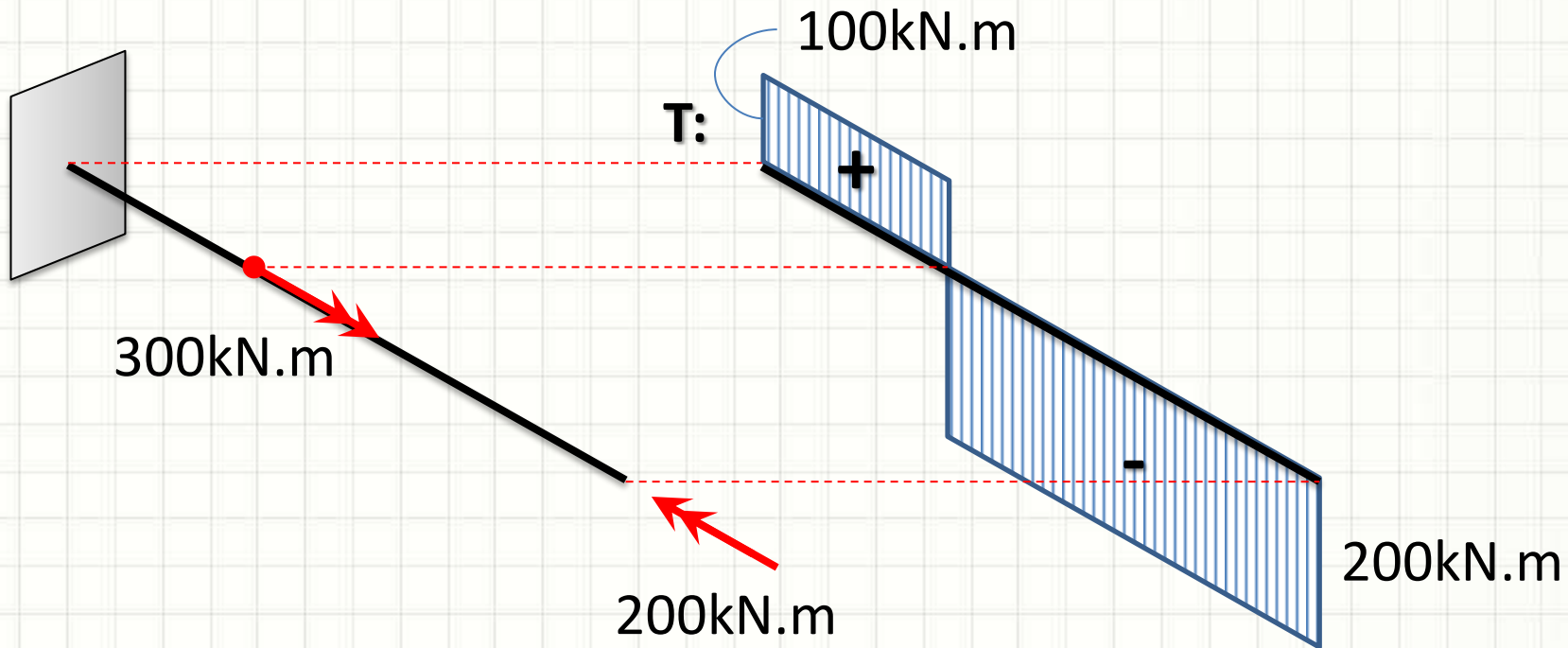
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



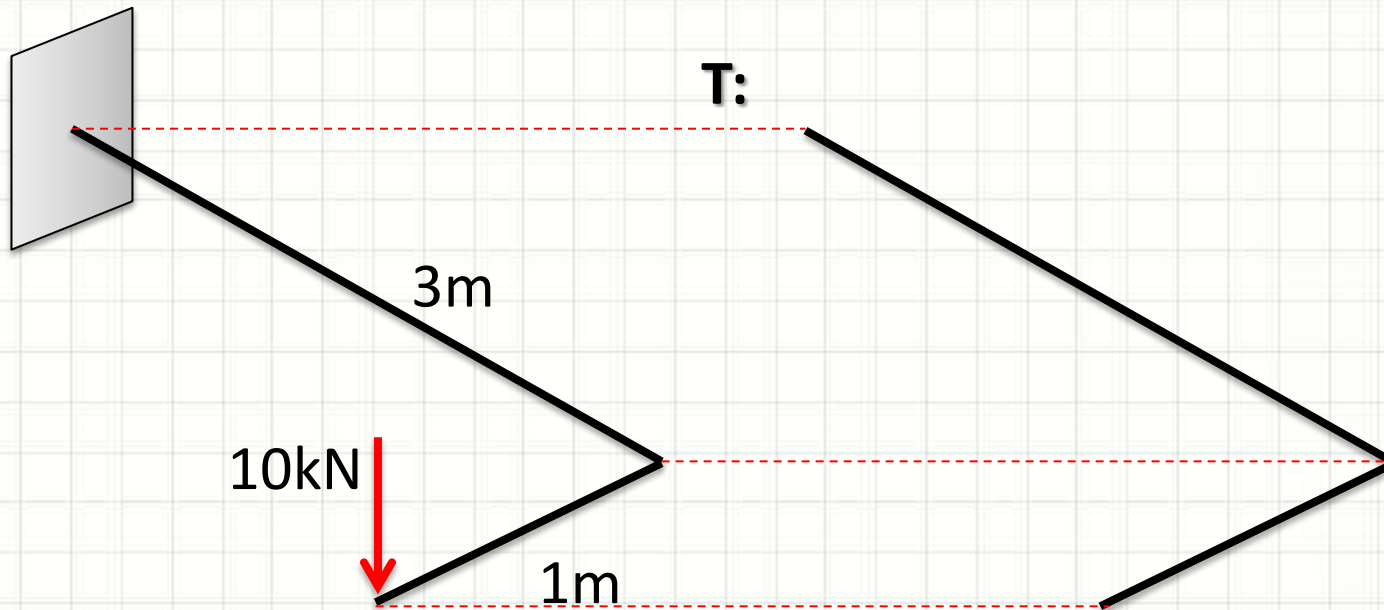
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



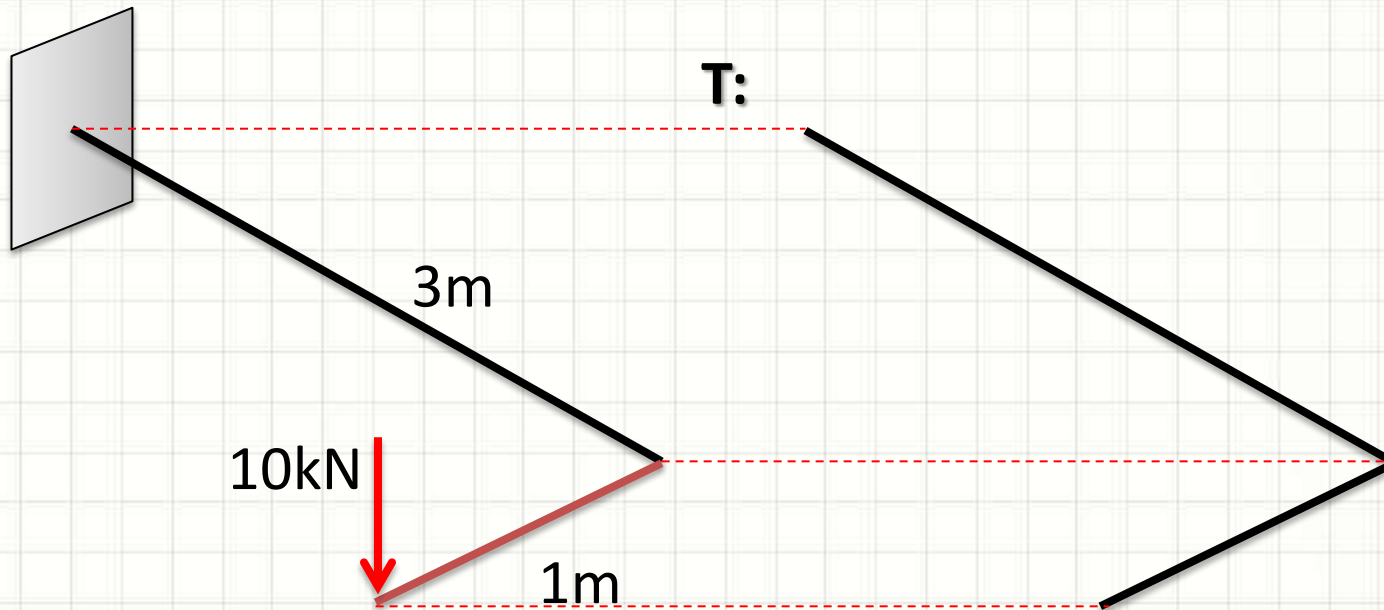
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



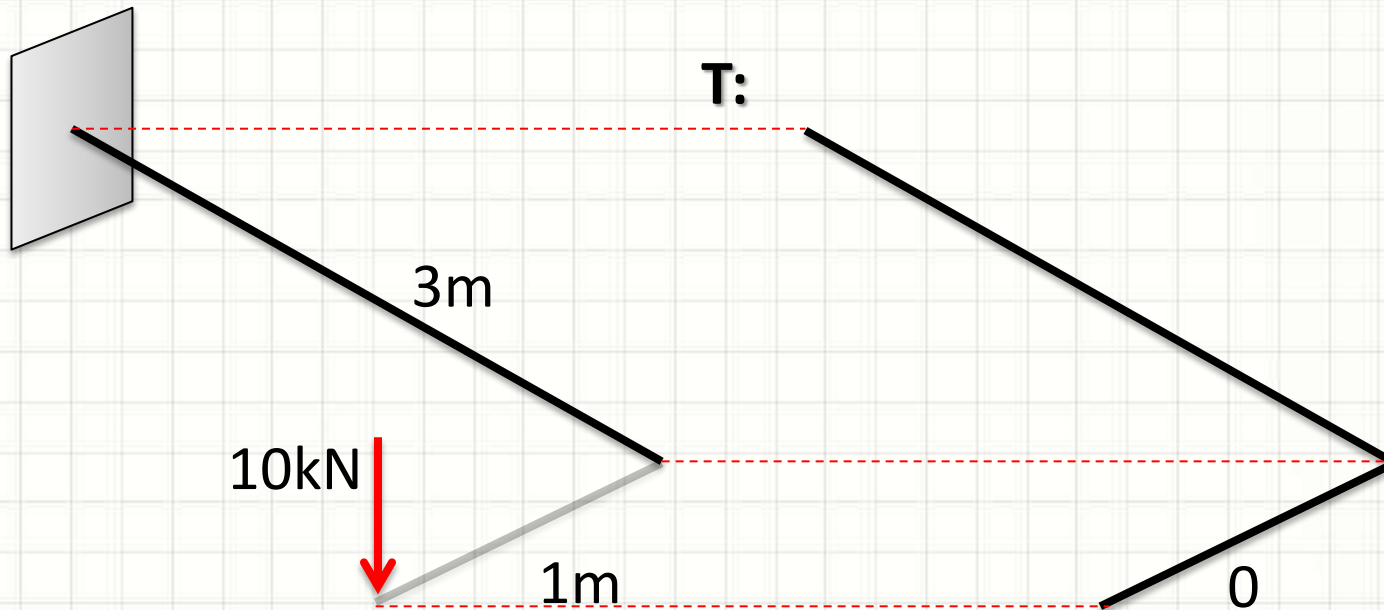
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



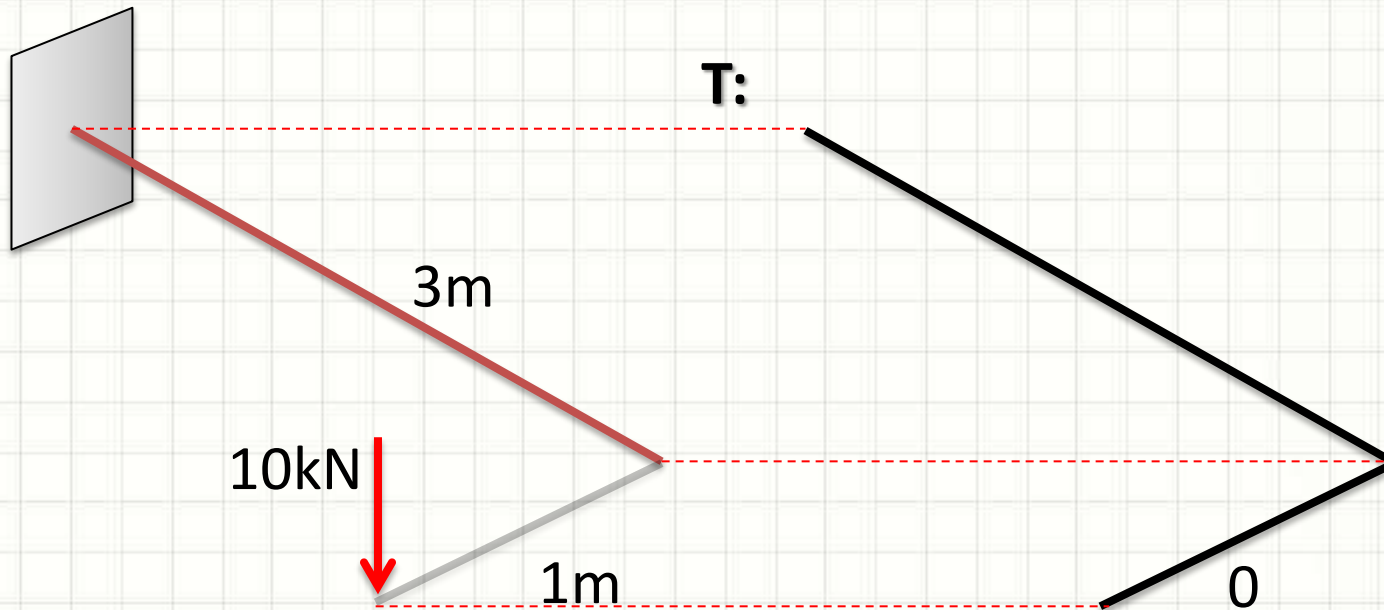
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



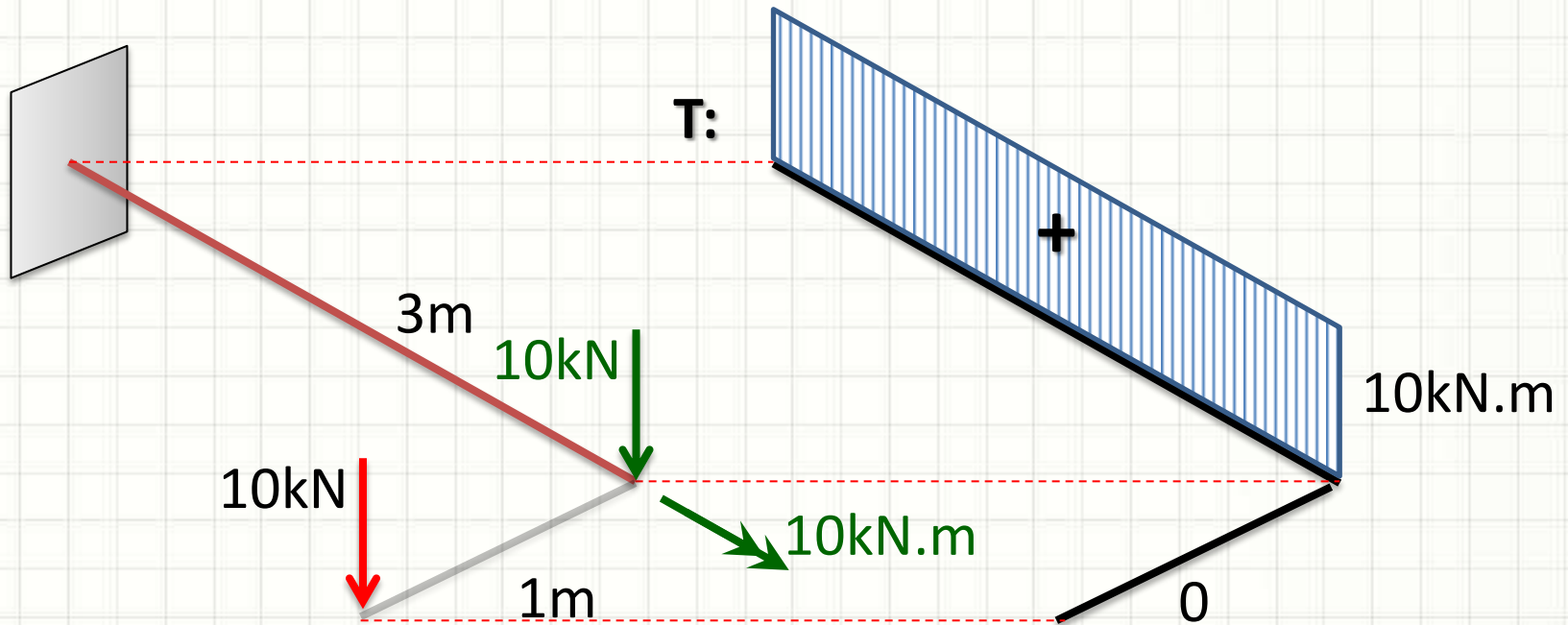
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



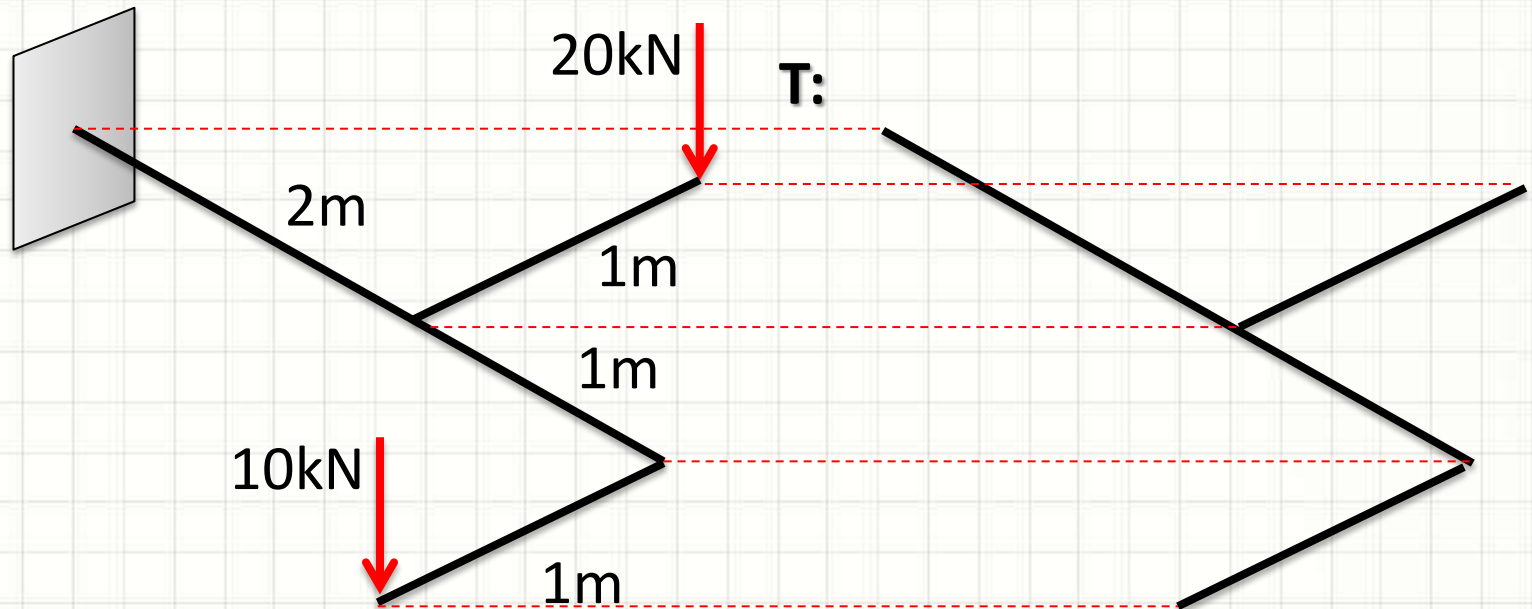
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



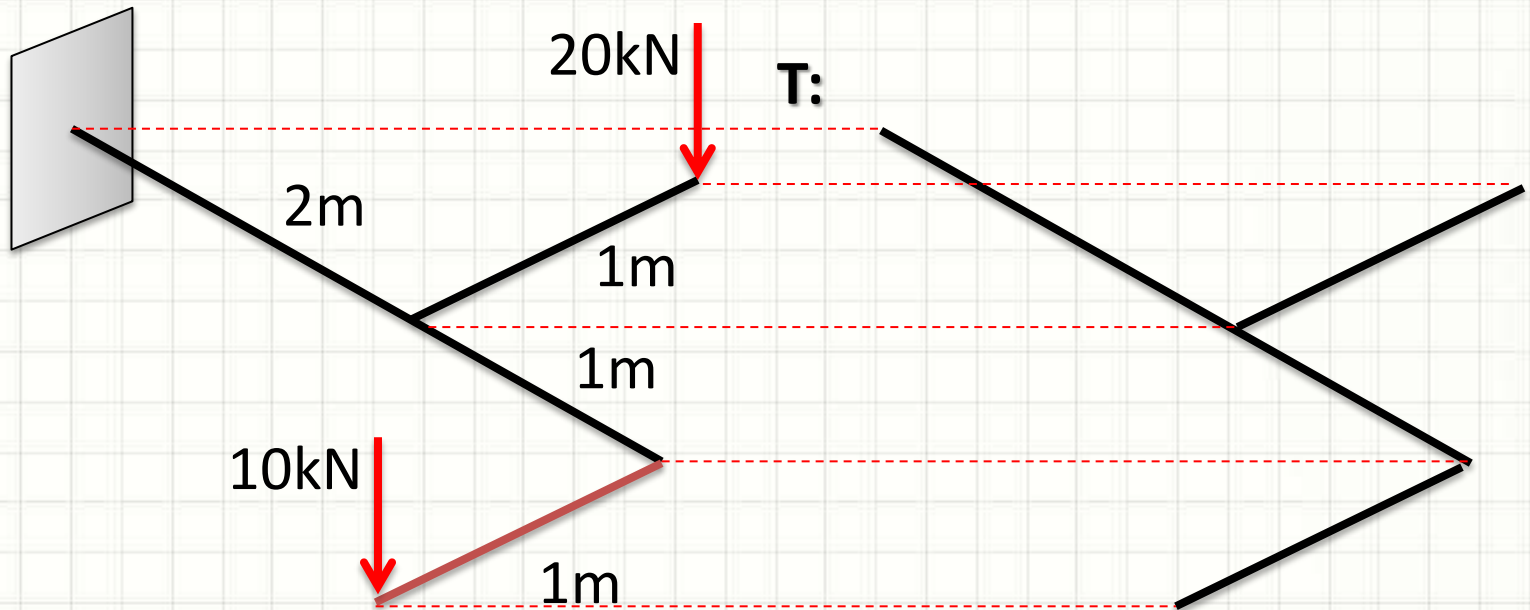
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



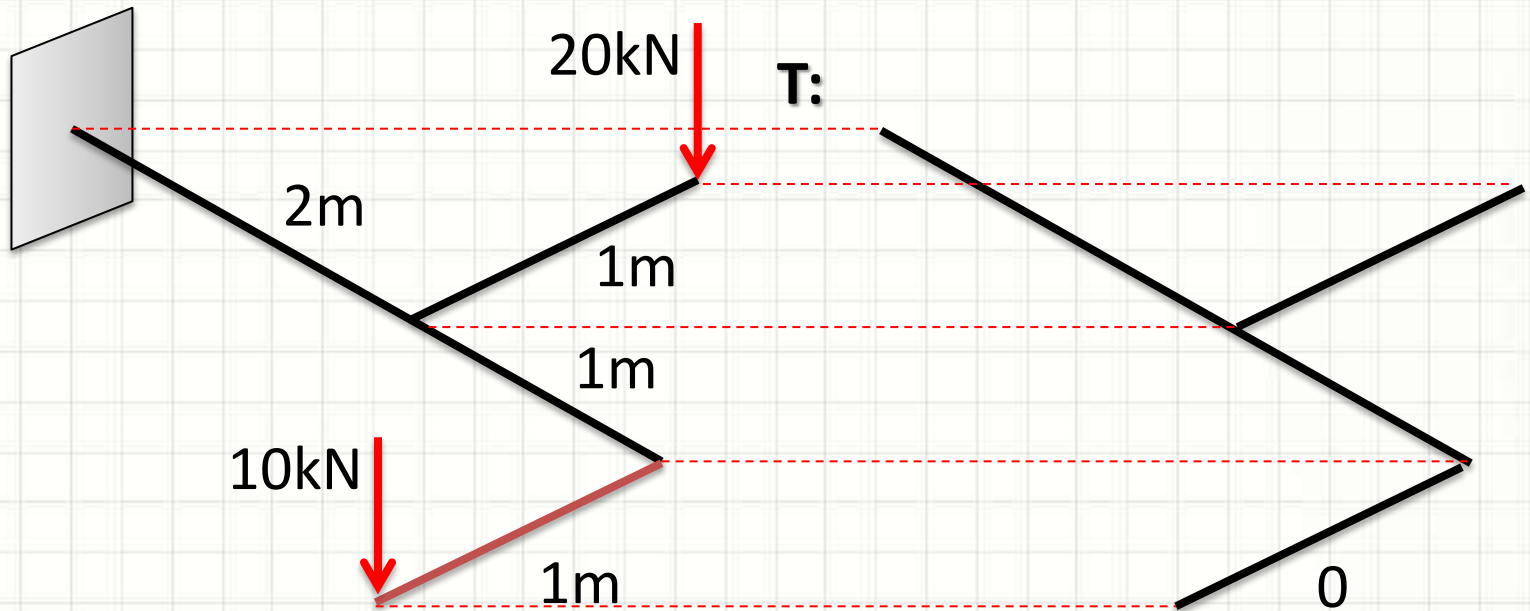
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



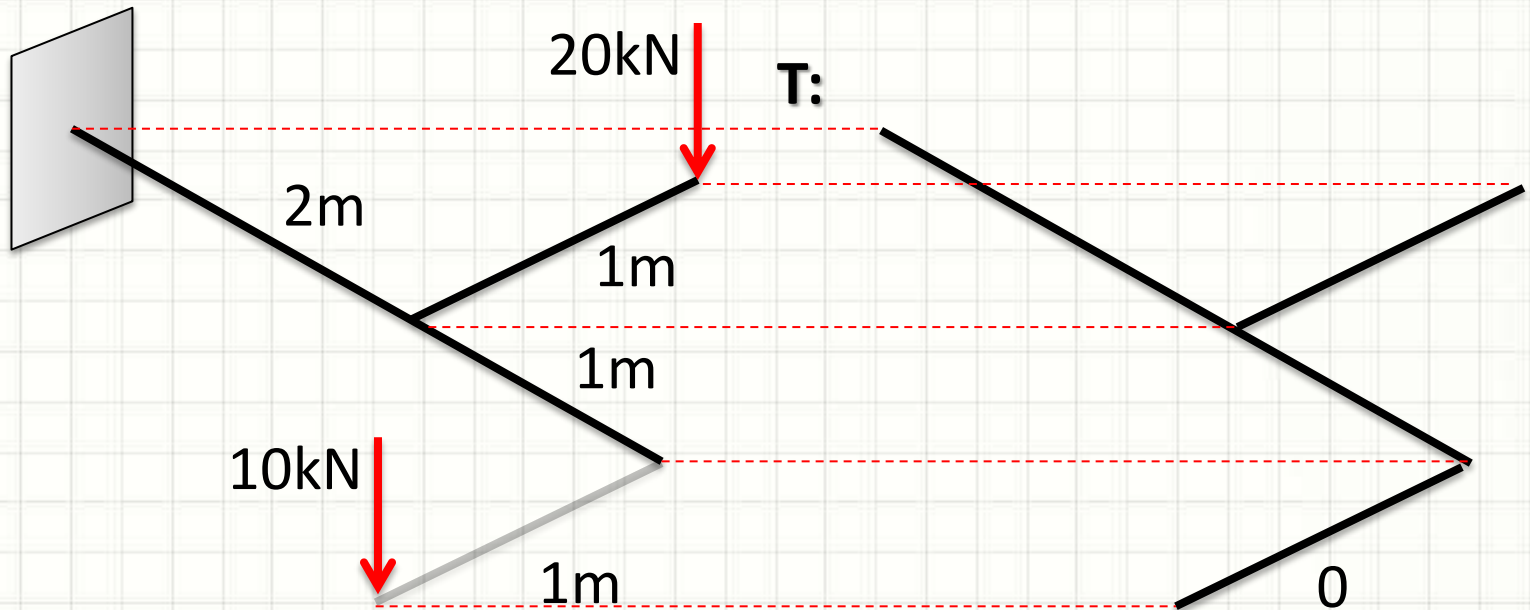
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



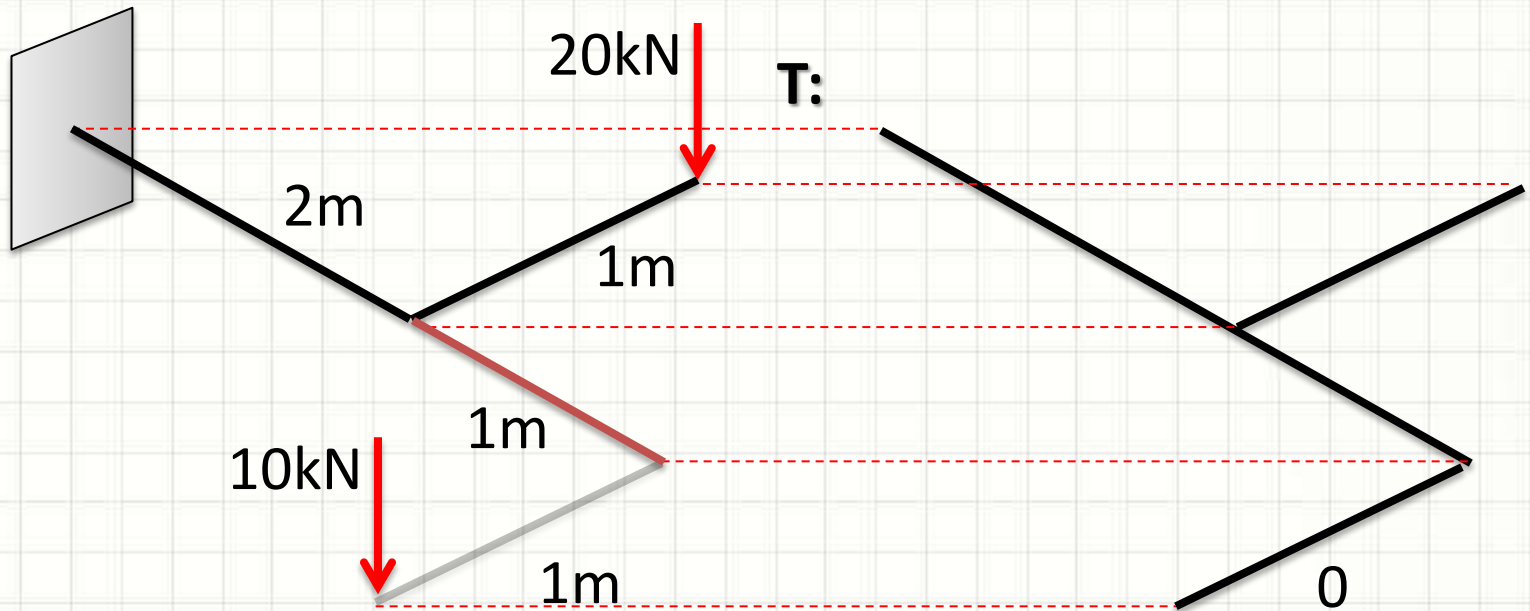
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



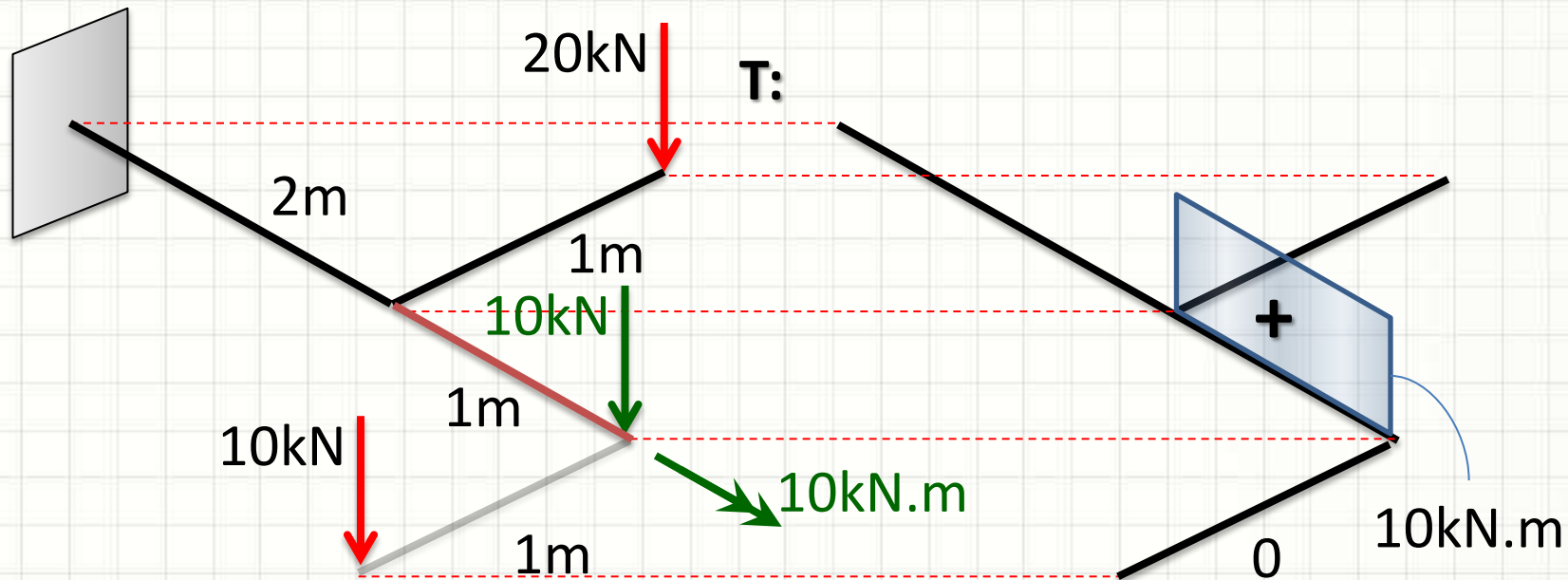
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



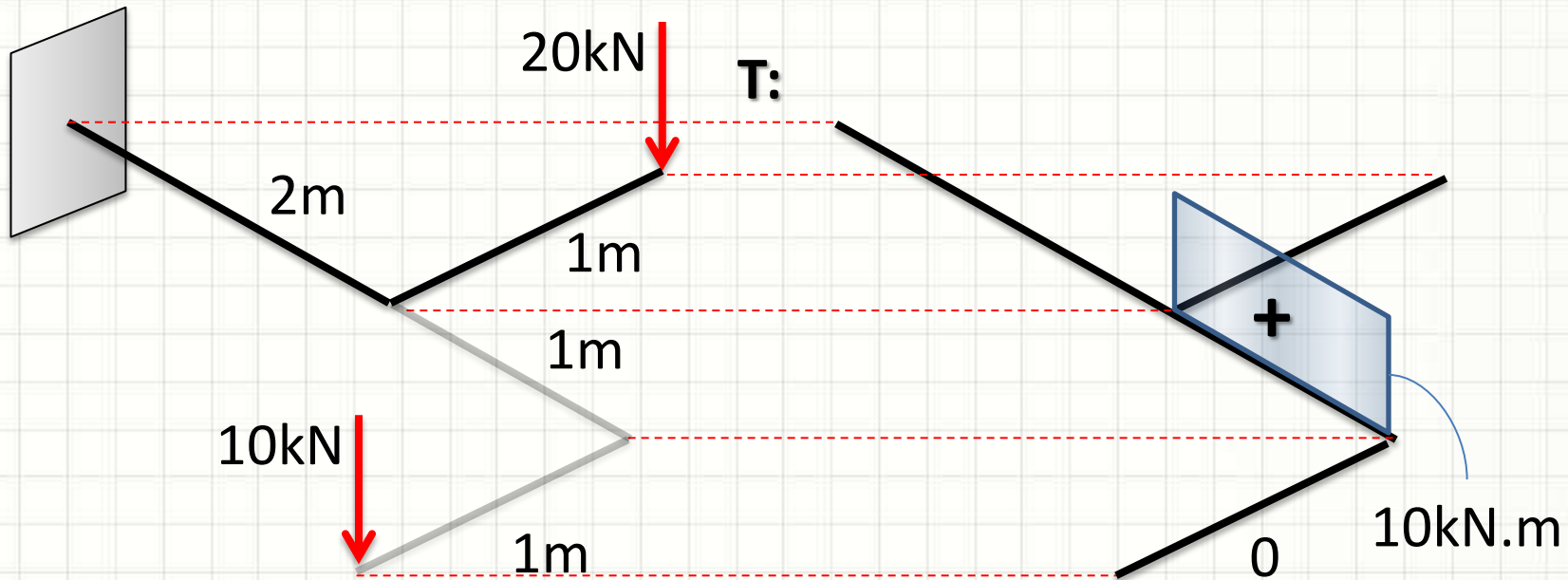
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



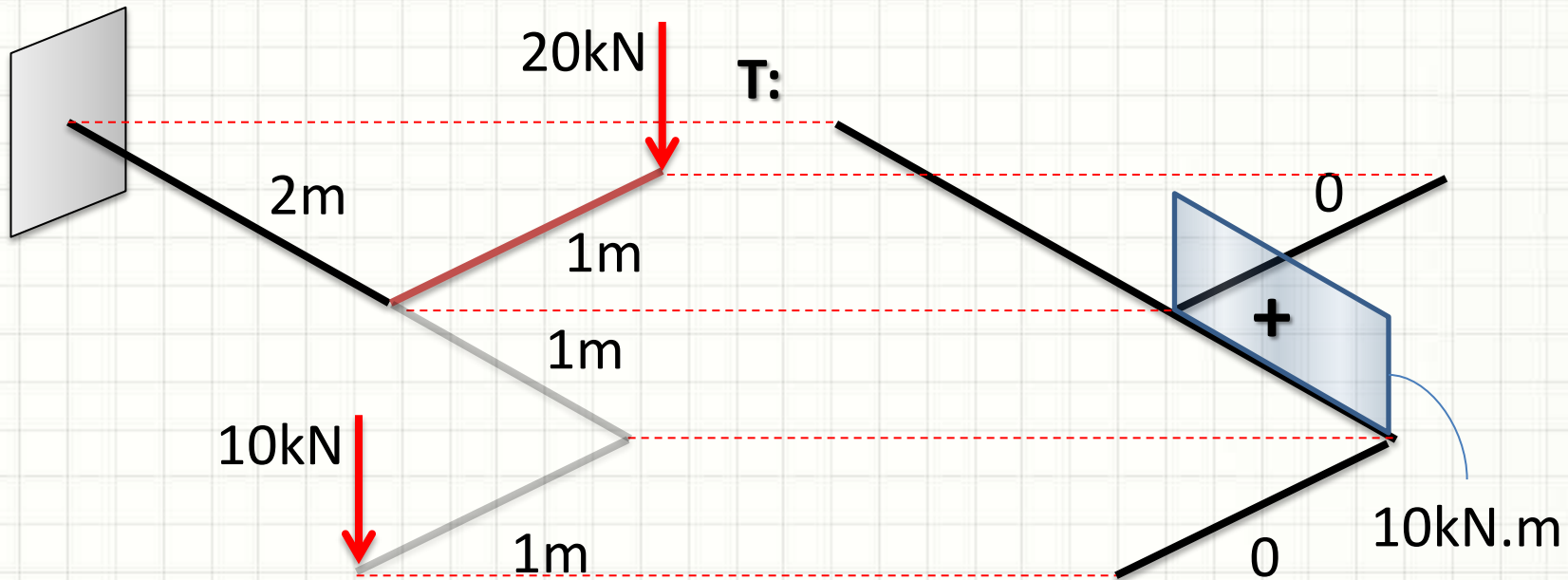
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



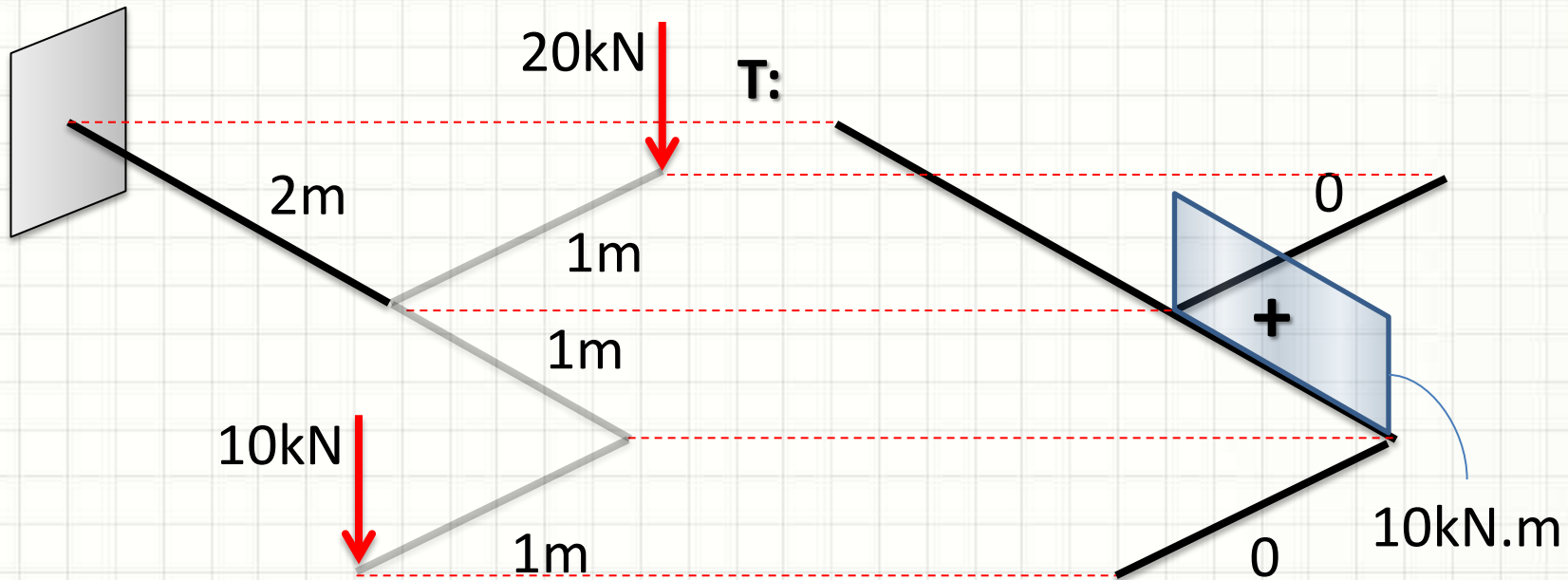
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



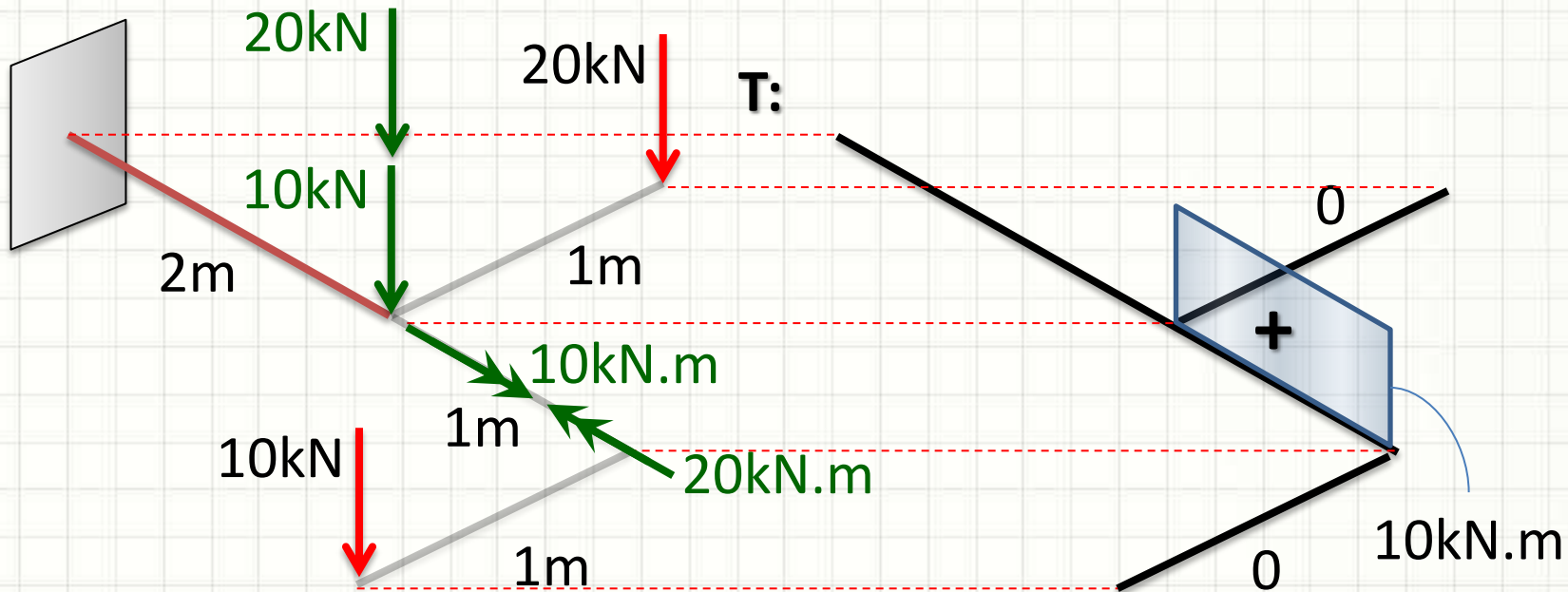
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



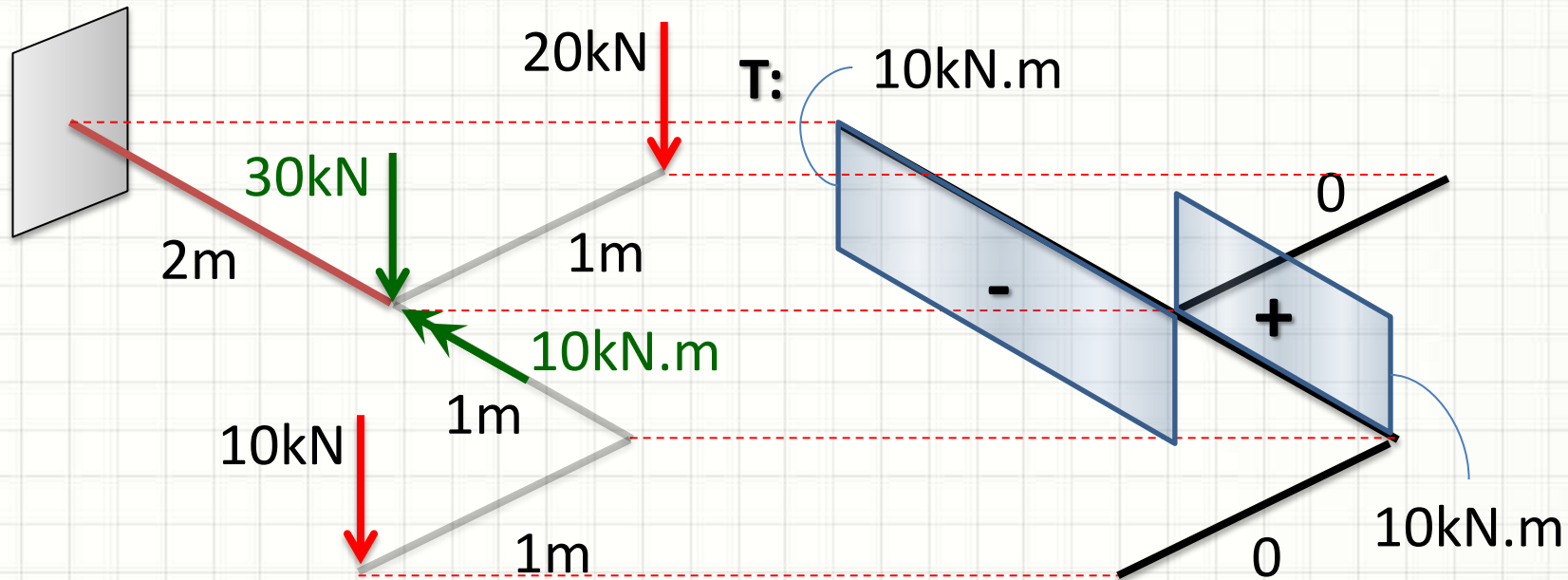
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



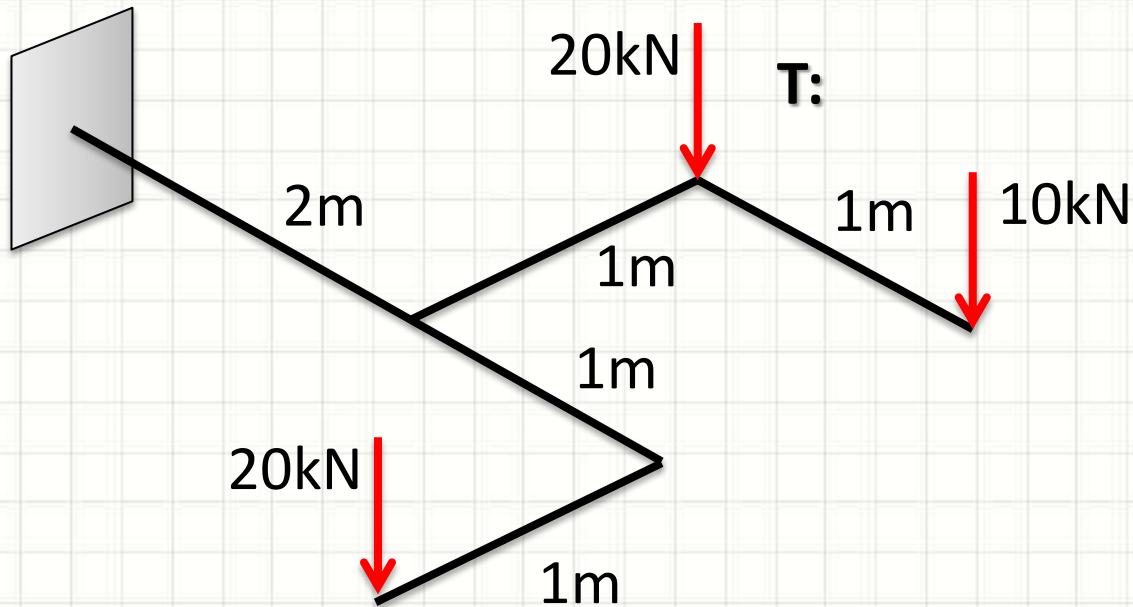
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torsores Concentrados



Exercício

- Trace o Diagrama de Momentos Torsores

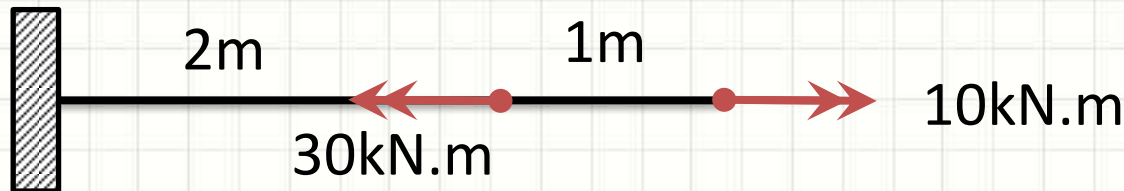




EXERCÍCIO COMPLETO

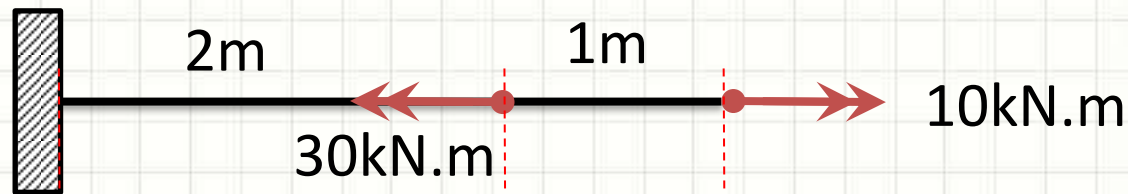
Exercício Completo

- A barra abaixo, que possui $G = 20\text{GPa}$, tem $R = 10\text{ cm}$. Calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o τ_{MAX} .

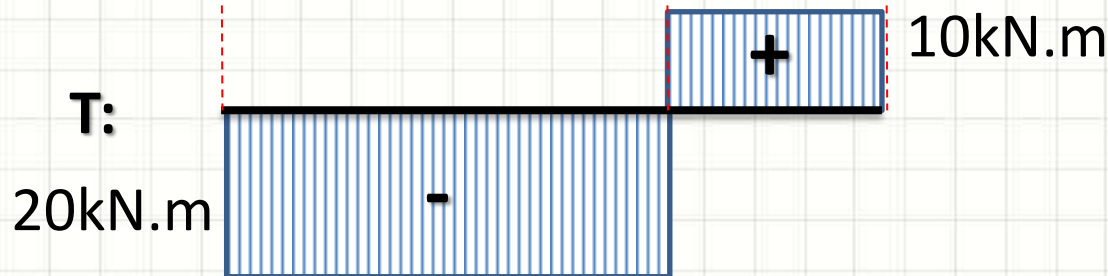


Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$

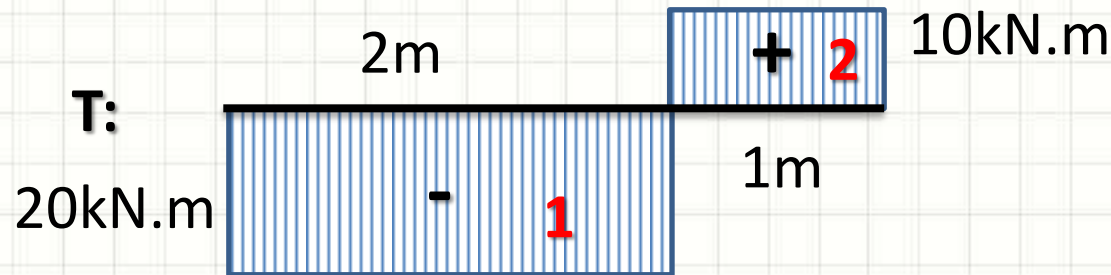


- Passo 1: Diagrama de Torção



Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



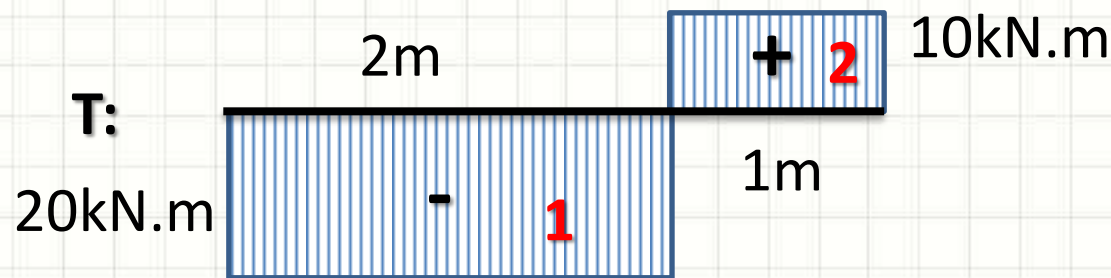
- Passo 2: Cálculo de ϕ ... $J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \rightarrow \phi = \frac{T \cdot L}{G} \cdot \frac{1}{J} \rightarrow \phi = \frac{T \cdot L}{G} \cdot \frac{2}{\pi \cdot R^4} \rightarrow$$

$$\boxed{\phi = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}}$$

Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



$$\phi = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

- Passo 3: Cálculo de ϕ_1

$$\phi_1 = \frac{2 \cdot T_1 \cdot L_1}{G \cdot \pi \cdot R^4} \rightarrow \phi_1 = \frac{2 \cdot (-20 \cdot 10^3) \cdot 2}{2 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^4} \rightarrow$$

$$\phi_1 = \frac{-4}{100 \cdot \pi} \rightarrow \boxed{\phi_1 \cong -0,013 \text{ rad}}$$

Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



$$\phi = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

$$\phi_1 \cong -0,013 \text{ rad}$$

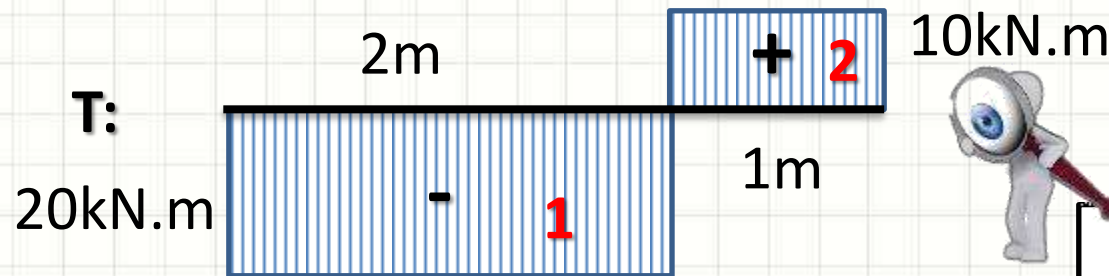
- Passo 4: Cálculo de ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{2 \cdot T_2 \cdot L_2}{G \cdot \pi \cdot R^4} \rightarrow \phi_2 = \frac{2 \cdot (10 \cdot 10^3) \cdot 1}{2 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^4} \rightarrow$$

$$\phi_2 = \frac{1}{100 \cdot \pi} \rightarrow \phi_2 \cong +0,003 \text{ rad}$$

Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



$$\phi = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

$$\phi_1 \cong -0,013 \text{ rad}$$

$$\phi_2 \cong +0,003 \text{ rad}$$

- Passo 5: $\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\phi \cong -0,013 + 0,003$$

$$\phi \cong -0,010 \text{ rad}$$

$$\phi \cong -0,57^\circ$$

Sentido
Horário!

Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



$$\phi \cong -0,010 \text{ rad}$$

- Passo 6: Cálculo de τ_{MAX} $J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$

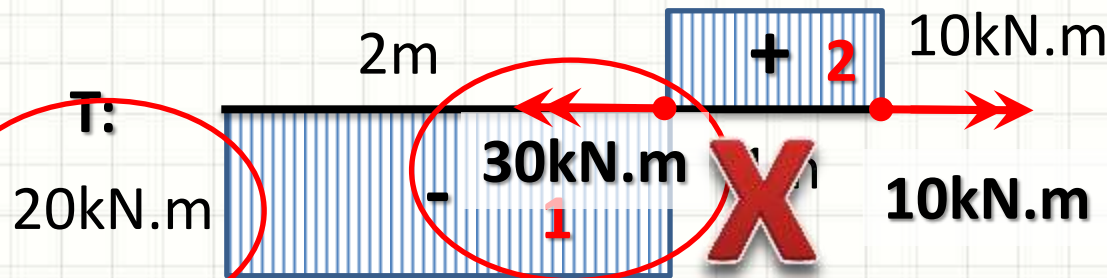
$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} \rightarrow \tau_{MAX} = T \cdot R \cdot \frac{1}{J} \rightarrow \tau_{MAX} = T \cdot R \cdot \frac{2}{\pi \cdot R^4}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3} \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^3} \rightarrow$$

$$\tau_{MAX} \cong 12,7 \text{ MPa}$$

Exercício Completo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



$$\phi \cong -0,010 \text{ rad}$$

- Passo 6: Cálculo de τ_{MAX}

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} \rightarrow \tau_{MAX} = T \cdot R \cdot \frac{1}{J} \rightarrow \tau_{MAX} = T \cdot R \cdot \frac{2}{\pi \cdot R^4}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^3}$$

$$\tau_{MAX} \cong 12,7 \text{ MPa}$$



CONCLUSÕES

Resumo

- Pode-se determinar o ângulo de torção
 - M. Torsor: calcular as grandezas de interesse
 - Diagramas: determinar o ponto de máximo momento de torção
 - **Exercitar: Exercícios Hibbeler**
-
- E se a torção ocorrer em eixo bi-engastado?
 - E se o eixo não possuir seção transversal circular?

The background features a light gray grid. In the upper left, there are several overlapping, wavy red lines of varying thickness and opacity, creating a sense of motion. A dashed red line follows a similar curved path across the upper portion of the grid.

PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Mínimos:
 - Exercícios 5.44, 5.50, 5.47, 5.50
- Extras:
 - Exercícios 5.45, 5,49, 5.48, 5.56

Para Treinar em Casa

Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

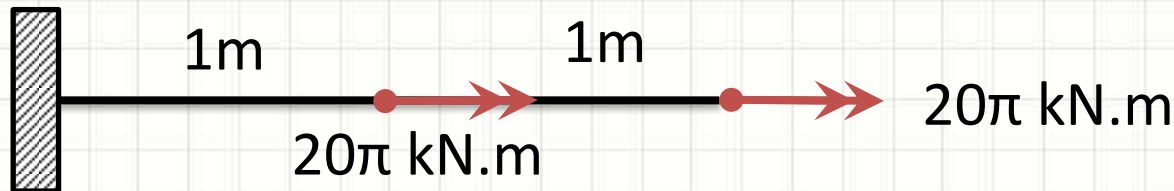
Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**



EXERCÍCIO NO SAVA

Exercício – Entrega Individual

- A barra abaixo, que possui $G = 20\text{GPa}$, tem $R = 10\text{ cm}$. Calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o τ_{MAX} .



- Calcule qual seria a diferença de rotação e cisalhamento máximo se a barra fosse oca, com o raio interno igual a 5cm?



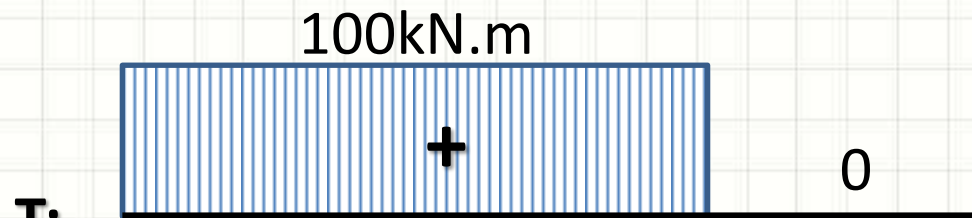
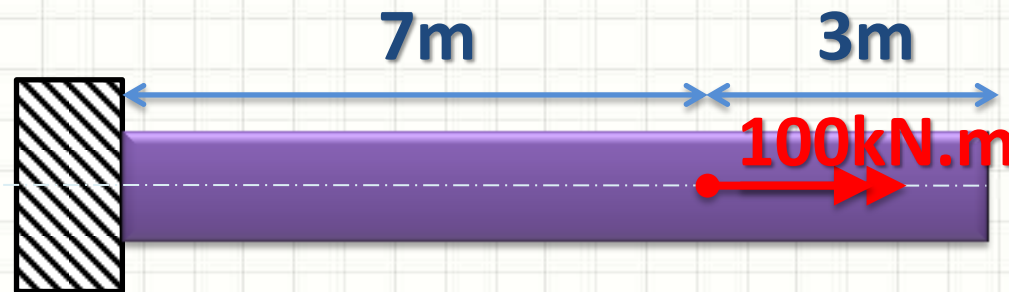
PERGUNTAS?



EXERCÍCIO EM SALA

Exercício – Individual, para Agora!

- Trace o diagrama de momento torsor da barra abaixo e calcule a rotação entre os dois extremos da barra, com $G = 200\text{GPa}$ e raio = 5 cm



$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\phi = 0,36 \text{ rad}$$