

# RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

## TORÇÃO PARTE III

Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

# Objetivos

- Conceituar e capacitar para a resolução de problemas estaticamente indeterminados na torção
- Compreender as limitações da teoria para o caso de barras maciças de seção não circular



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>  
(Resistência dos Materiais II – Aula 7)

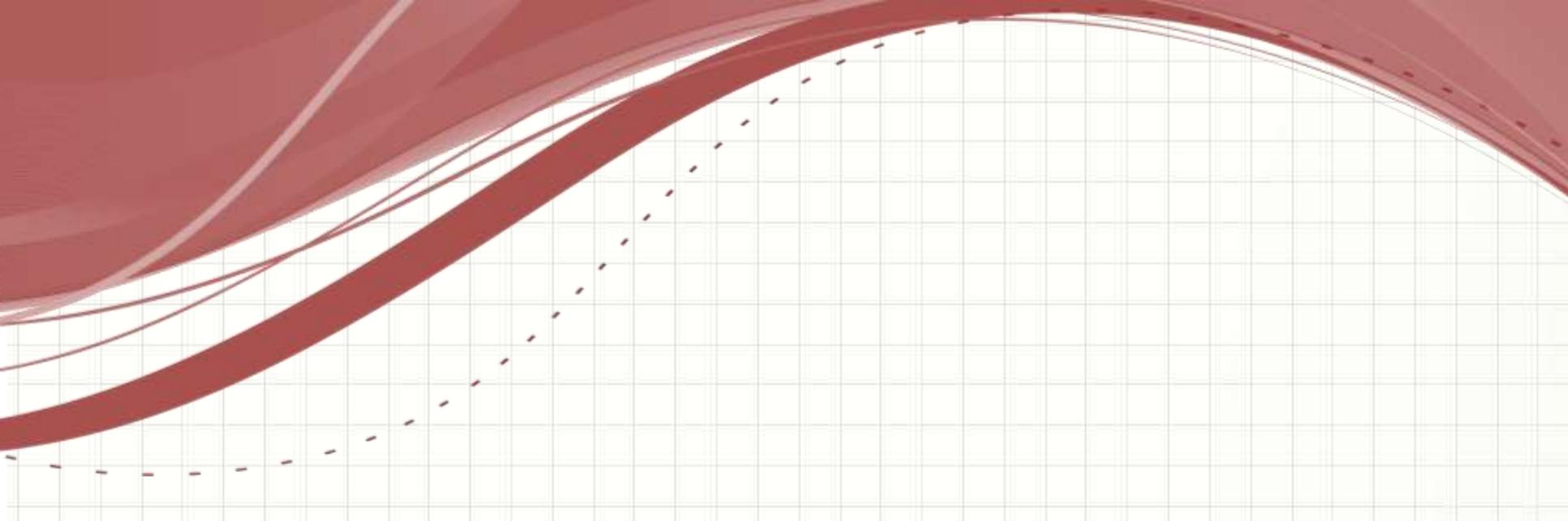
Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 150 a 157.

Biblioteca Virtual

“Resistência dos Materiais”

---



**RELEMBRANDO:**

# **TORÇÃO E TORQUE**

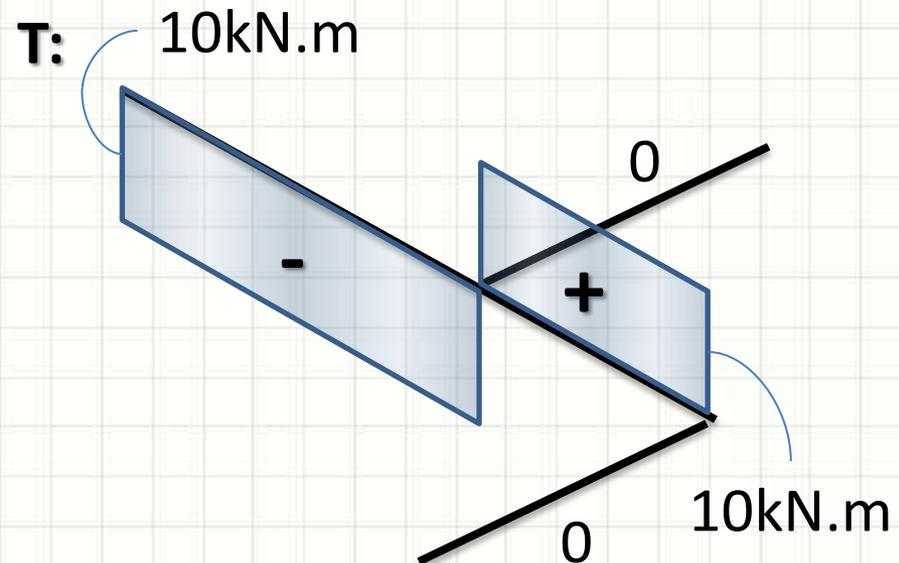
# Fórmulas para Torção

- Pelo que vimos até agora...

$$\tau_{MAX} = \frac{T}{J} \cdot R$$

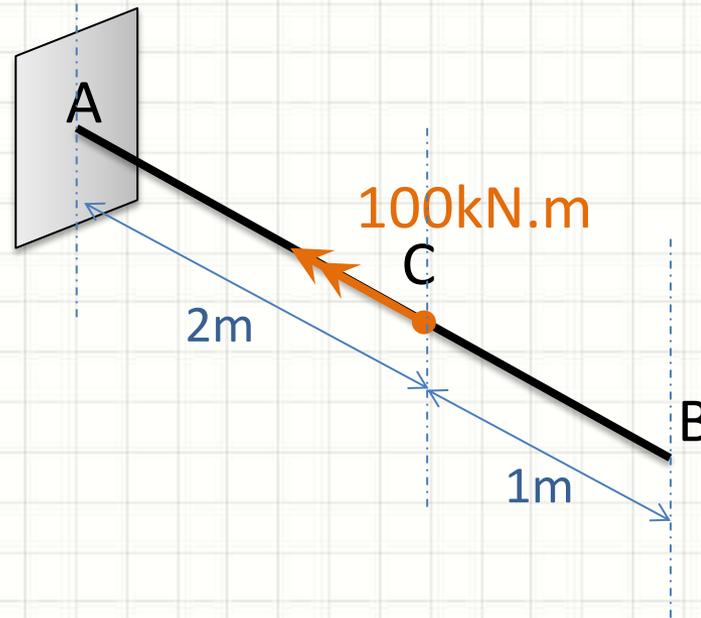
$$P = T \cdot \omega$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$



# Exemplo

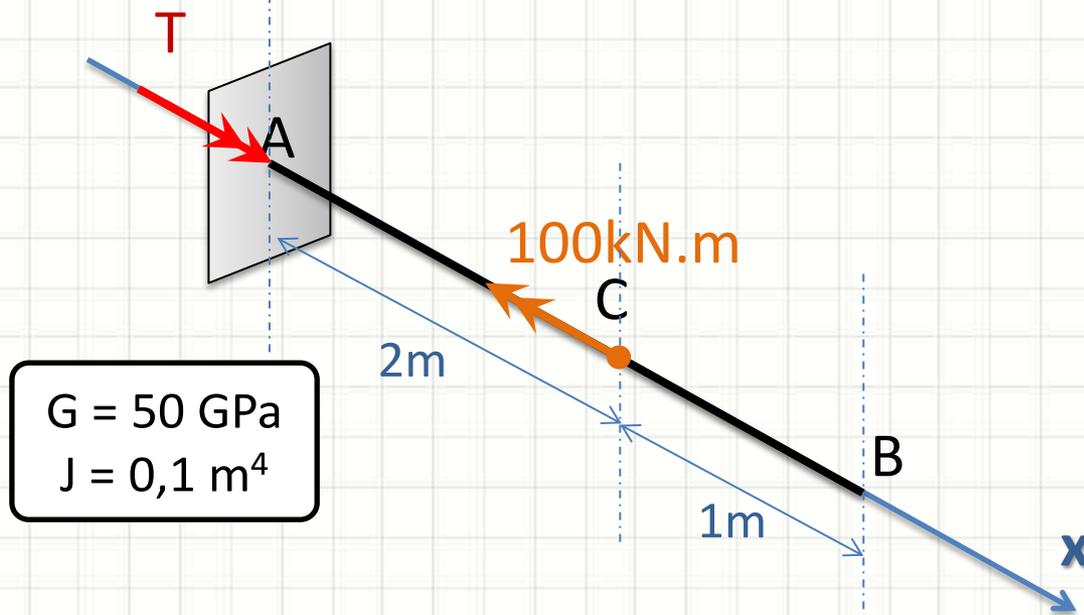
- Calcule a rotação da barra no trecho A-C



$$G = 50 \text{ GPa}$$
$$J = 0,1 \text{ m}^4$$

# Exemplo

- Calcule a rotação da barra no trecho A-C

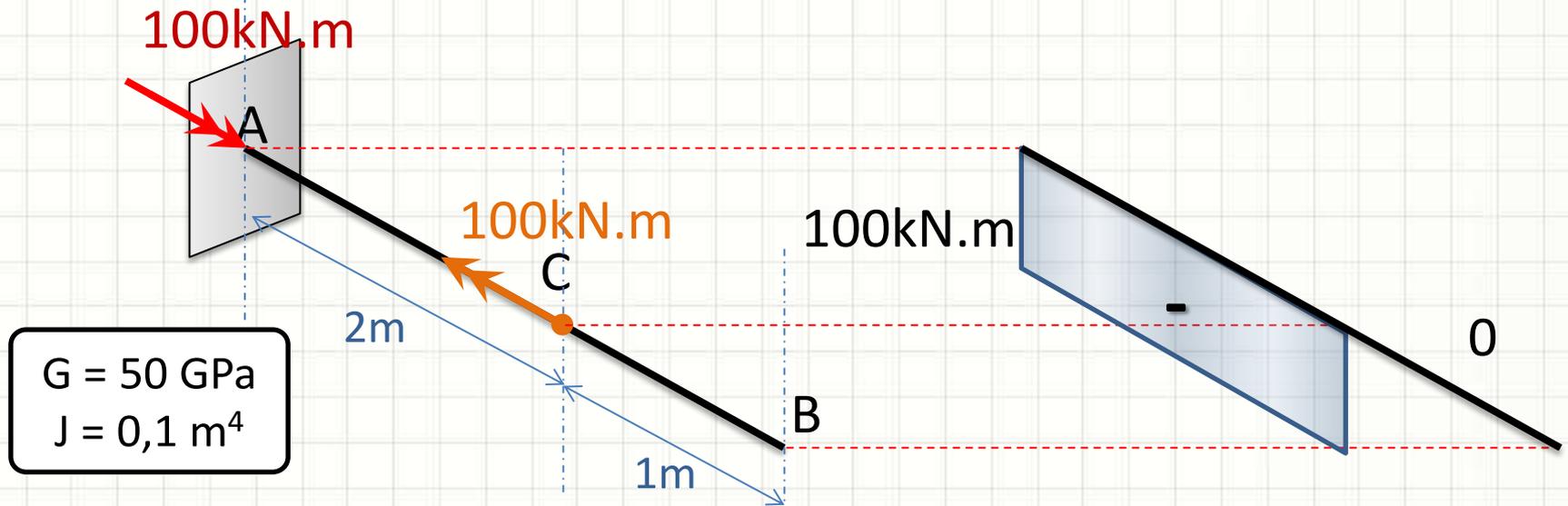


- 1. Equilíbrio estático?

$$\sum T_x = 0 \rightarrow T - 100000 = 0 \rightarrow T = 100kN$$

# Exemplo

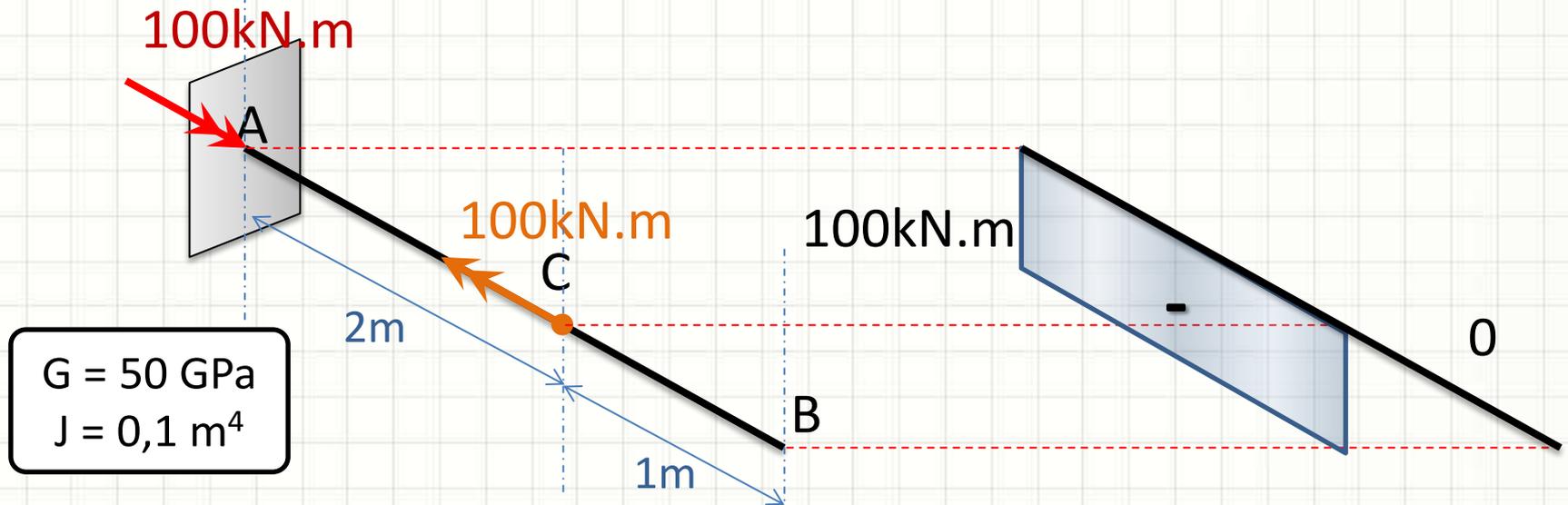
- Calcule a rotação da barra no trecho A-C



- 2. Diagrama (2D ou 3D)

# Exemplo

- Calcule a rotação da barra no trecho A-C

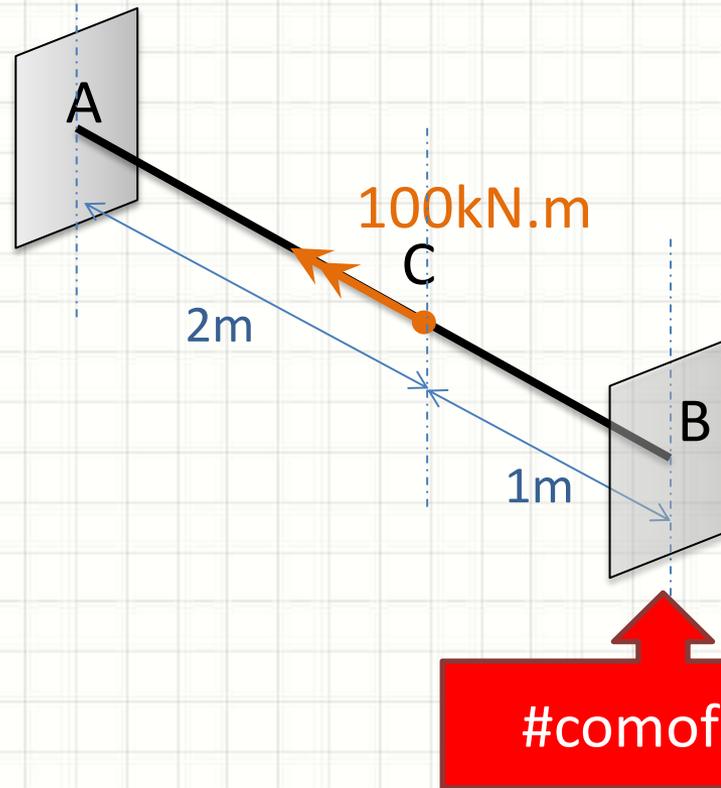


- 3. Cálculo da Rotação  $\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \rightarrow$

$$\phi = \frac{-100 \cdot 10^3 \cdot 2}{50 \cdot 10^9 \cdot 10^{-1}} \rightarrow \phi = -40 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

# Exemplo

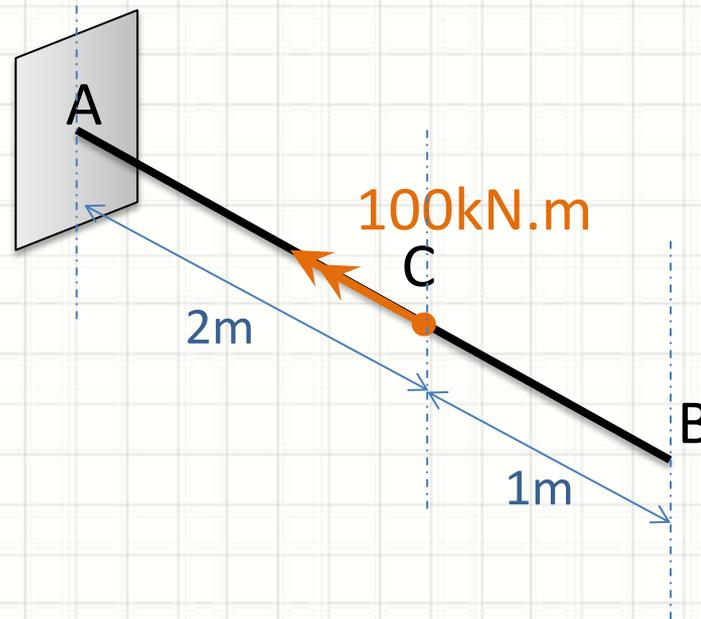
- Calcule a rotação da barra no trecho A-C



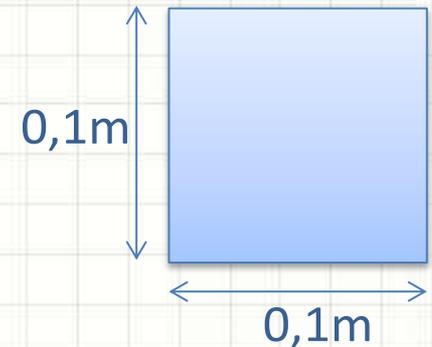
$$G = 50 \text{ GPa}$$
$$J = 0,1 \text{ m}^4$$

# Exemplo

- Calcule a rotação da barra no trecho A-C



$$G = 50 \text{ GPa}$$



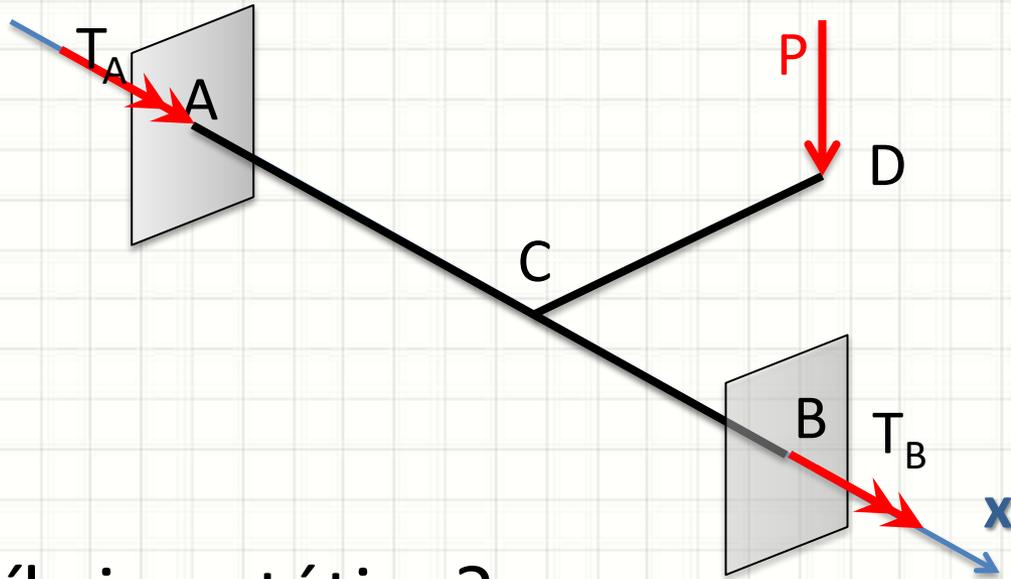
#comofaz?



**PROBLEMAS DE TORÇÃO  
ESTATICAMENTE  
INDETERMINADOS**

# Estruturas Estat. Indeterminadas

- Similar àqueles com as tensões axiais...



- Equilíbrio estático?

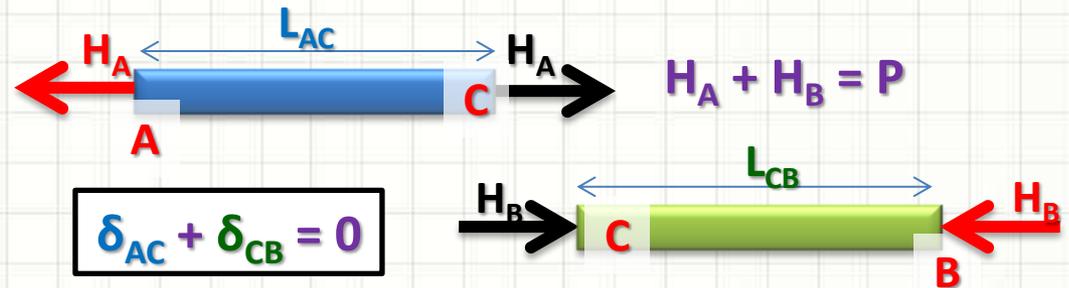
1 equação  
2 incógnitas

$$\sum T_x = 0 \rightarrow -P \cdot L_{CD} + T_A + T_B = 0$$

# Compatibilidade de Deformações

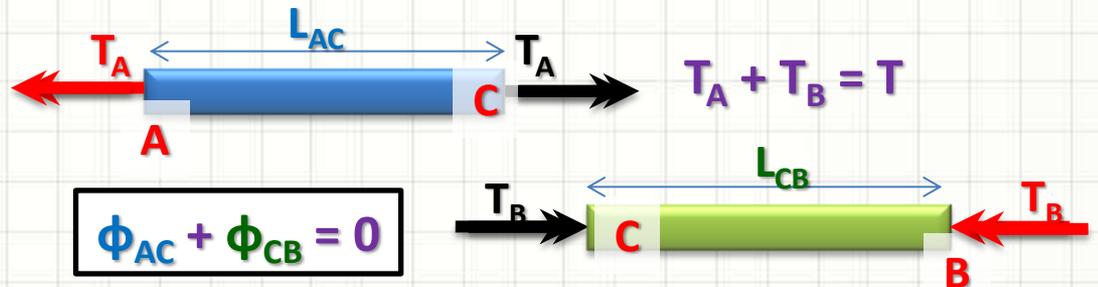
- Esforços axiais: compatib. dos alongamentos

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$



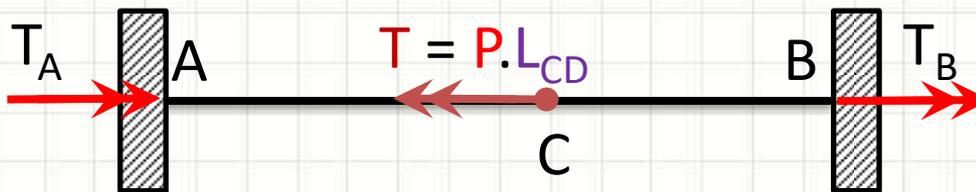
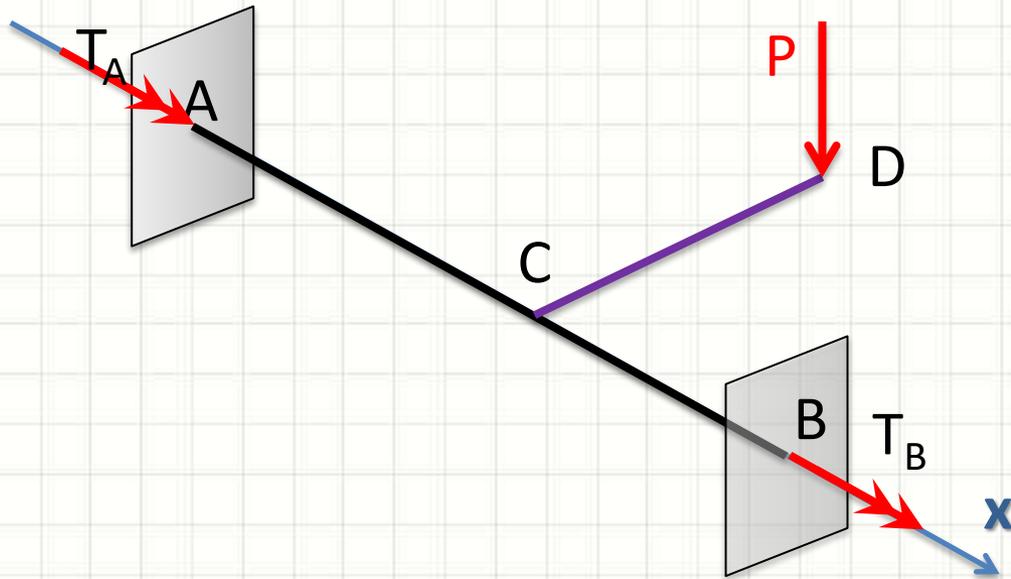
- Torções: compatibilidade das rotações

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$



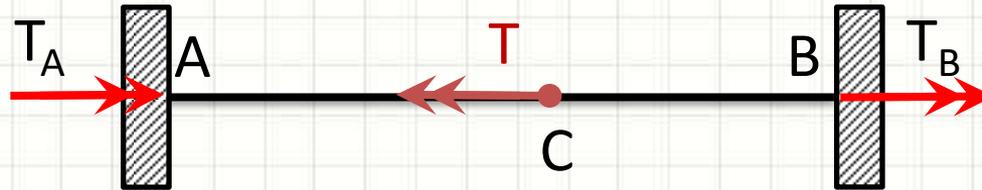
# Estruturas Estat. Indeterminadas

- Redesenhemos a barra em 2D



# Estruturas Estat. Indeterminadas

- Vamos traçar os diagramas de corpo livre



- Pela estática:  $T_A = T - T_B$
- Compatibilidade?
  - Os extremos da barra não giraram entre si, logo:

$$\phi_{AC} + \phi_{CB} = 0$$

# Estruturas Estat. Indeterminadas

- Calculando as rotações



$$\phi_{AC} + \phi_{CB} = 0$$

$$\frac{-T_A \cdot L_{AC}}{G \cdot J} + \frac{(T - T_A) \cdot L_{BC}}{G \cdot J} = 0$$

$$\frac{-T_A \cdot L_{AC} + (T - T_A) \cdot L_{BC}}{G \cdot J} = 0$$

$$-T_A \cdot L_{AC} + T \cdot L_{BC} - T_A \cdot L_{BC} = 0$$

# Estruturas Estat. Indeterminadas

- Calculando as rotações



$$\phi_{AC} + \phi_{CB} = 0$$

$$-T_A \cdot L_{AC} + T \cdot L_{BC} - T_A \cdot L_{BC} = 0 \rightarrow$$

$$T \cdot L_{BC} = T_A \cdot L_{AC} + T_A \cdot L_{BC} \rightarrow$$

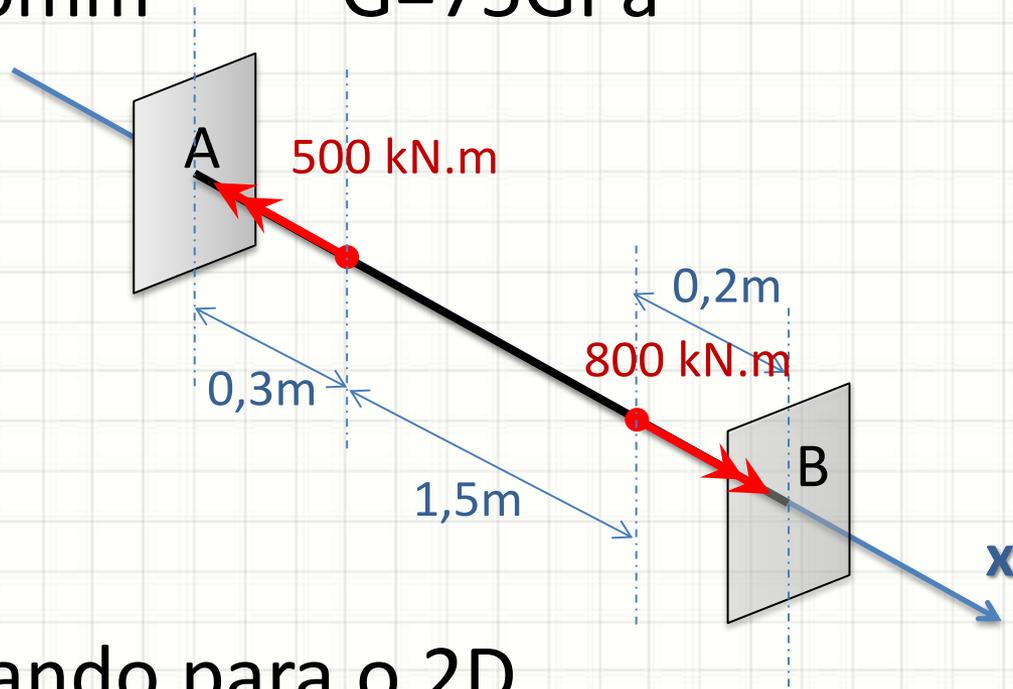
$$T \cdot L_{BC} = T_A \cdot (L_{AC} + L_{BC}) \rightarrow$$

$$T_A = \frac{T \cdot L_{BC}}{(L_{AC} + L_{BC})}$$



# Exemplo

- $D=20\text{mm}$        $G=75\text{GPa}$



- Passando para o 2D...



# Exemplo

- $D=20\text{mm}$        $G=75\text{GPa}$



- Equilíbrio estático

$$\sum T_x = 0 \rightarrow$$

$$-T_A - 500 \cdot 10^3 + 800 \cdot 10^3 - T_B = 0 \rightarrow$$

$$T_B = 300 \cdot 10^3 - T_A$$

# Exemplo

- $D=20\text{mm}$

- $G=75\text{GPa}$

$$T_B = 300 \cdot 10^3 - T_A$$



- Qual a compatibilidade?
- Rotação de B em relação a A = 0:  $\phi_{AB} = 0$
- Ou seja...

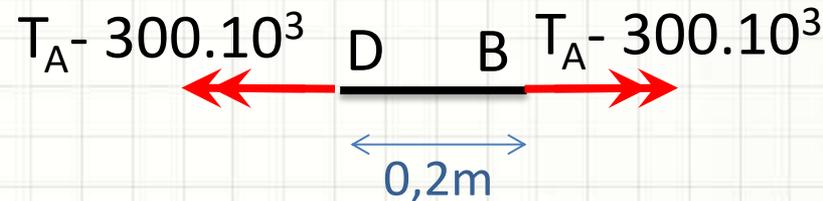
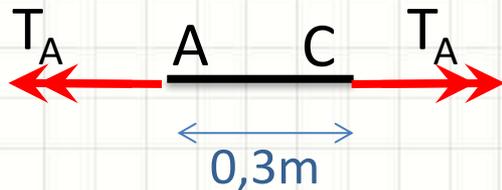
$$\phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DB} = 0$$

# Exemplo

- $D=20\text{mm}$        $G=75\text{GPa}$

$$\phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DB} = 0$$

$$T_B = 300 \cdot 10^3 - T_A$$



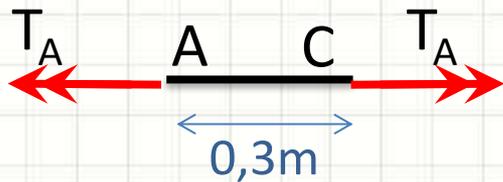
# Exemplo

• D=20mm

G=75GPa

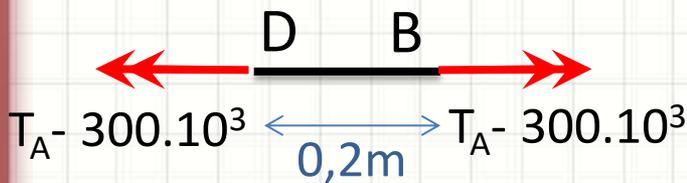
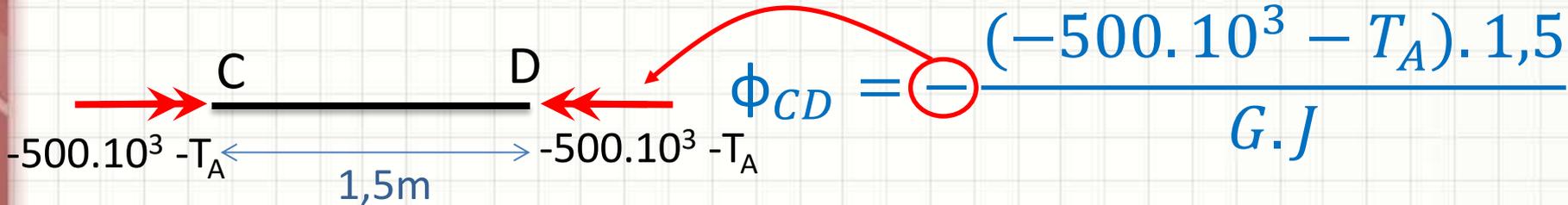
$$\phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DB} = 0$$

$$T_B = 300 \cdot 10^3 - T_A$$



$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\phi_{AC} = \frac{T_A \cdot 0,3}{G \cdot J}$$



$$\phi_{DB} = \frac{(T_A - 300 \cdot 10^3) \cdot 0,2}{G \cdot J}$$

$$\phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DB} = 0$$

# Exemplo

• D=20mm

G=75GPa

$$T_B = 300 \cdot 10^3 - T_A$$

$$\phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DB} = 0$$

$$\frac{T_A \cdot 0,3}{G \cdot J} - \frac{(-500 \cdot 10^3 - T_A) \cdot 1,5}{G \cdot J} + \frac{(T_A - 300 \cdot 10^3) \cdot 0,2}{G \cdot J} = 0$$

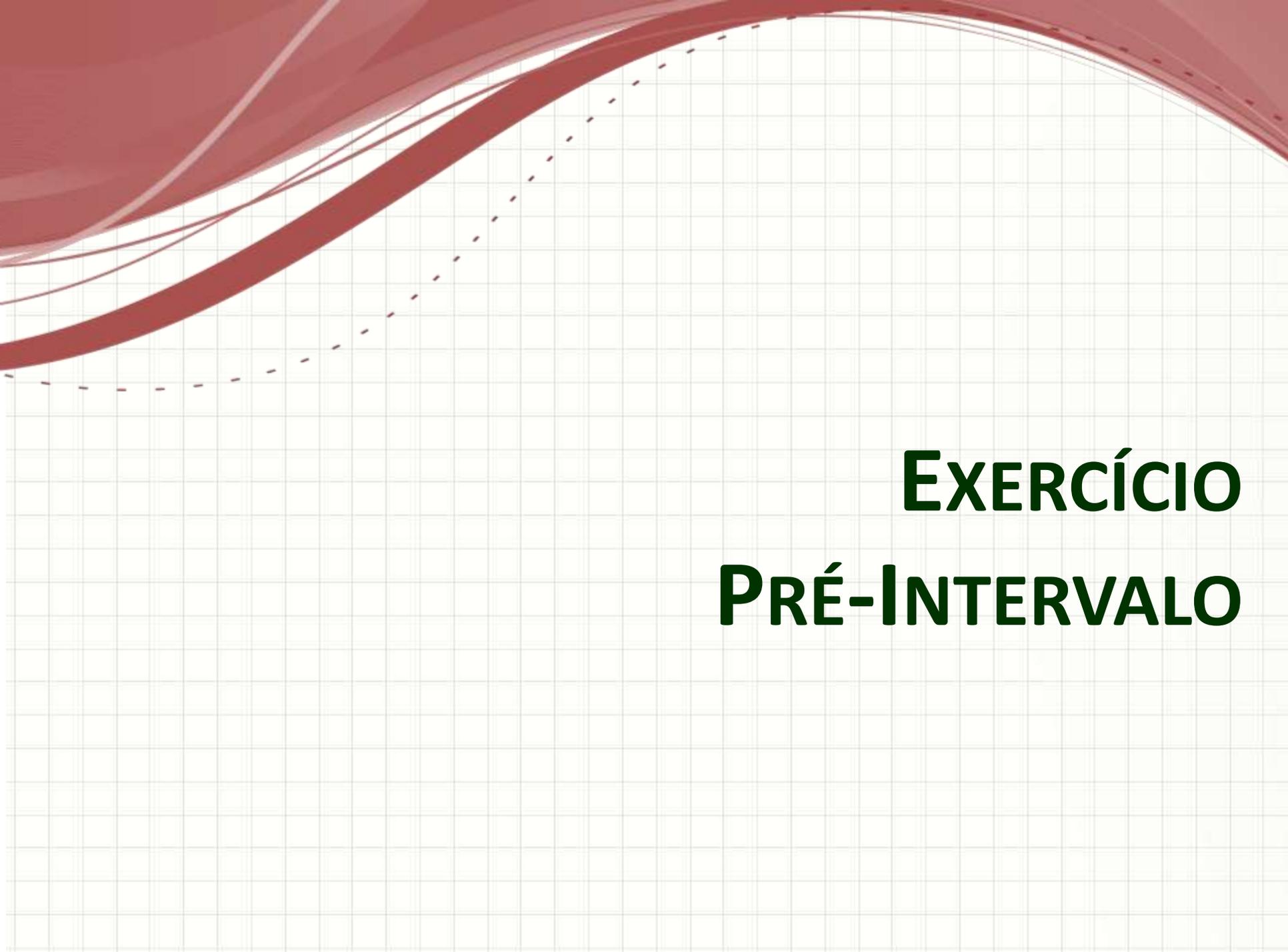
$$\rightarrow \frac{0,3 \cdot T_A + 750 \cdot 10^3 + 1,5 \cdot T_A + 0,2 \cdot T_A - 60 \cdot 10^3}{G \cdot J} = 0 \rightarrow$$

$$2 \cdot T_A + 690 \cdot 10^3 = 0 \rightarrow$$

O que significa?

$$T_A = -345 \text{ kN}$$

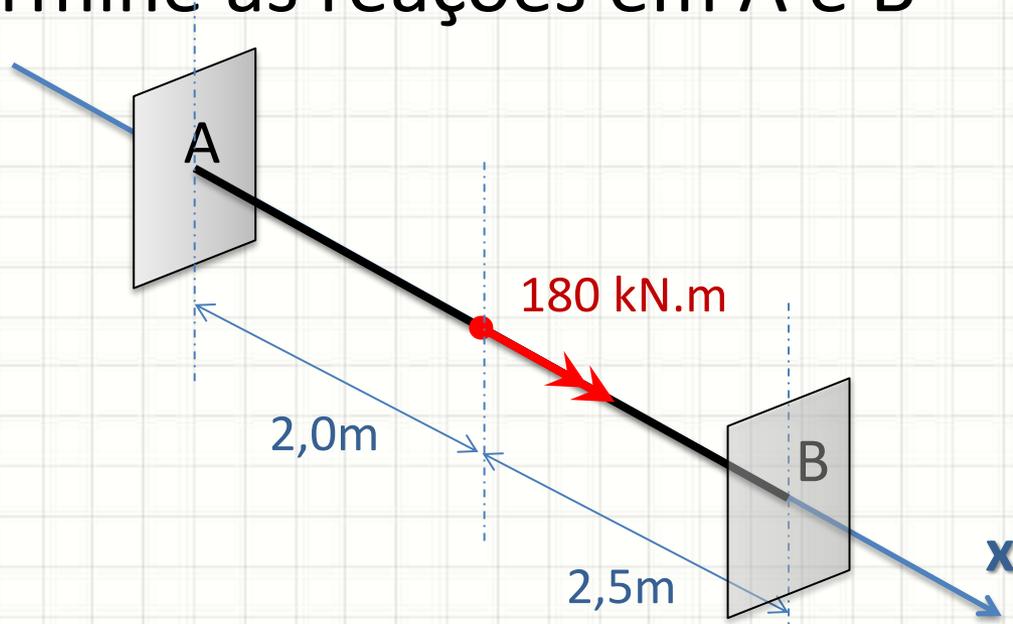
$$T_B = 645 \text{ kN}$$



# **EXERCÍCIO PRÉ-INTERVALO**

# Exercício

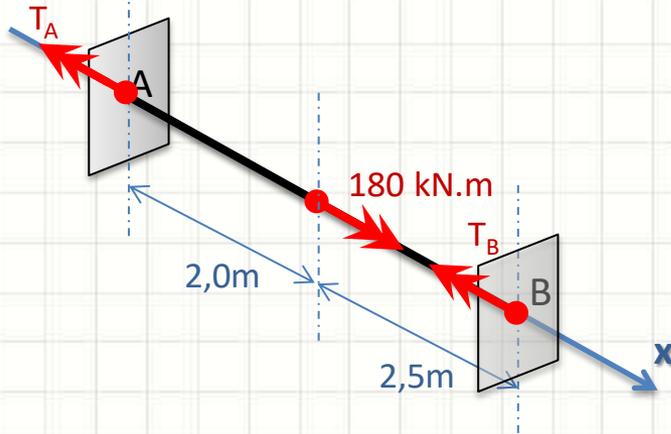
- Determine as reações em A e B



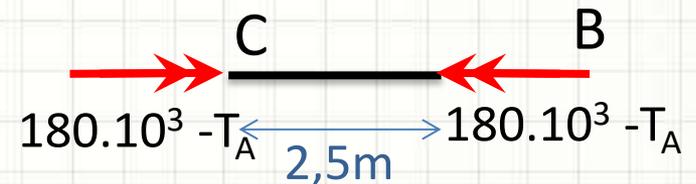
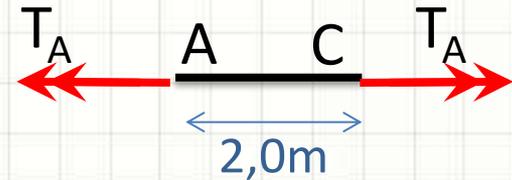
- Considere  $R=15\text{mm}$ ,  $G=75\text{GPa}$

# Exercício

- Determine as reações em A e B



$$T_B = 180 \cdot 10^3 - T_A$$

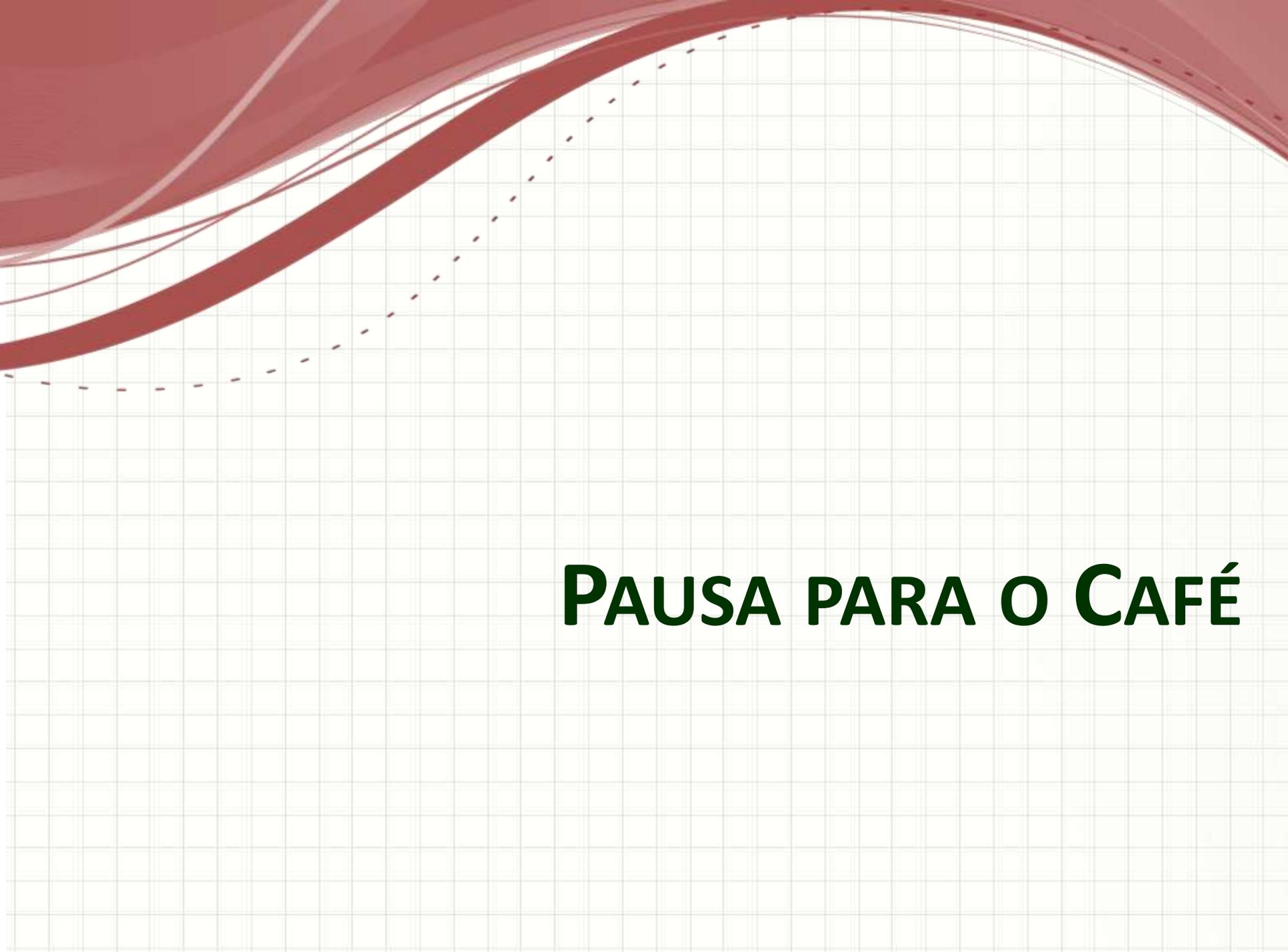


$$\frac{2,0 \cdot T_A - (180 \cdot 10^3 - T_A) \cdot 2,5}{G \cdot J} = 0$$

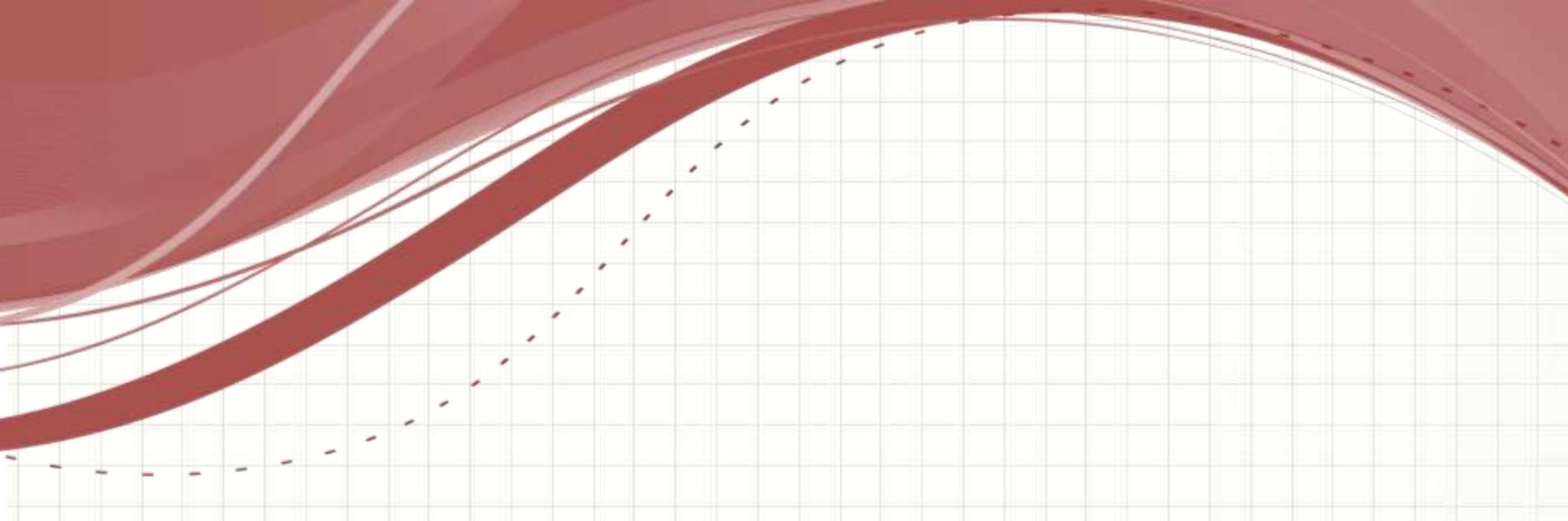
$$4,5 \cdot T_A = 450 \cdot 10^3$$

$$T_A = 100 \text{ kN}$$

$$T_B = 80 \text{ kN}$$



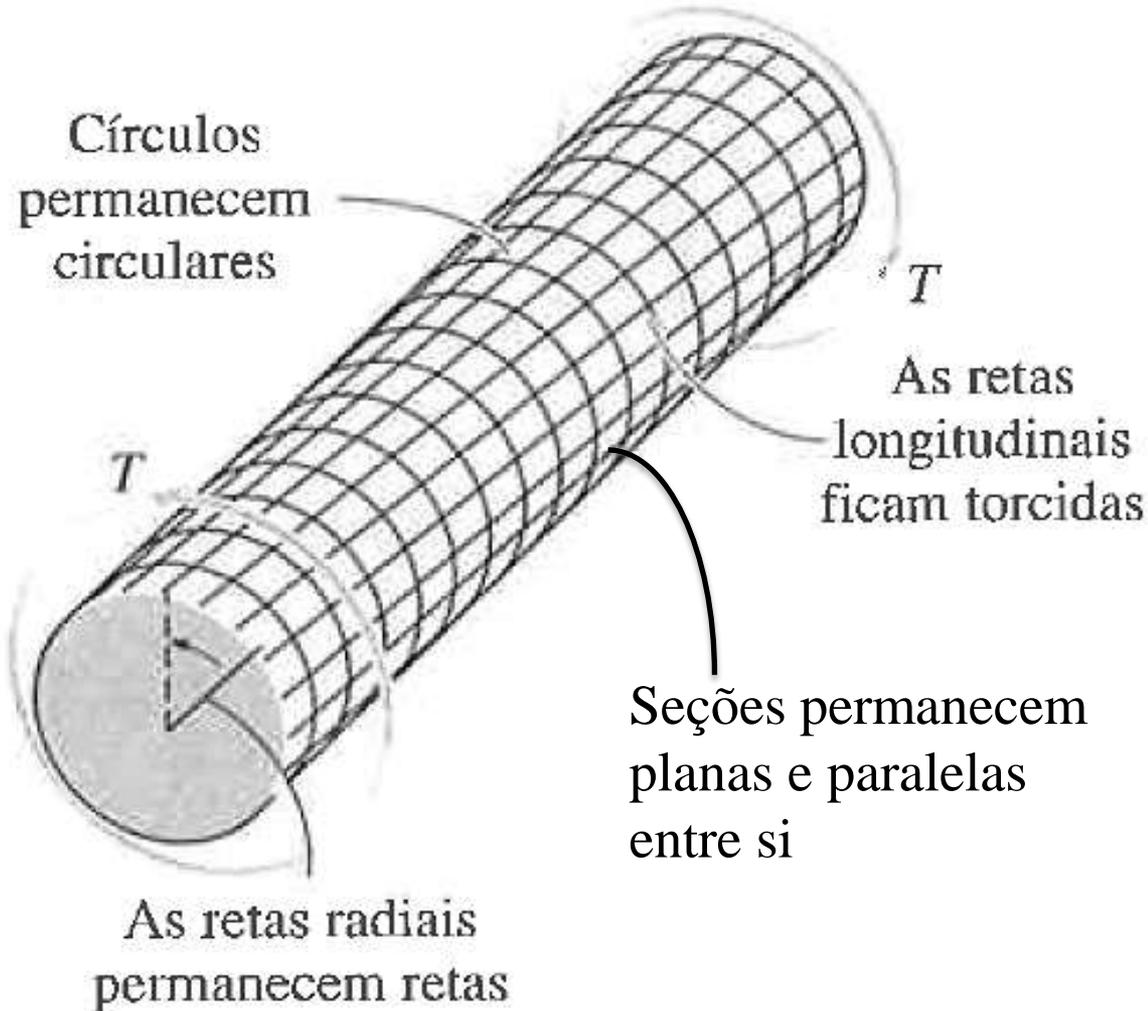
**PAUSA PARA O CAFÉ**



# **EIXOS MACIÇOS DE SEÇÃO NÃO CIRCULAR**

# Torção Pura em Barras Circulares

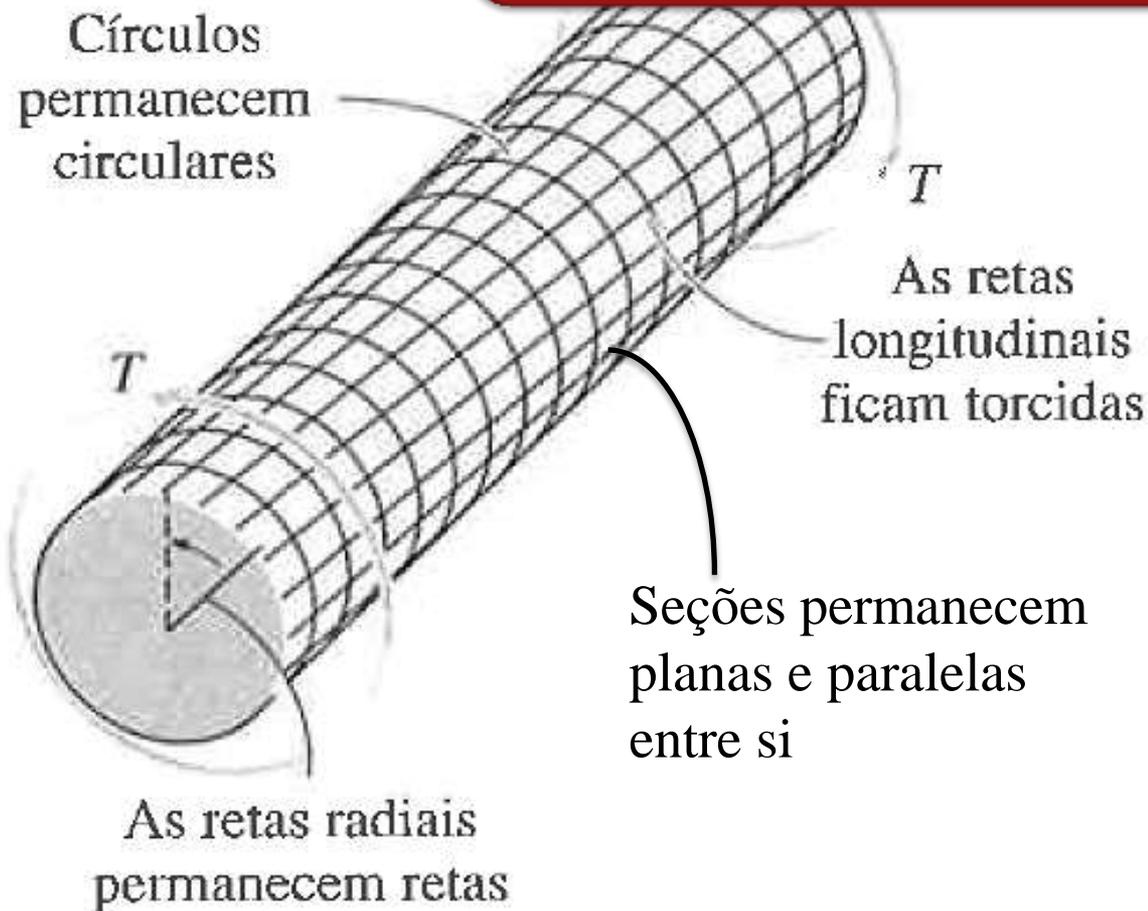
- Conforme já estudado...



# Torção Pura em Barras Circulares

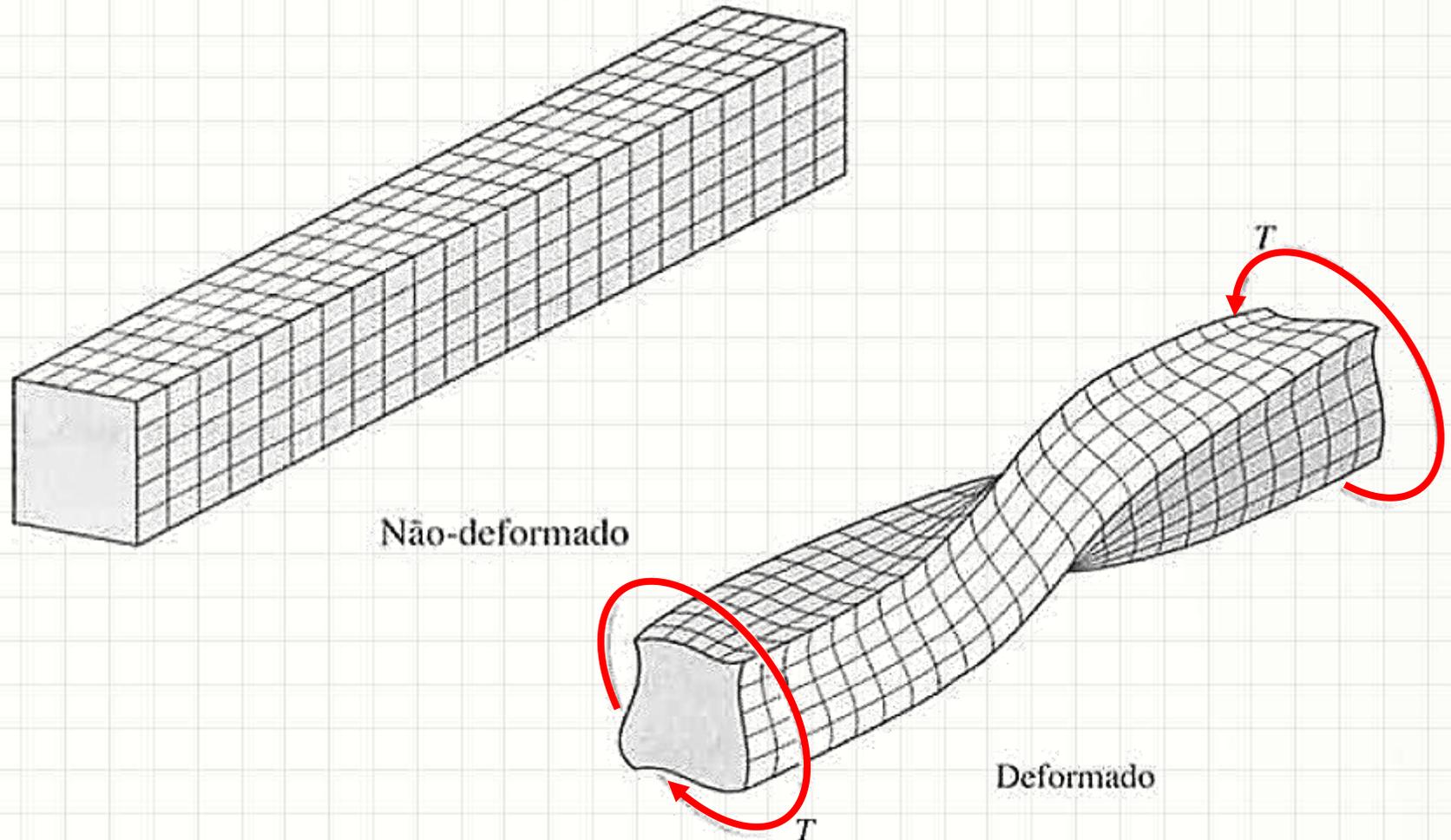
- Conforme já estudamos

Infelizmente, não vale para seções genéricas!



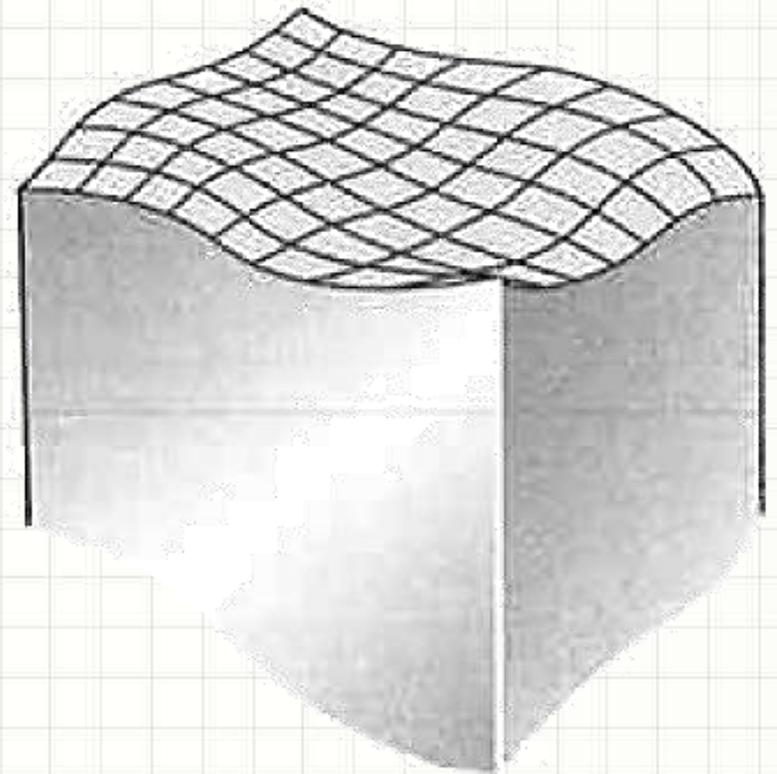
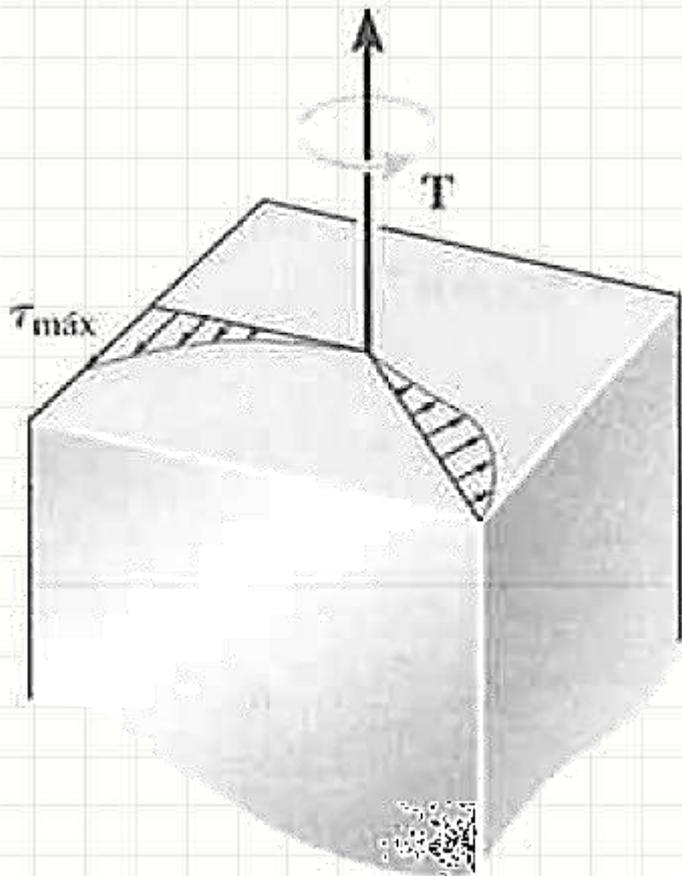
# Torção Pura em Barras Quadradas

- Observe a distorção nas bordas



# Torção Pura em Barras Quadradas

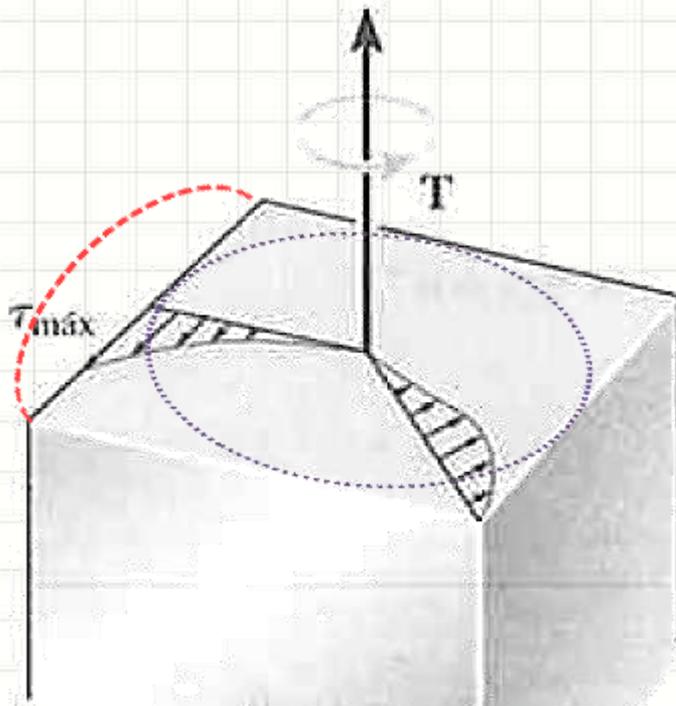
- Razão: distribuição das tensões  $\tau$



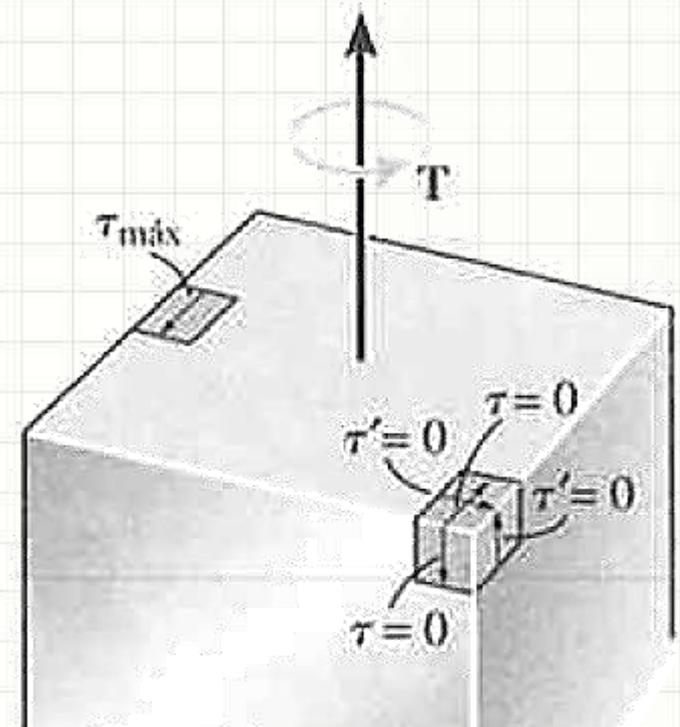
Empeno da área  
da seção transversal

# Torção Pura em Barras Quadradas

- Motivo: nos cantos,  $\tau$  tem que ser 0!



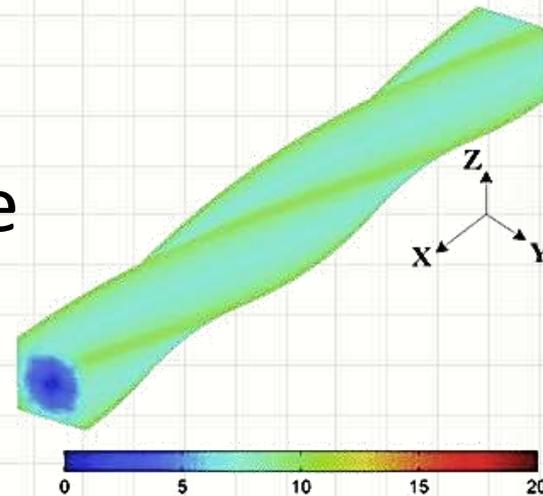
Cisalhamento na superfície  
é sempre **ZERO!**



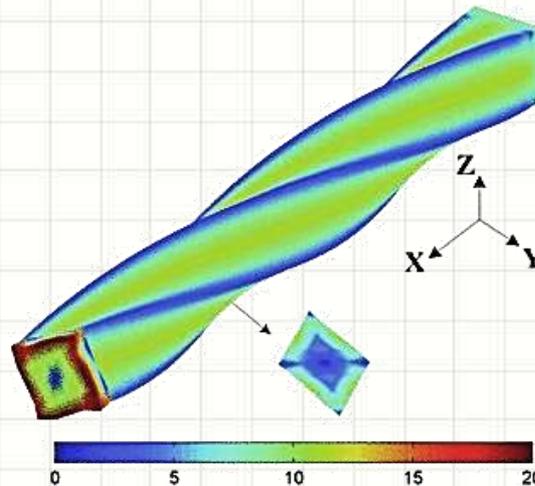
Por quê? Não perca a  
próxima aula!

# Torção Pura em Barras Genéricas

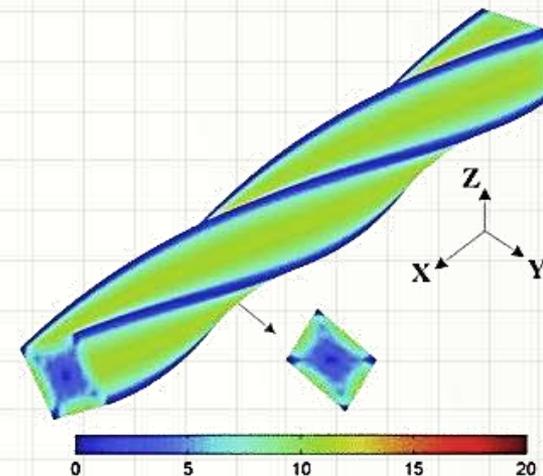
- Como calcular?
- Teoria da Elasticidade
  - Cálculo complexo!



(a) Model B1



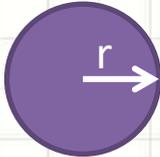
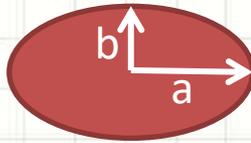
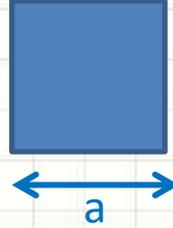
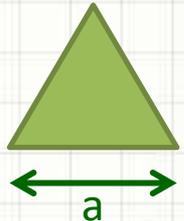
(b) Model B4



(c) Beam188 (ANSYS)

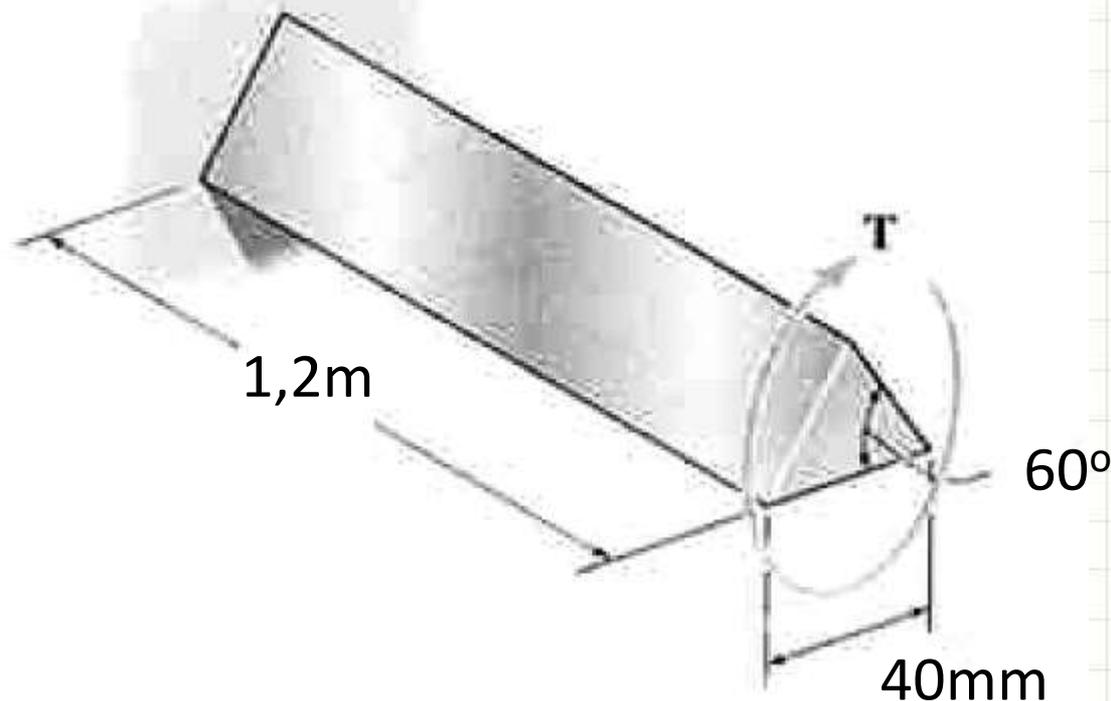
# Torção Pura em Barras Genéricas

- Cálculos Aproximados (Base na T.E.)

Forma da Seção				
$\tau_{\text{máx}}$	$\frac{2.T}{\pi . r^3}$	$\frac{2.T}{\pi . a . b^2}$	$\frac{4,81.T}{a^3}$	$\frac{20.T}{a^3}$
$\phi$	$\frac{2.T.L}{\pi . G . r^4}$	$\frac{(a^2 + b^2).T.L}{\pi . G . a^3 . b^3}$	$\frac{7,1.T.L}{G . a^4}$	$\frac{46.T.L}{G . a^4}$

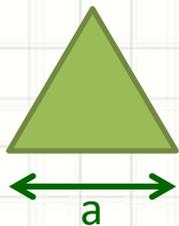
# Exemplo

- O eixo abaixo tem uma seção em forma de triângulo equilátero. Determine o maior torque para o  $\tau_{adm} = 56\text{MPa}$  e para um ângulo de extremidade restrito a  $\phi_{adm} = 0,02\text{ rad}$ . Considere  $G = 26\text{GPa}$ .



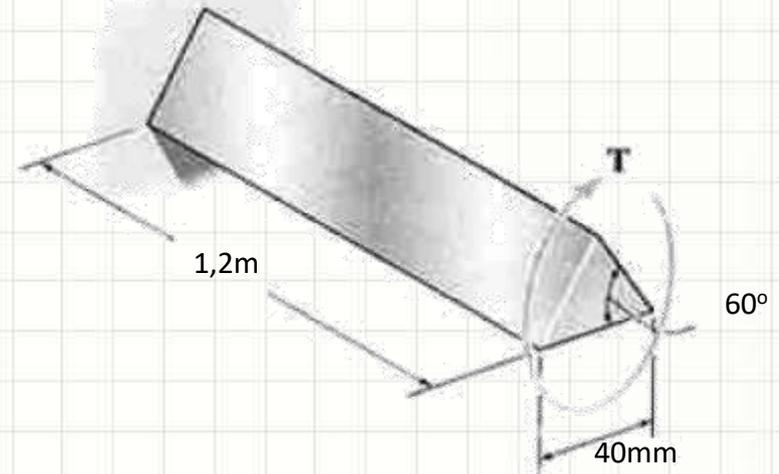
# Exemplo

- $\tau_{adm} = 56\text{MPa}$     $\phi_{adm} = 0,02 \text{ rad}$     $G = 26\text{GPa}$
- É preciso analisar ambos os limites:  $\tau_{adm}$  e  $\phi_{adm}$



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{20 \cdot T}{a^3}$$

$$\phi = \frac{46 \cdot T \cdot L}{G \cdot a^4}$$



- Primeiro, pelo  $\tau_{adm}$

$$\tau_{adm} \geq \tau_{m\acute{a}x} = \frac{20 \cdot T}{a^3} \rightarrow \frac{\tau_{adm} \cdot a^3}{20} \geq T \rightarrow$$

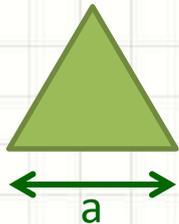
$$T \leq \frac{56 \cdot 10^6 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^3}{20} \rightarrow \boxed{T \leq 179,2 \text{ N.m}}$$

# Exemplo

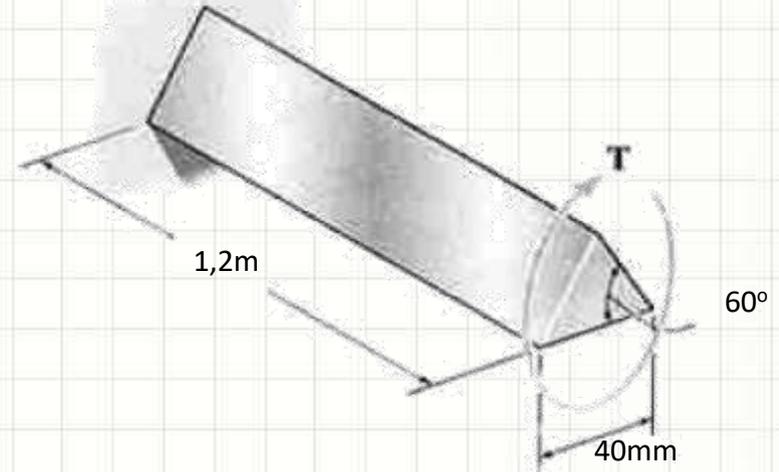
$$T \leq 179,2 \text{ N.m}$$



- $\tau_{adm} = 56 \text{ MPa}$     $\phi_{adm} = 0,02 \text{ rad}$     $G = 26 \text{ GPa}$
- É preciso analisar ambos os limites:  $\tau_{adm}$  e  $\phi_{adm}$



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{20.T}{a^3}$$
$$\phi = \frac{46.T.L}{G.a^4}$$

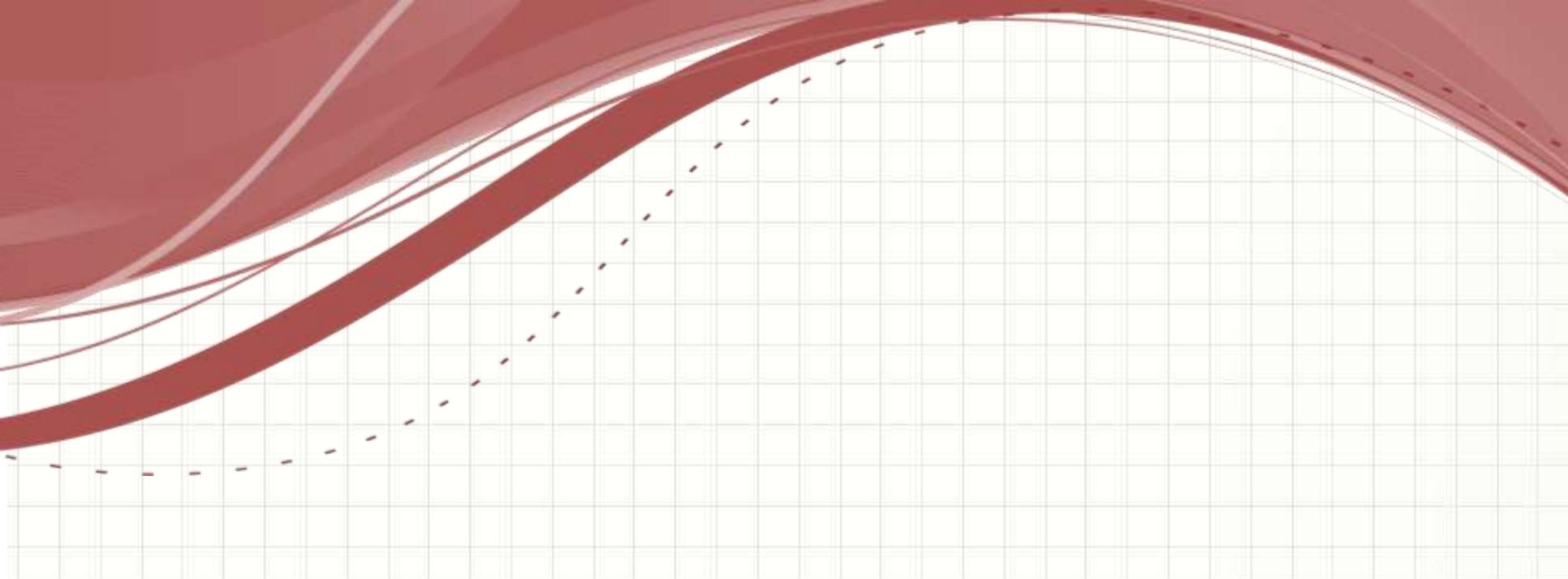


- Agora, pelo  $\phi_{adm}$

$$\phi_{adm} \geq \phi = \frac{46.T.L}{G.a^4} \rightarrow \frac{\phi_{adm} \cdot G \cdot a^4}{46.L} \geq T \rightarrow$$

$$T \leq \frac{2.10^{-2} \cdot 26.10^9 \cdot (4.10^{-2})^4}{46.1,2} \rightarrow T \leq 24,12 \text{ N.m}$$





**PARA TREINAR**

# Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercícios 5.73, 5.74, 5.78
- Extras:
  - Exercícios 5.75, 5.76, 5.77

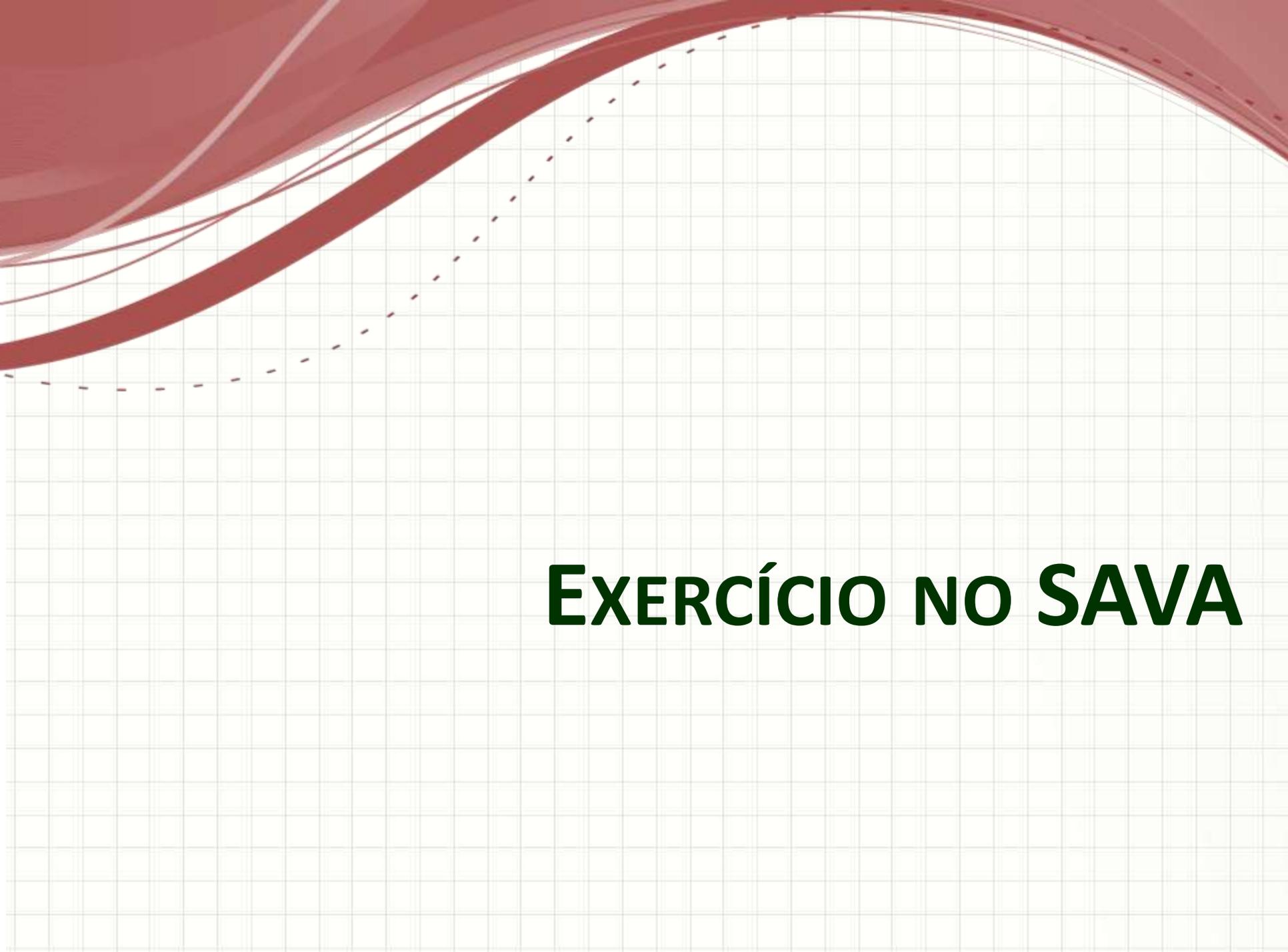
# Para Treinar em Casa

## Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica $\times 10^{-6}$
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

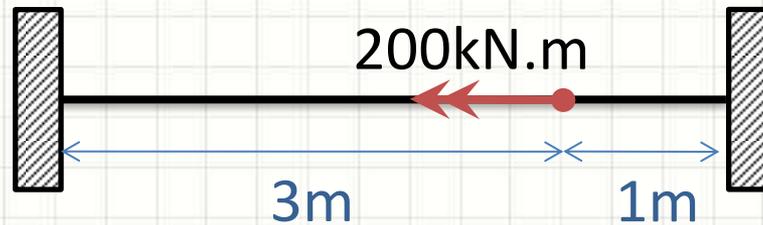
Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**

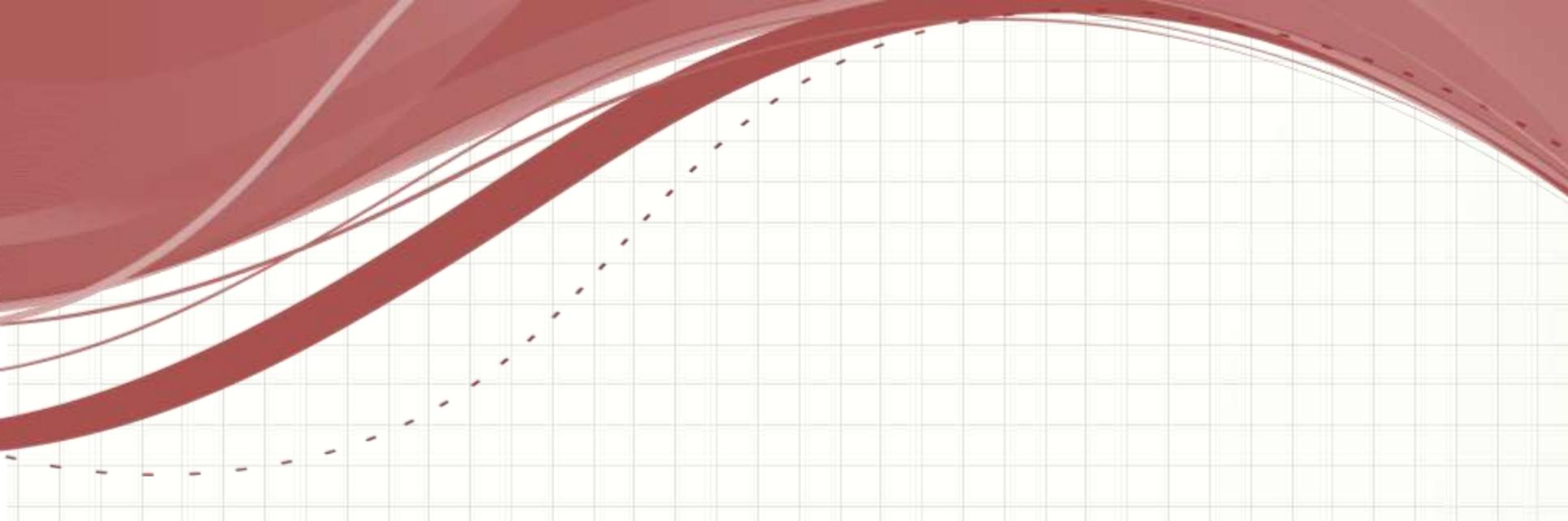


# EXERCÍCIO NO SAVA

# Exercício – Entrega Individual

- A barra abaixo, que possui  $G = 20\text{GPa}$  no trecho de  $3\text{m}$  e  $G = 60\text{GPa}$  no trecho de  $1\text{m}$ , tem  $R = 10\text{ cm}$ . Calcule as reações de apoio.



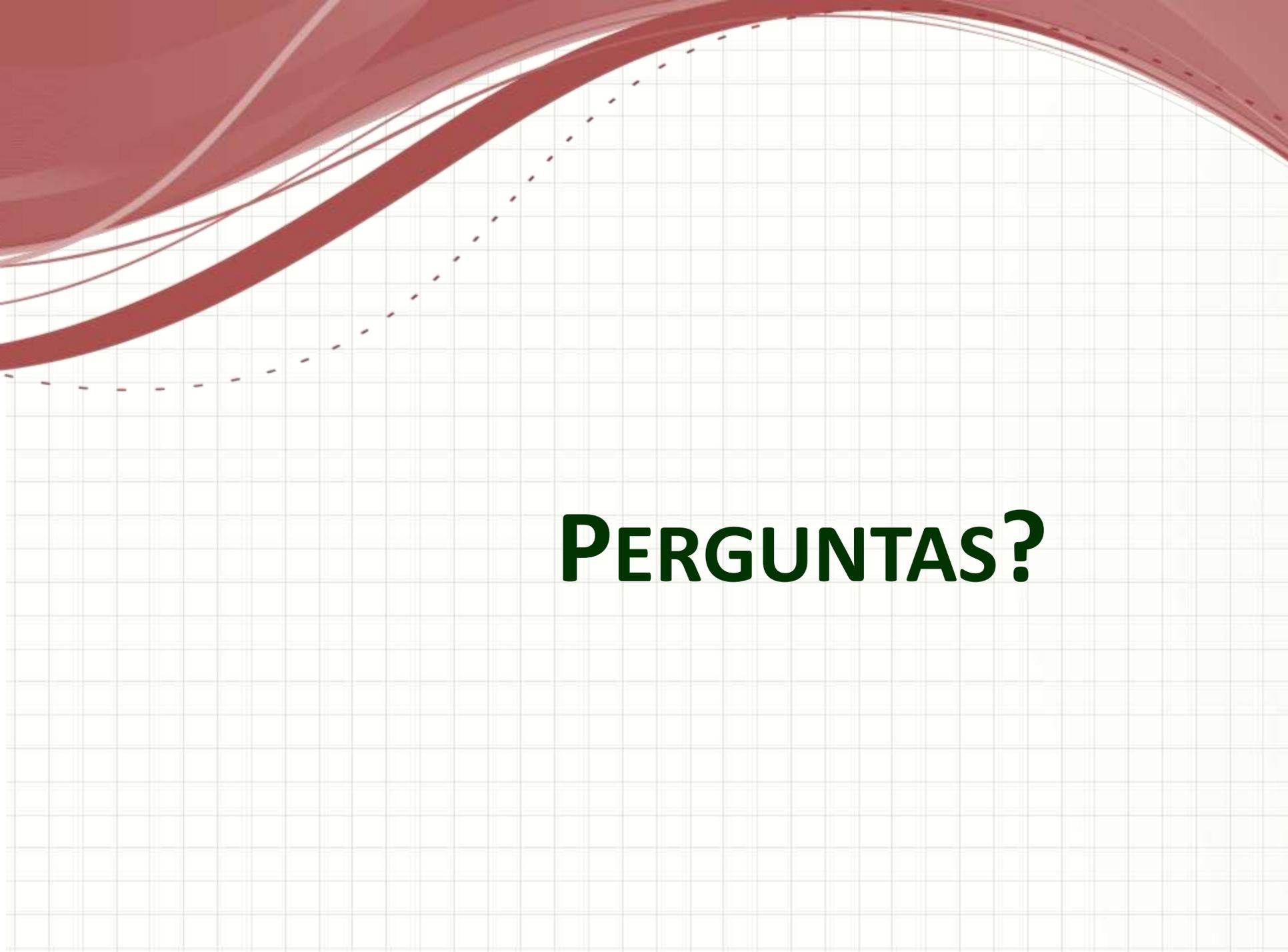


**CONCLUSÕES**

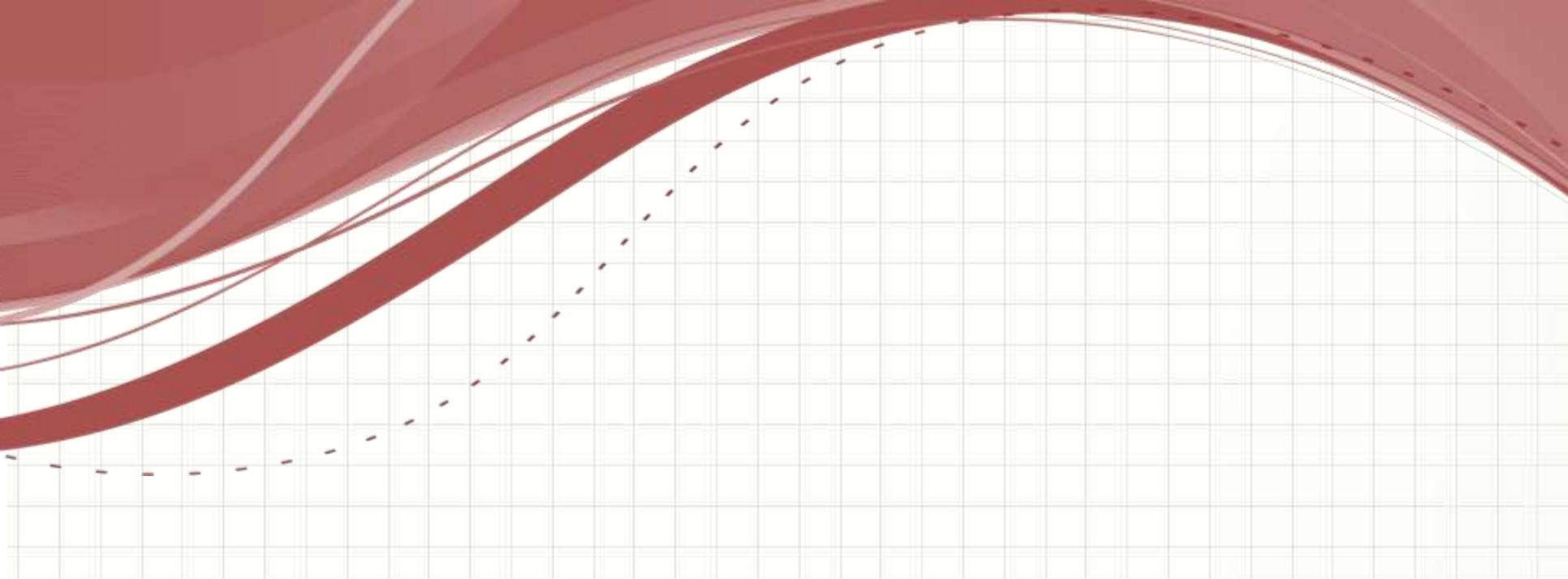
# Resumo

- Calculamos estruturas estaticamente indeterminadas sujeitas à torção
- Seção não circular: distribuição da tensão de cisalhamento complexa
- Eixos de seção circular: + eficientes na torção
- Exercitar: Hibbeler

- 
- Como calcular a resistência a torção em perfis de paredes finas **fechados**?
  - Há concentração de tensão na torção?



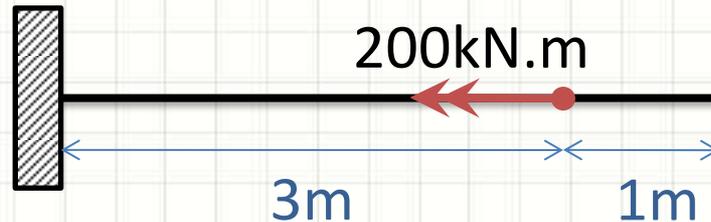
**PERGUNTAS?**



# **EXERCÍCIO EM SALA**

# Exercício – Entrega Individual

- A barra abaixo possui  $G = 50\text{GPa}$  a seção transversal é quadrada de lado  $20\text{ cm}$ . Calcule a tensão de cisalhamento máxima  $\tau_{\text{máx}}$  e a rotação entre as extremidades  $\phi$ .



$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4,81 \cdot T}{a^3}$$

$$\phi = \frac{7,1 \cdot T \cdot L}{G \cdot a^4}$$

$$\tau_{\text{máx}} \cong 120\text{MPa}$$

$$\phi \cong 0,05\text{ rad}$$