

# RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

## TORÇÃO PARTE IV

Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

# Objetivos

- Conceituar fluxo de cisalhamento
- Determinar distribuição de tensões de cisalhamento em tubos de paredes finas sob torção



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>  
(Resistência dos Materiais II – Aula 8)

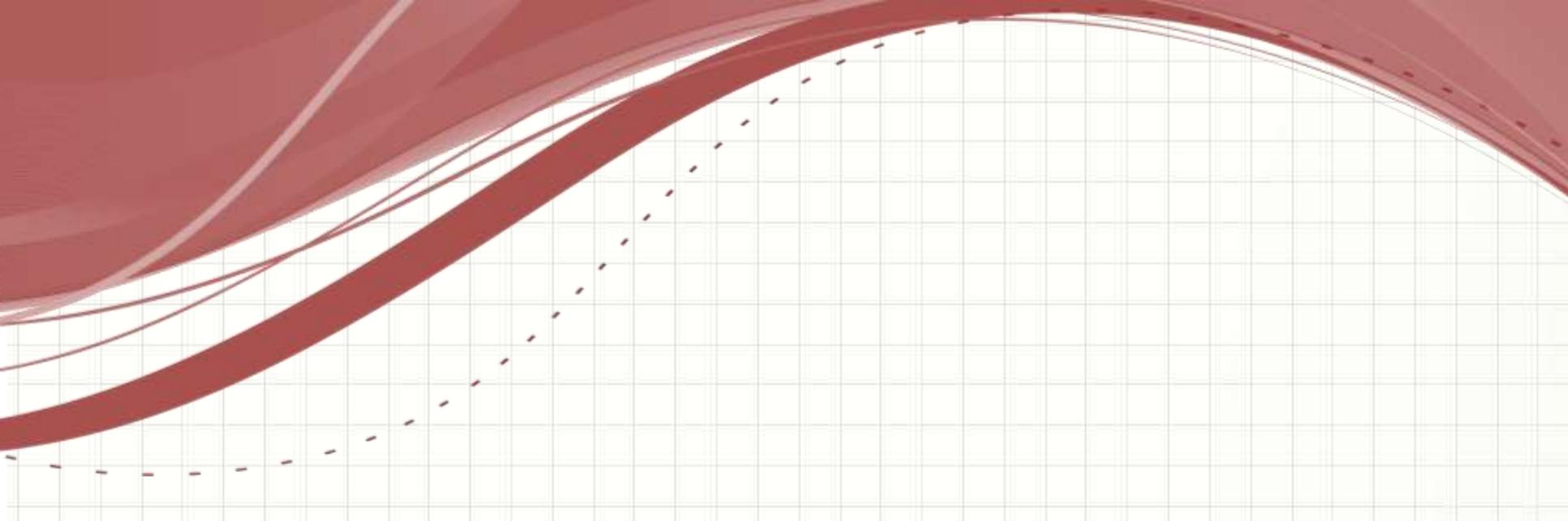
Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 157 a 167.

Biblioteca Virtual

“Resistência dos Materiais”

---



**RELEMBRANDO:**

# **TORÇÃO E TORQUE**

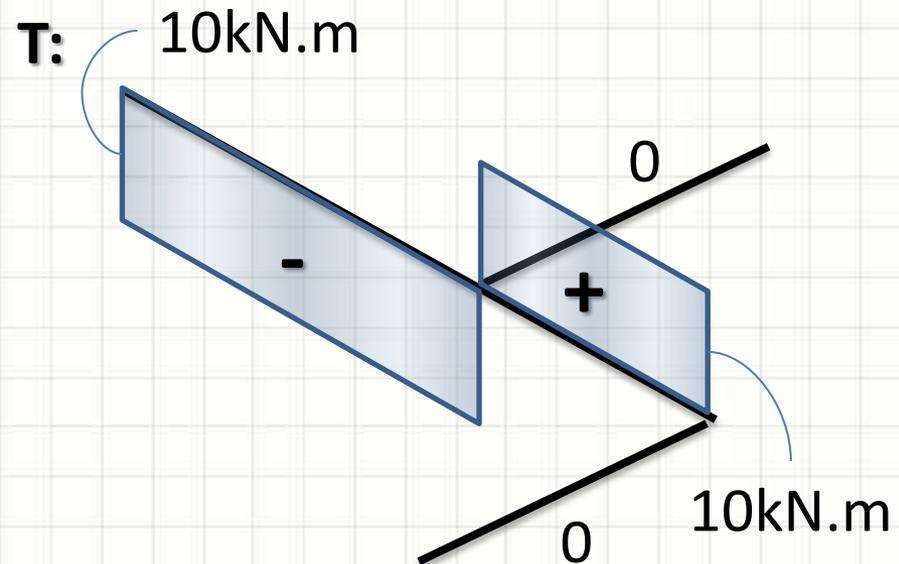
# Fórmulas para Torção

- Pelo que vimos até agora...

$$\tau_{MAX} = \frac{T}{J} \cdot R$$

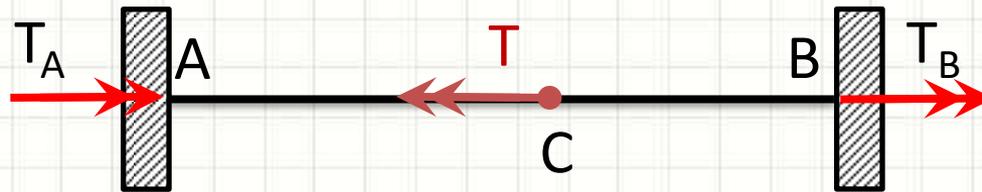
$$P = T \cdot \omega$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$



# Est. Estaticamente Indeterminadas

- Equil. Estático + Compat. de Deformações



- Pela estática:

$$T_A = T - T_B$$

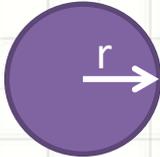
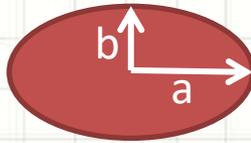
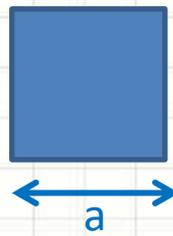
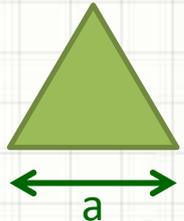
- Compatibilidade?

– Os extremos da barra não giraram entre si, logo:

$$\phi_{AC} + \phi_{CB} = 0$$

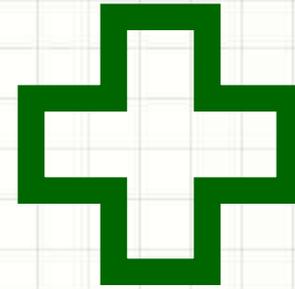
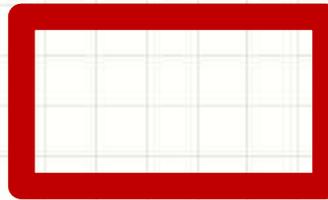
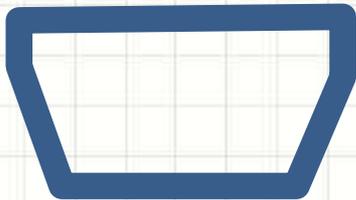
# Torção em Seções Genéricas

- Cálculos Aproximados (Base na T.E.)

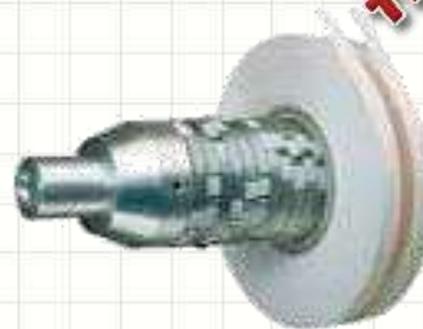
Forma da Seção				
$\tau_{\text{máx}}$	$\frac{2.T}{\pi . r^3}$	$\frac{2.T}{\pi . a . b^2}$	$\frac{4,81.T}{a^3}$	$\frac{20.T}{a^3}$
$\phi$	$\frac{2.T.L}{\pi . G . r^4}$	$\frac{(a^2 + b^2).T.L}{\pi . G . a^3 . b^3}$	$\frac{7,1.T.L}{G . a^4}$	$\frac{46.T.L}{G . a^4}$

# Outras situações?

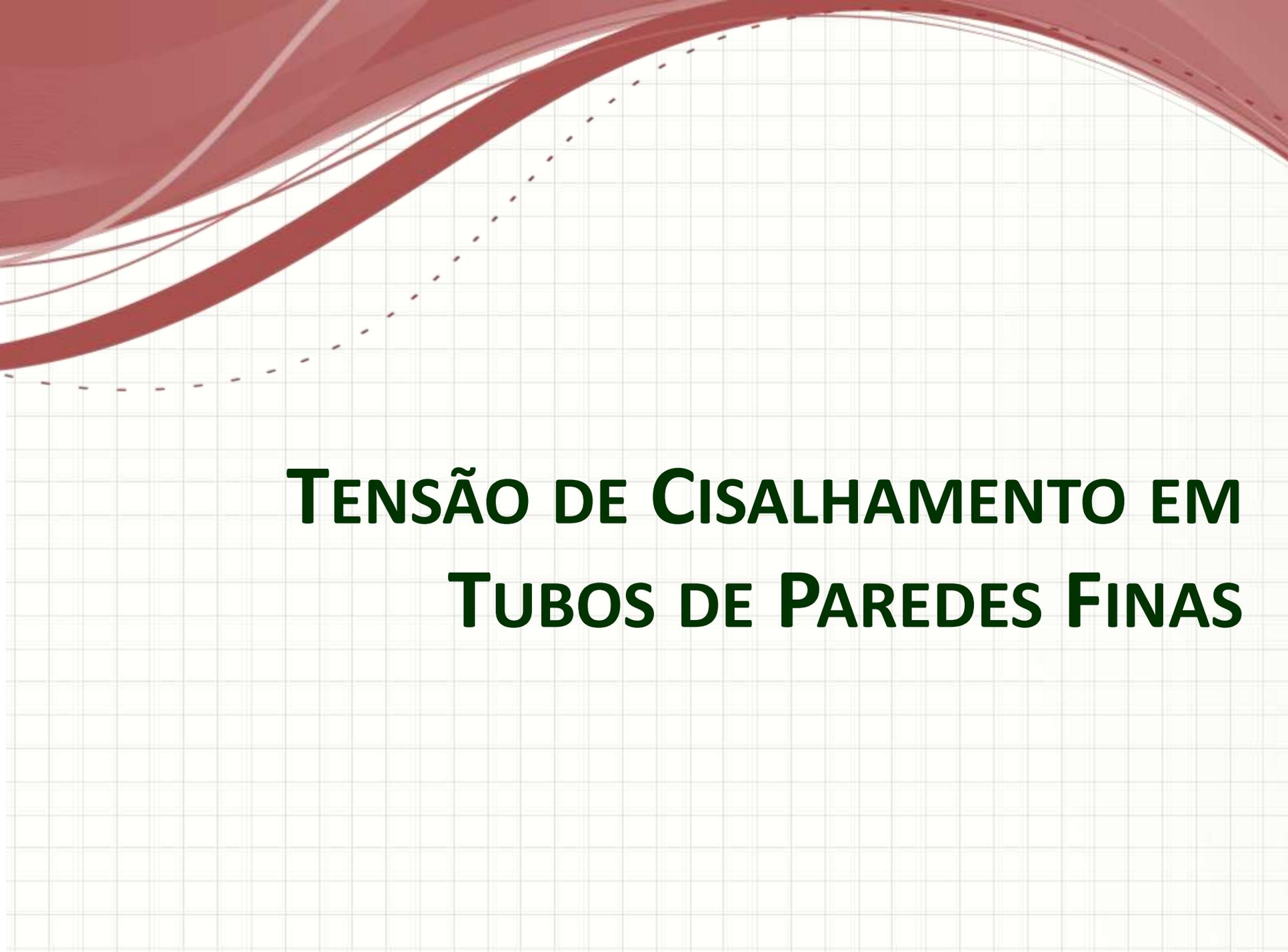
- Seções do tipo tubo?



- E se houver mudanças no eixo?



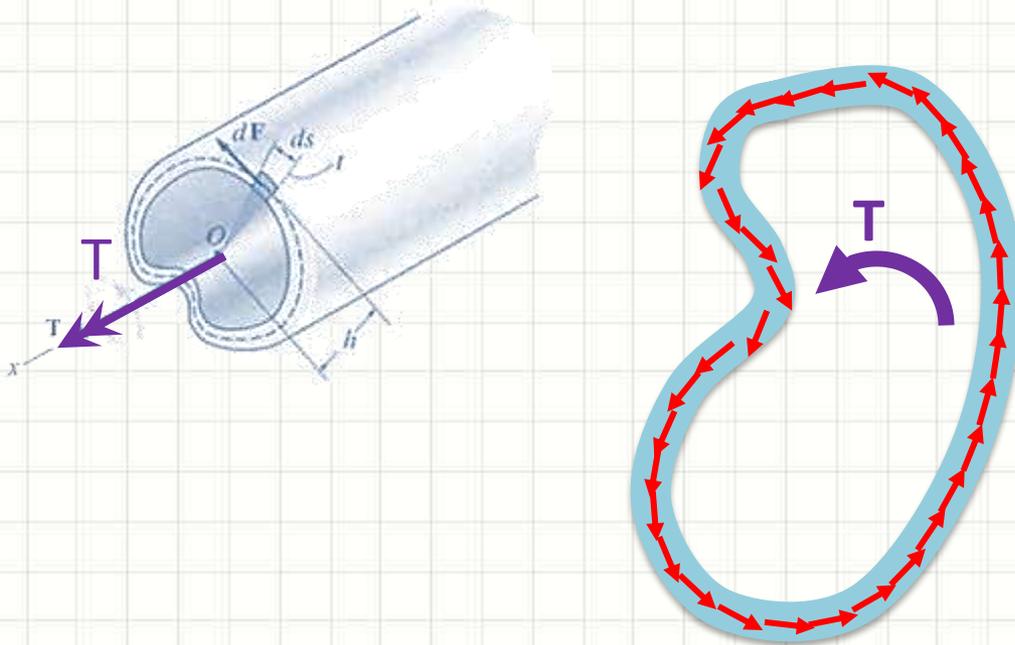
#comofaz?



# **TENSÃO DE CISALHAMENTO EM TUBOS DE PAREDES FINAS**

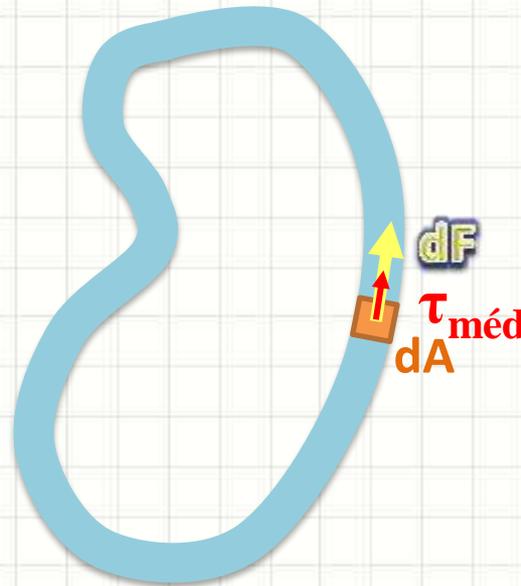
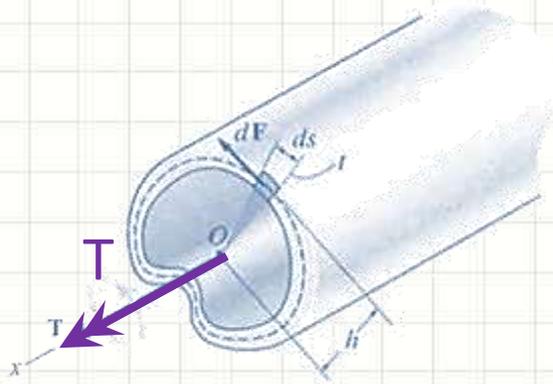
# Verificação de Resistência

- Em geral, as cargas  $T$  são dadas
  - Para verificar, precisamos identificar o  $\tau$
- Ou seja: buscamos uma relação entre  $T$  e  $\tau$



# Torque x Tensão de Cisalhamento

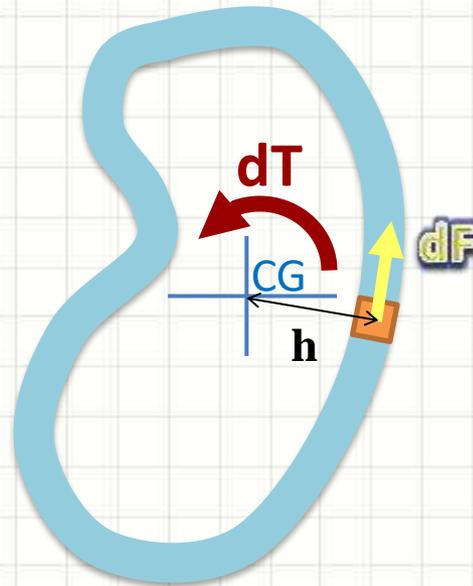
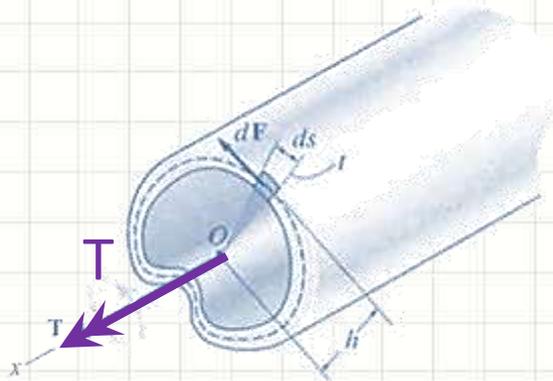
- Buscamos uma relação entre  $T$  e  $\tau$ 
  - Para dimensionar e verificar
- Vamos nos basear no seguinte princípio



$$dF = \tau_{\text{méd}} \cdot dA$$

# Torque x Tensão de Cisalhamento

- Buscamos uma relação entre  $T$  e  $\tau$ 
  - Para dimensionar e verificar
- Vamos nos basear no seguinte princípio

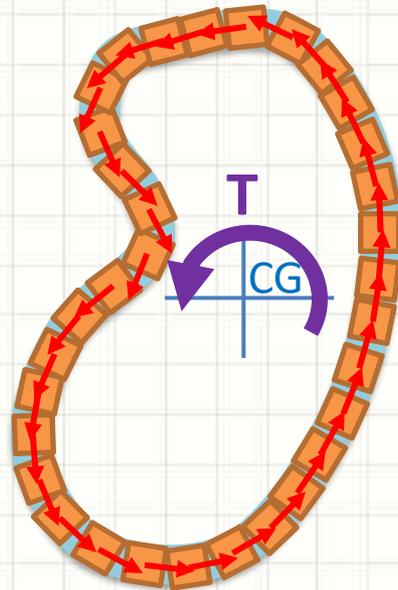
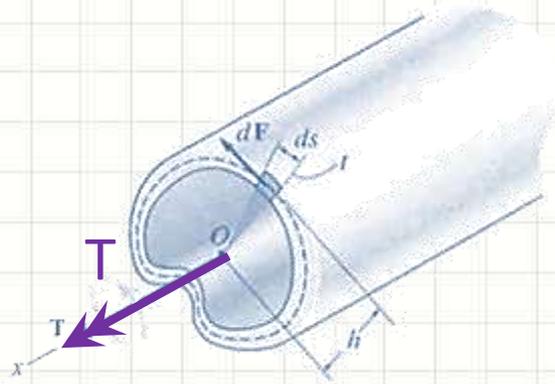


$$dF = \tau_{\text{méd}} \cdot dA$$

$$dT = dF \cdot h$$

# Torque x Tensão de Cisalhamento

- Buscamos uma relação entre  $T$  e  $\tau$ 
  - Para dimensionar e verificar
- Vamos nos basear no seguinte princípio



$$dF = \tau_{\text{méd}} \cdot dA$$
$$dT = dF \cdot h$$
$$T = \oint dT$$

$$T = \oint \tau_{\text{méd}} \cdot h \cdot dA$$

# Torque x Tensão de Cisalhamento

- Na equação

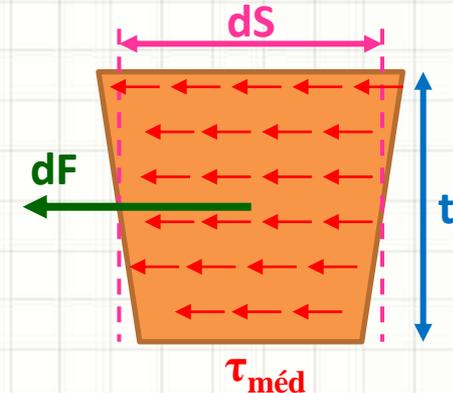
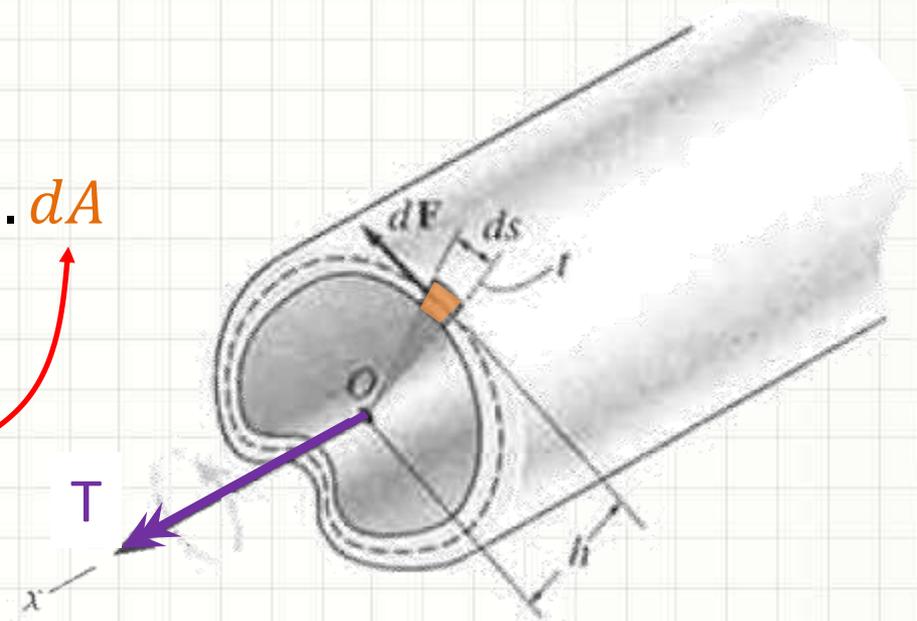
$$T = \oint \tau_{méd} \cdot h \cdot dA$$

- O que é  $dA$ ?

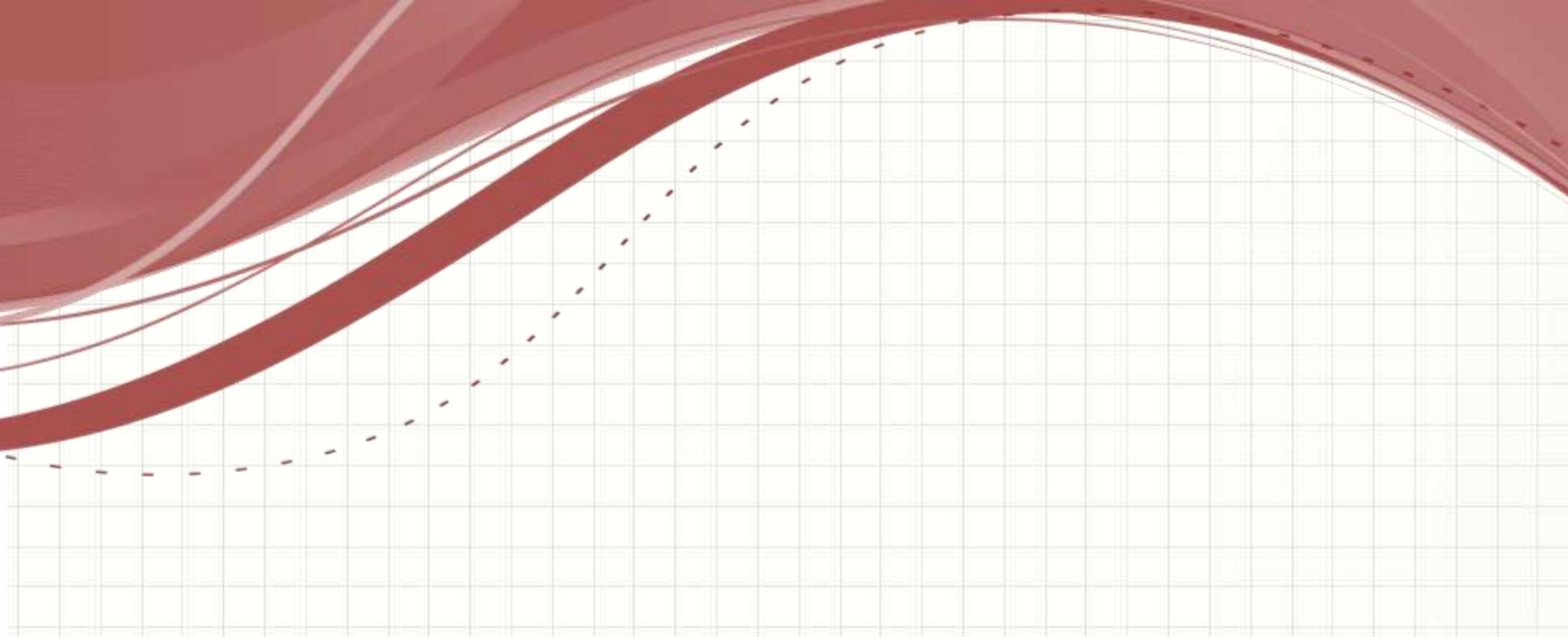
$$dA = t \cdot dS$$

- Logo...

$$T = \oint \tau_{méd} \cdot h \cdot t \cdot dS$$



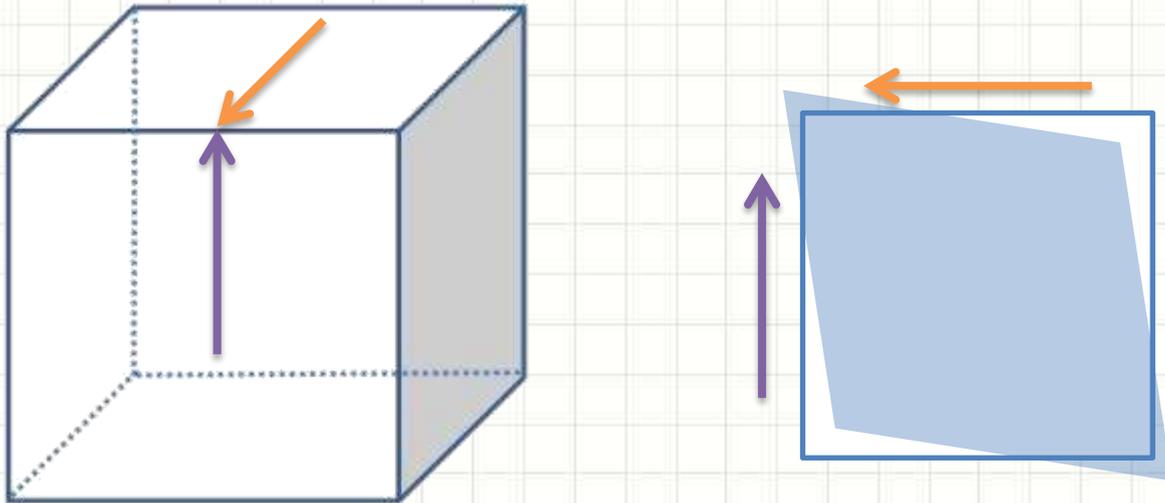
Como simplificar isso?



# FLUXO DE CISALHAMENTO

# Fluxo de Cisalhamento

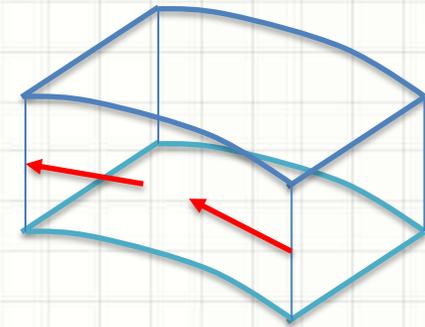
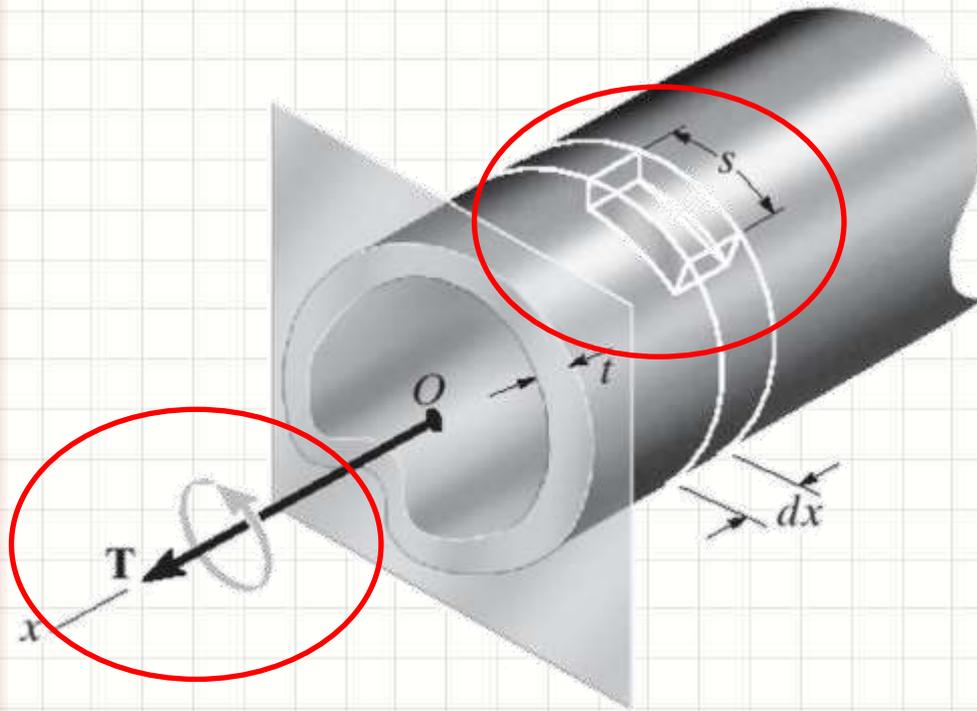
- Na primeira aula de torção:



- Por que ocorre essa reação?

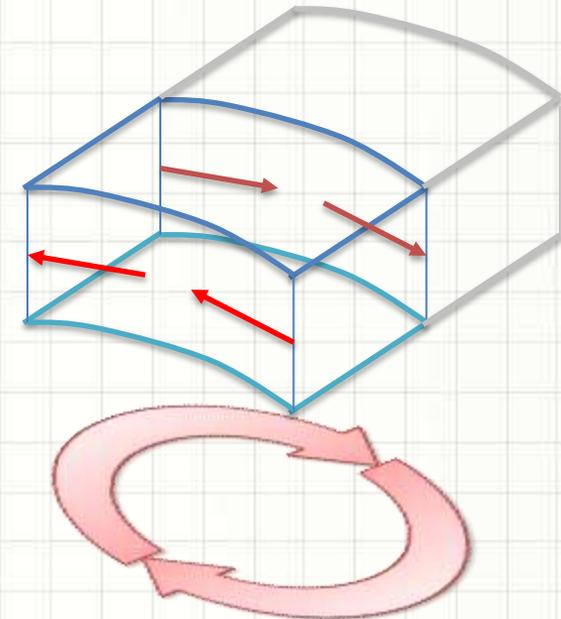
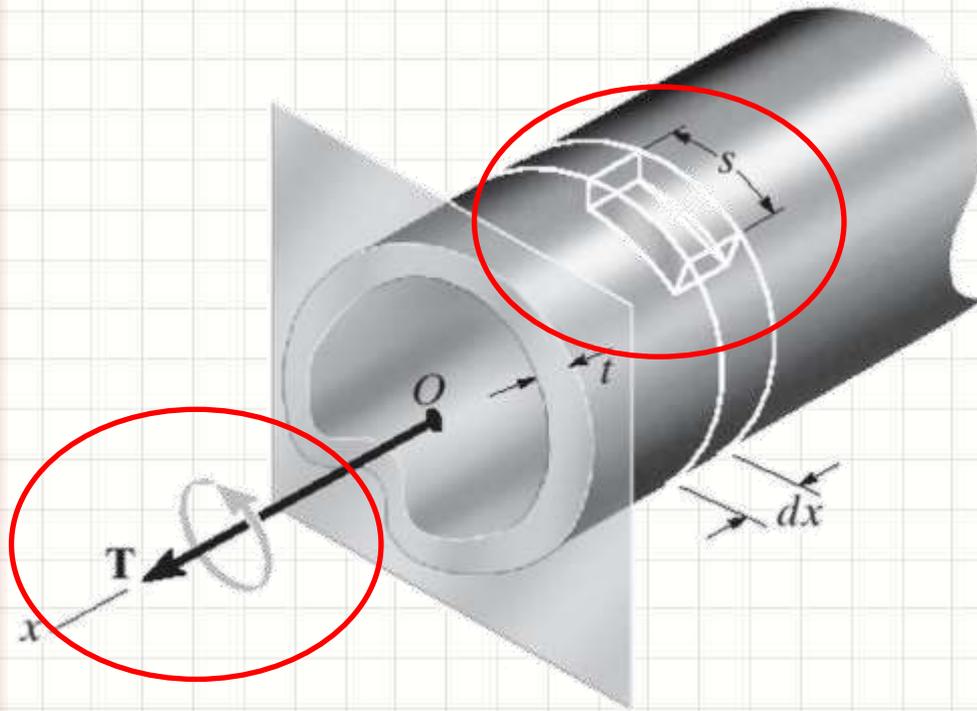
# Fluxo de Cisalhamento

- Vejamos o caso concreto:



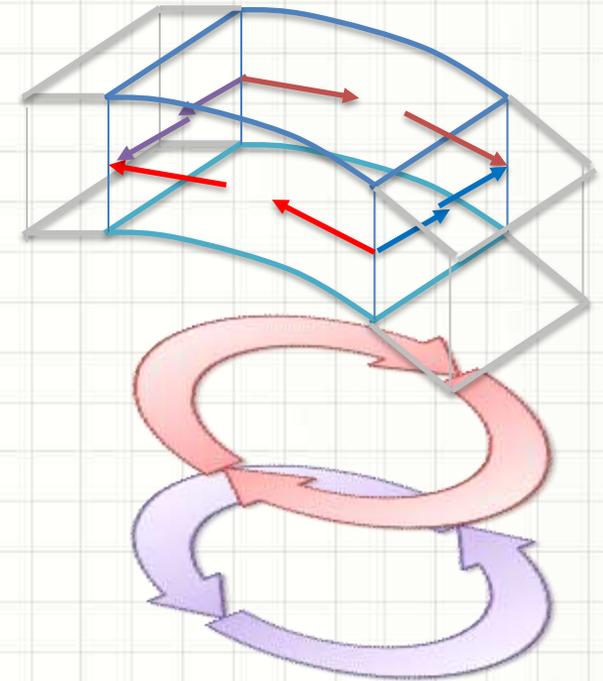
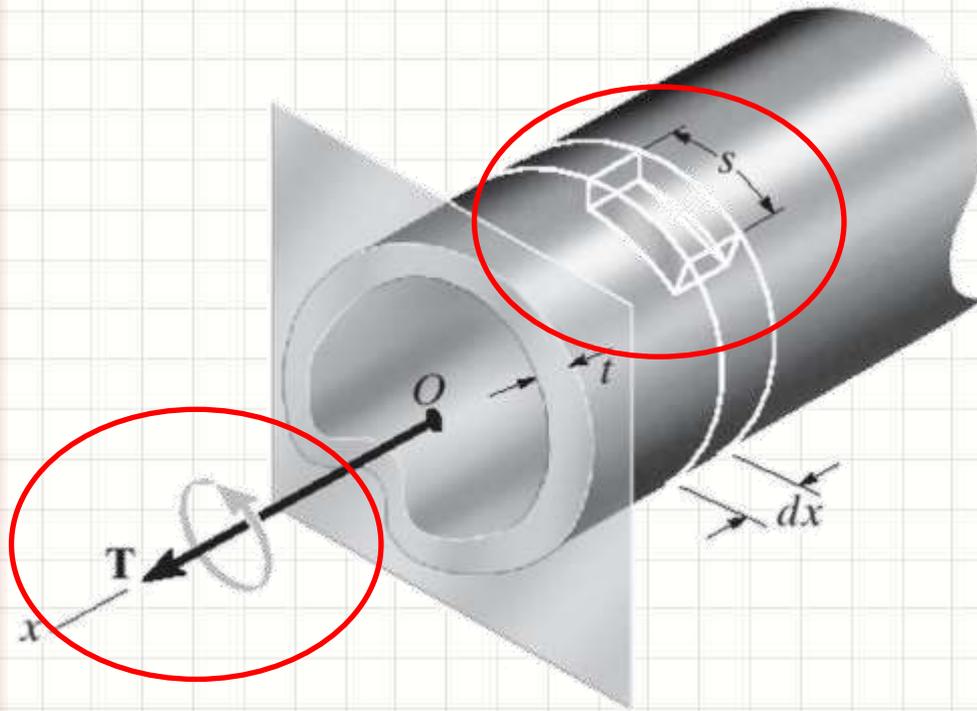
# Fluxo de Cisalhamento

- Vejamos o caso concreto:



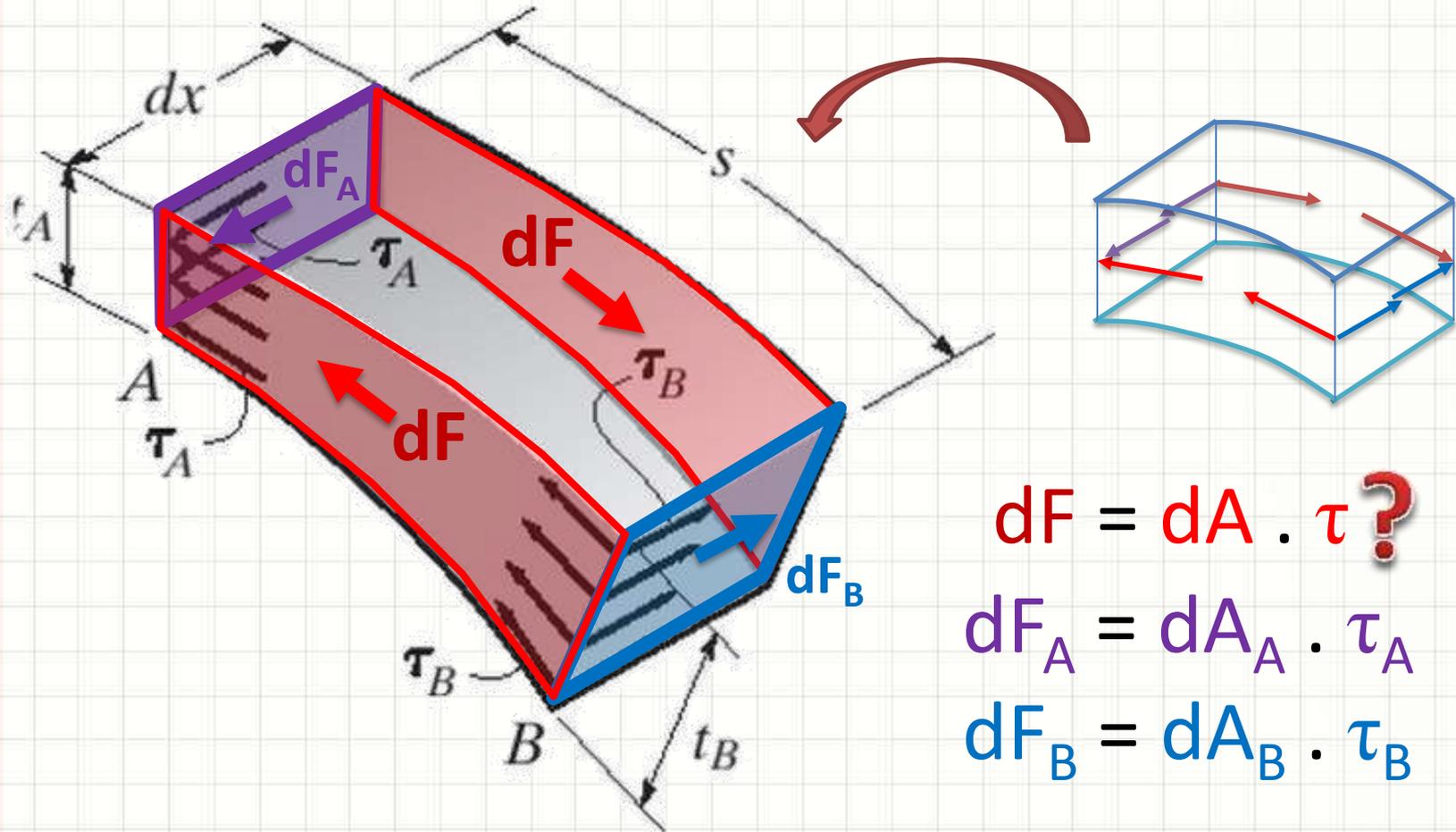
# Fluxo de Cisalhamento

- Vejamos o caso concreto:



# Fluxo de Cisalhamento

- Genericamente falando



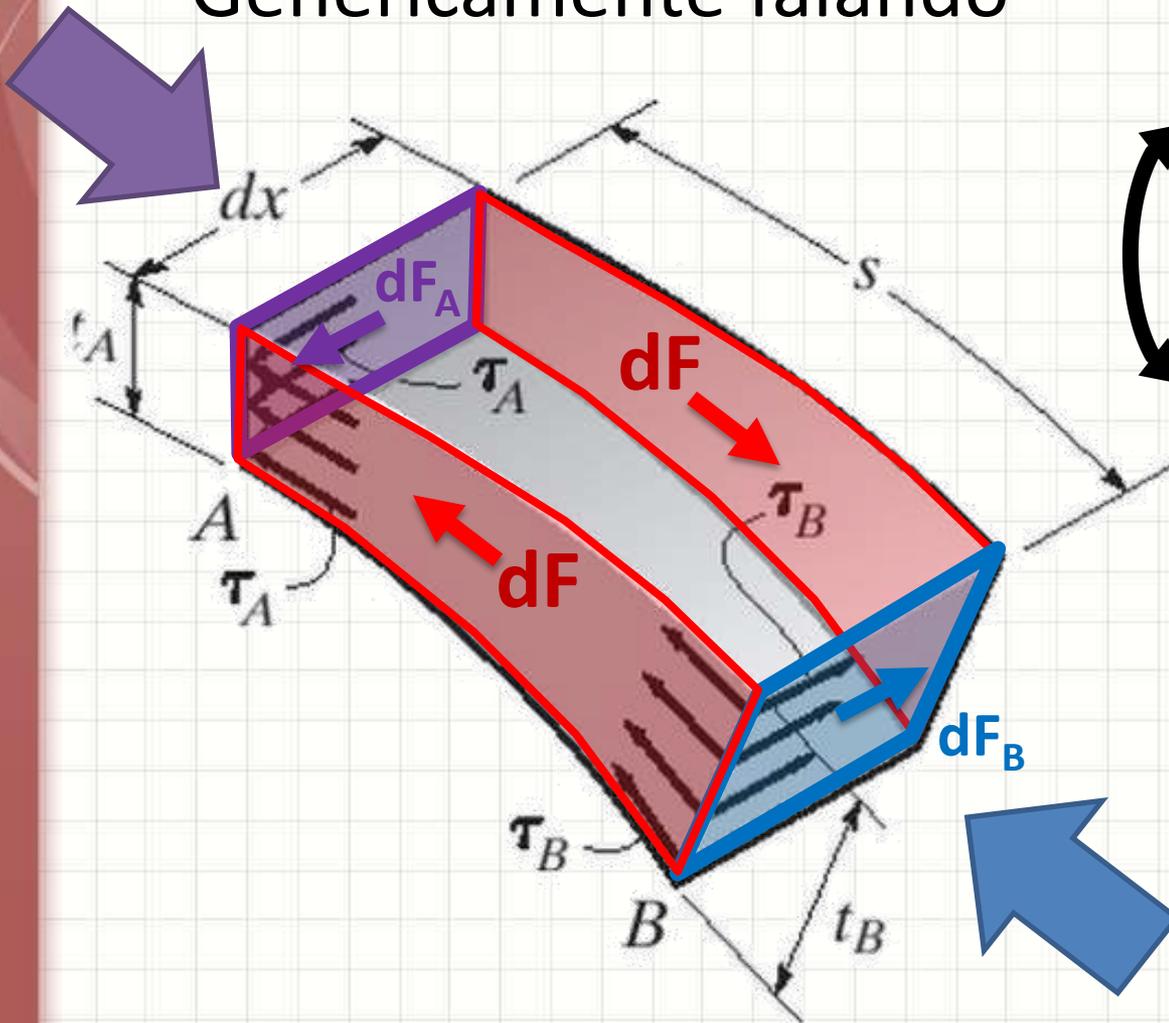
$$dF = dA \cdot \tau ?$$

$$dF_A = dA_A \cdot \tau_A$$

$$dF_B = dA_B \cdot \tau_B$$

# Fluxo de Cisalhamento

- Genericamente falando



$$dF_A = dA_A \cdot \tau_A$$

$$dF_A = t_A \cdot dx \cdot \tau_A$$

$$dF_B = dA_B \cdot \tau_B$$

$$dF_B = t_B \cdot dx \cdot \tau_B$$

**Equilíbrio Estático**

$$dF_A = dF_B$$

$$t_A \cdot dx \cdot \tau_A = t_B \cdot dx \cdot \tau_B$$

$$t_A \cdot \tau_A = t_B \cdot \tau_B$$

**Produto Constante!**

# Fluxo de Cisalhamento

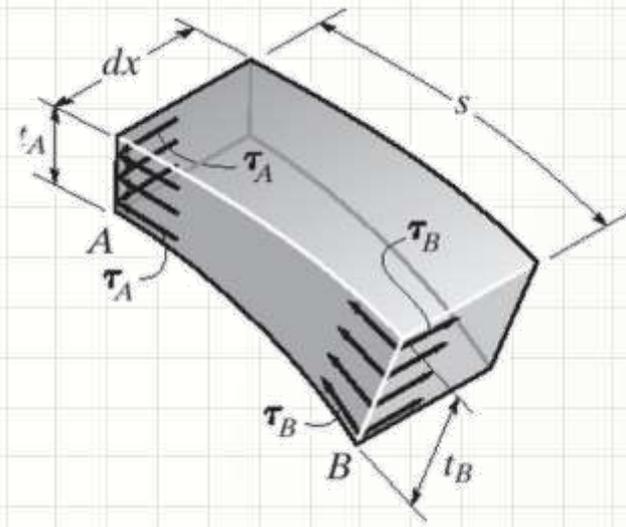
- $t_A \cdot \tau_A = t_B \cdot \tau_B = q$  [constante]
- **q**: fluxo de cisalhamento
- Pode-se dizer que, numa seção:

$$\tau = \frac{q}{t}$$

- Esse é um resultado importante!

Em que ponto de uma seção tubular ocorre o maior cisalhamento?

Onde a espessura  $t$  for menor!



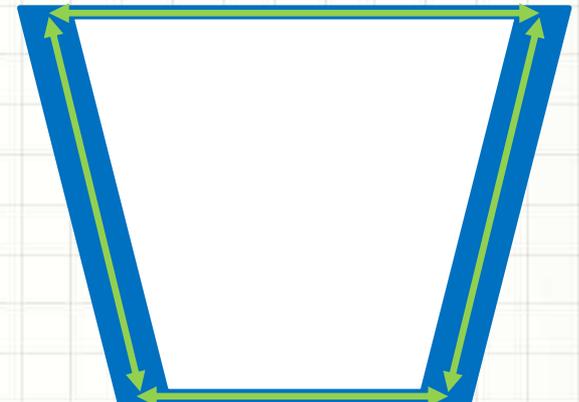
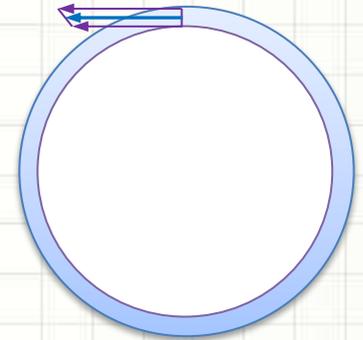
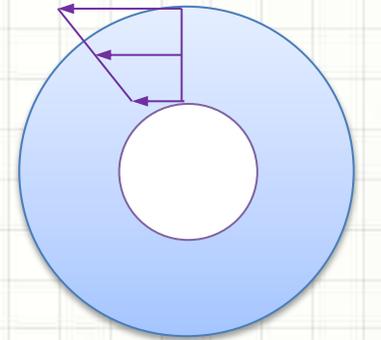
# Fluxo de Cisalhamento

- Na prática,  $\tau$  varia na espessura
- Em tubos de parede fina,
  - Pouco erro:  $\tau = \tau_{\text{méd}}$
- Logo, podemos escrever:

$$q = \tau_{\text{méd}} \cdot t$$

- Como interpretar?

“ $\tau$  por metro  
de seção  
transversal”





**FLUXO DE CISALHAMENTO E A  
RELAÇÃO TORQUE X TENSÃO  
DE CISALHAMENTO**

# Torque x Tensão de Cisalhamento

- A expressão:

$$q = \tau_{\text{méd}} \cdot t \quad \text{Constante!}$$

- Pode ser aplicada para simplificar essa:

$$T = \oint \tau_{\text{méd}} \cdot h \cdot t \cdot dS$$

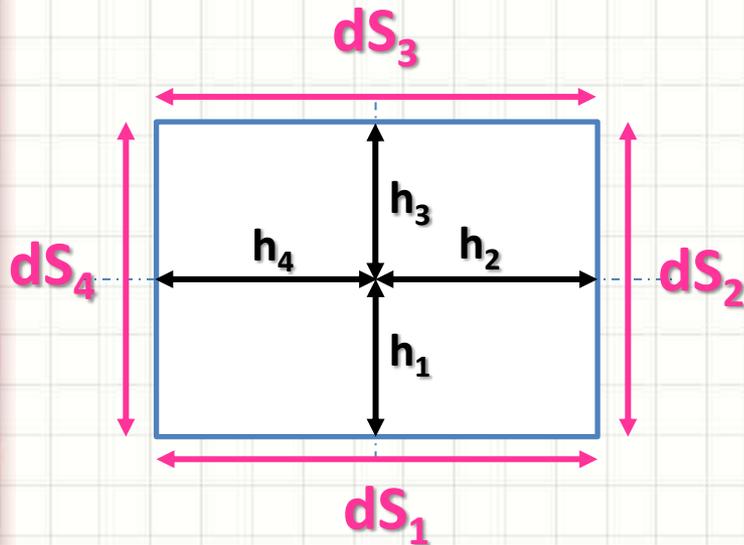
$$T = \tau_{\text{méd}} \cdot t \cdot \oint h \cdot dS$$

- Mas o que é...  $\oint h \cdot dS$  ?

# Um Truque Geométrico

$$\oint h \cdot dS = ?$$

- Observe a figura a seguir



$$\oint 1 \cdot dS = dS_1 + dS_2 + dS_3 + dS_4$$

- Se  $dS_1 = dS_3 = \text{base}$
- Se  $dS_2 = dS_4 = \text{altura}$

$$\oint 1 \cdot dS = b + a + b + a = \boxed{2 \cdot a + 2 \cdot b}$$

→ **Perímetro**

$$\oint h \cdot dS = h_1 \cdot dS_1 + h_2 \cdot dS_2 + h_3 \cdot dS_3 + h_4 \cdot dS_4$$

- Se  $h_1 = h_3 = a/2$
- Se  $h_2 = h_4 = b/2$

$$\oint h \cdot dS = \frac{a}{2} \cdot b + \frac{b}{2} \cdot a + \frac{a}{2} \cdot b + \frac{b}{2} \cdot a = \underline{a \cdot b} + \underline{b \cdot a} = \boxed{2 \cdot a \cdot b}$$

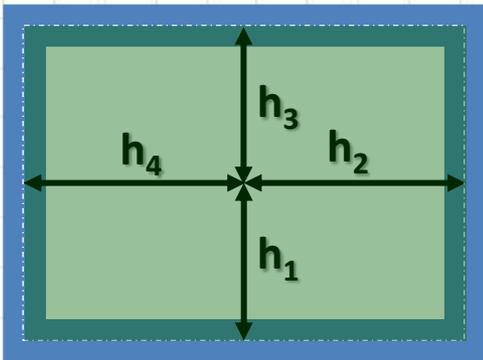
→ **2 · Área**

**Vale para qualquer forma!**

# Um Truque Geométrico

- Ou seja:  $\oint h \cdot dS = 2 \cdot \text{Área}$

- Mas... Observe o **h** no tubo de parede fina



- Não é a área total da figura!
  - É a *área que vai até o meio da parede* do tubo

- $A_m$ : Área Média

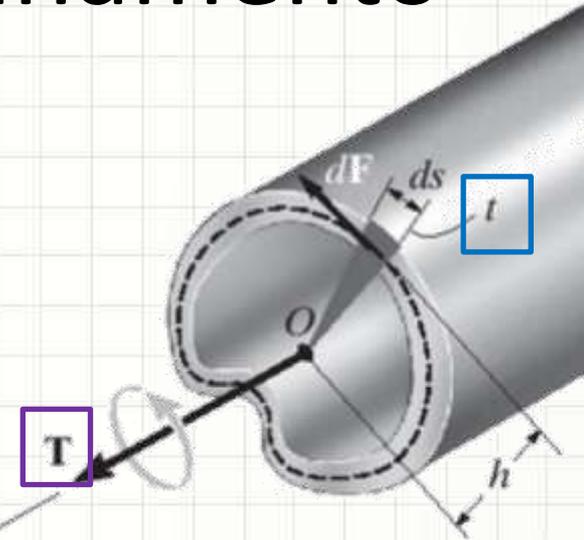
- No nosso caso, então:  $\oint h \cdot dS = 2 \cdot A_m$

# Torque x Tensão de Cisalhamento

- Voltando, podemos juntar

$$T = \tau_{méd} \cdot t \cdot \oint h \cdot dS$$

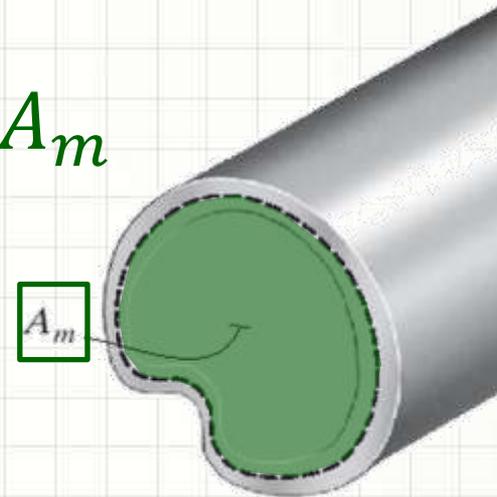
$$\oint h \cdot dS = 2 \cdot A_m$$



- Que resulta em:  $T = \tau_{méd} \cdot t \cdot 2 \cdot A_m$
- Ou ainda...

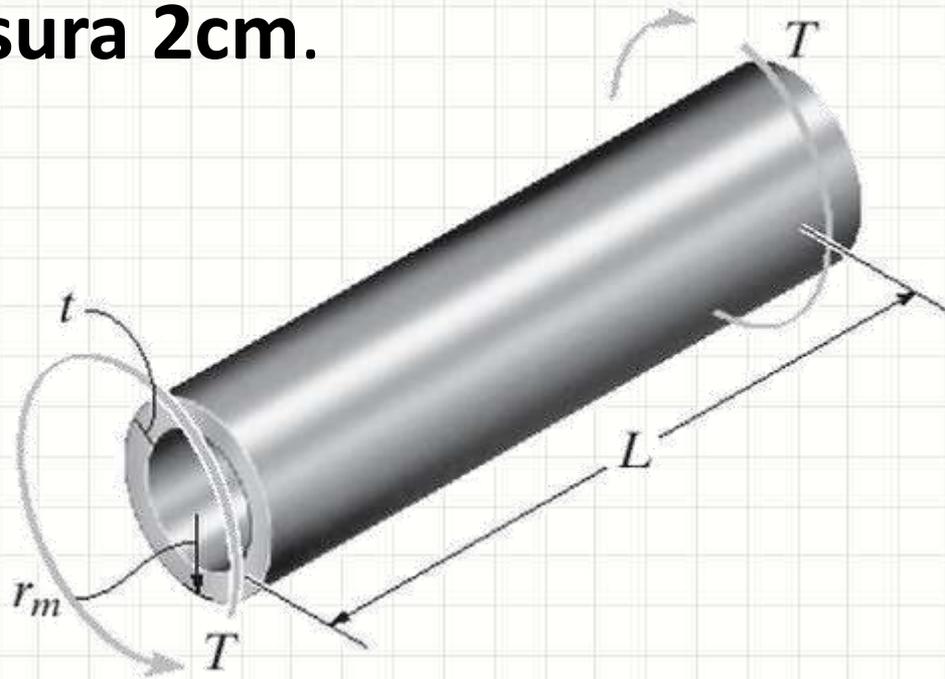
$\tau_{méd}$  para seções da mesma espessura  $t$ !

$$\tau_{méd} = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m}$$



# Exemplo: Verificação de Barra

- Sabendo que a **tensão de cisalhamento admissível é 40MPa**, verifique se resiste a um torque de 50kN.m o tubo de parede fina com *seção circular* de raio  $r_m = 10\text{cm}$  e espessura 2cm.



# Exemplo: Verificação de Barra

- $r_m: 0,1\text{m}$   $t: 0,02\text{m}$   $T: 50 \cdot 10^3\text{N.m}$   $\tau_{\text{adm}}: 40 \cdot 10^6\text{Pa}$

- Pela fórmula:

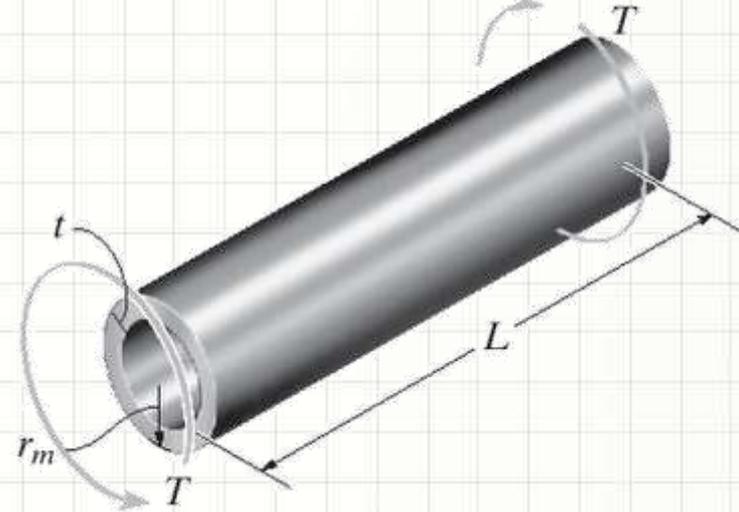
$$\tau_{\text{méd}} = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m}$$

- Logo:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot (10^{-1})^2} = \frac{12,5 \cdot 10^7}{\pi}$$

$$\tau_{\text{méd}} = 39,8\text{MPa}$$

**OK!**

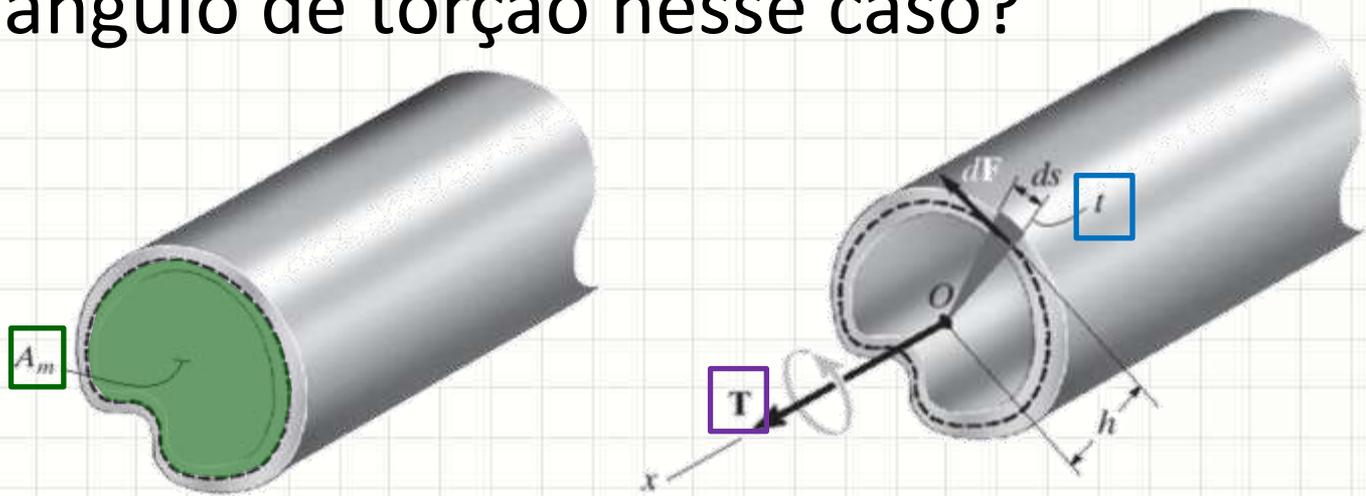




# **ÂNGULO DE TORÇÃO EM TUBOS DE PAREDES FINAS**

# Paredes Finas x Ângulo de Torção

- E o ângulo de torção nesse caso?



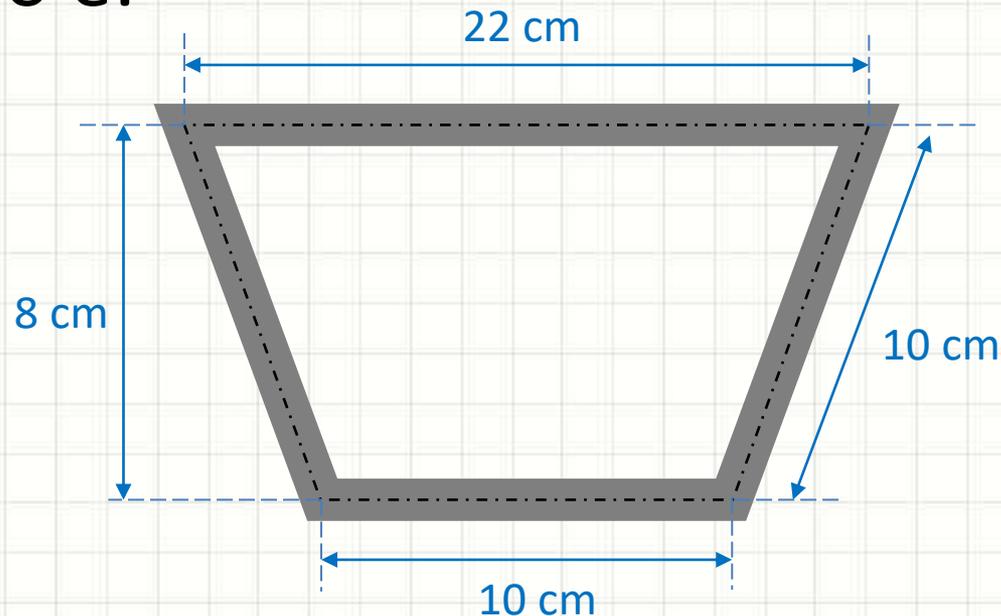
$$\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_m^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t}$$

- De onde vem?

Resolver a integral  
caso a caso!

# Exemplo: Torção de Barra

- Verifique a deformação de uma barra tubular de **2m de comprimento**, com **espessura 2cm** e  **$G = 100\text{GPa}$** , quando aplicado um **torque de 50kN.m**. O formato da seção é:



# Exemplo: Torção de Barra

- $L: 2\text{m}$   $t: 0,02\text{m}$   $G: 100 \cdot 10^9 \text{GPa}$   $T: 50 \cdot 10^3 \text{N.m}$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_m^2 \cdot G} \oint \frac{dS}{t}$$

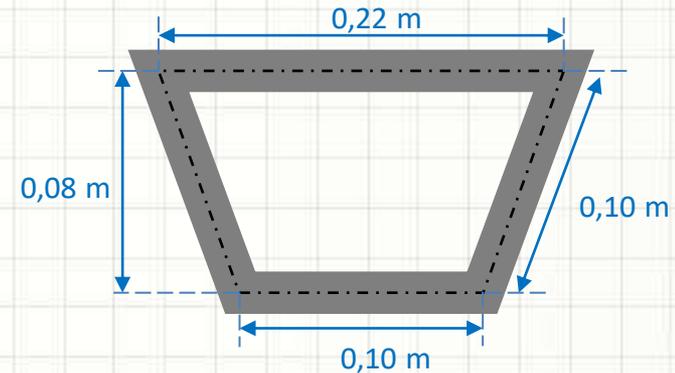
$$A_m = \frac{b_{\text{maior}} + b_{\text{menor}}}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A_m = \frac{0,22 + 0,1}{2} \cdot 0,08 = 0,0128 \text{ m}^2$$

$$A_m = 0,0128 \text{ m}^2$$

$$\oint \frac{dS}{t} = \frac{0,10}{0,02} + \frac{0,10}{0,02} + \frac{0,22}{0,02} + \frac{0,10}{0,02} = 26$$

$$\oint \frac{dS}{t} = 26$$



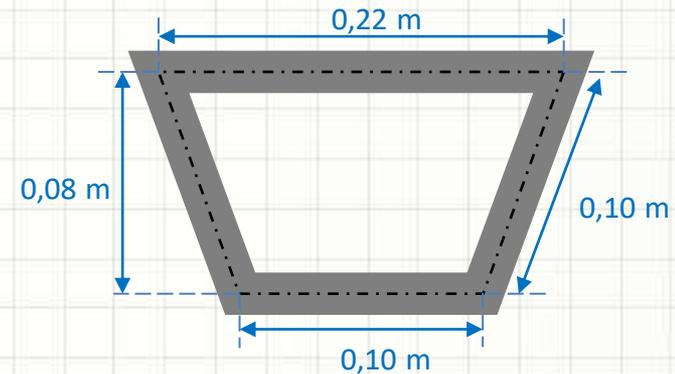
# Exemplo: Torção de Barra

- $L: 2\text{m}$   $t: 0,02\text{m}$   $G: 100 \cdot 10^9 \text{GPa}$   $T: 50 \cdot 10^3 \text{N.m}$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_m^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{dS}{t}$$

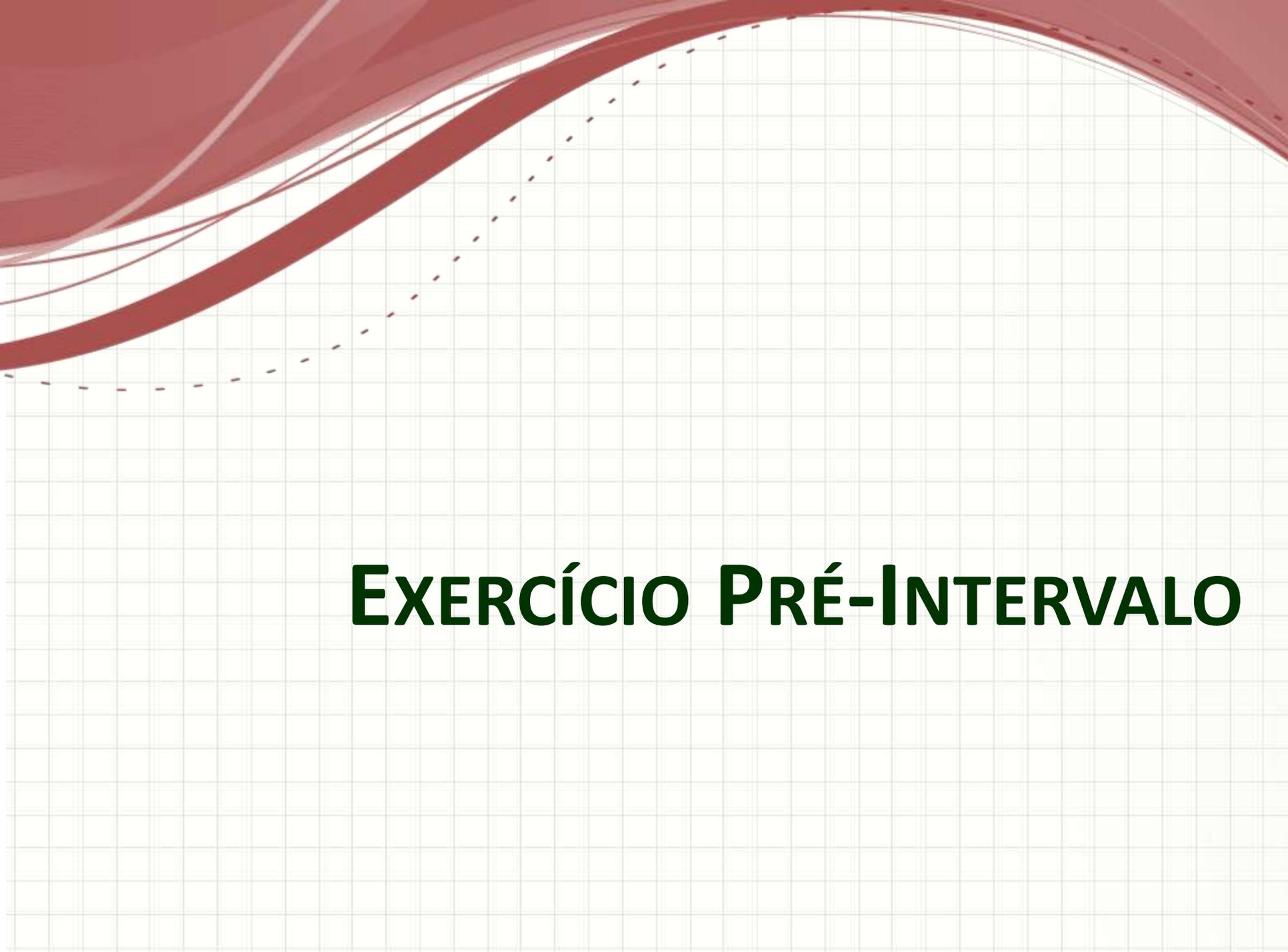
$$A_m = 0,0128 \text{ m}^2$$

$$\oint \frac{dS}{t} = 26$$



$$\phi = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 2}{4 \cdot 0,0128^2 \cdot 100 \cdot 10^9} \cdot 26 = \frac{10^3}{0,00016384 \cdot 10^9} \cdot 6,5$$

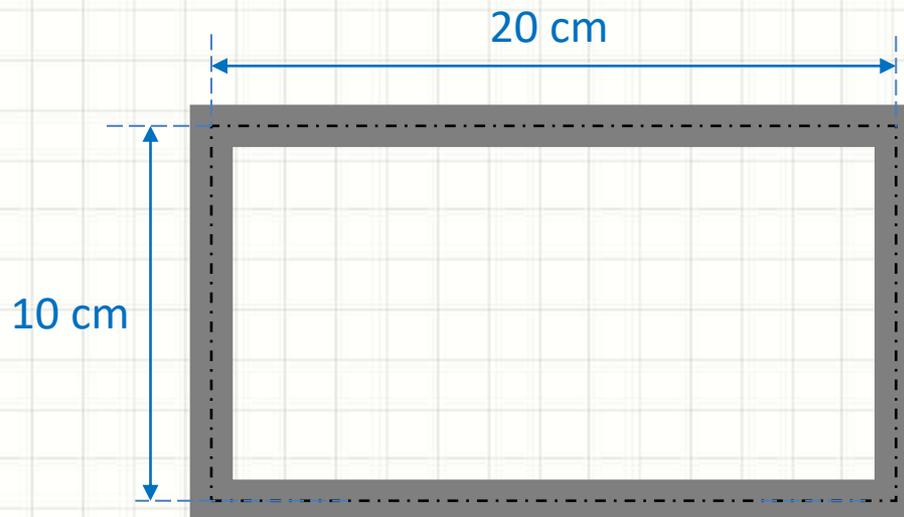
$$\phi \cong 0,04 \text{ rad}$$



# **EXERCÍCIO PRÉ-INTERVALO**

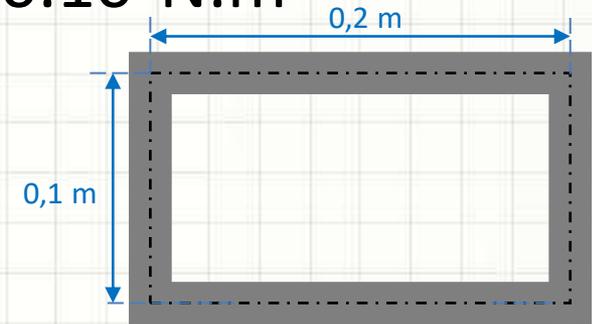
# Exercício

- Calcule a tensão de cisalhamento média e verifique a deformação de uma barra tubular de **5m de comprimento**, com **espessura 1cm** e  **$G = 100\text{GPa}$** , quando aplicado um **torque de 10kN.m**. O formato da seção é:



# Exemplo: Verificação de Barra

- **L: 5m t: 0,01m G:100.10<sup>9</sup>Pa T: 10.10<sup>3</sup>N.m**
- **Cisalhamento Médio**



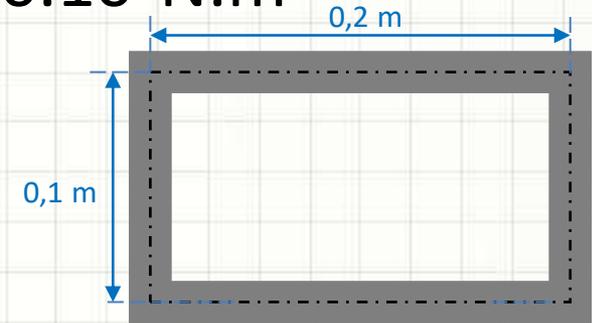
$$\tau_{\text{méd}} = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m}$$

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-1})}$$

$$\tau_{\text{méd}} = 25 \text{ MPa}$$

# Exemplo: Verificação de Barra

- **L: 5m t: 0,01m G:100.10<sup>9</sup>GPa T: 10.10<sup>3</sup>N.m**
- Deformação

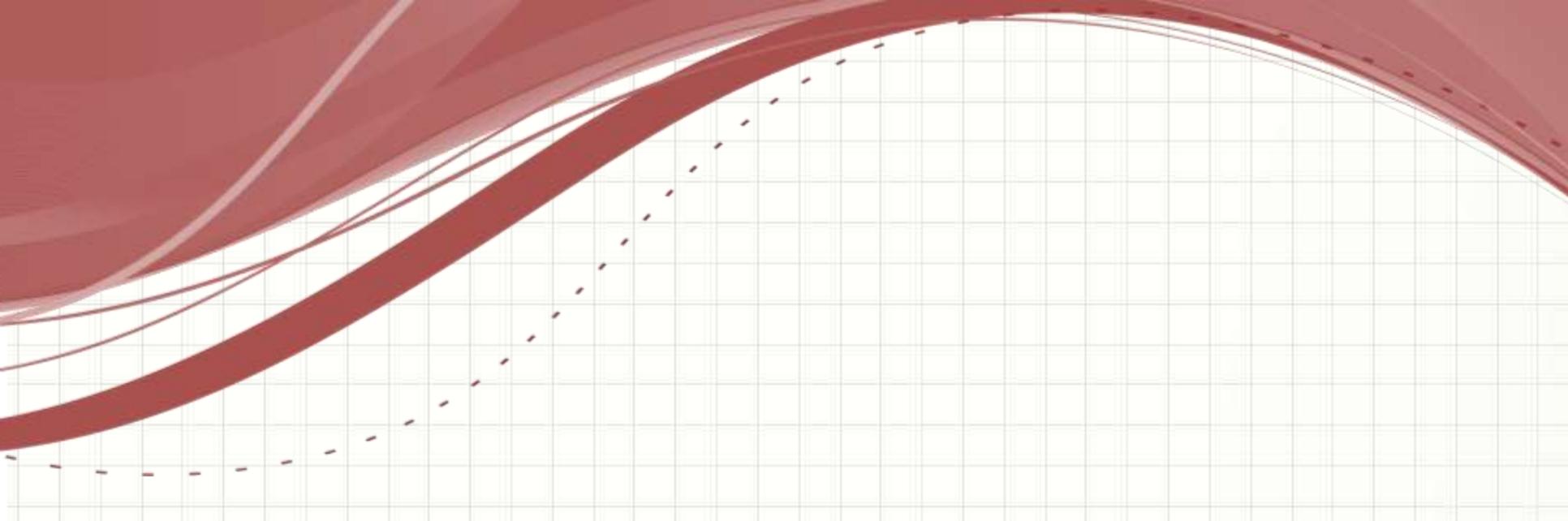


$$\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_m^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{dS}{t}$$

$$\phi = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 5}{4 \cdot (0,2 \cdot 0,2)^2 \cdot 100 \cdot 10^9} \cdot \left( \frac{0,2}{0,01} + \frac{0,1}{0,01} + \frac{0,2}{0,01} + \frac{0,1}{0,01} \right)$$

$$\phi = 0,00078125 \cdot 60$$

$$\phi \cong 0,05 \text{ rad}$$



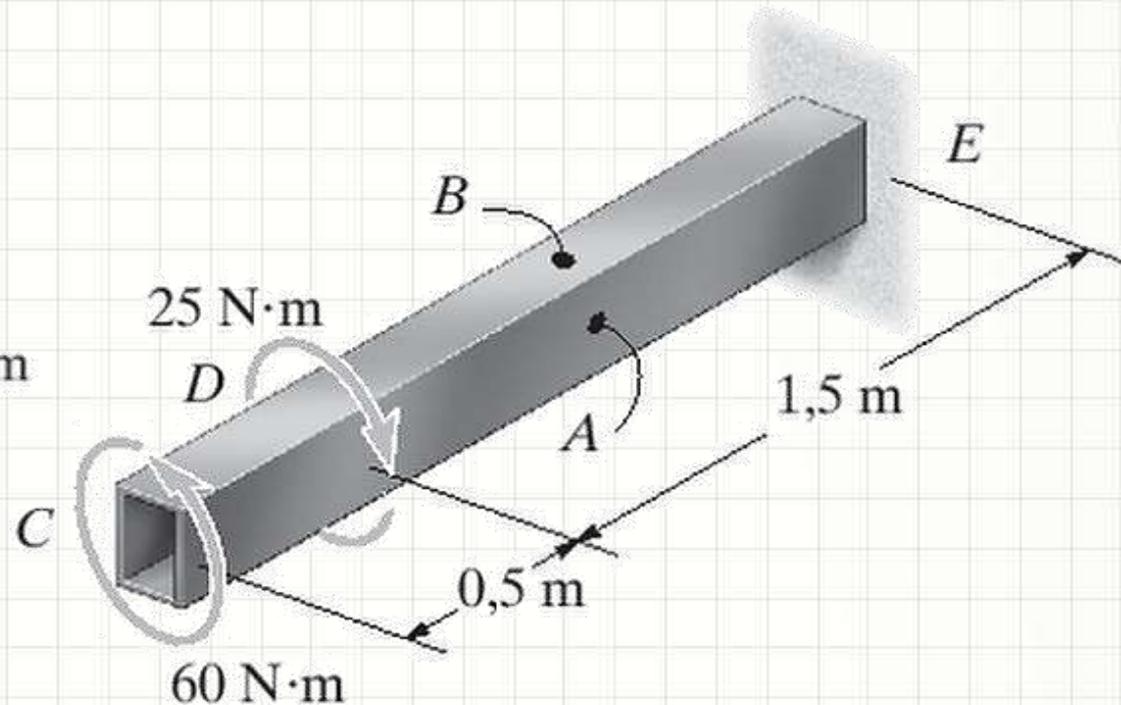
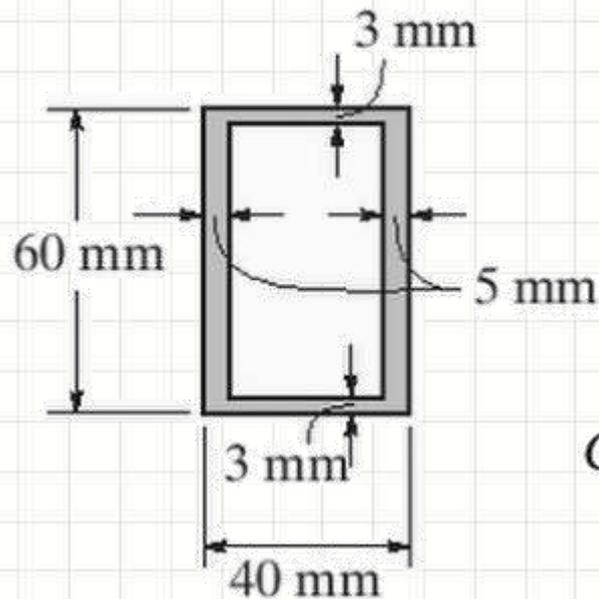
**PAUSA PARA O CAFÉ**



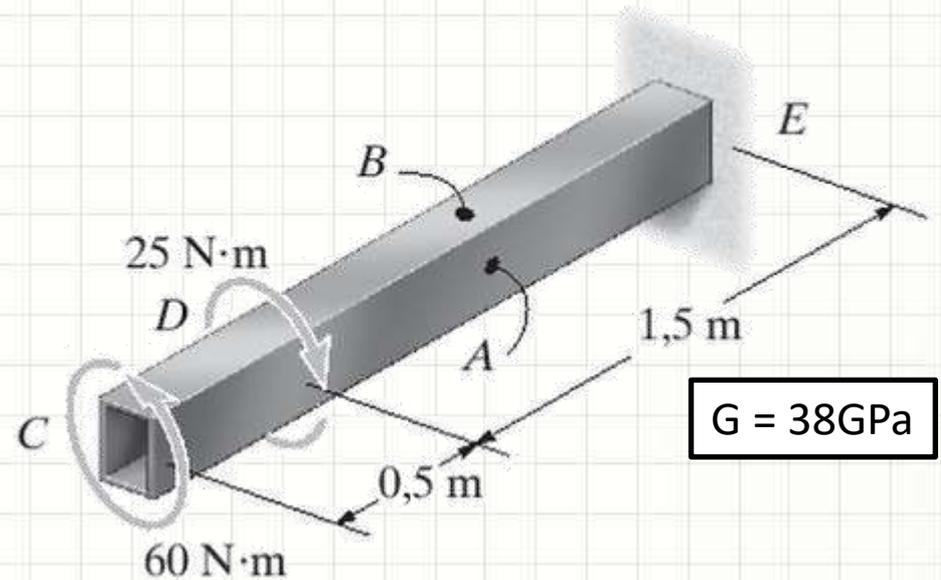
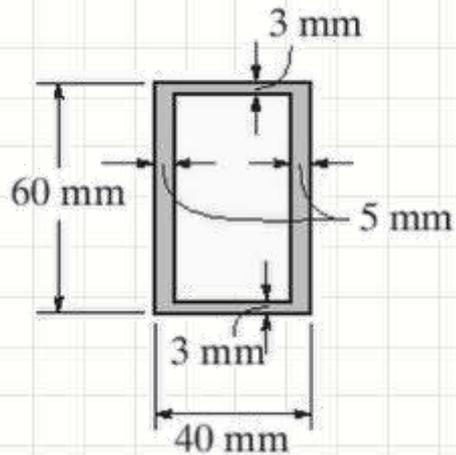
**EXEMPLO COMPLETO**

# Exemplo: Fluxo de Cisalhamento

- Calcule a tensão de cisalhamento nos pontos A e B e o ângulo de torção em C da barra abaixo, sabendo que  **$G = 38\text{GPa}$** .



# Exemplo: Fluxo de Cisalhamento

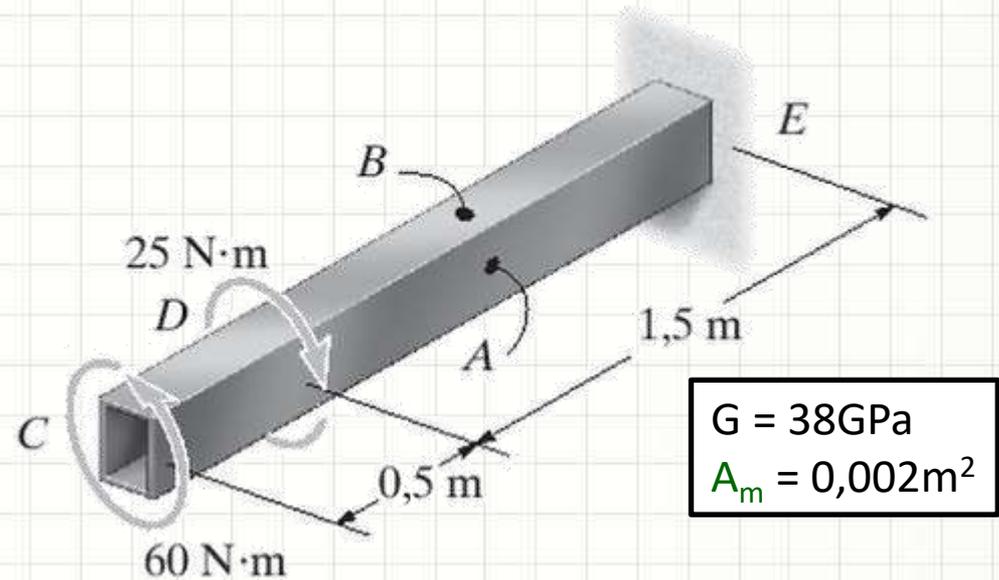
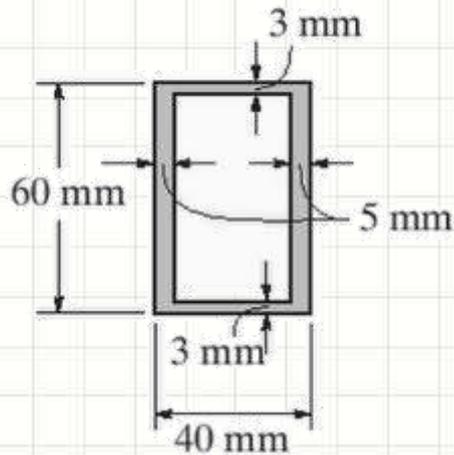


$G = 38\text{GPa}$

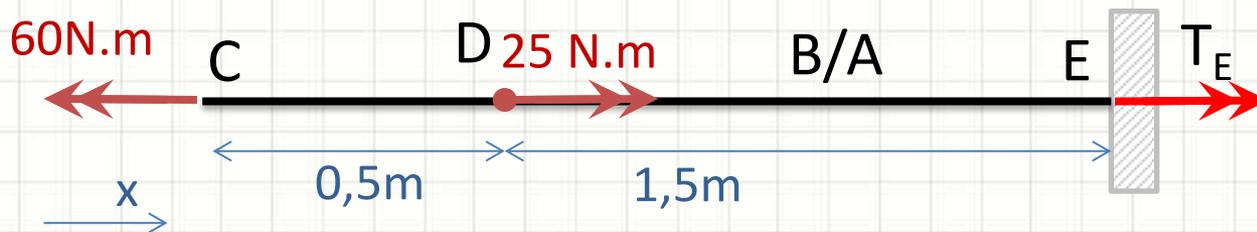
- Primeiro passo:  $A_m$

$$A_m = 0,057 \cdot 0,035 = 0,002\text{m}^2$$

# Exemplo: Fluxo de Cisalhamento

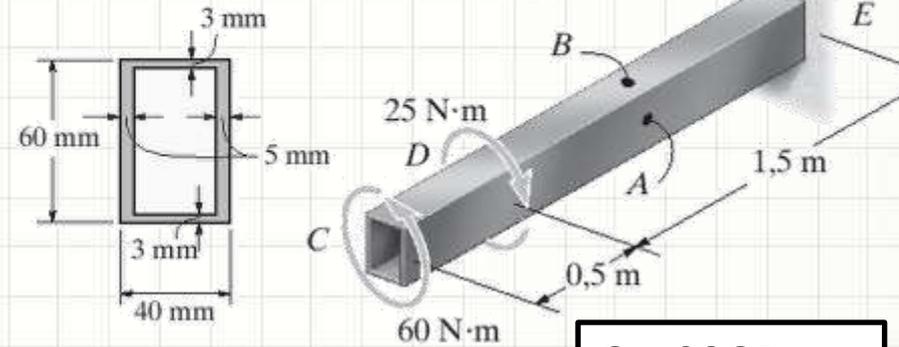


- Segundo passo: Reação e Diagramas



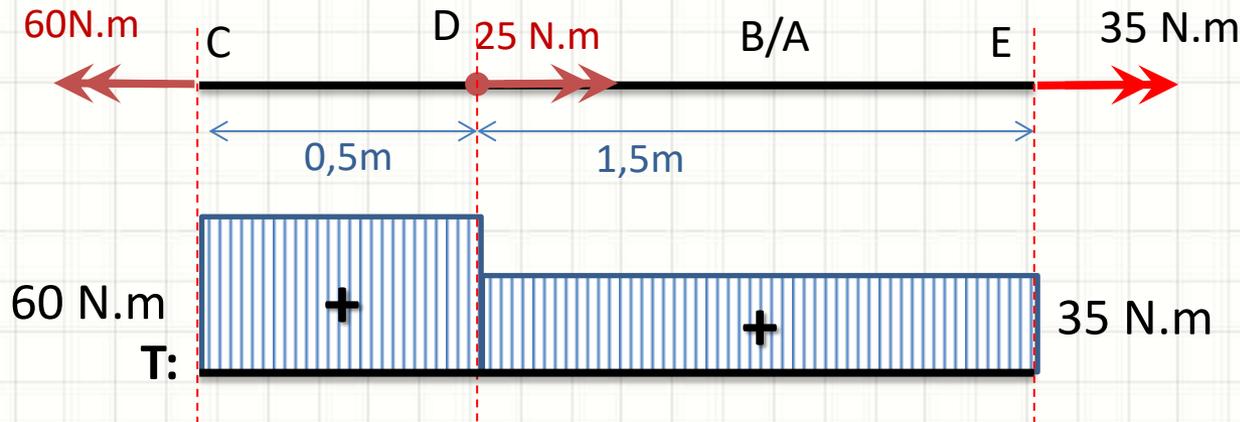
- Equilíbrio Estático:  $-60 + 25 + T_E = 0$   $T_E = 35 \text{ N}\cdot\text{m}$

# Exemplo: Fluxo de Cisalhamento

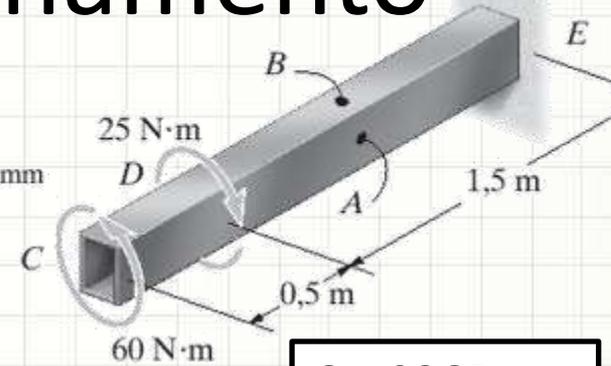
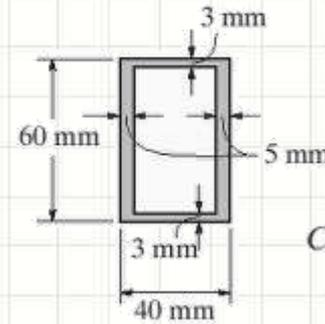
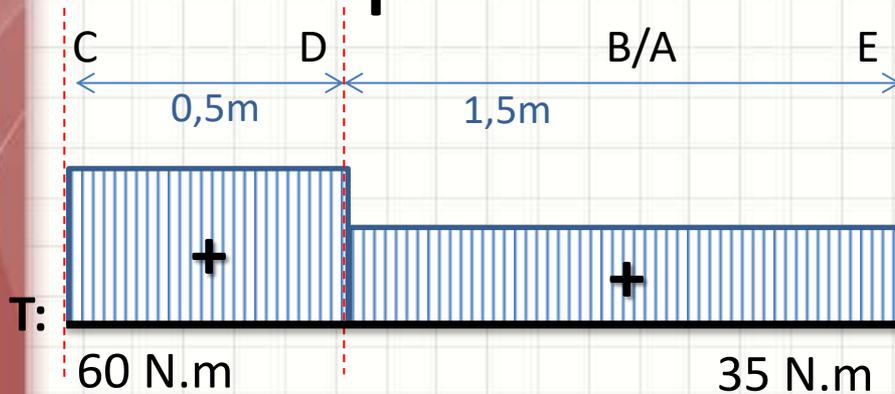


$$G = 38 \text{ GPa}$$
$$A_m = 0,002 \text{ m}^2$$

- Segundo passo: Reação e Diagramas



# Exemplo: Fluxo de Cisalhamento



$$G = 38 \text{ GPa}$$

$$A_m = 0,002 \text{ m}^2$$

- Terceiro passo:  $\tau_{\text{méd}}$

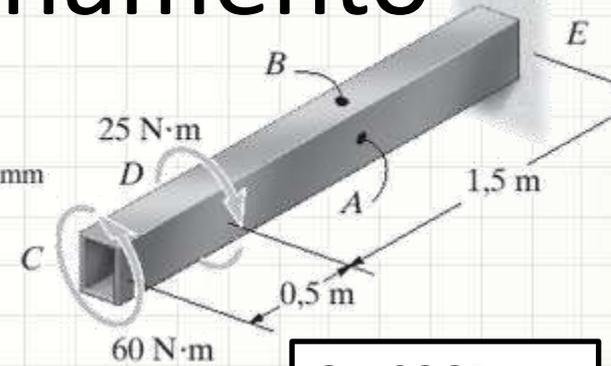
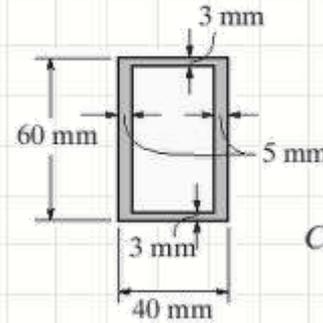
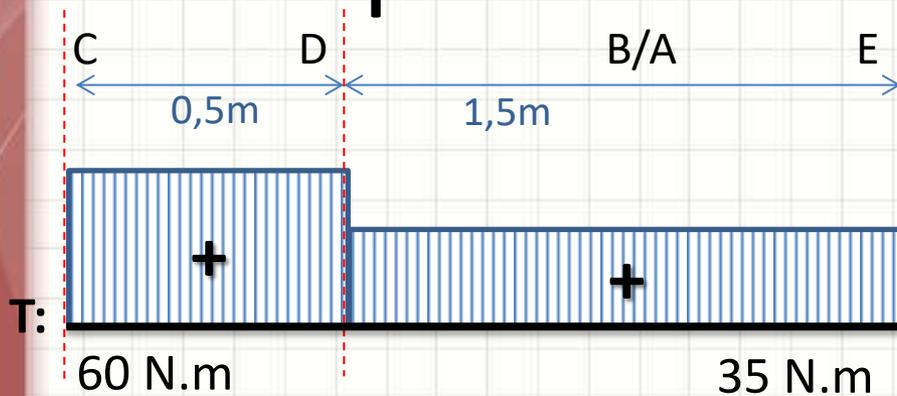
$$\tau_{\text{méd},A} = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m} = \frac{35}{2 \cdot 0,005 \cdot 0,002}$$

$$\tau_{\text{méd},A} = 1,75 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{méd},B} = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m} = \frac{35}{2 \cdot 0,003 \cdot 0,002}$$

$$\tau_{\text{méd},B} = 2,92 \text{ MPa}$$

# Exemplo: Fluxo de Cisalhamento



$$G = 38 \text{ GPa}$$

$$A_m = 0,002 \text{ m}^2$$

- Quarto passo:  $\phi$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_m^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t} = \frac{T \cdot L}{4 \cdot 0,002^2 \cdot 38 \cdot 10^9} \cdot \left( \frac{0,057}{0,005} + \frac{0,035}{0,003} + \frac{0,057}{0,005} + \frac{0,035}{0,003} \right)$$

$$\phi = 7,587171 \cdot 10^{-5} \cdot T \cdot L$$

$$\phi_{DE} = 7,587171 \cdot 10^{-5} \cdot 35 \cdot 1,5 \cong 0,004 \text{ rad}$$

$$\phi_{CD} = 7,587171 \cdot 10^{-5} \cdot 60 \cdot 0,5 \cong 0,002 \text{ rad}$$

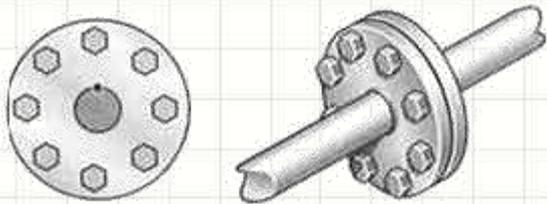
$$\phi \cong 0,006 \text{ rad}$$



# CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

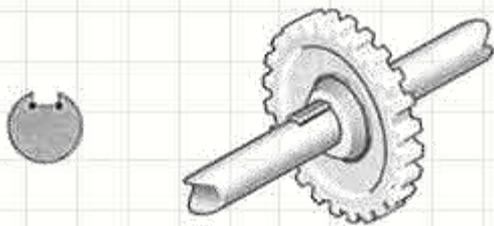
# Concentração de Tensão

- Assim como nas cargas axiais
  - Cálculo complexo em mudanças de seção

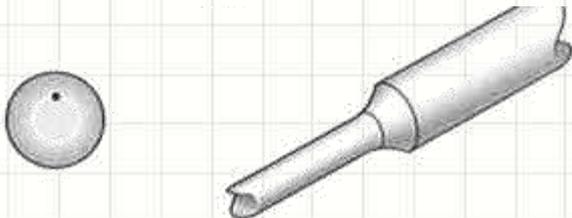


$$\tau_{MAX} \neq \frac{T}{J} \cdot R$$

- Mas...

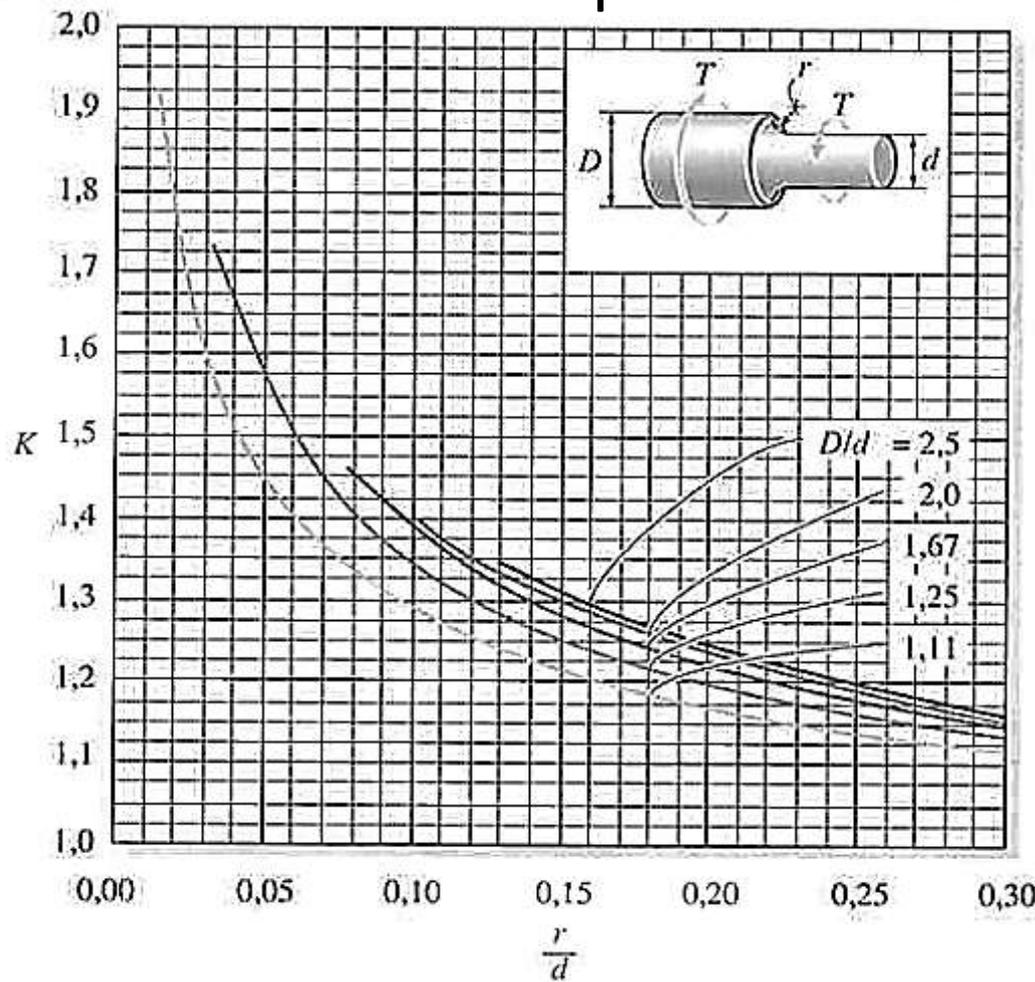


$$\tau_{MAX} = K \cdot \frac{T}{J} \cdot R$$



# Concentração de Tensão

- Assim como nas cargas axiais
  - Cálculo complexo em mudanças de seção

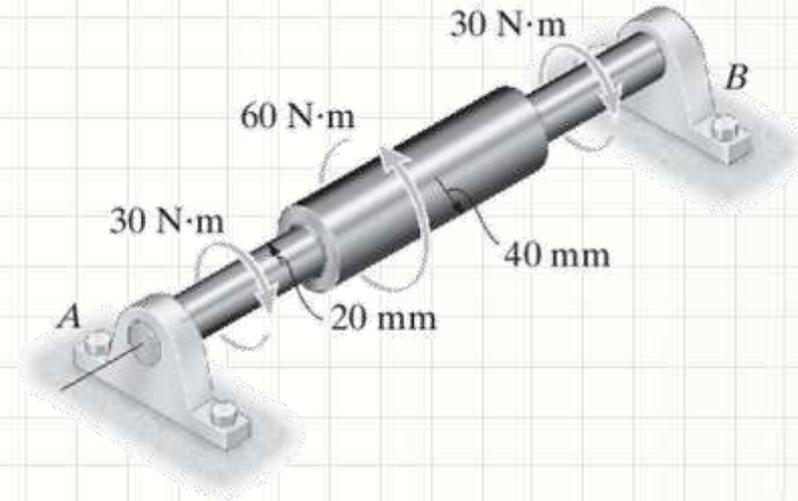
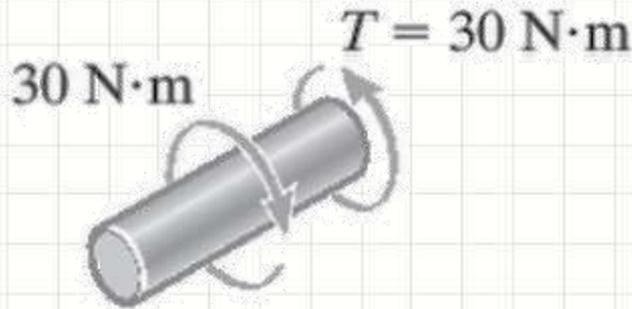


$$\tau_{MAX} = K \cdot \frac{T}{J} \cdot R$$



# Exemplo: Concentração de Tensão

- $r = 6\text{mm}$
- Por inspeção...



$$\tau_{MAX} = K \cdot \frac{T}{J} \cdot R \quad J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

- Logo...

$$\tau_{MAX} = K \cdot \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

# Exemplo: Concentração de Tensão

- $r = 6\text{mm}$   $T = 30\text{Nm}$

$$\tau_{MAX} = K \cdot \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

- $K = ?$

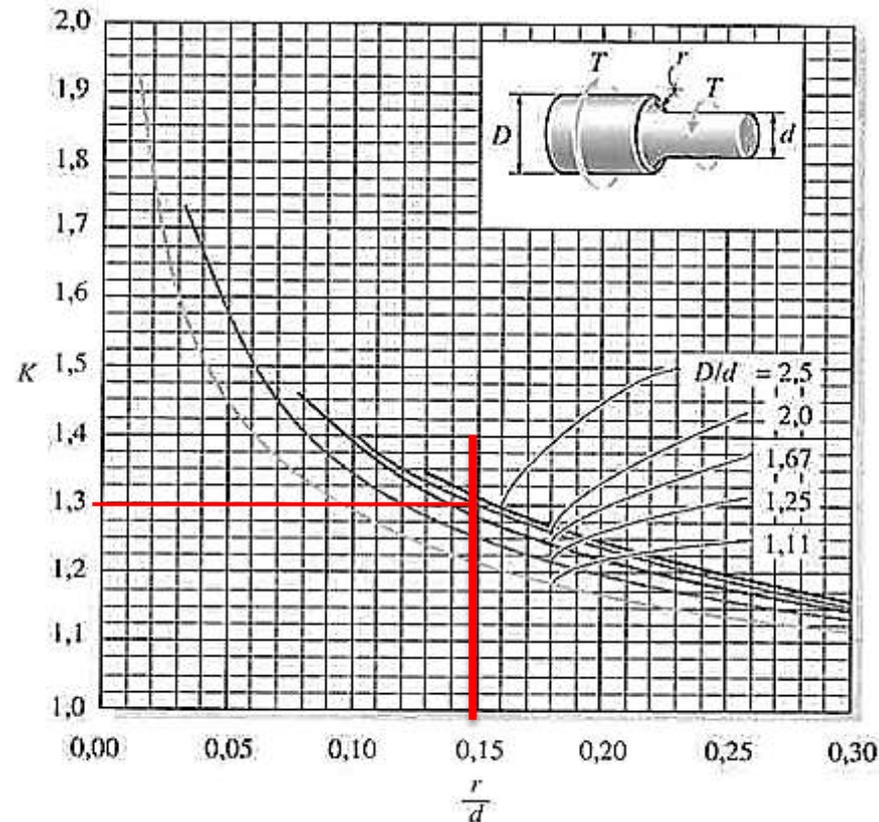
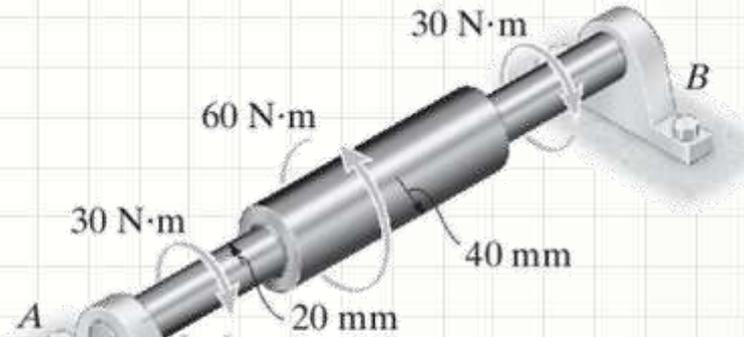
$$r/d = 6/2 \cdot 20$$

$$r/d = 0,15$$

$$D/d = 2 \cdot 40/2 \cdot 20$$

$$D/d = 2$$

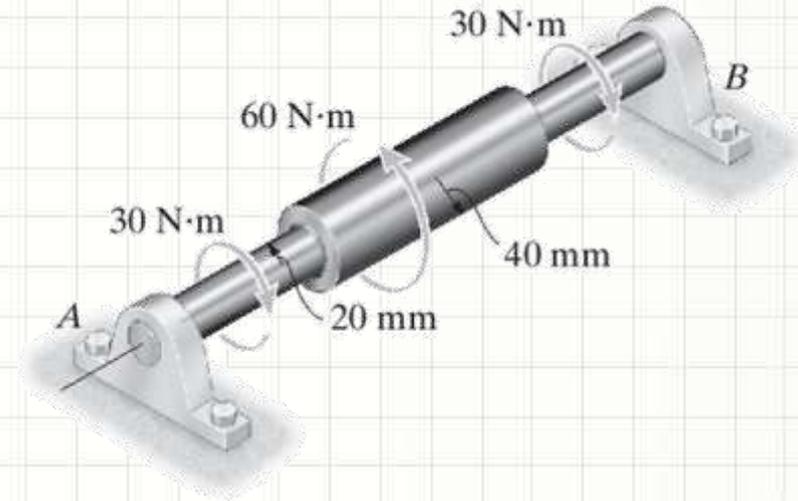
- $K = 1,3$



# Exemplo: Concentração de Tensão

- $r = 6\text{mm}$   $T = 30\text{Nm}$

$$\tau_{MAX} = 1,3 \cdot \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

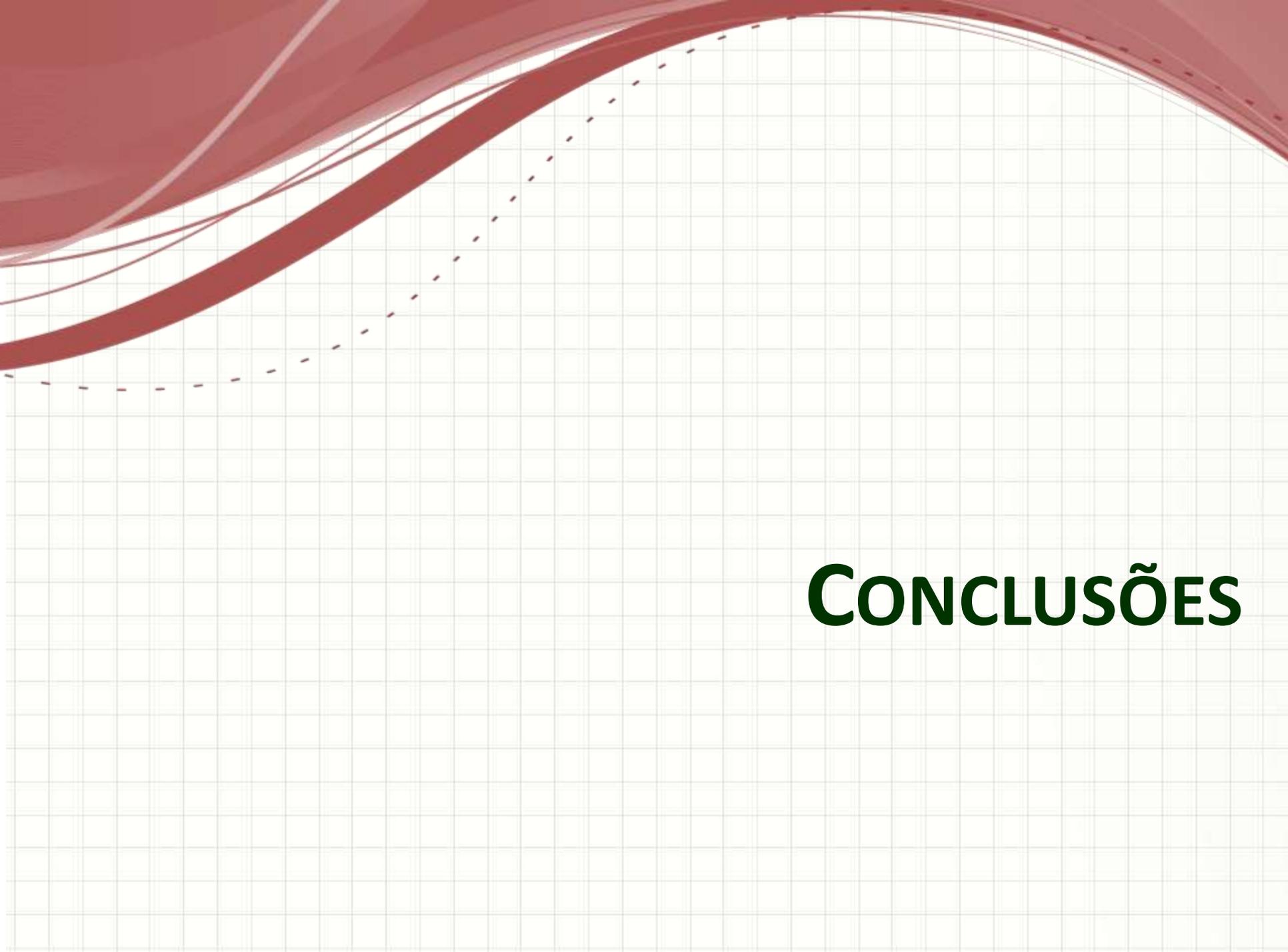


- Assim...

$$\tau_{MAX} = 1,3 \cdot \frac{2 \cdot 30}{\pi \cdot (20 \cdot 10^{-3})^3}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{78}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{-6}}$$

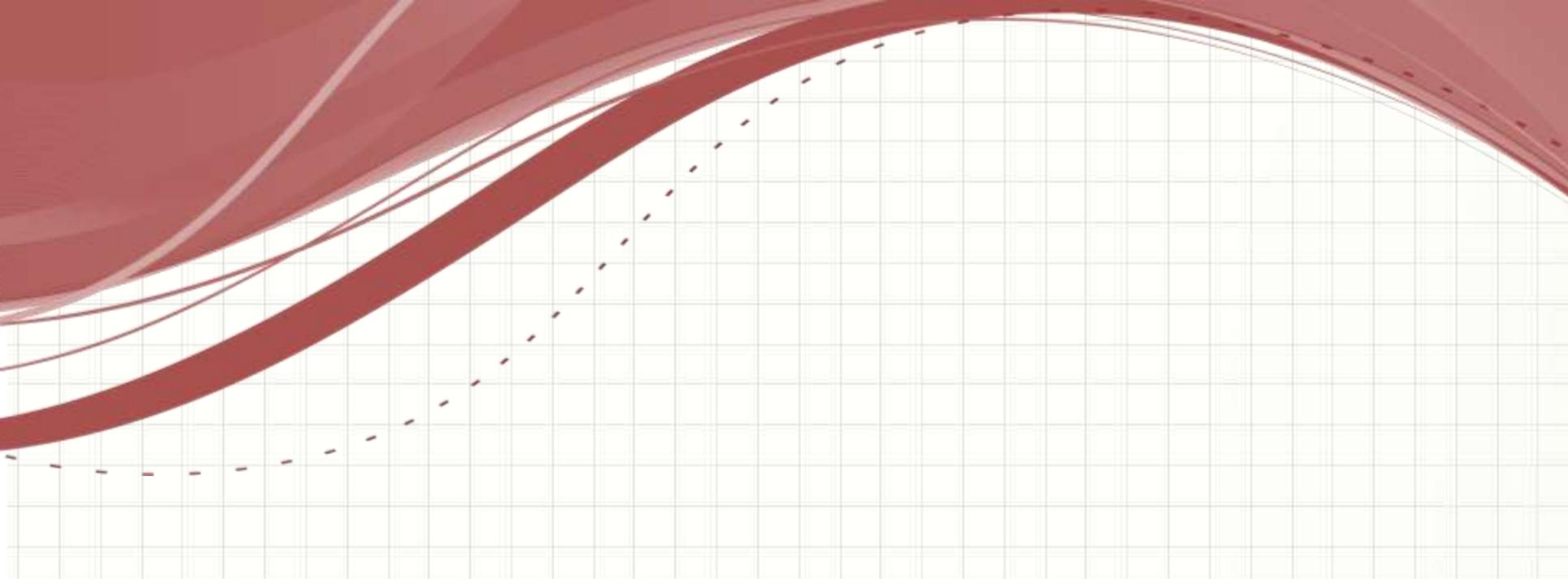
$$\tau_{MAX} = 3,1\text{MPa}$$



**CONCLUSÕES**

# Resumo

- Cisalhamento em tubos de paredes finas:
    - Equações específicas
  - Permitem calcular seções diversas
  - Concentração de Tensões: Efeito importante
  - **Exercitar: Exercícios Hibbeler**
- 
- Flexão: como calcular isso?
  - Diagramas de momentos fletores



**PARA TREINAR**

# Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercícios 5.98, 5.99, 5.111
- Extras:
  - Exercícios 5.102, 5.103, 5.112, 5.116

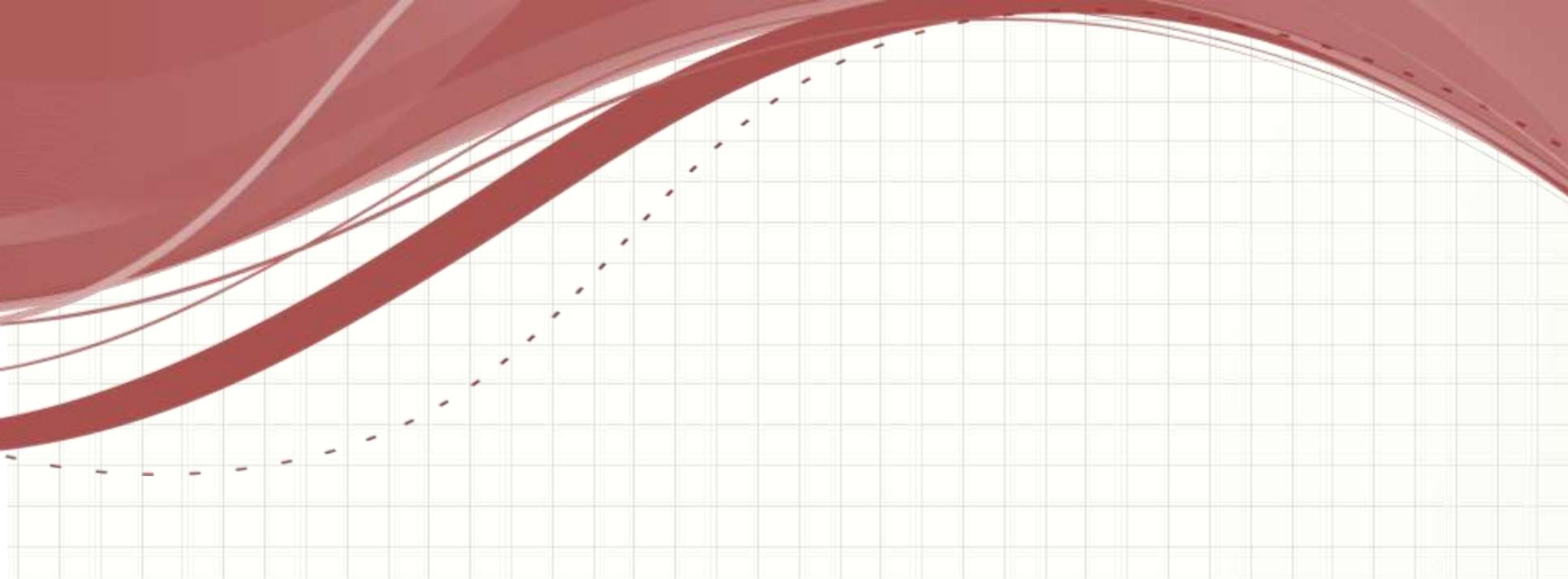
# Para Treinar em Casa

## Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

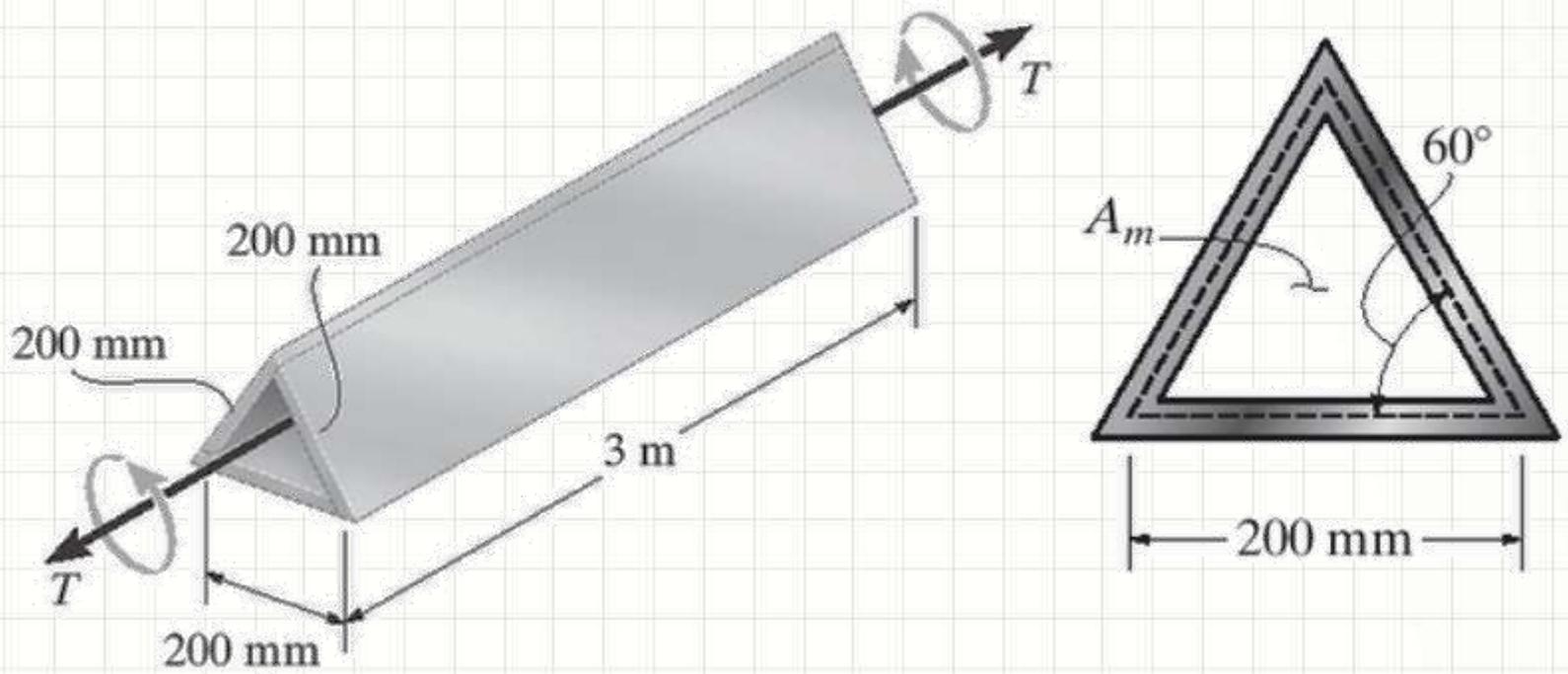
Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**

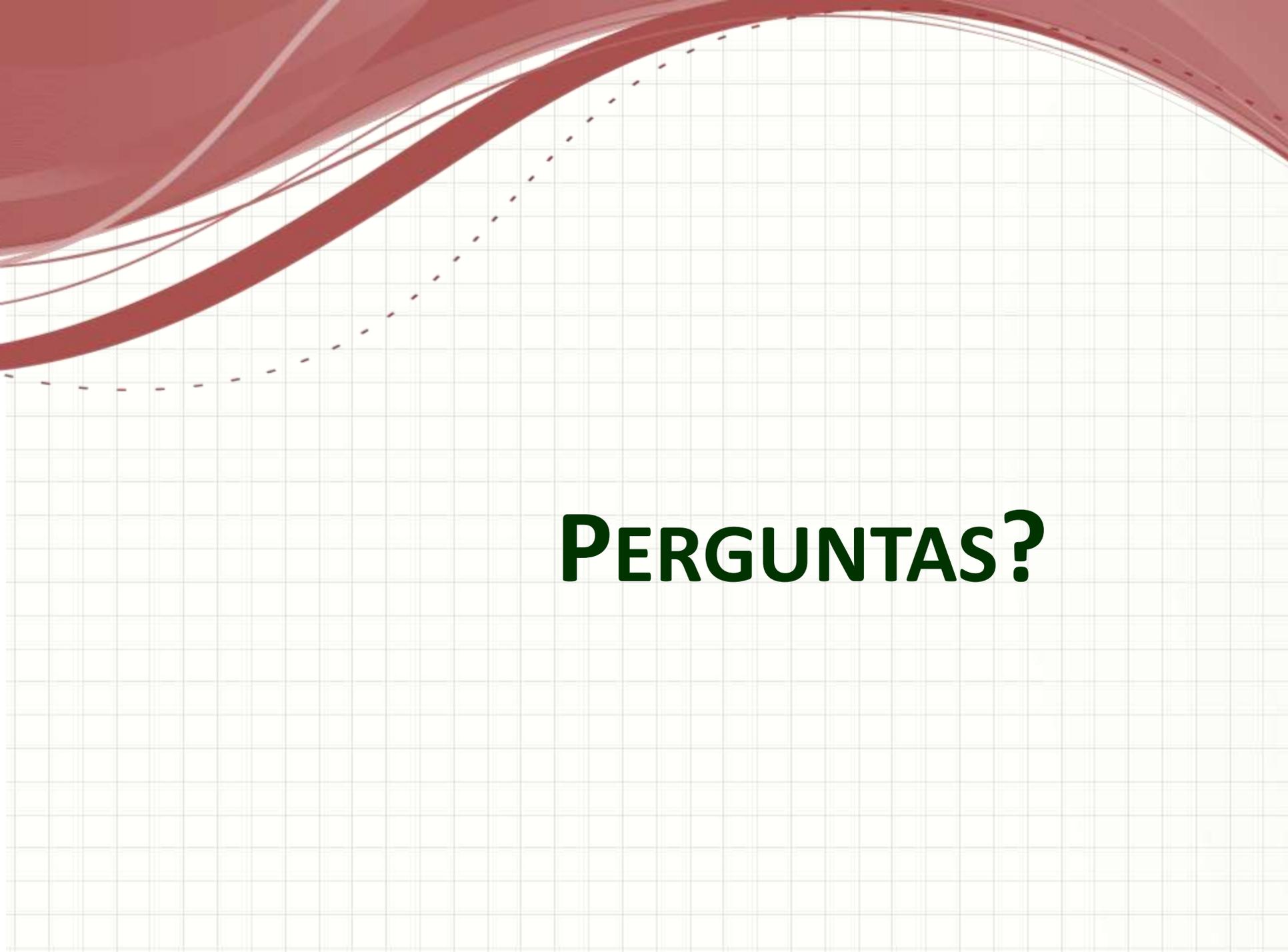


# EXERCÍCIO NO SAVA

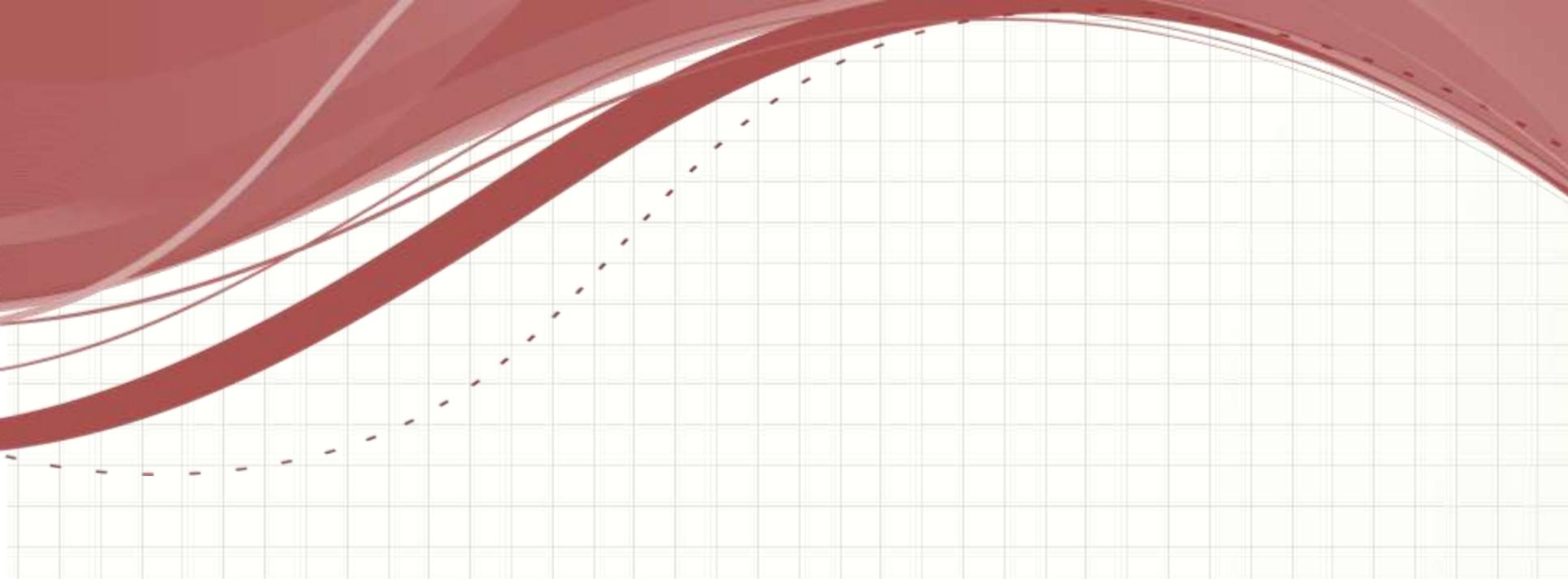
# Exercício – Entrega Individual

- Um tubo triangular, conforme a figura abaixo, de chapas de aço de 5mm de espessura, com  $G=75\text{GPa}$ . Calcule a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção.





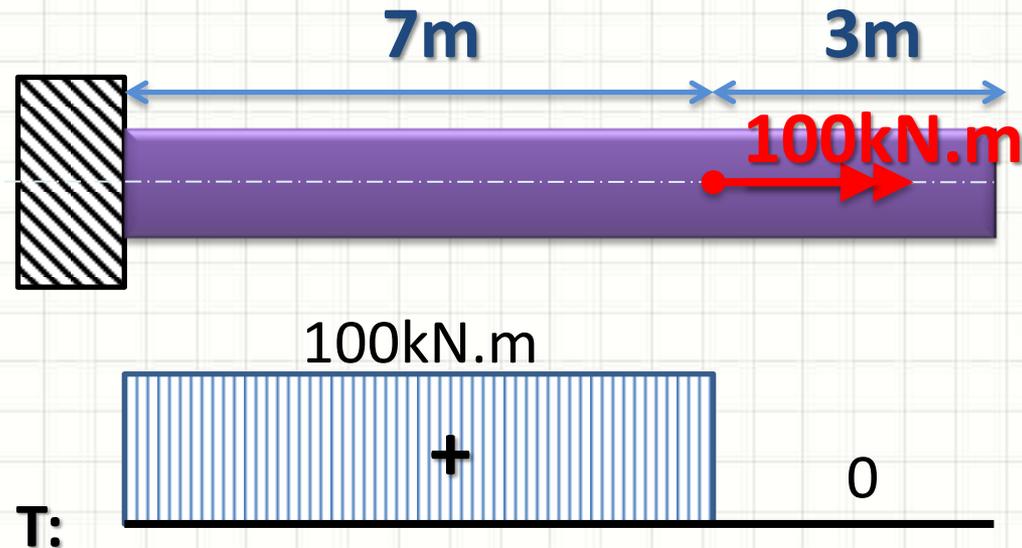
**PERGUNTAS?**



# EXERCÍCIO EM SALA

# Exercício – Individual, para Agora!

- Trace o diagrama de momento torsor da barra abaixo e calcule a rotação entre os dois extremos da barra, com **G = 200GPa** e seção quadrada de **lado médio 30cm** e chapa de **espessura 1cm**



$$\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_m^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t}$$

$$\phi \cong 0,013 \text{ rad}$$