

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

FLEXÃO PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

Objetivos

- Conceituar forças cortantes e momentos fletores
- Capacitar para o traçado de diagramas de cortantes e momento fletor em barras
- Explicitar a relação entre carga e cortante e entre cortante e momento



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

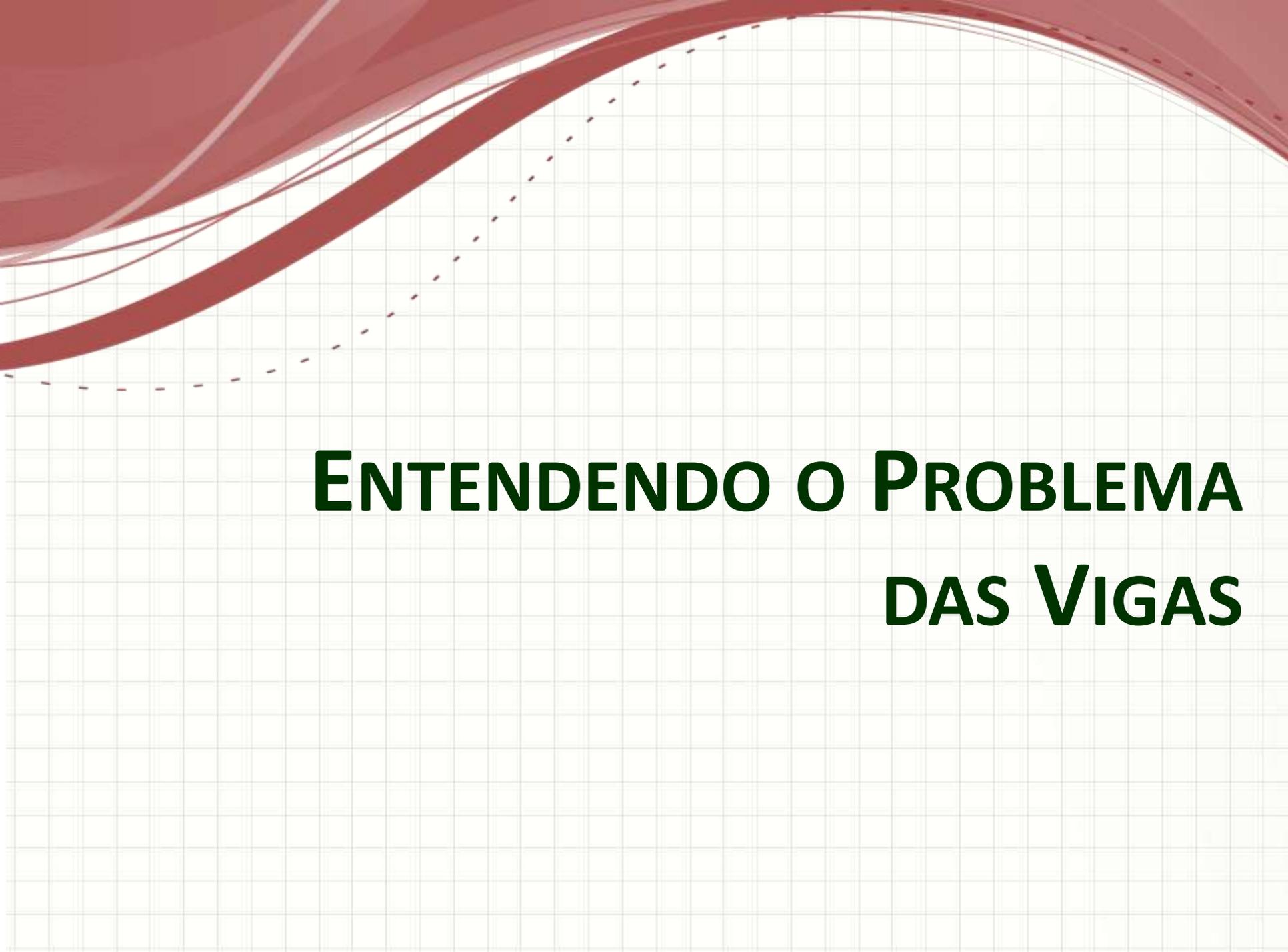
<http://www.caetano.eng.br/>
(Resistência dos Materiais II – Aula 9)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 181 a 201.

Biblioteca Virtual

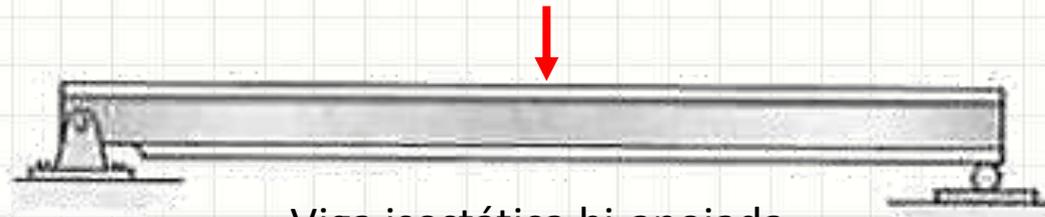
“Resistência dos Materiais”



ENTENDENDO O PROBLEMA DAS VIGAS

Objeto de Estudo

- Vigas – Cargas perpendiculares ao eixo



Viga isostática bi-apoiada



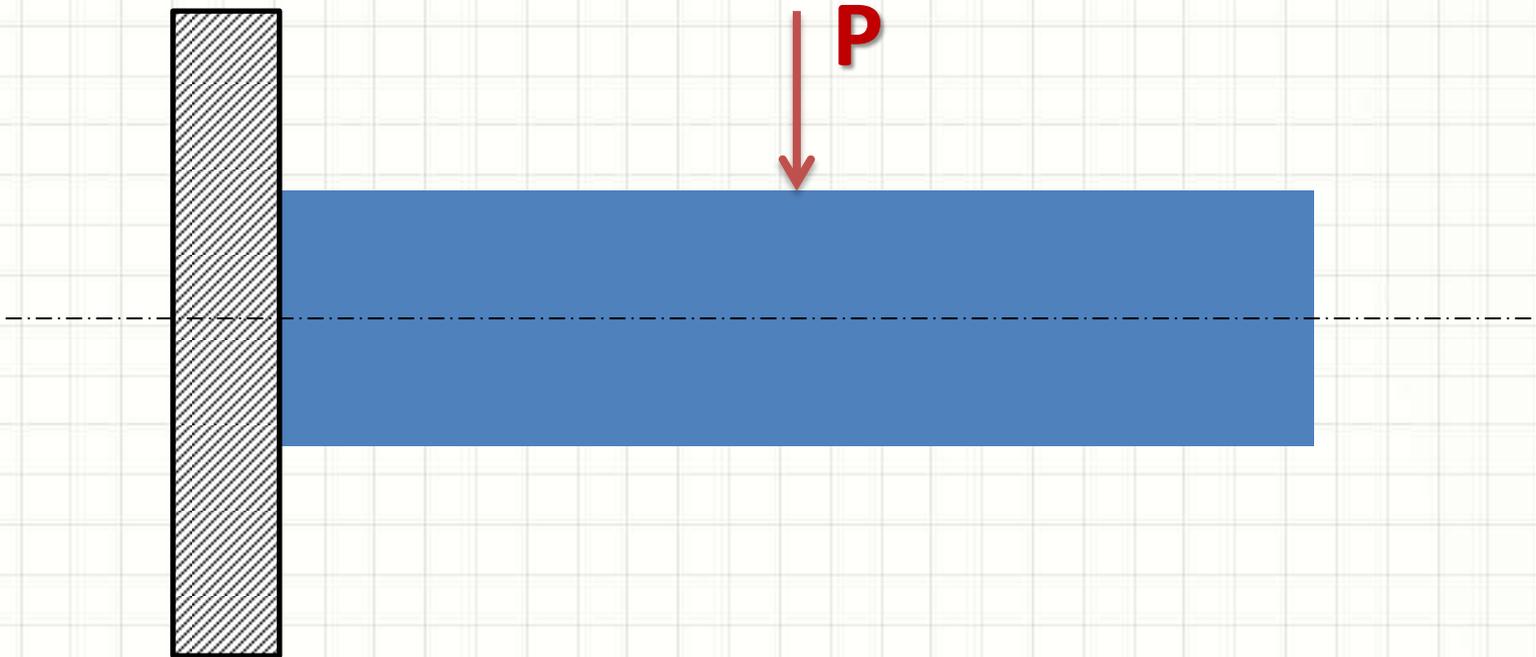
Viga isostática engastada / viga em balanço



Viga isostática bi-apoiada com extremidade em balanço

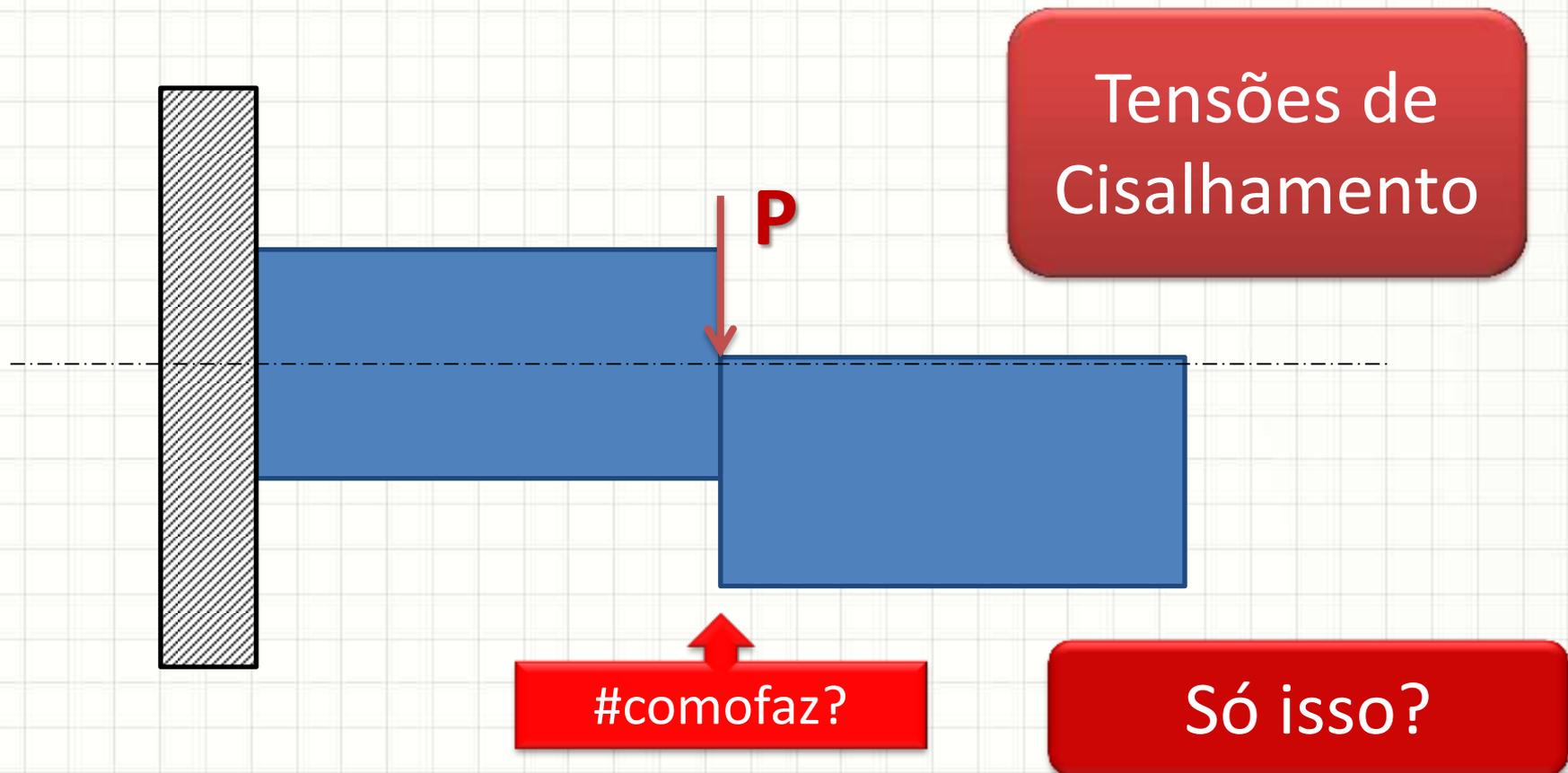
Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Como já visto, perpendicular ao eixo da barra



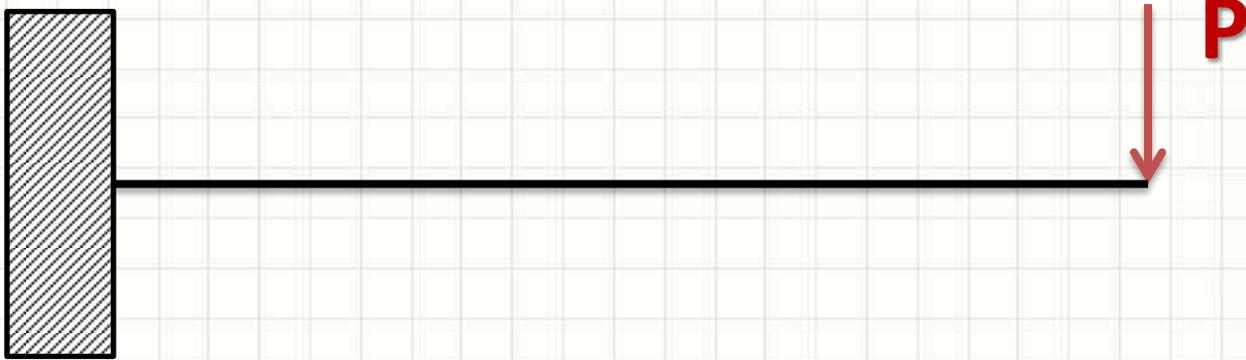
Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Como já visto, perpendicular ao eixo da barra



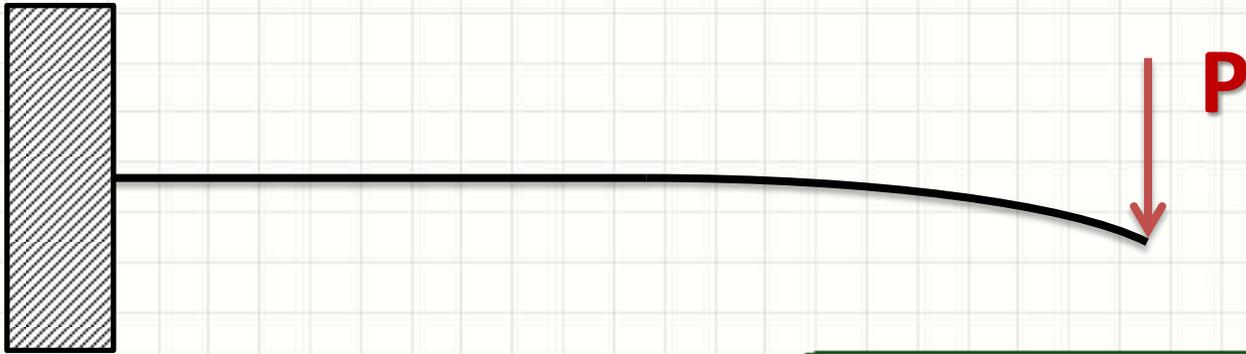
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes

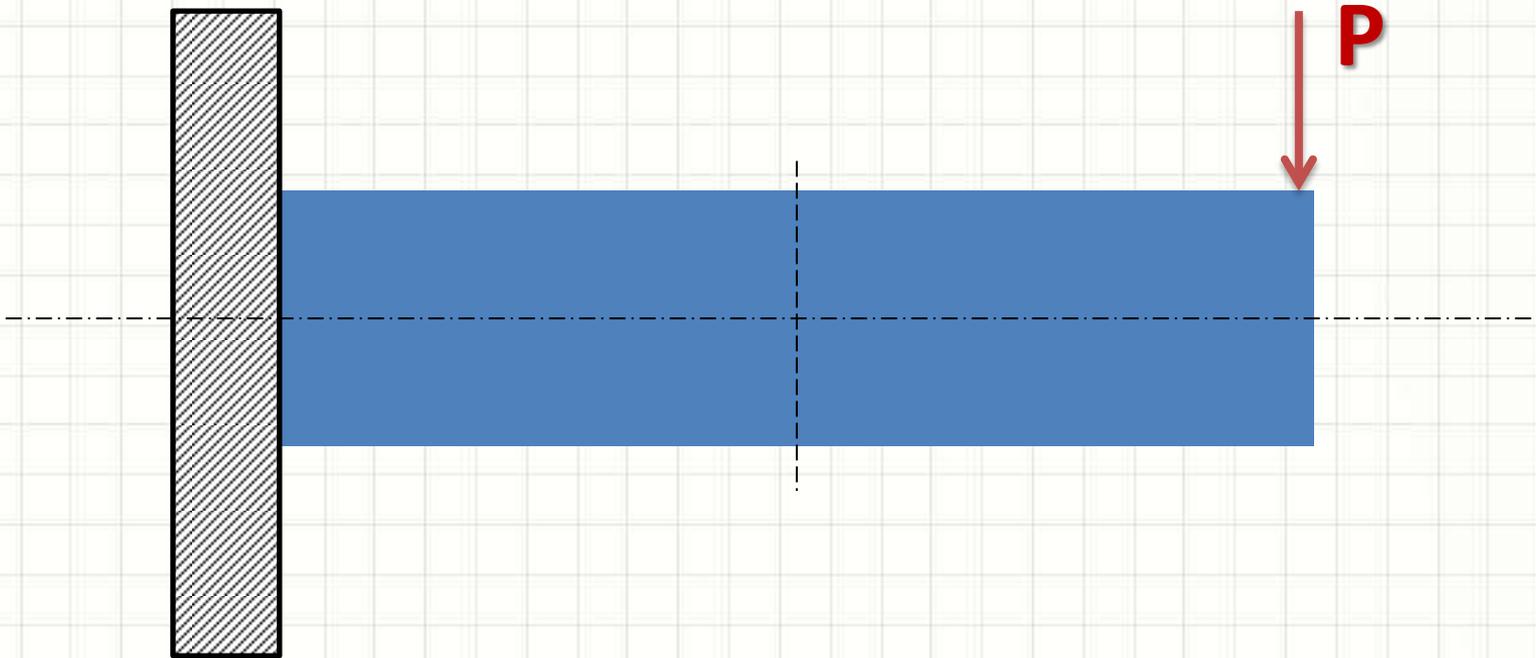


Tensões Normais ou
de Cisalhamento?

Para compreender,
precisamos analisar
um modelo
diferente...

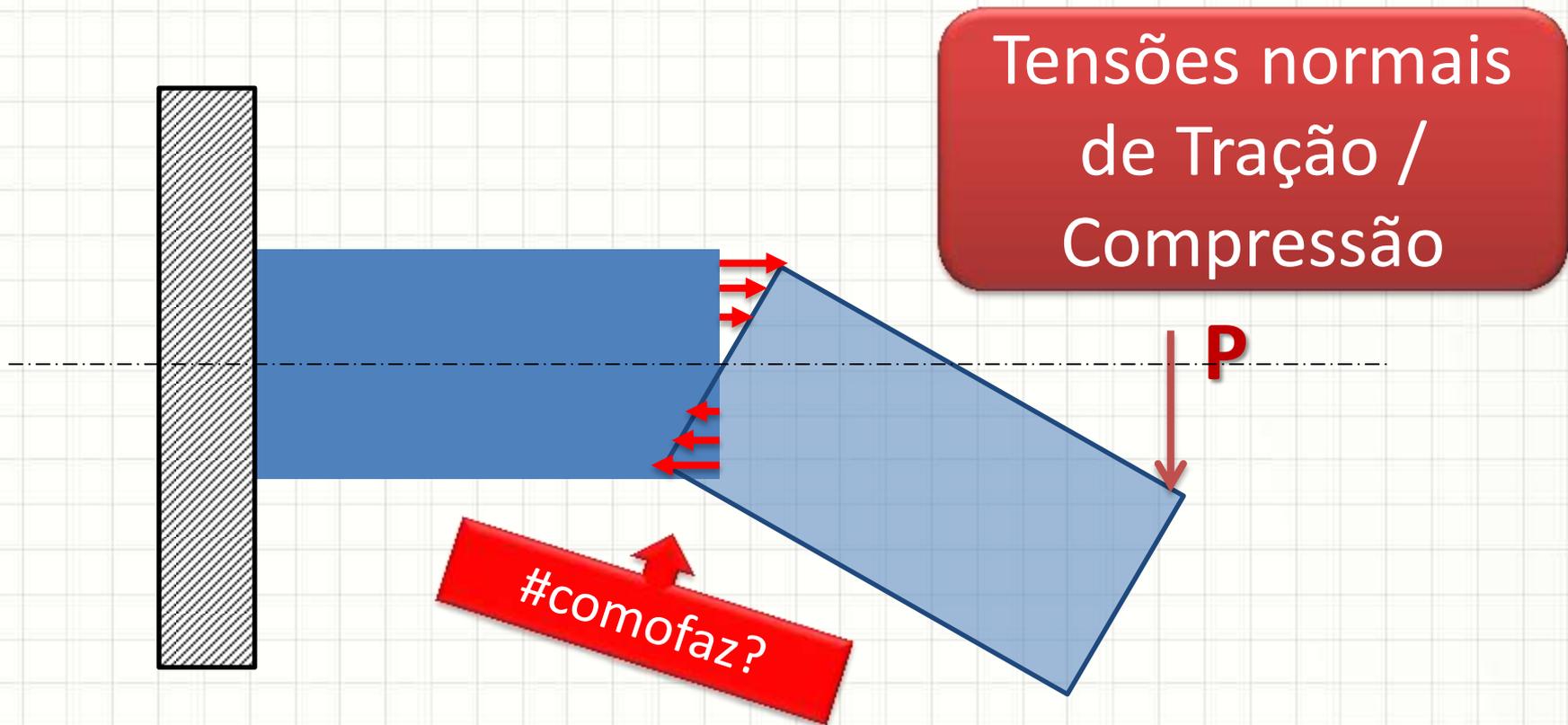
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



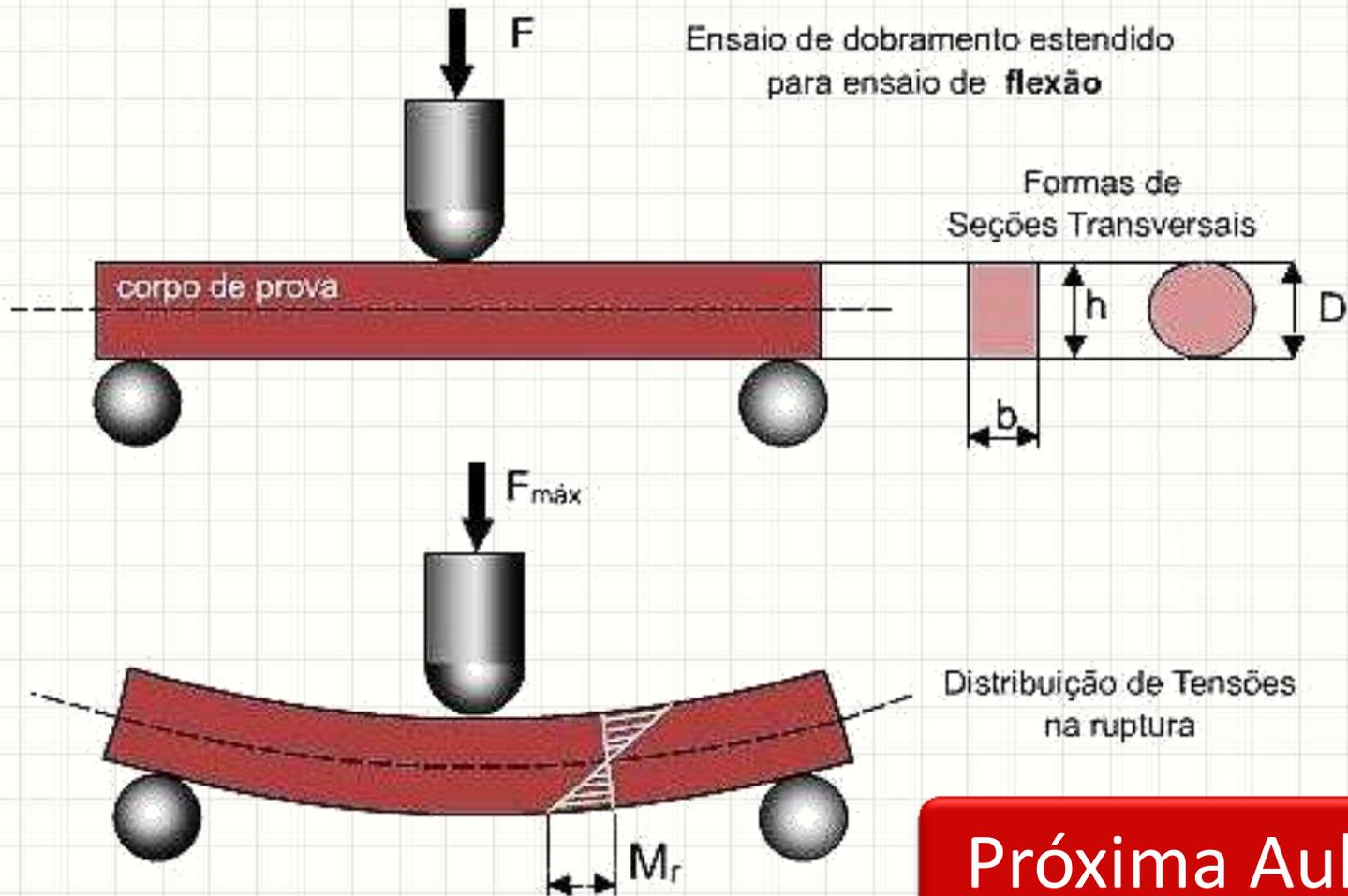
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes

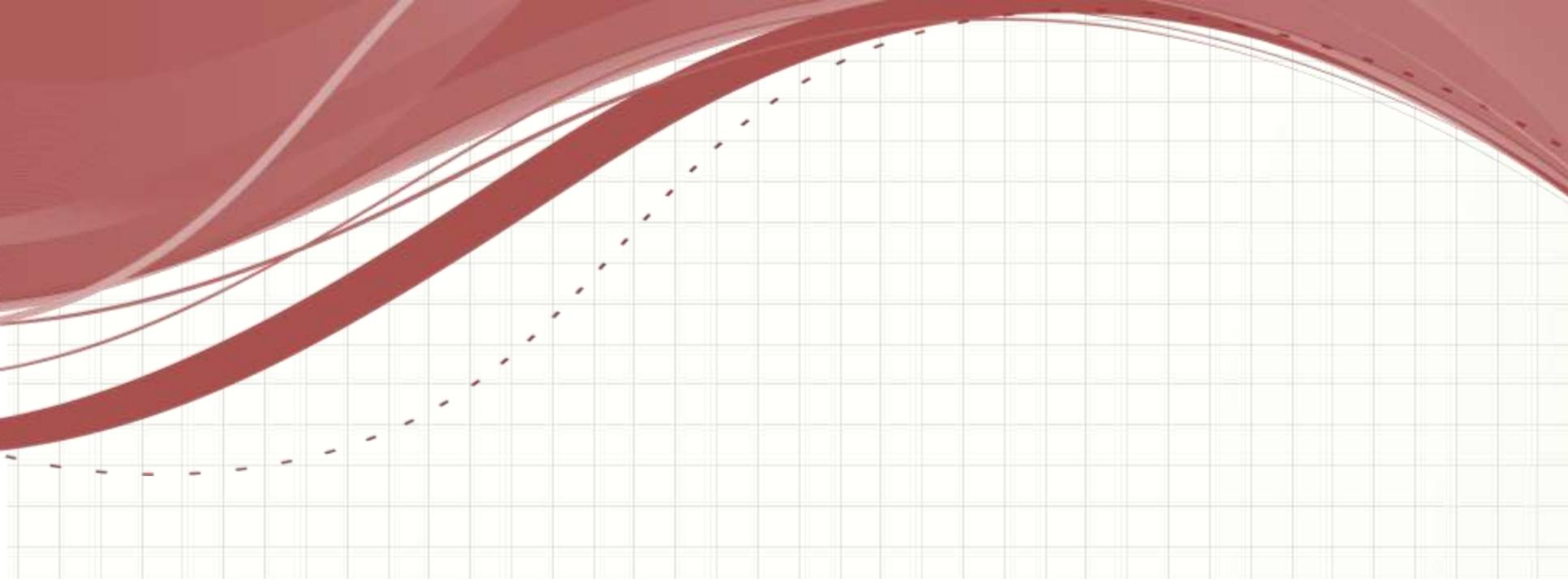


Momento Fletor

- Tensões Normais em viga Bi-Apoiada



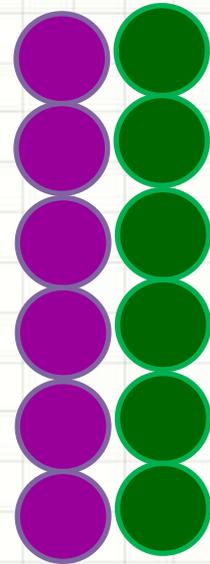
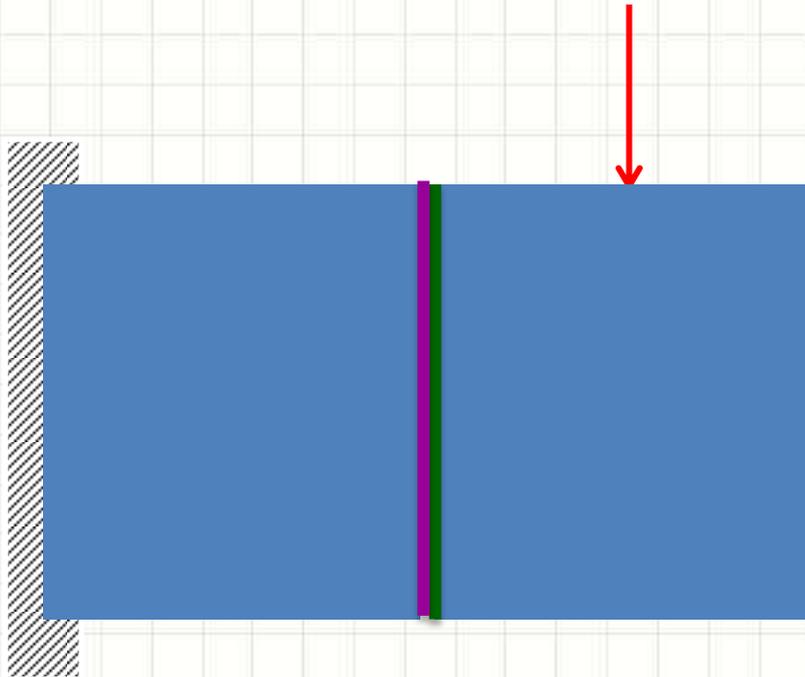
Próxima Aula!



ESFORÇOS CORTANTES

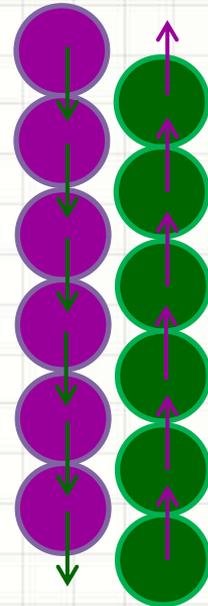
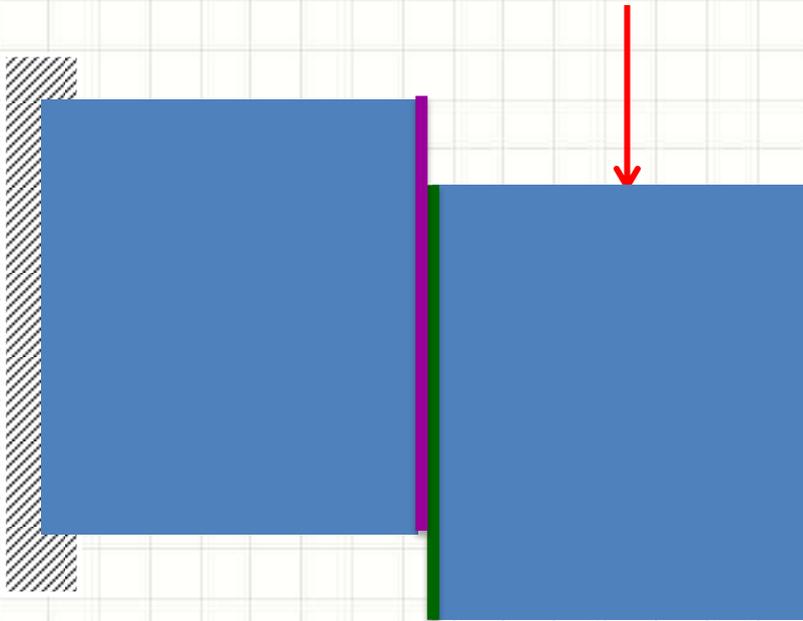
Esforços Cortantes

- O que era mesmo?



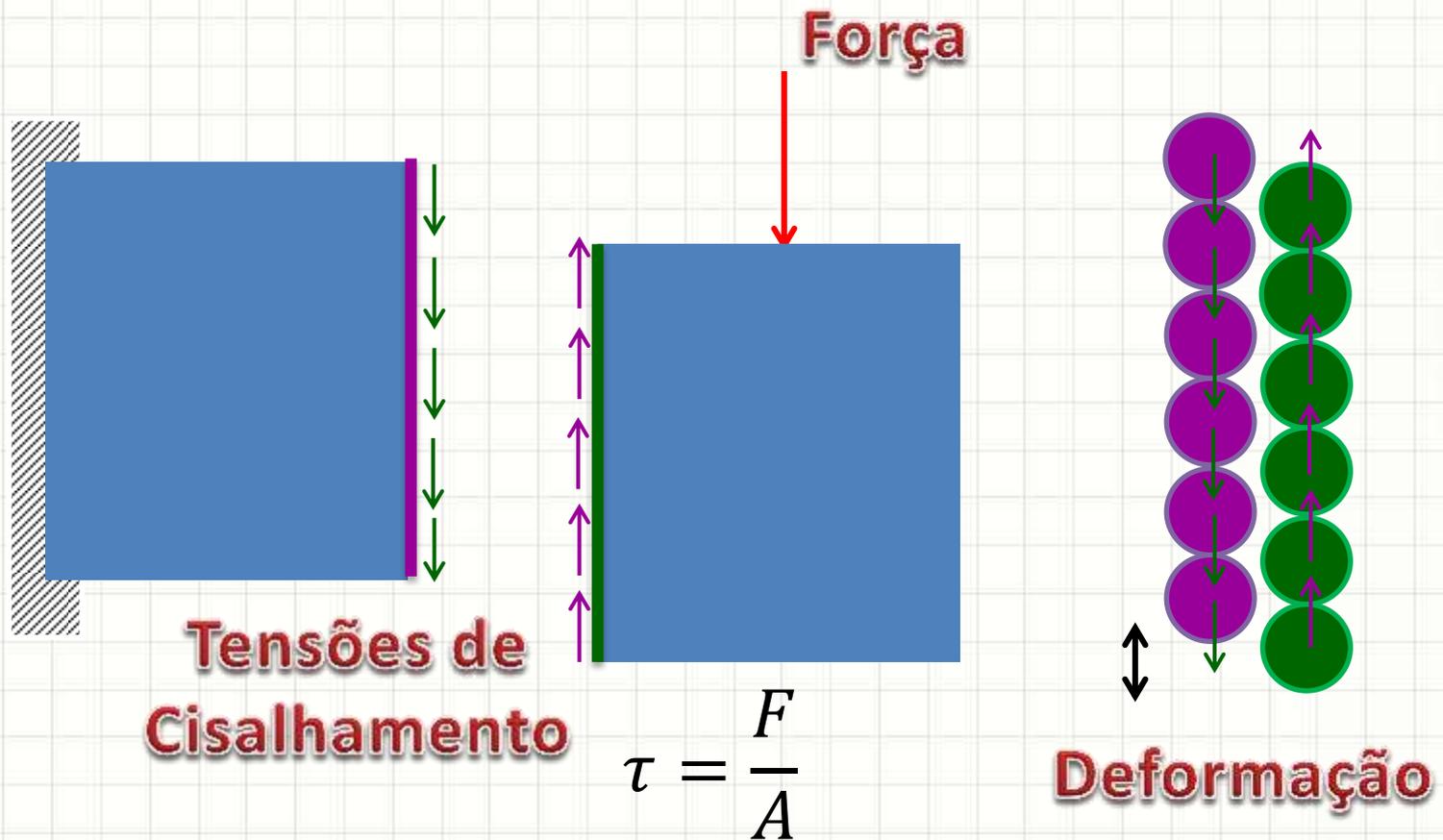
Esforços Cortantes

- O que era mesmo?



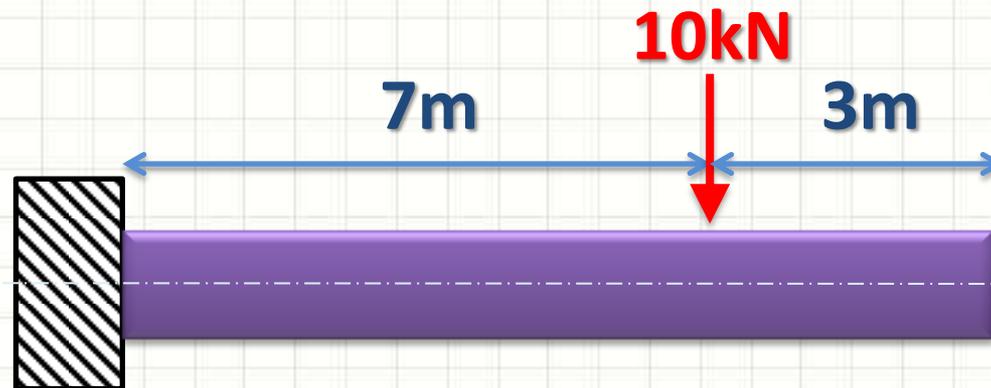
Esforços Cortantes

- O que era mesmo?



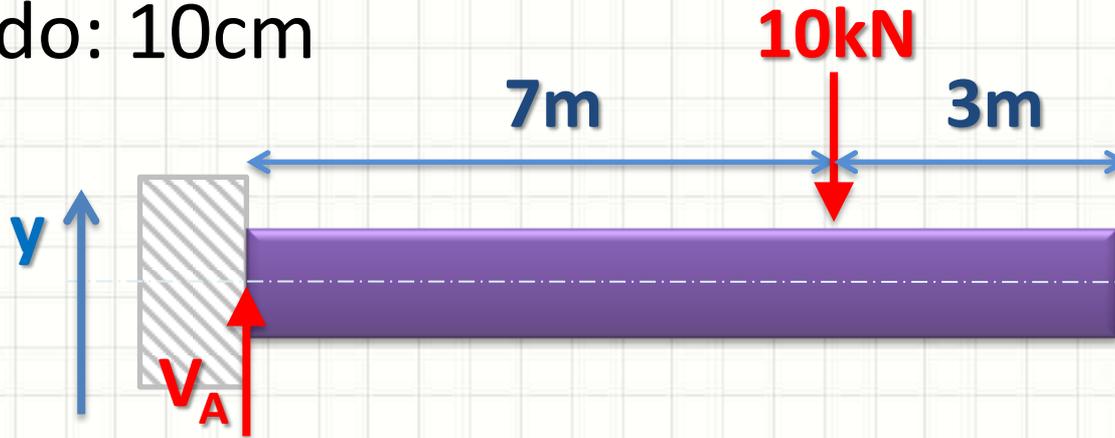
Exemplo

- Considere a viga abaixo, de seção quadrada de lado 10cm. Calcule simplificada a tensão de cisalhamento máxima em razão da cortante



Exemplo

- Lado: 10cm



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$V_A - 10000 = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = 10\text{kN}}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{10000}{0,1 \cdot 0,1} = \boxed{\tau = 1\text{MPa}}$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS CORTANTES

Diagramas de Esforços Cortantes

- Por que traçar diagrama de cortante?
 - Cortante pode variar ao longo do comprimento
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação

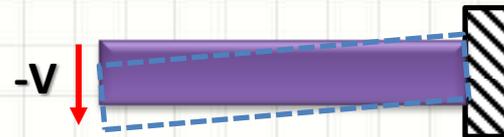
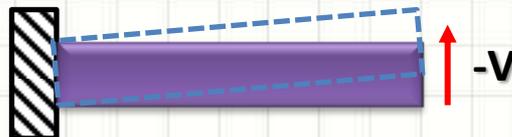
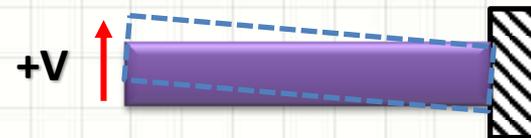
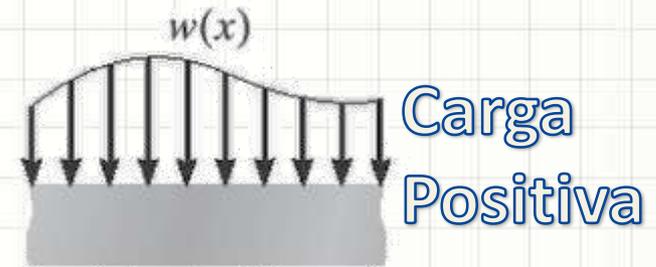
- Convenção de Sinais

- Carregamento

- De cima para baixo: +
 - De baixo para cima: -

- Cortante

- Gira sent. Horário: +
 - Gira sent. Anti-Horário: -

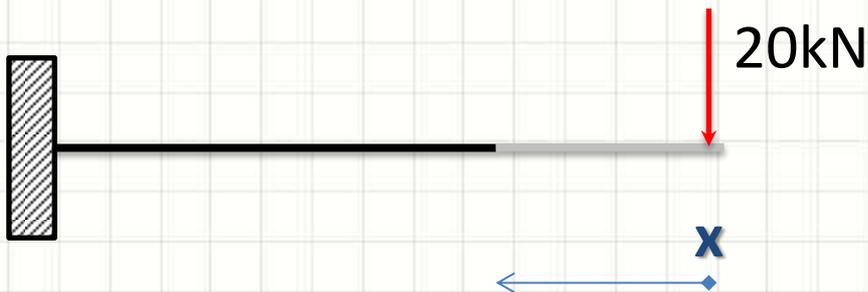


Diagramas de Esforços Cortantes

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto "x"?



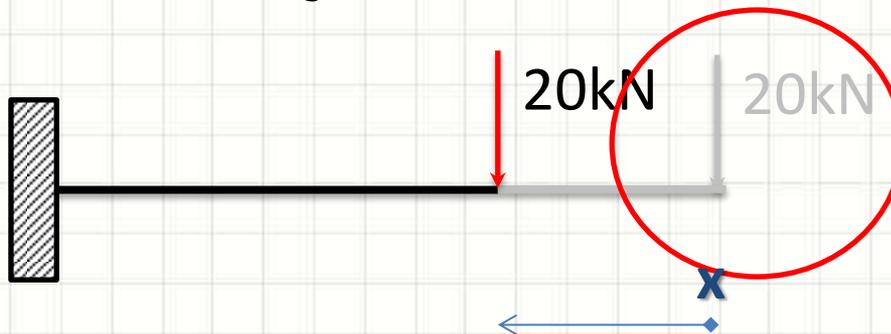
Redução dos
Esforços ao
ponto "x"

Diagramas de Esforços Cortantes

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto "x"?

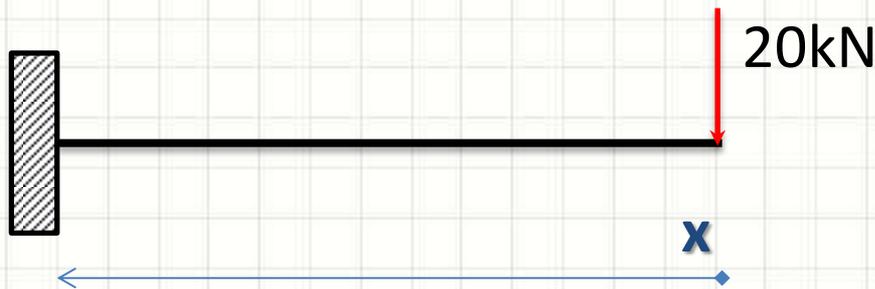


Sentido
Horário!

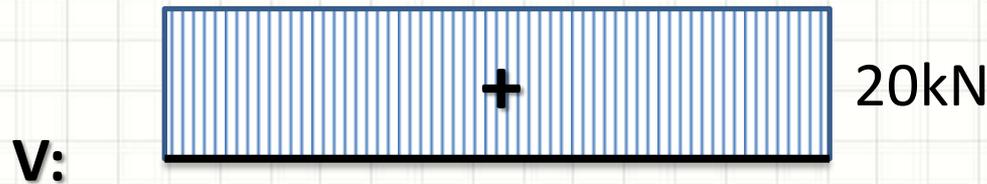
- $V(x) = 20\text{kN}$

Diagramas de Esforços Cortantes

- Força Cortante Concentrada

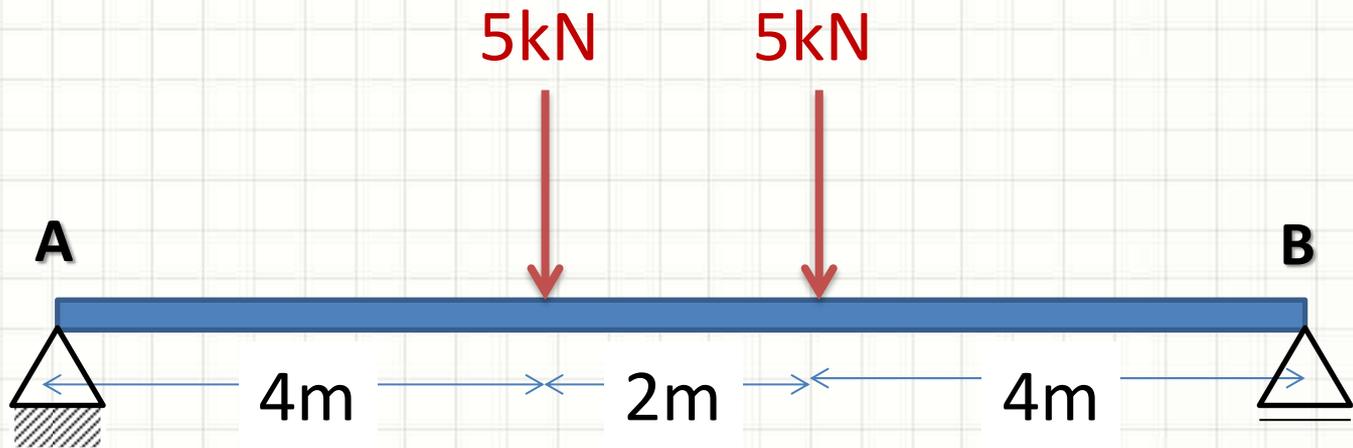


- $V(x) = 20\text{kN}$... Sentido horário
- Logo... O diagrama de cortante é



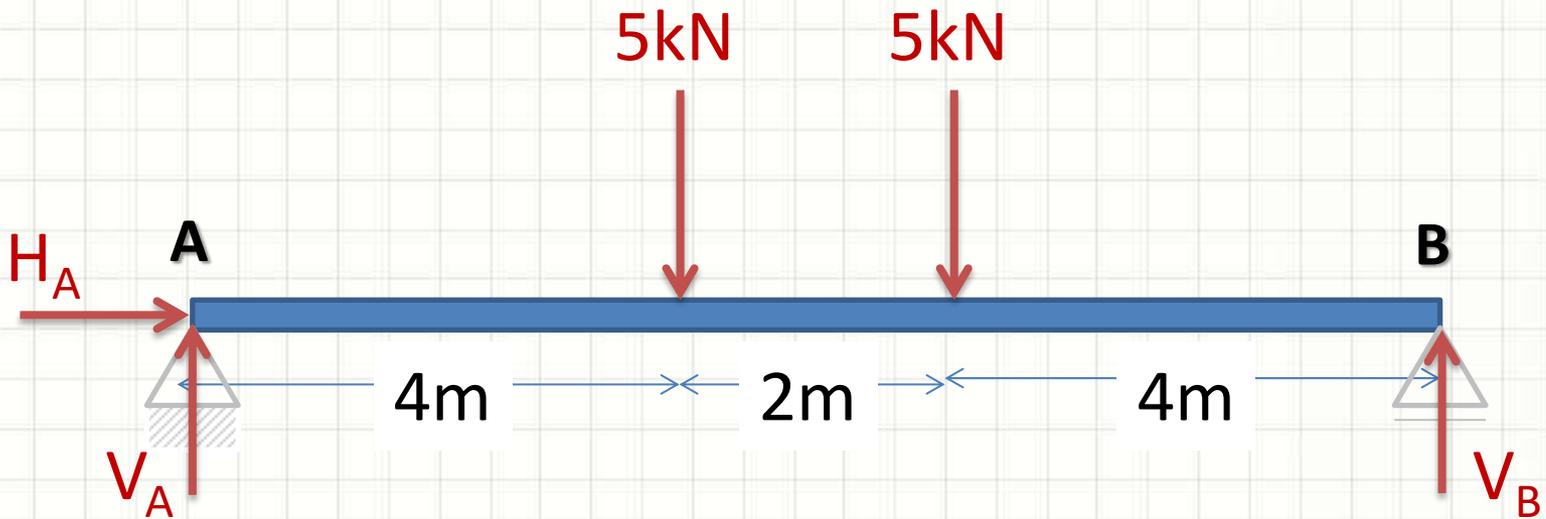
Exemplo: Diagrama de Esf. Cortantes

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



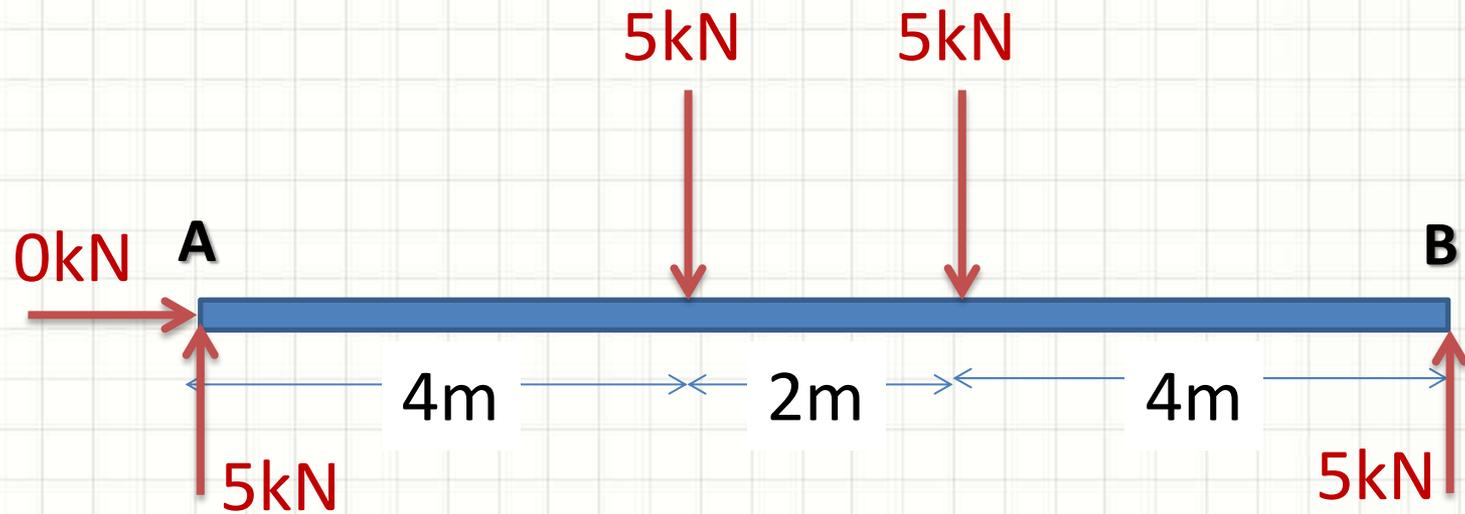
Exemplo: Diagrama de Esf. Cortantes

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



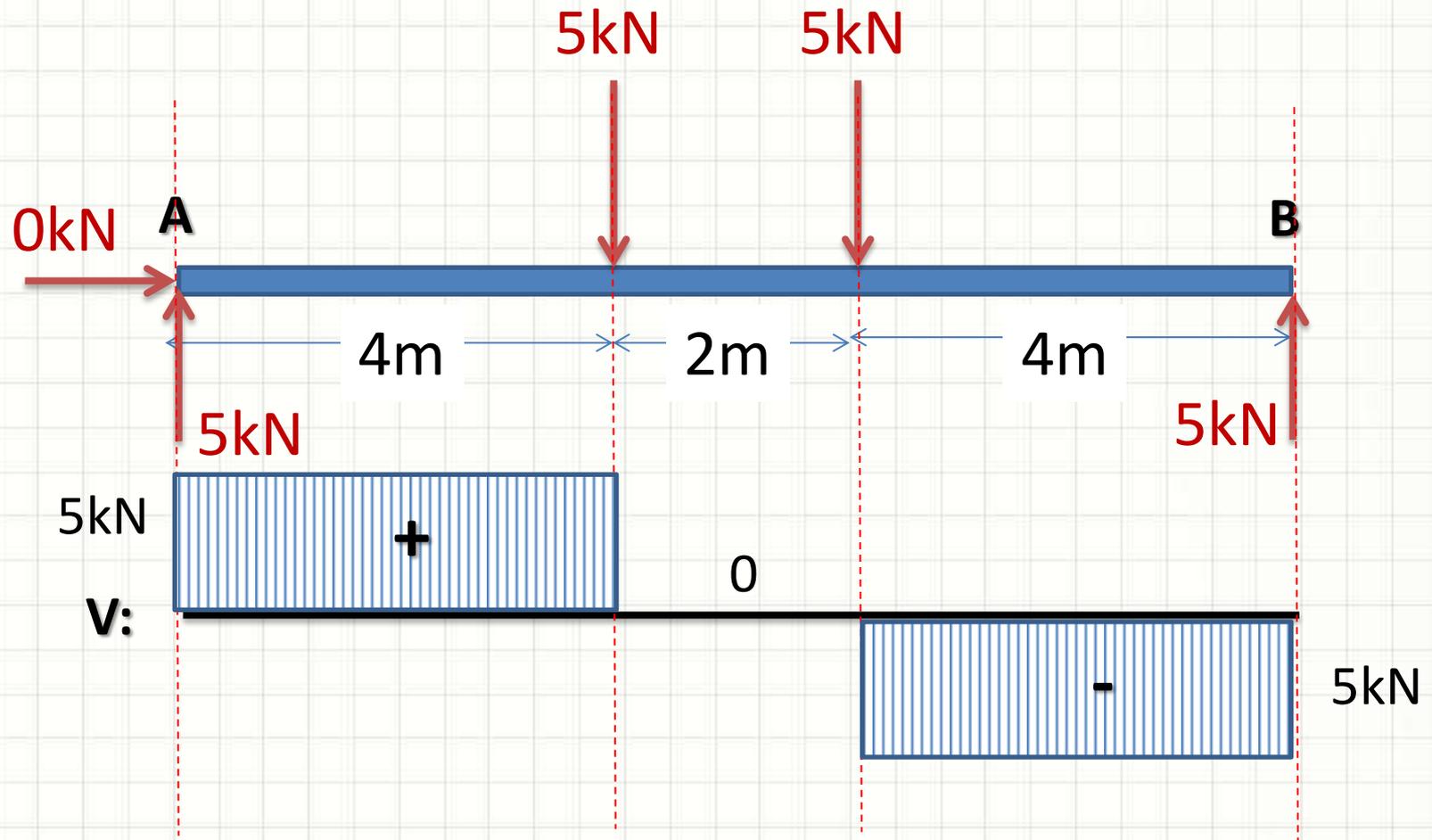
Exemplo: Diagrama de Esf. Cortantes

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



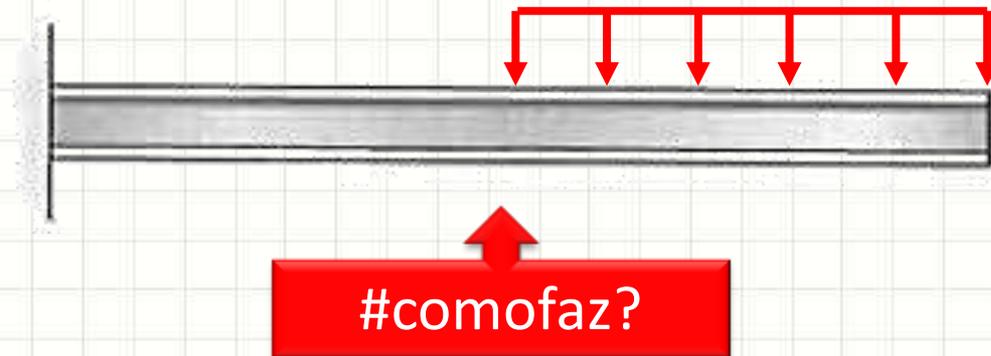
Exemplo: Diagrama de Esf. Cortantes

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



Diagramas de Esforços Cortantes

- E se as forças forem uma carga distribuída?
 - Ex.: enchimento de uma lage rebaixada

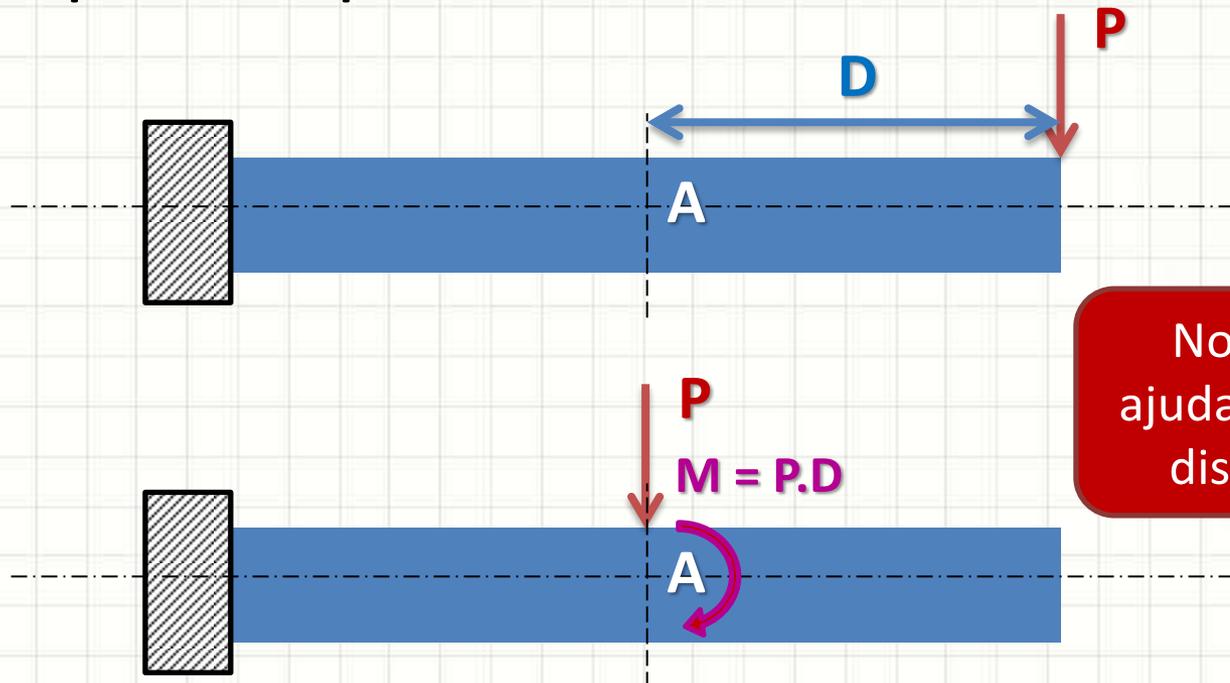




SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES

Sistemas de Forças ME

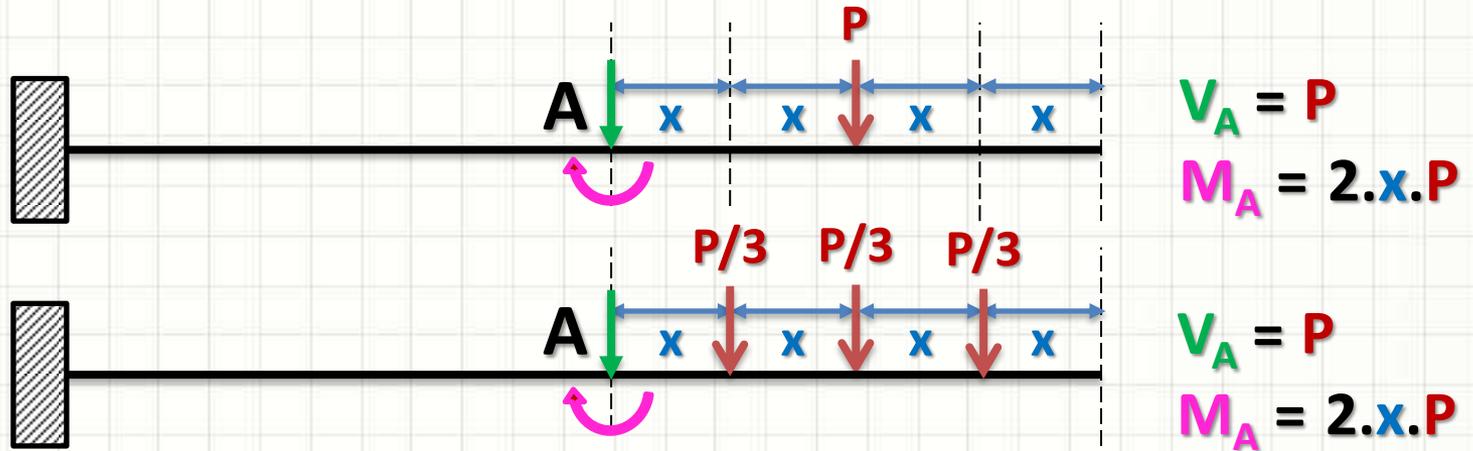
- Quando, para seção transversal específica:
 - Configurações de forças diferentes...
 - Esforços solicitantes iguais
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



No que isso ajuda para carga distribuída?

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



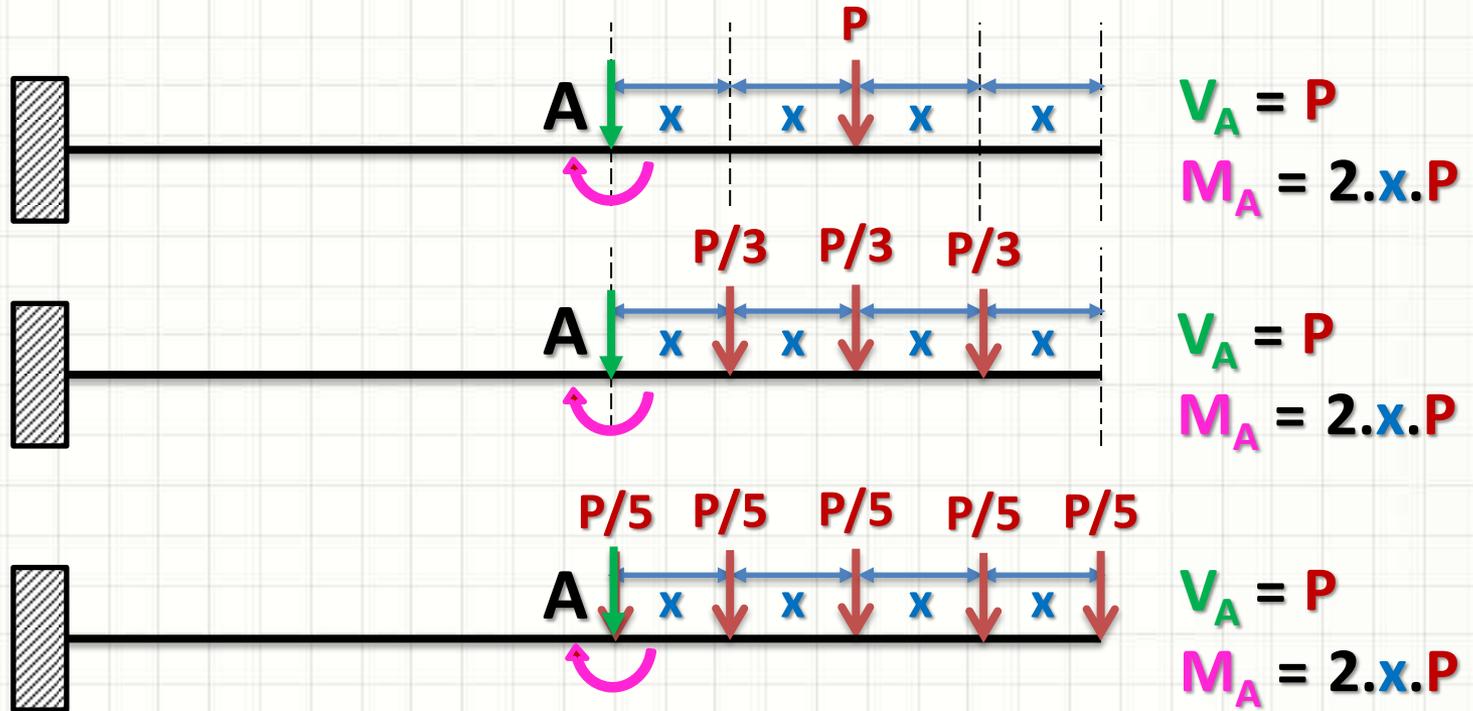
$$V_A = 3 \cdot \frac{P}{3}$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot 6 \cdot x$$

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**

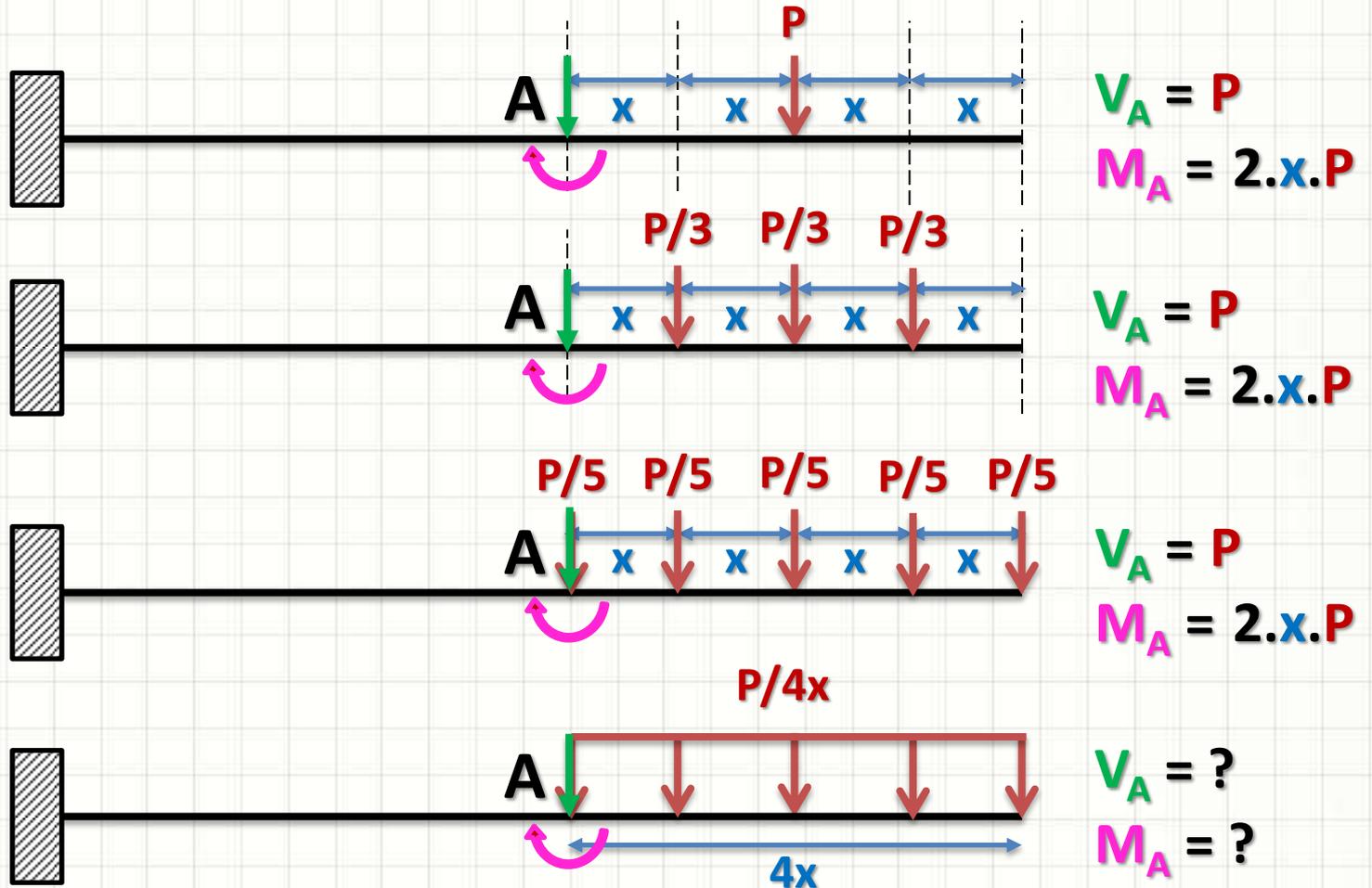


$$V_A = 5 \cdot \frac{P}{5} \quad M_A = \frac{P}{5} \cdot 0 + \frac{P}{5} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 4 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 10 \cdot x$$

Sistemas de Forças ME

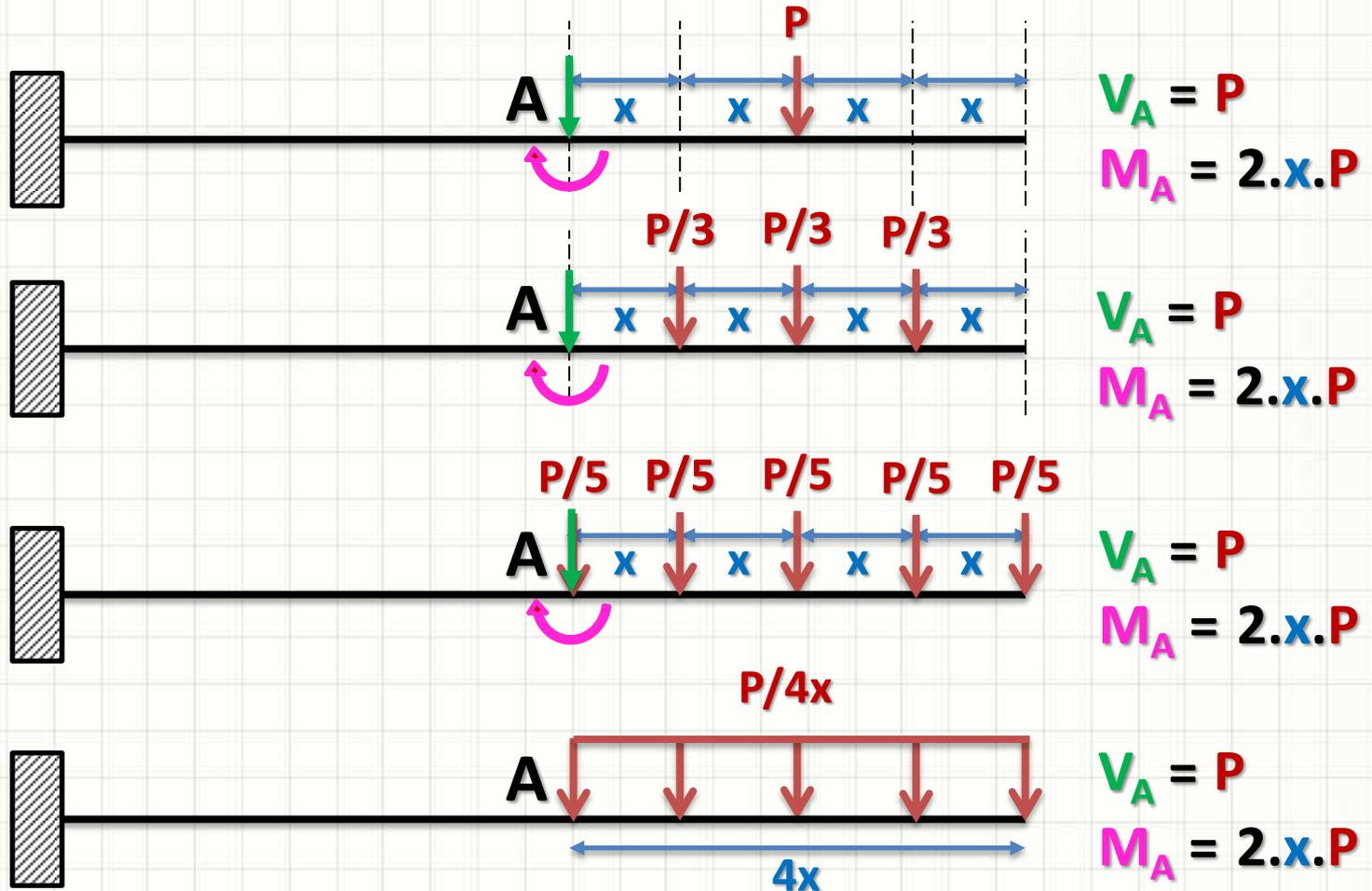
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sist

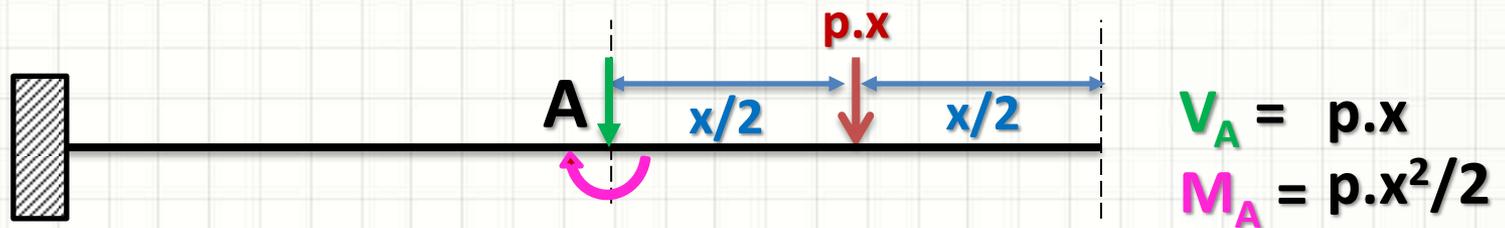
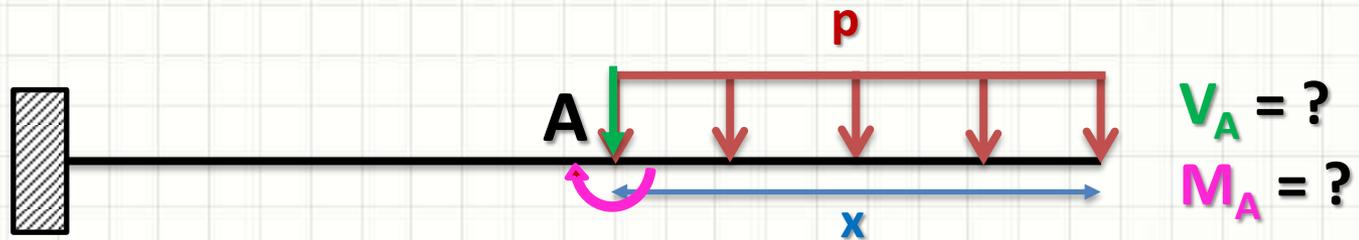
É como se a carga total estivesse
no C.G. da carga distribuída!

- Exemplo: Do ponto de vista de A



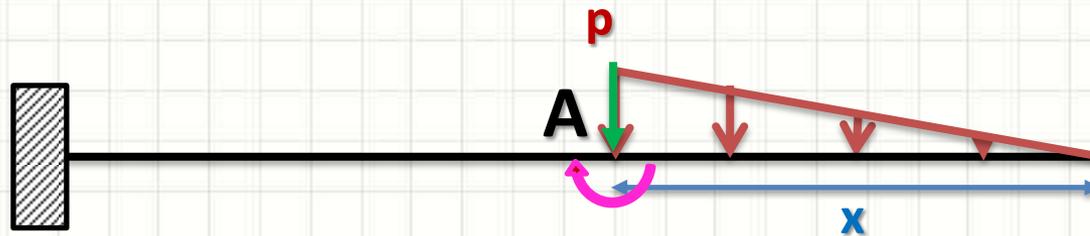
Sistemas de Forças ME

- Ou seja: Do ponto de vista de **A**

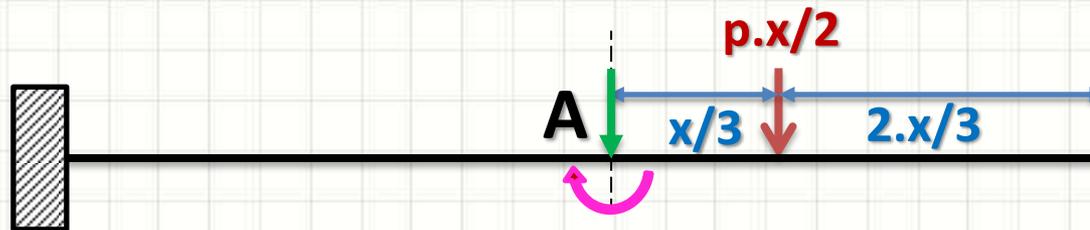


Sistemas de Forças ME

- Sempre no meio?
 - Não!
 - No C.G. da “área” da carga distribuída!



$$V_A = ?$$
$$M_A = ?$$



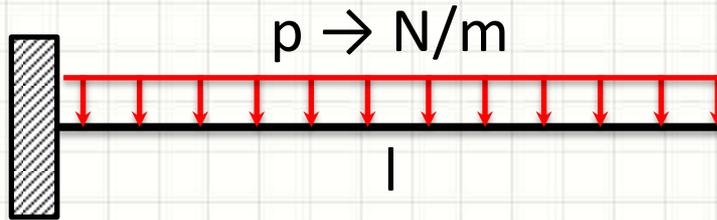
$$V_A = p \cdot x / 2$$
$$M_A = p \cdot x^2 / 6$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS CORTANTES EM CARGAS DISTRIBUÍDAS

Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?

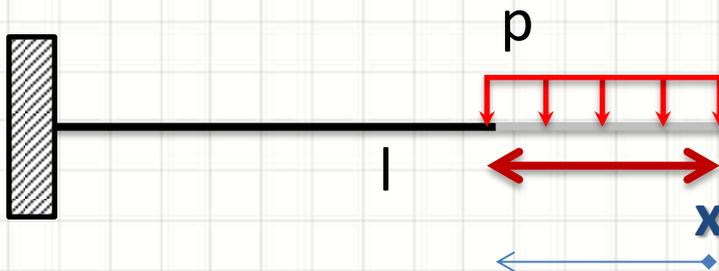
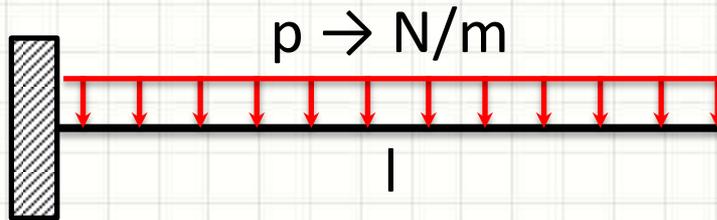
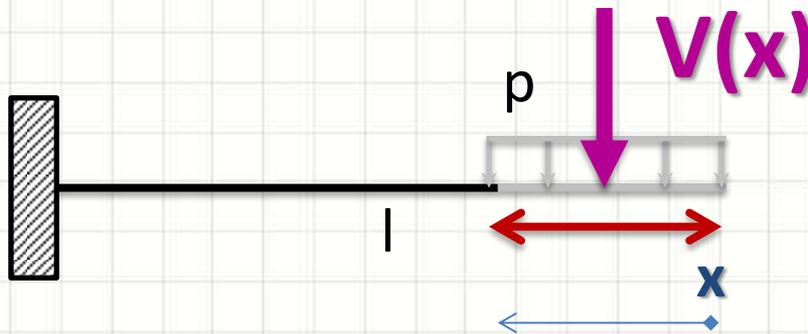


Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



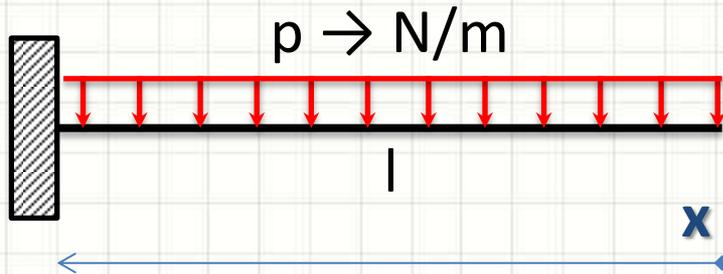
x

$$V(x) = p \cdot x$$

- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!

Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída

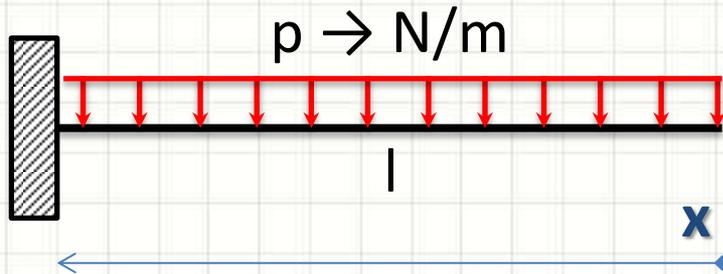


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...



Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

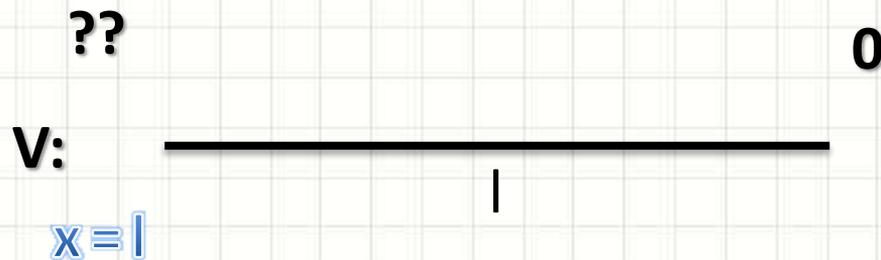
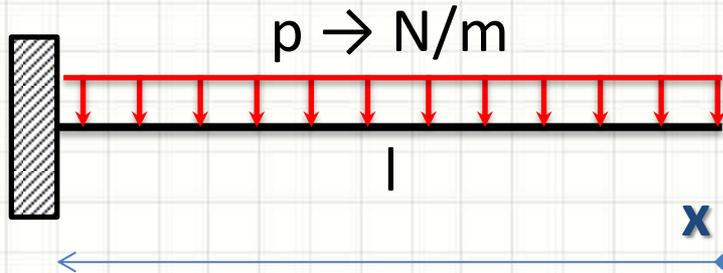


Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

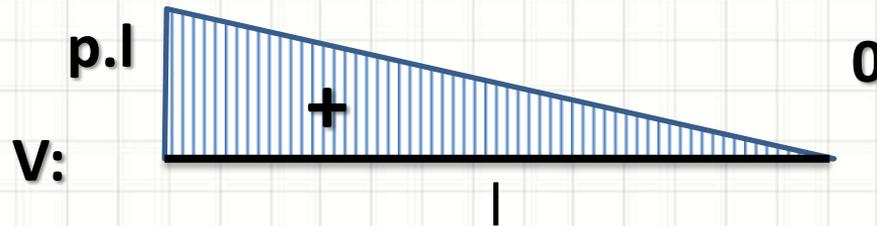
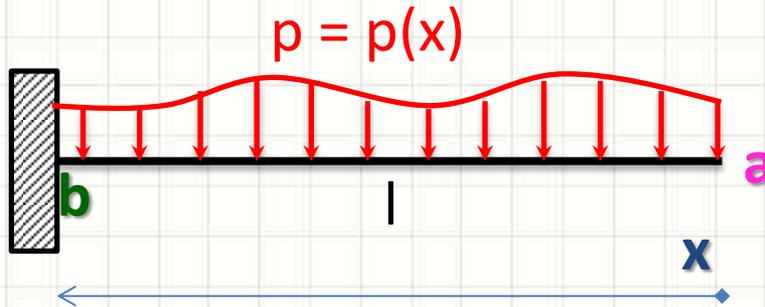


Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Genérica Distribuída

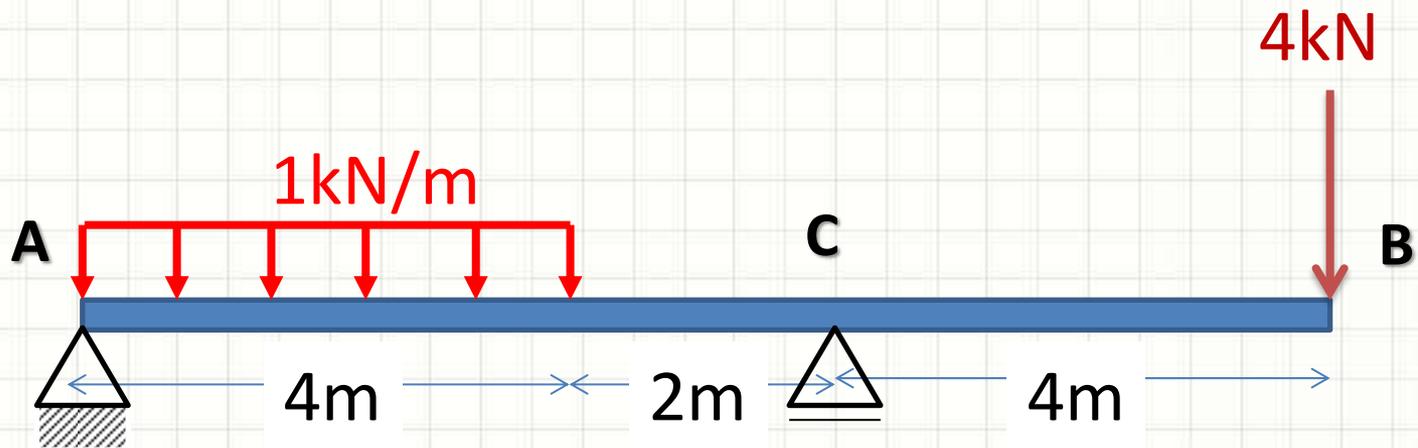


- Qual a força cortante de a até b ?

$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$

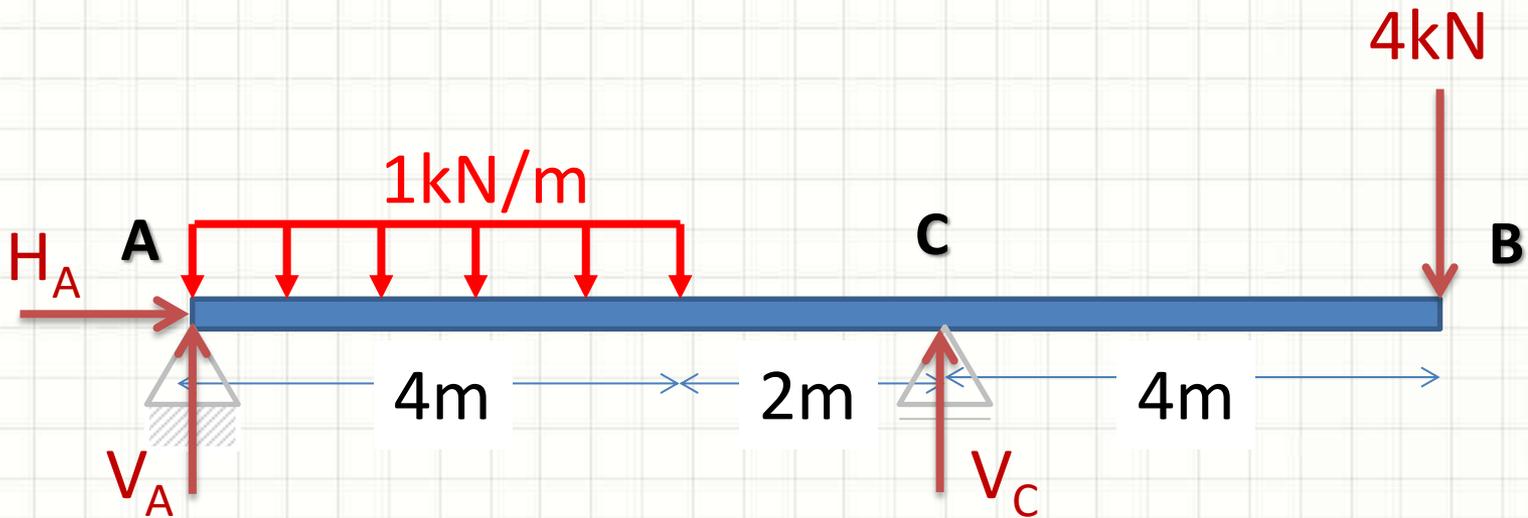
Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



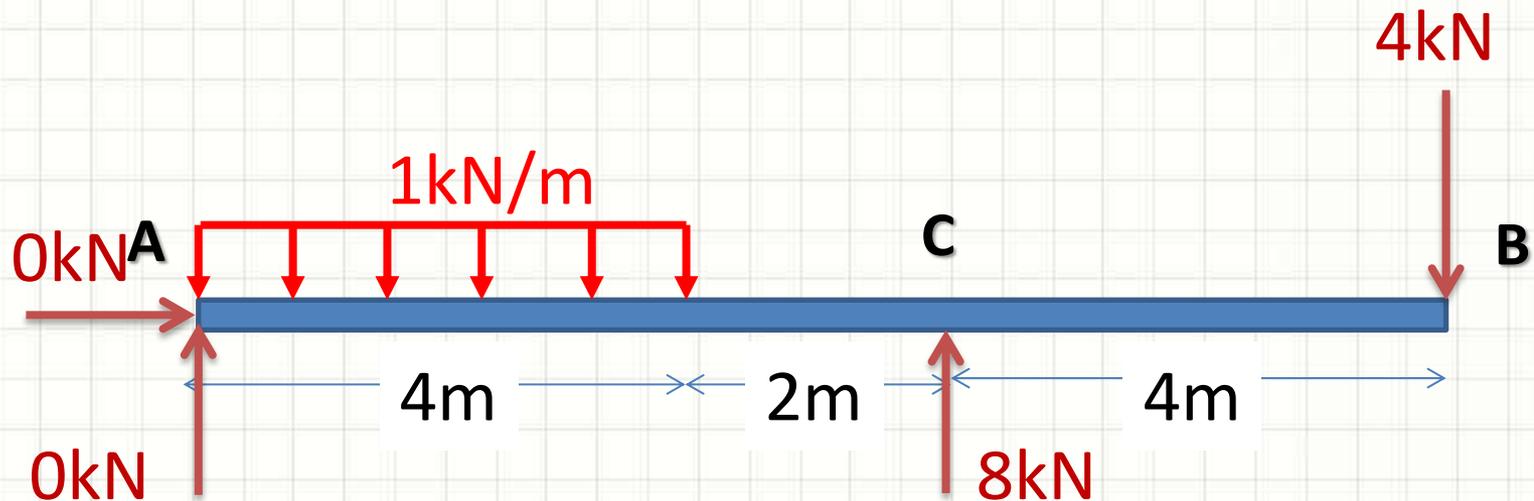
Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



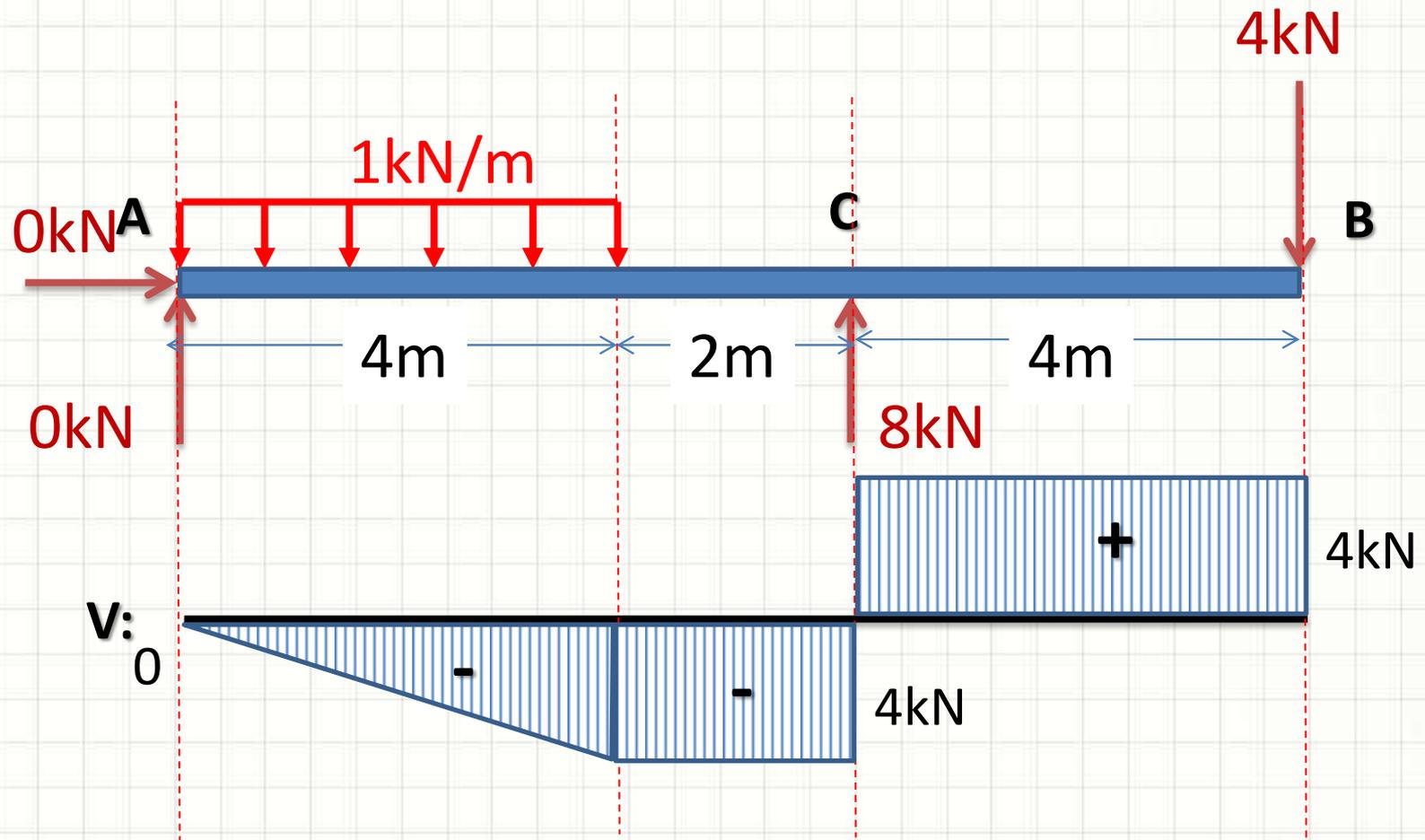
Exemplo

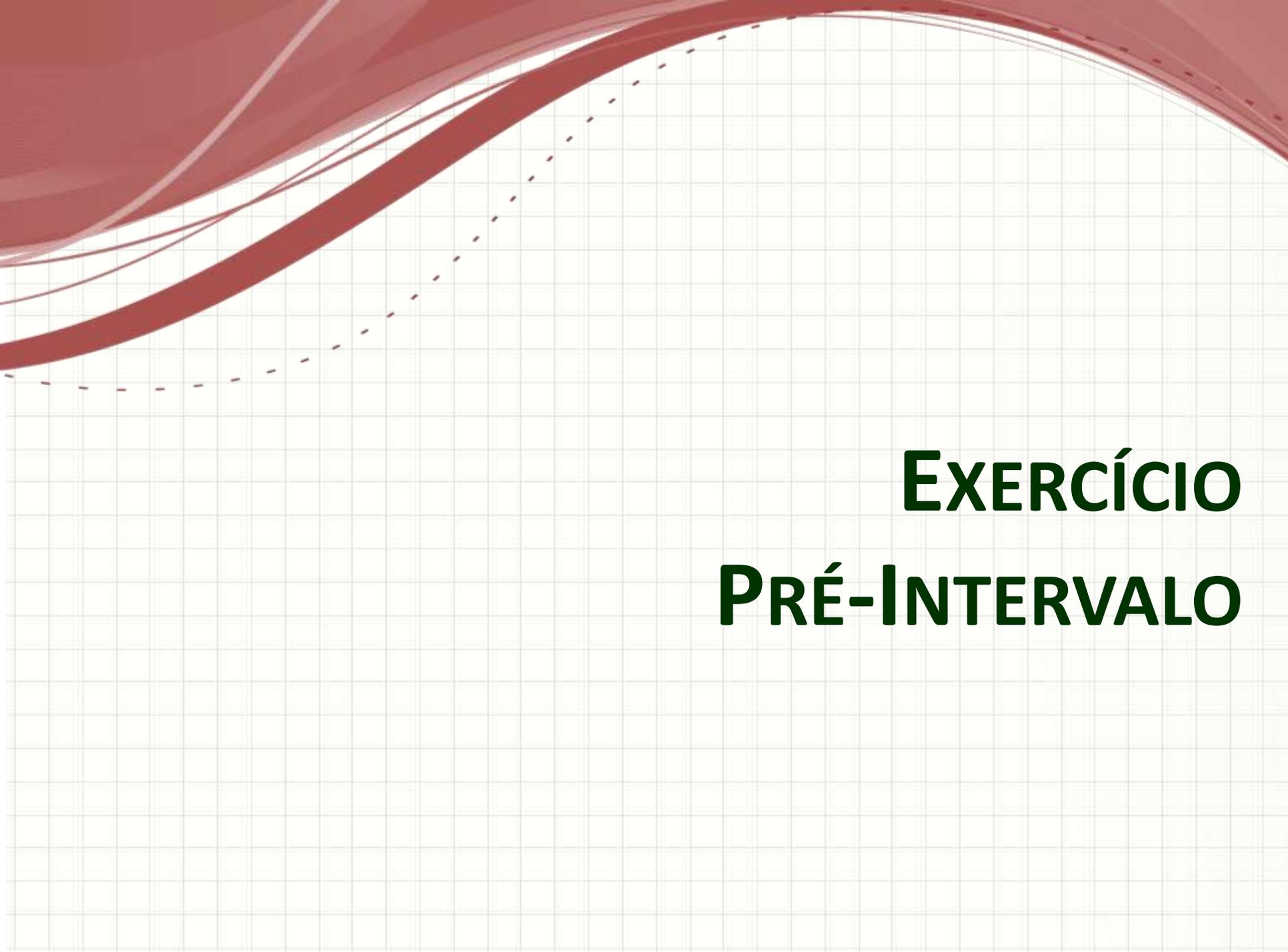
- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:

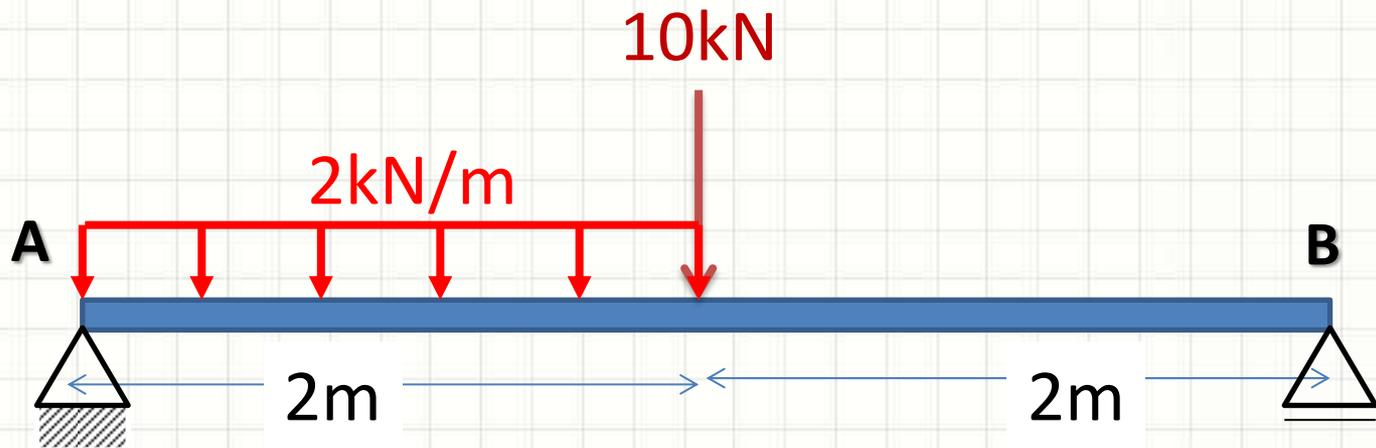




EXERCÍCIO PRÉ-INTERVALO

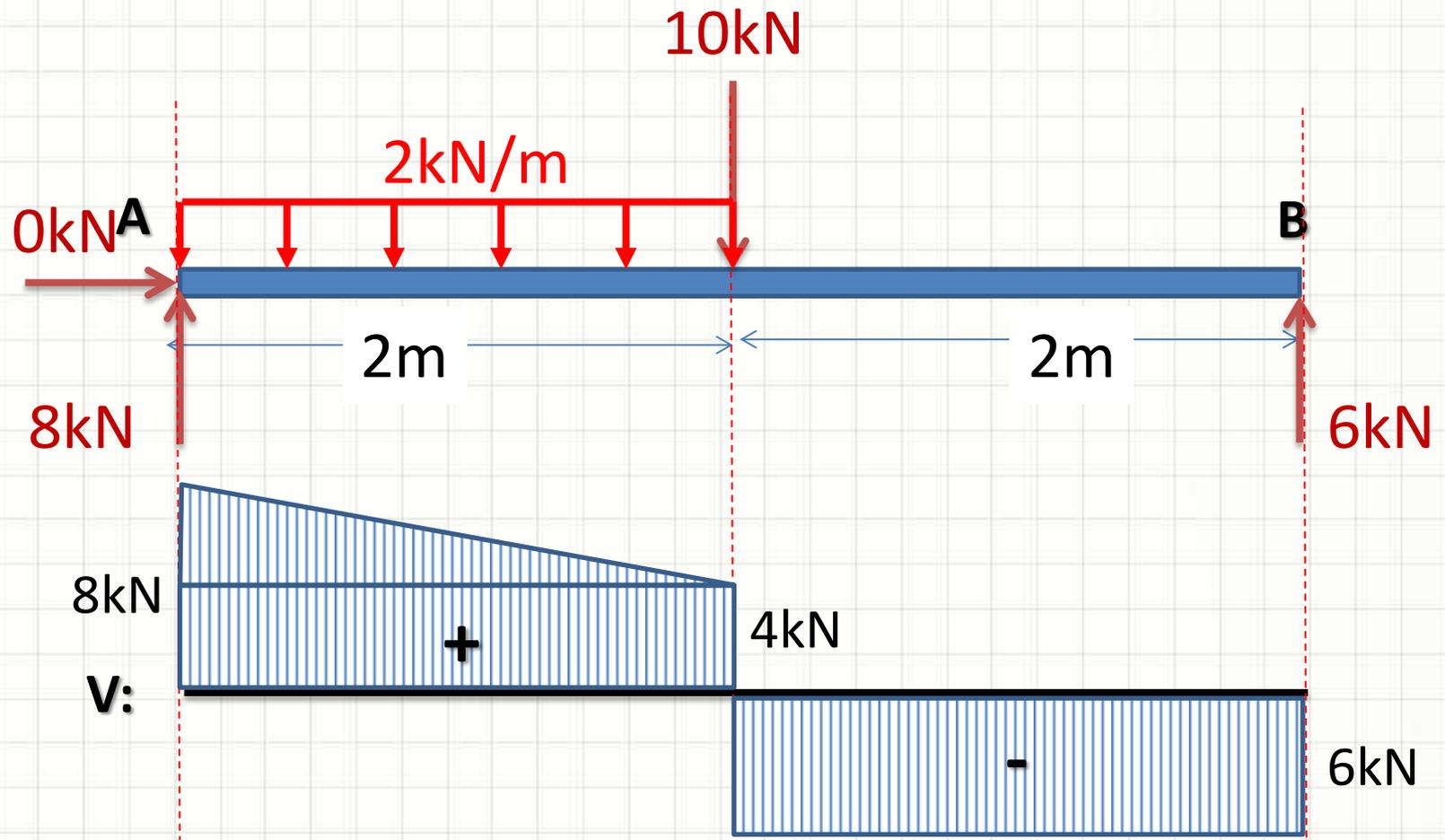
Exercício

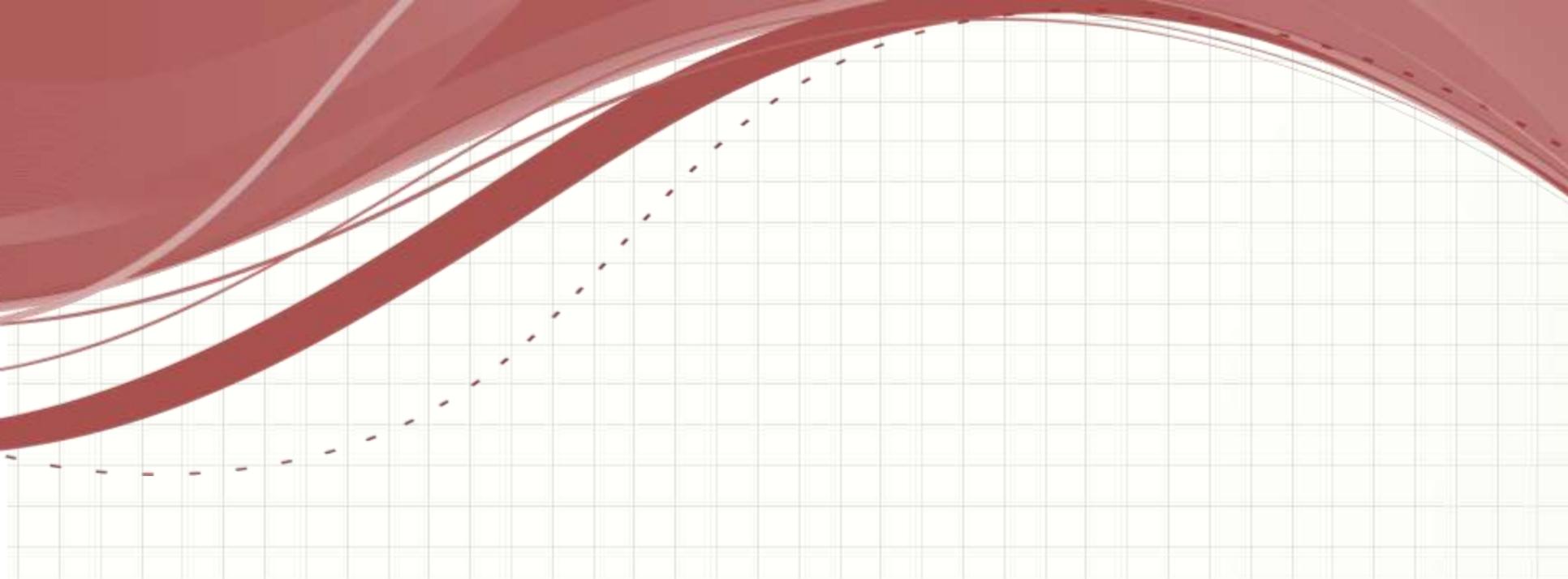
- Trace o Diagrama de Cortante:



Exercício

- Trace o Diagrama de Cortante:





PAUSA PARA O CAFÉ!



DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR

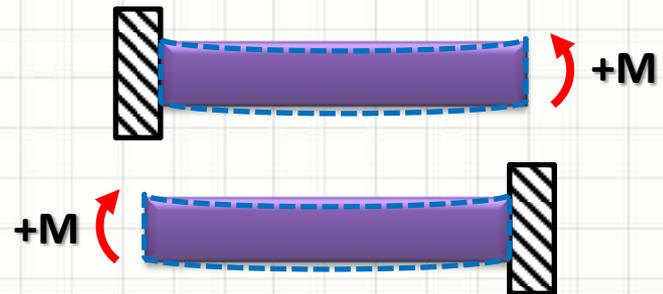
Diagramas de Momentos Fletores

- Por que traçar diagramas de momento?
 - Momento usualmente varia ao longo da viga
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação

- Convenção de Sinais

- Momento Positivo

- Traciona parte inferior



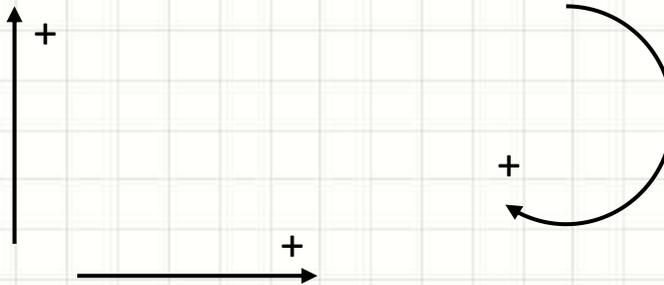
- Momento Negativo

- Traciona parte superior



Convenção de Sinal em Diagramas

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Determinação do Equilíbrio Estático
 - Direções positivas são **arbitrárias**



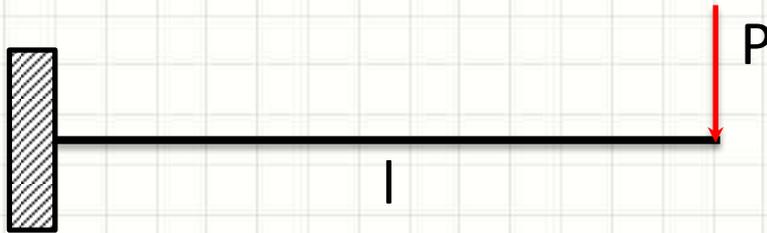
Convenções de Sinal em Diagramas

- **ATENÇÃO!** Não confunda as convenções!
- Traçado de Diagramas
 - Direções positivas são **convencionadas**

Grandeza	+	-
Força Normal	Força saindo da barra (tração)	Força entrando na barra (compr.)
Momento Torçor	Torque saindo da barra	Torque entrando na barra
Carga	Para baixo	Para cima
Força Cortante	Gira barra no sentido horário	Gira barra no sentido anti-horário
Momento Fletor	Traciona em baixo	Traciona em cima

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “ x ”?

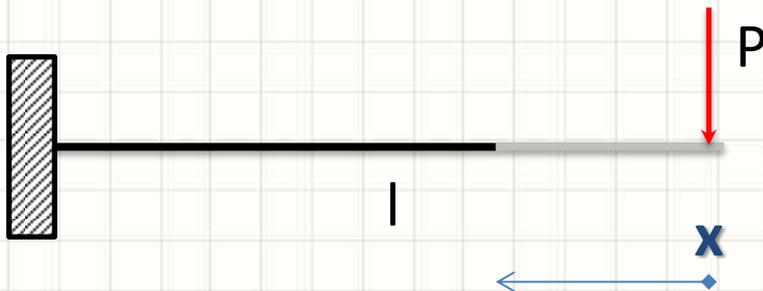
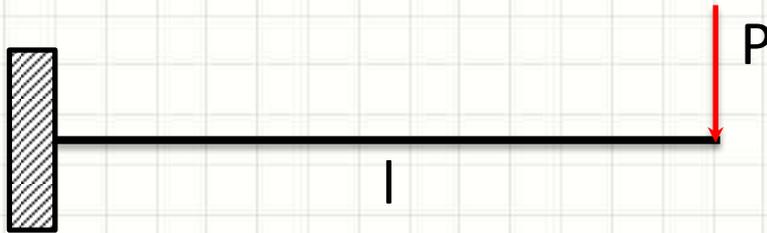
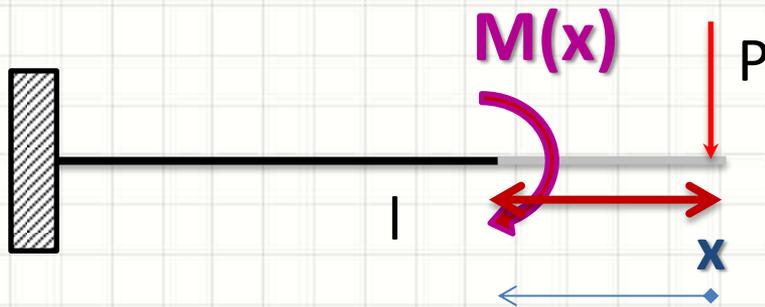


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?



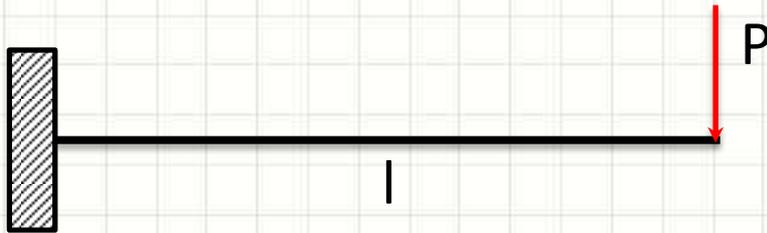
X

O sinal vem do fato que traciona em cima!

$$M(x) = -P \cdot x$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada

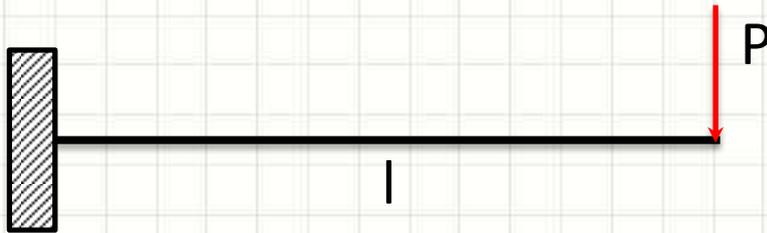


- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

??

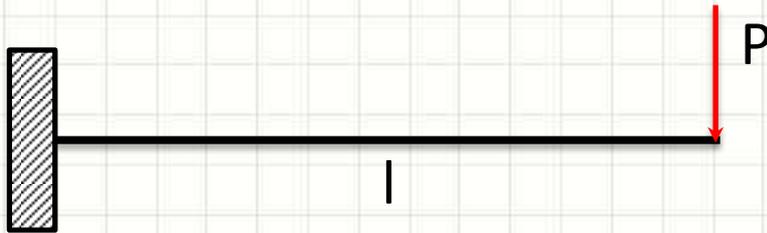
0

M: _____
|

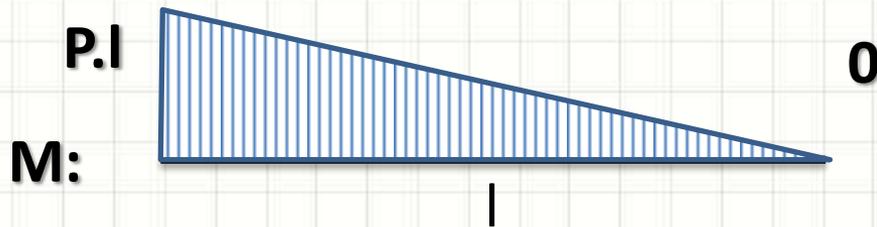
$x = l$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada

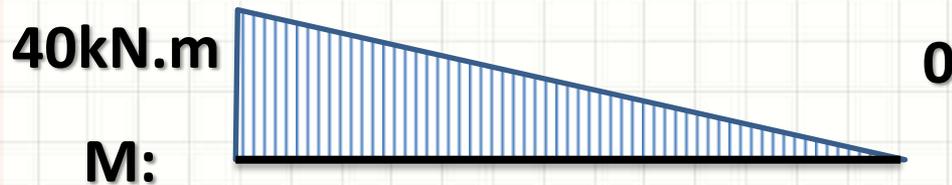
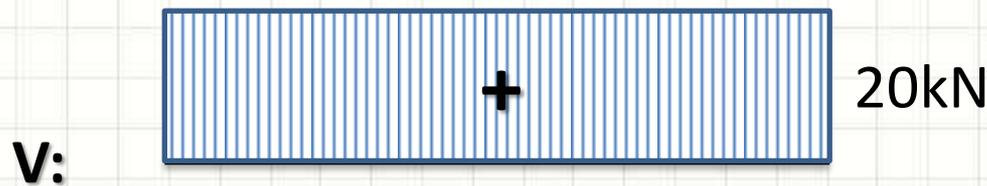
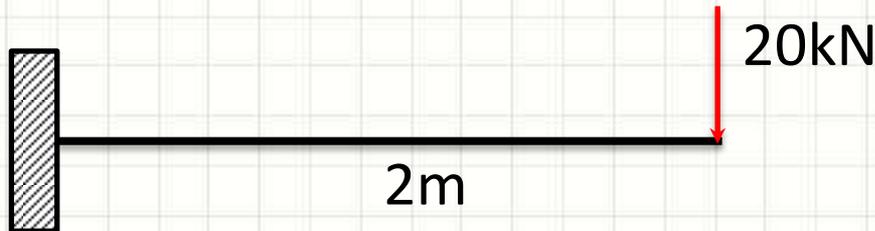


- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



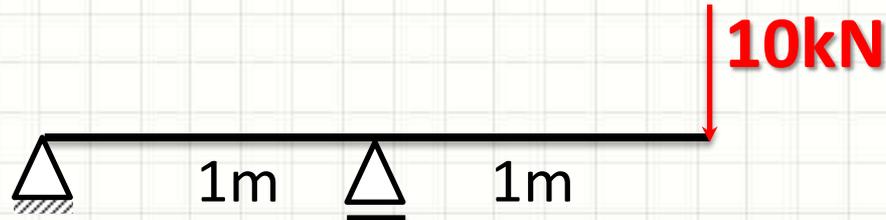
Diagramas de Cortante e Momento

- Força Cortante Concentrada



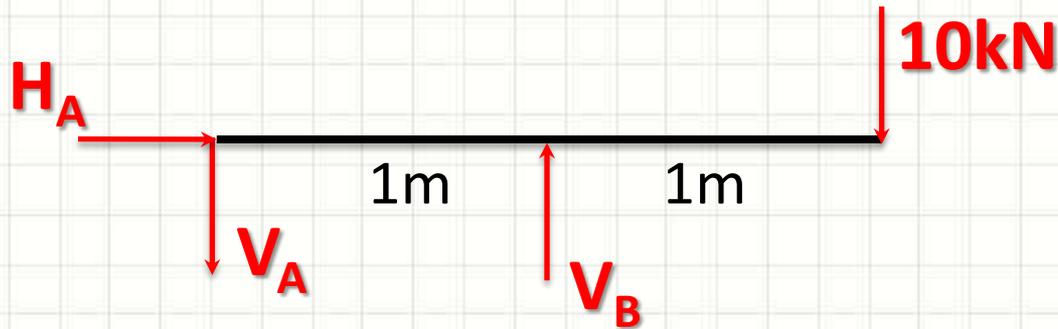
Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



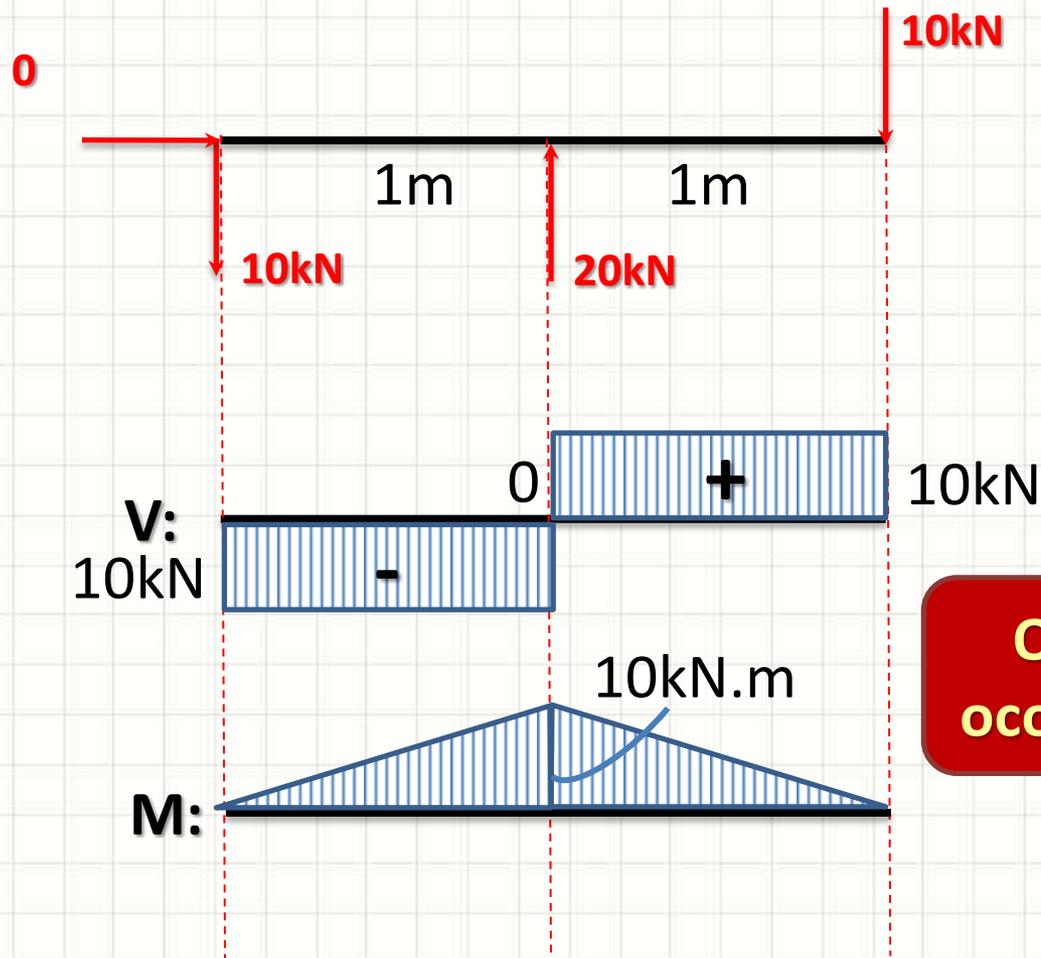
Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



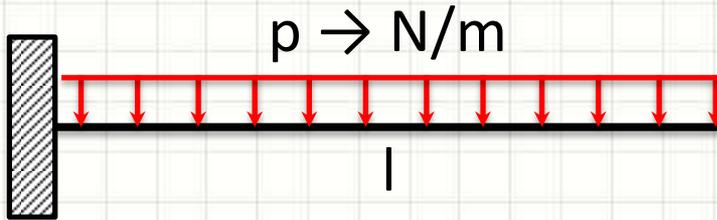
Observe: $M_{\text{máx}}$ ocorre onde $V = 0$!



DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLETORES EM CARGA DISTRIBUÍDA

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?

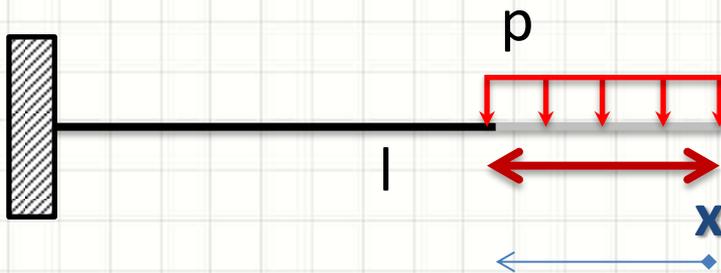
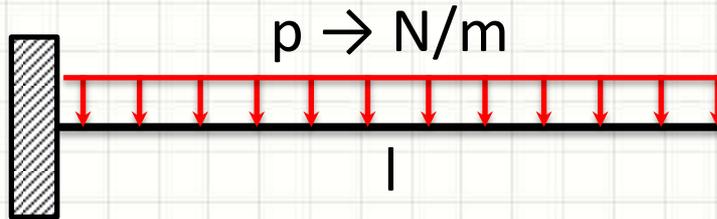
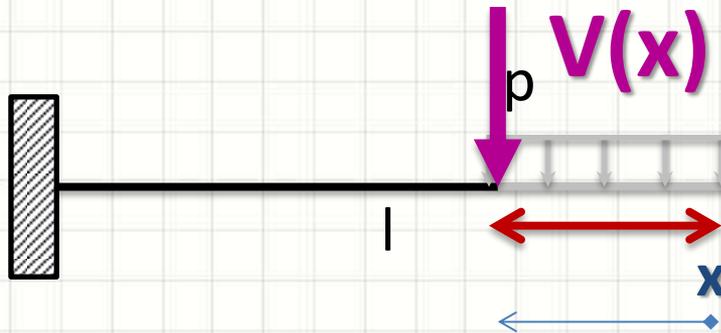


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?



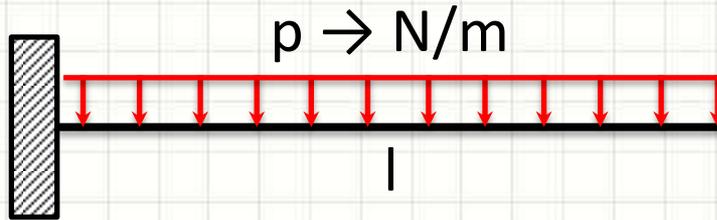
x

$$V(x) = p \cdot x$$

- Mas e o momento em “x”?

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “x”?

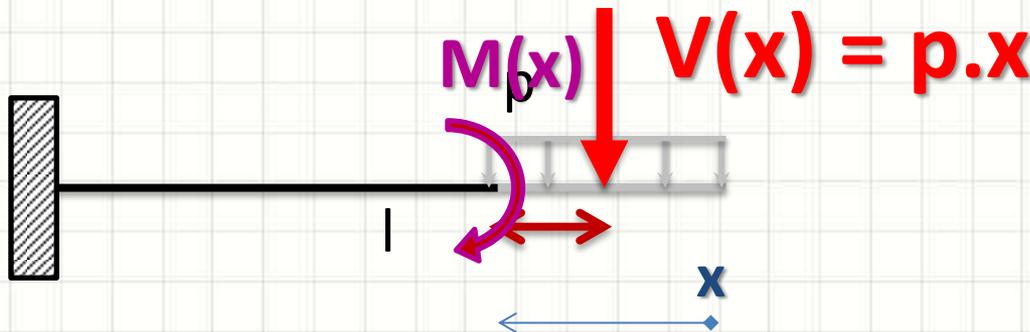
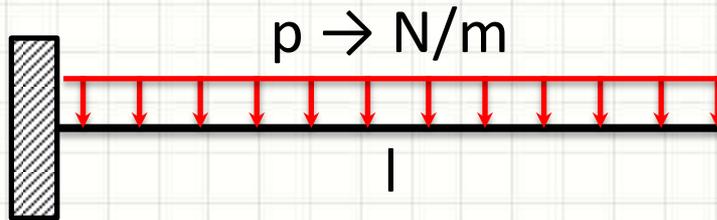


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “x”?

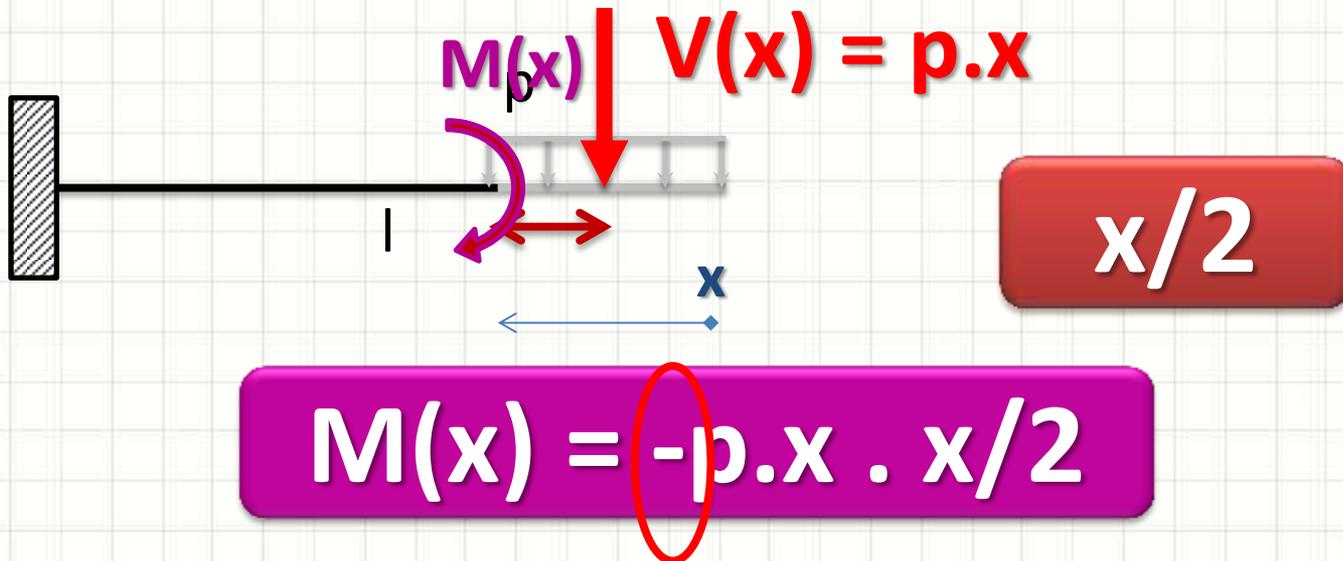
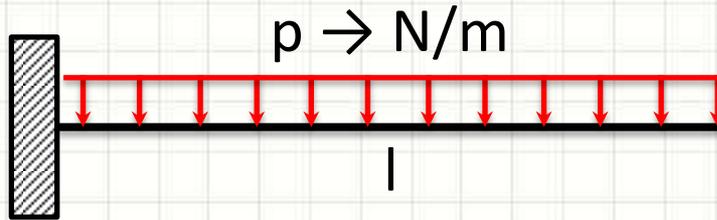
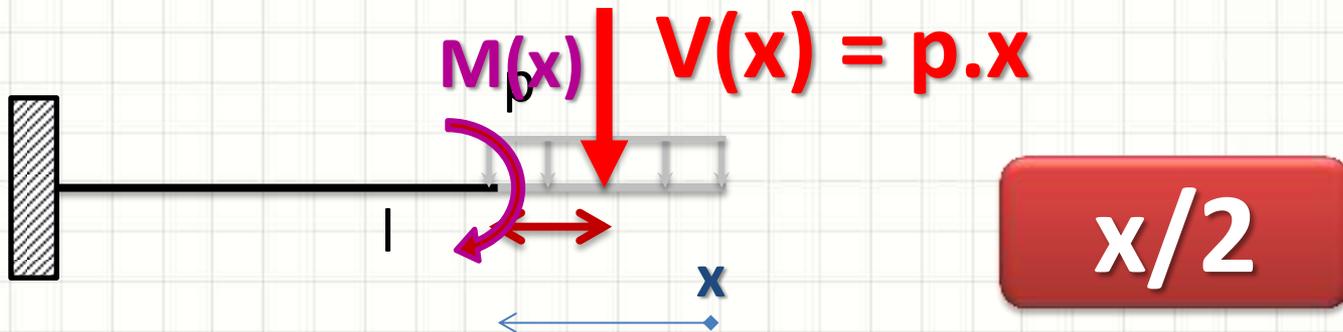


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



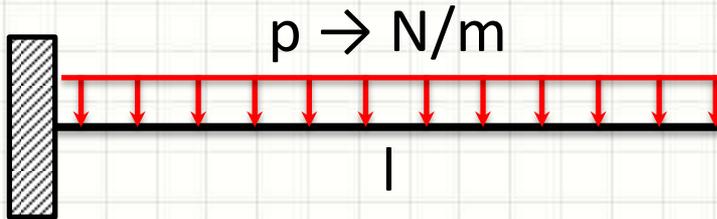
- Qual o momento em um ponto “x”?



$$M(x) = - [p \cdot x^2 / 2]$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

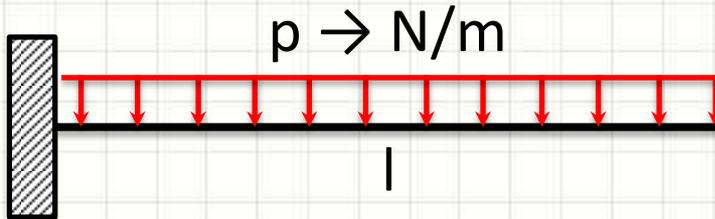


- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

0

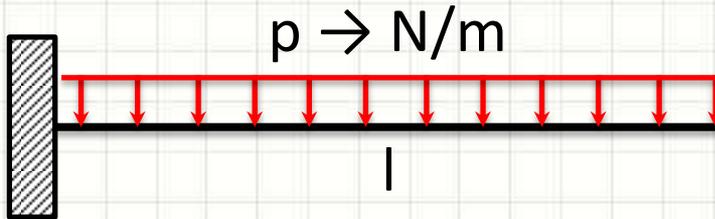
M:



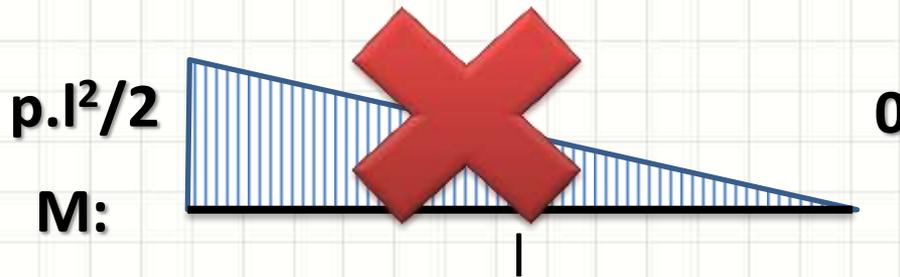
$x = l$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



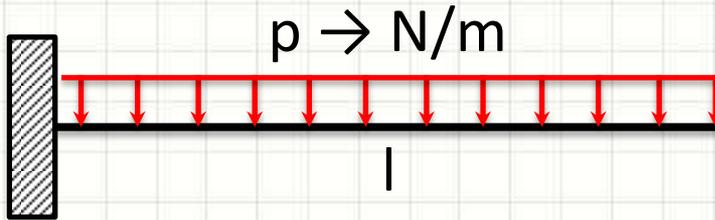
- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



???

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



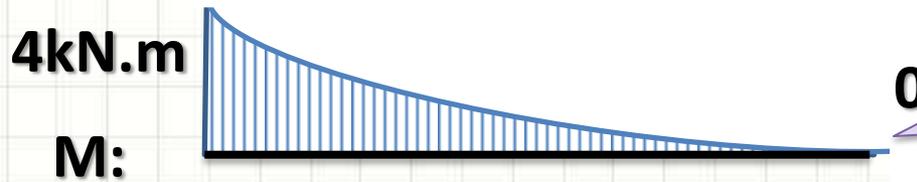
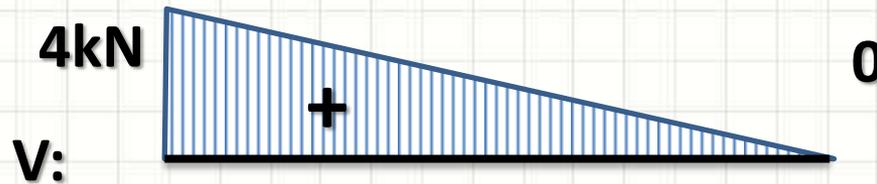
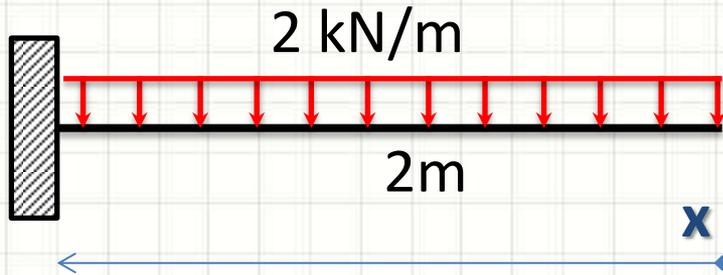
- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



“Boca para cima”
porque o sinal
de x^2 é positivo!

Diagrama de Momento Fletor

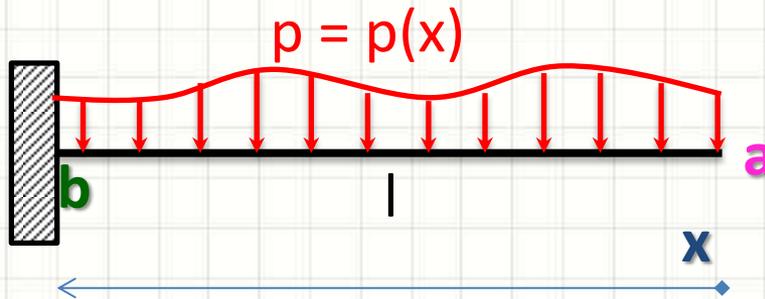
- Força Cortante Distribuída



Observe como a cortante crescente "acelera" o momento

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Genérica Distribuída



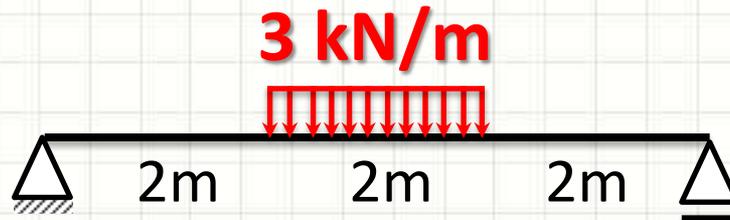
- Qual o momento de a até b ?

$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$

- Cuidado com o sinal!

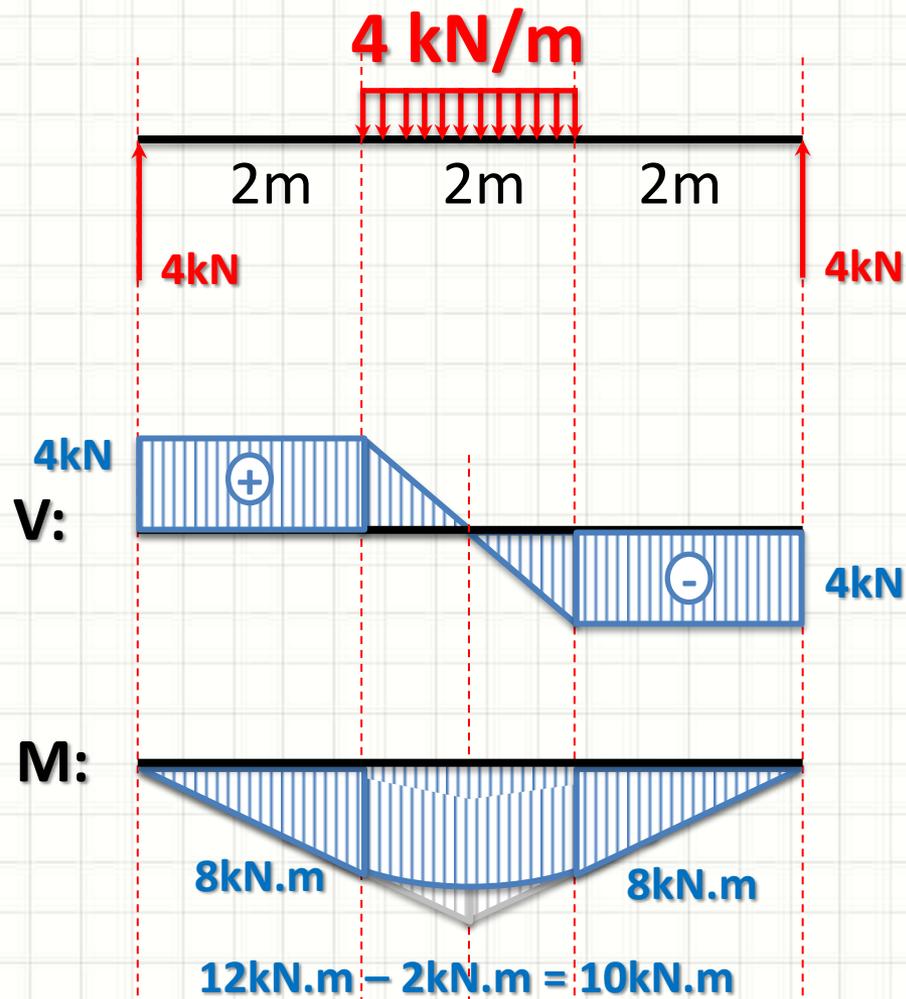
Exemplo

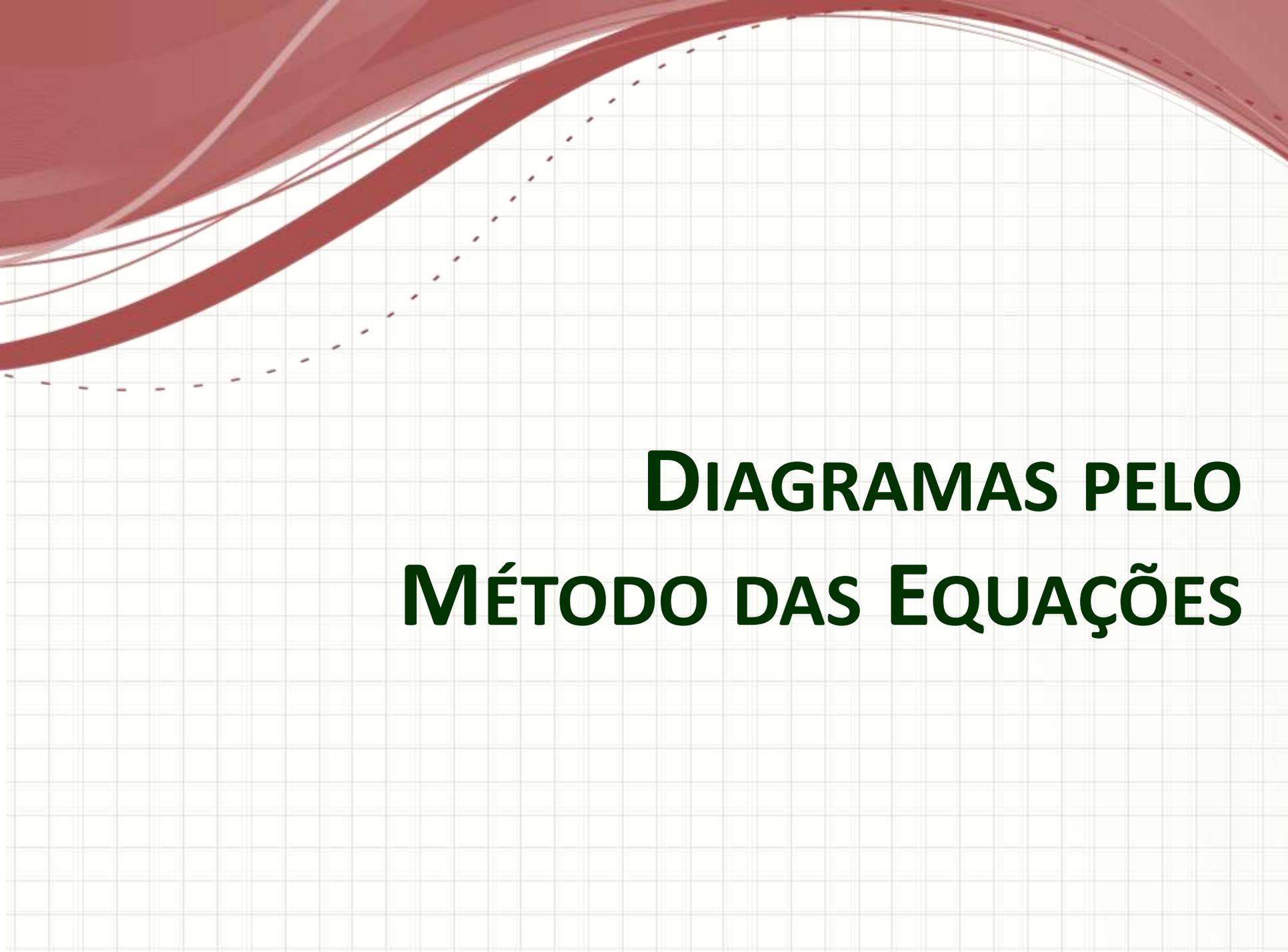
- Diagramas de Cortante e Momento para:



Exemplo

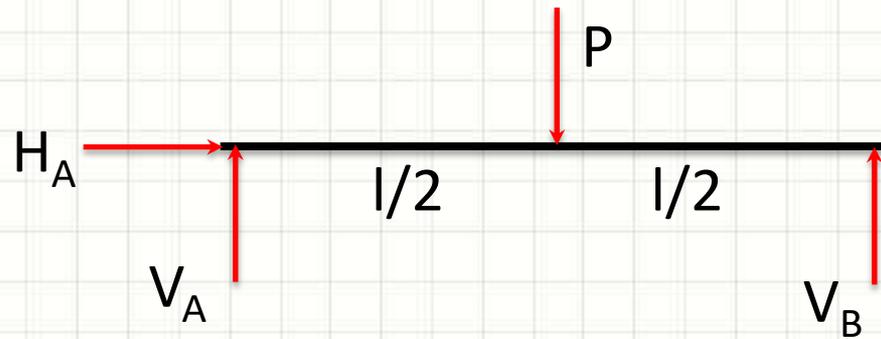
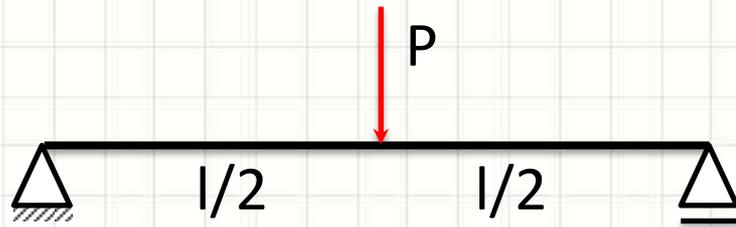
- Diagramas de Cortante e Momento para:





DIAGRAMAS PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES

Diagramas em Vigas – 1) Reações



$$V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

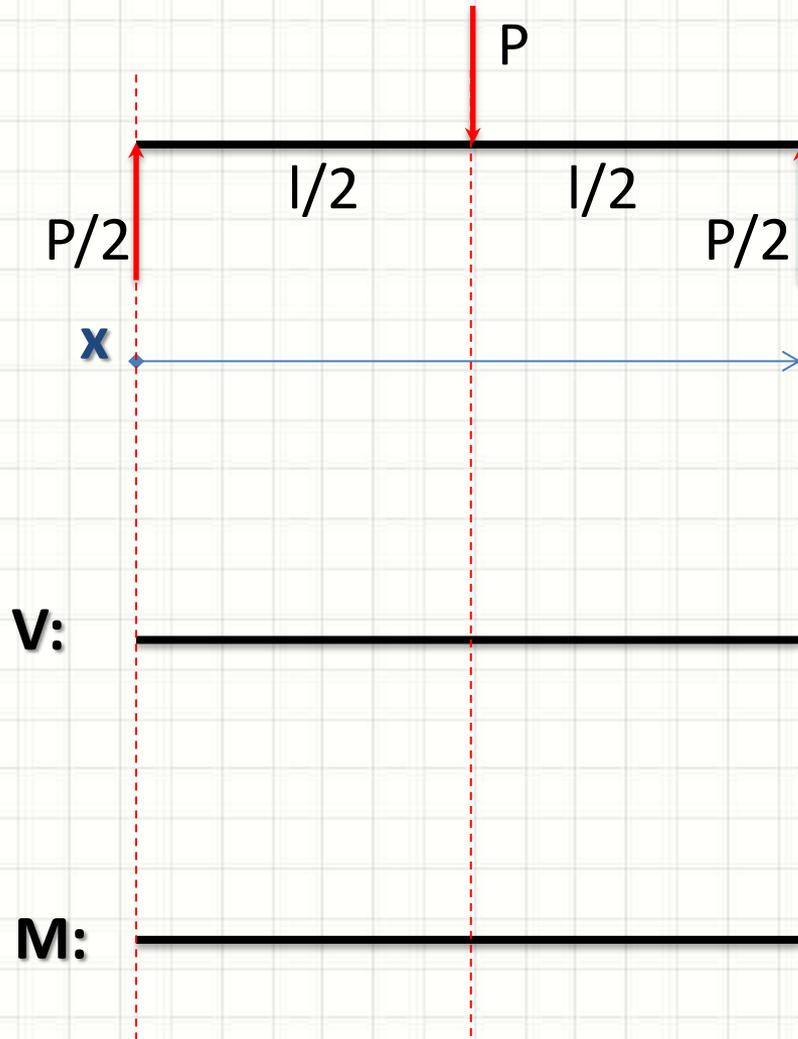
- $\sum F_x = 0$
- $\sum F_y = 0$
- $\sum M_a = 0$

$$\mathbf{H_A = 0}$$

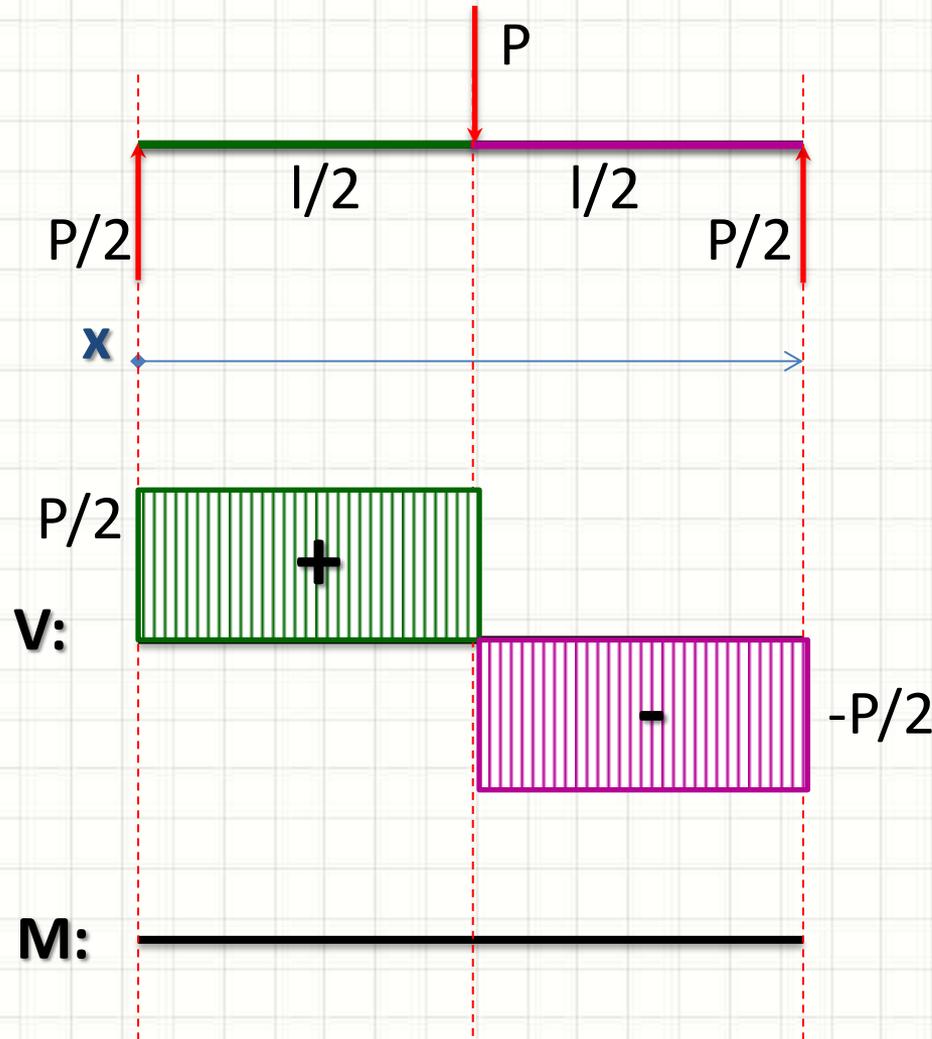
$$P - V_A - V_B = 0$$

$$V_B \cdot l - P \cdot l/2 = 0$$

Diagramas em Vigas – 2) Diagramas



Diagramas em Vigas – 2) Diagramas



$$V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$$

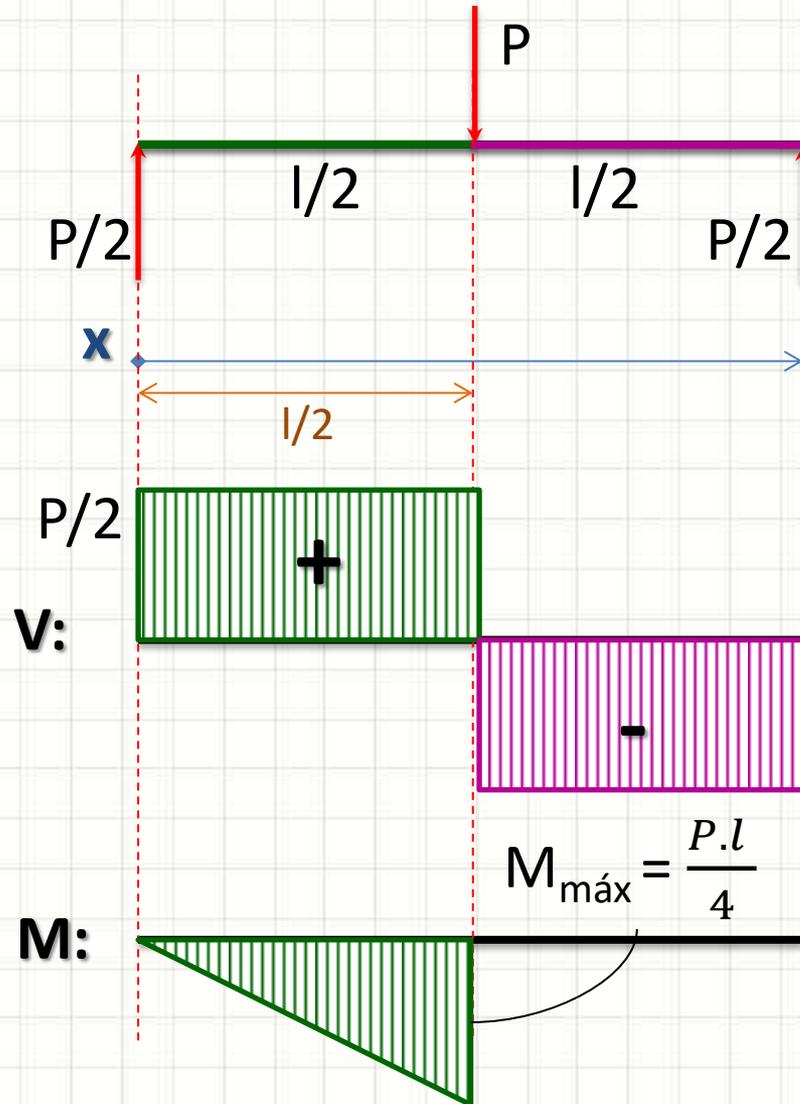
$$V(x) = \frac{P}{2}$$

$$V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$$

$$V(x) = \frac{P}{2} - P$$

$$V(x) = -\frac{P}{2}$$

Diagramas em Vigas – 2) Diagramas



$$V(x) = \frac{P}{2}$$

$$V(x) = -\frac{P}{2}$$

$$M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$$

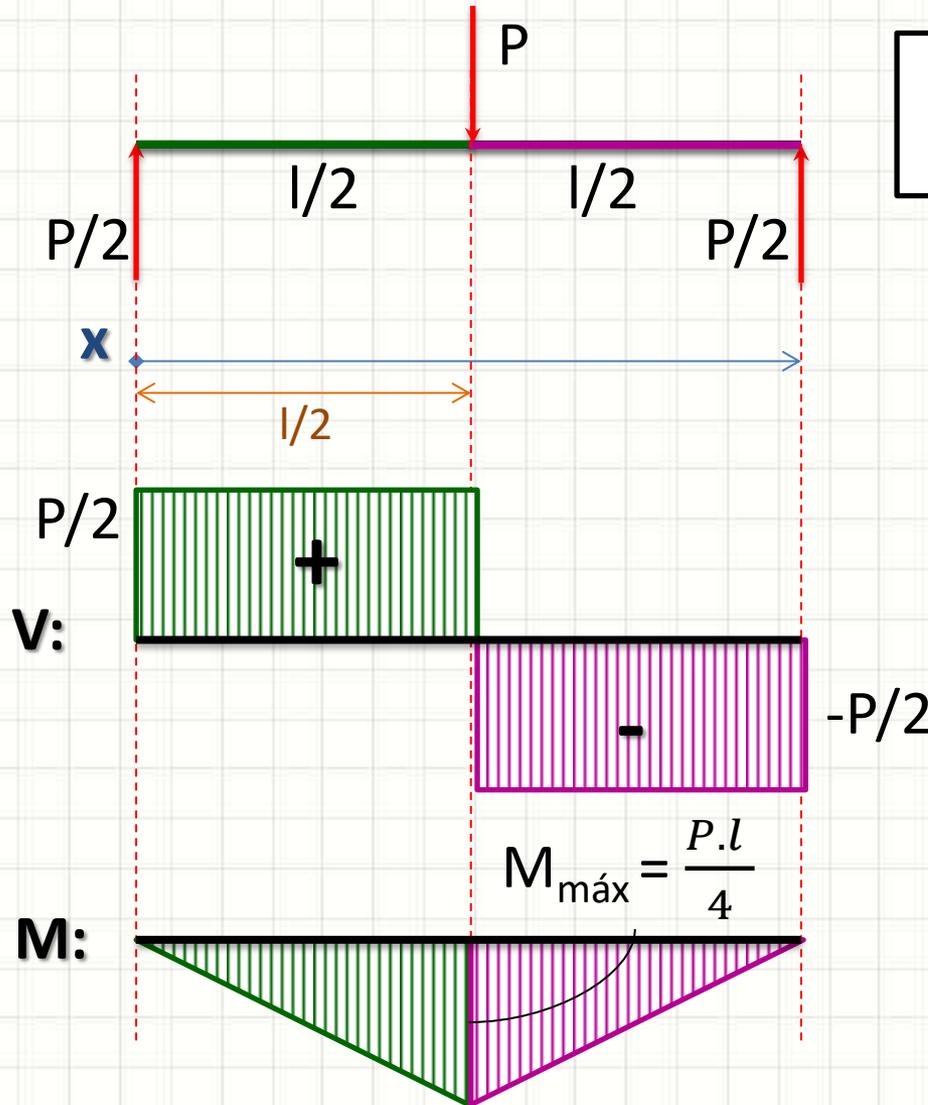
$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x - P \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)$$

$$M(x) = P \cdot \frac{x}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Diagramas em Vigas – 2) Diagramas



$$V(x) = \frac{P}{2}$$

$$V(x) = -\frac{P}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$M(x) = P \cdot \frac{x}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

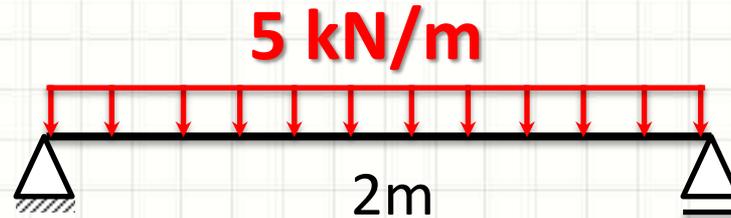
$$M(x) = P \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{l}{2} - x \right)$$

$$M(x) = P \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

$$M(x) = P \cdot \left(\frac{l-x}{2} \right)$$

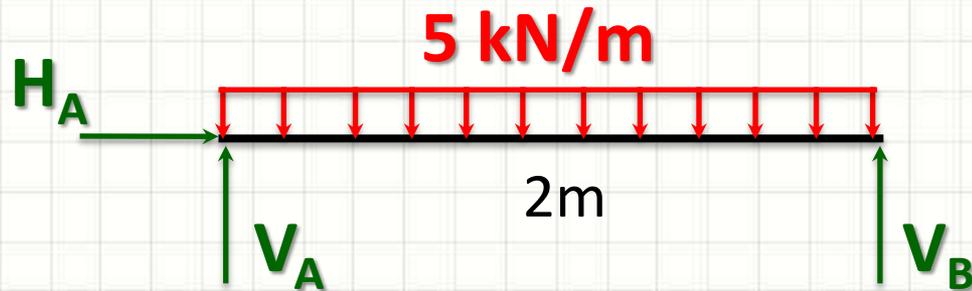
Exemplo

- Diagramas de cortante e momento



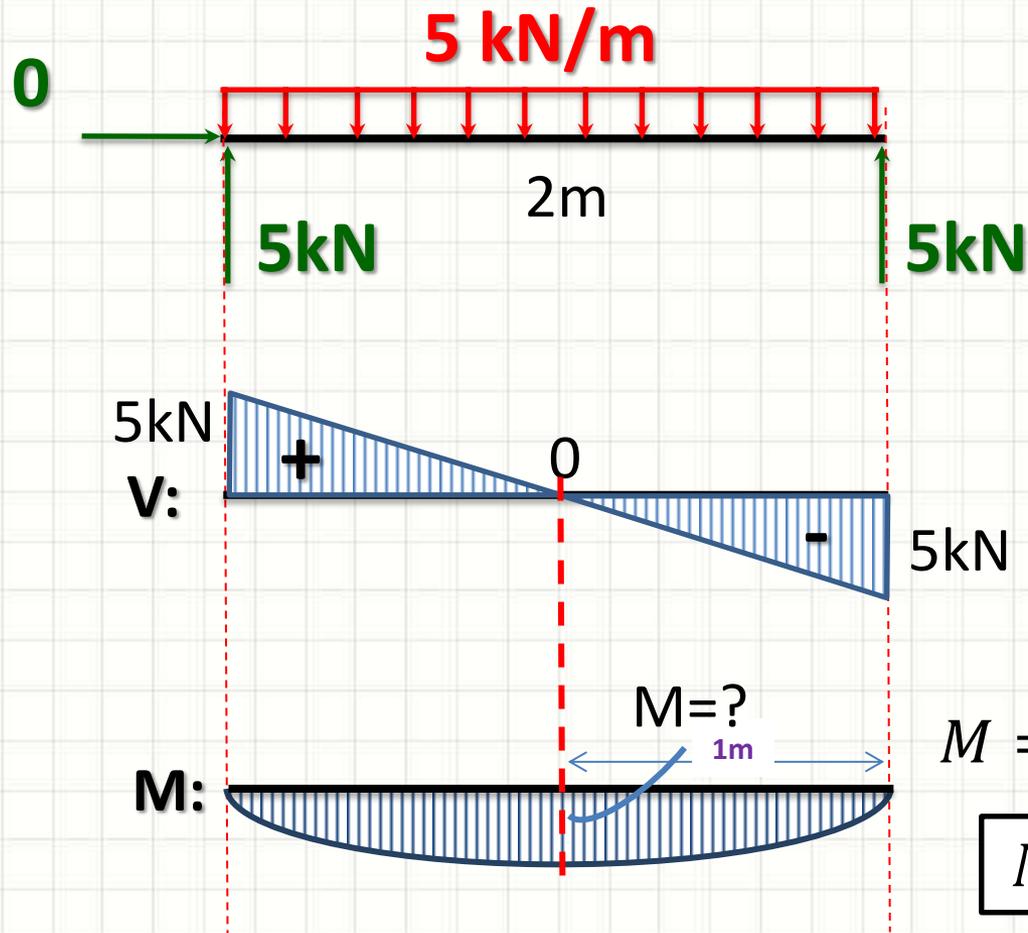
Exemplo

- Diagramas de cortante e momento



Exemplo

- Diagramas de cortante e momento

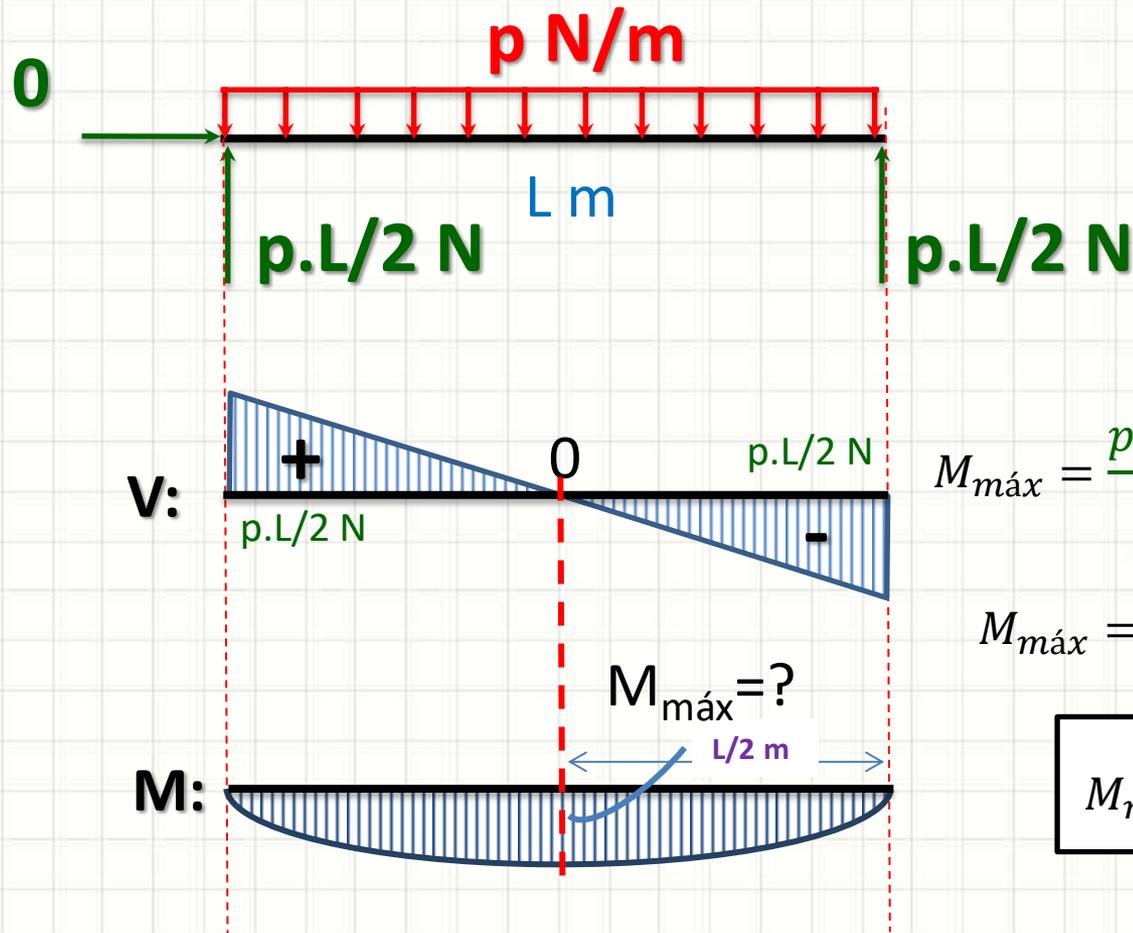


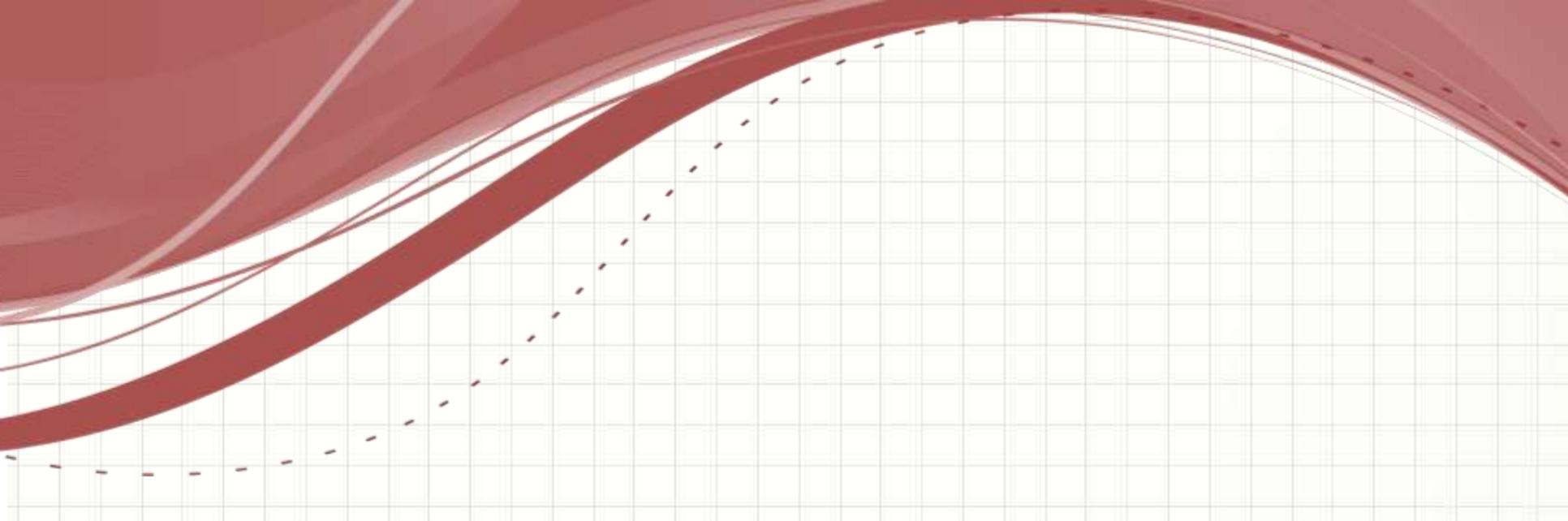
$$M = 5.1 - (5.1).0,5$$

$$M = 2,5 \text{ kN.m}$$

Exemplo - Literal

- Diagramas de cortante e momento

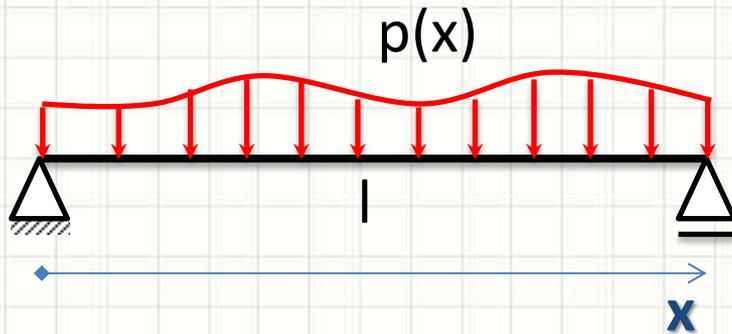




RELAÇÃO:

CARGA DISTRIBUÍDA X CORTANTE X MOMENTO

Equações: Carregamento Qualquer



Área sob a curva da carga distribuída

$$p(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = \int -p(x) \cdot dx$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$

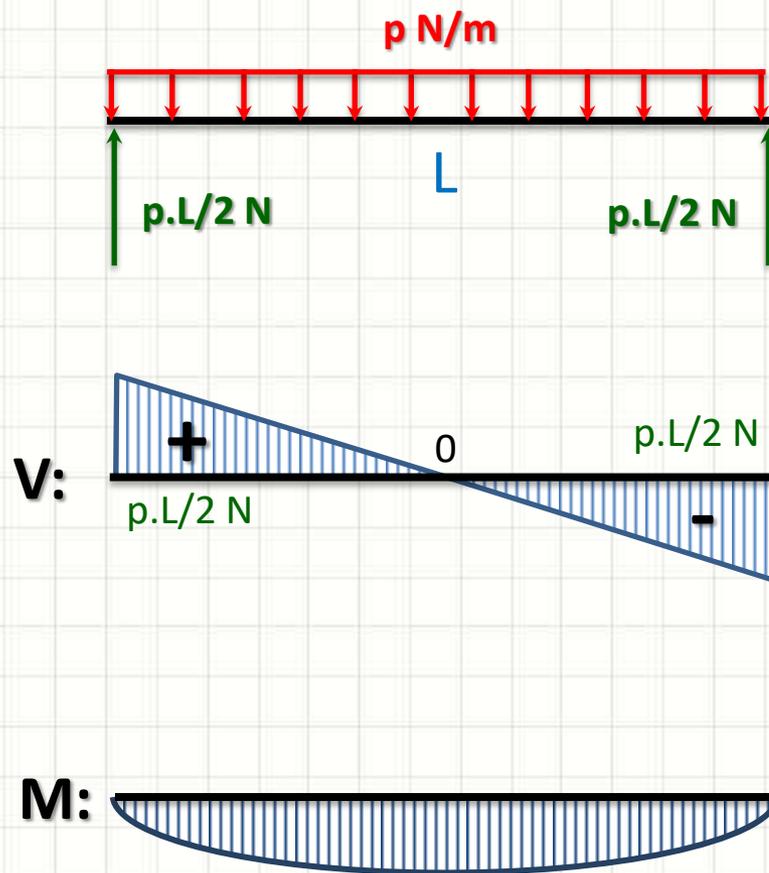
$$M = \int V(x) \cdot dx$$

**$V(x) = 0$
 $M(x)$ é ponto de
máximo ou mínimo!**

Área sob a curva do diagrama de cortante

Observe!

- Força Cortante Distribuída



$$p(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = \int -p(x) \cdot dx$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$

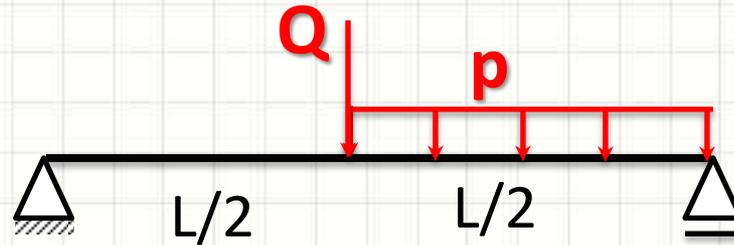
$$M = \int V(x) \cdot dx$$



EXEMPLO COMPOSTO

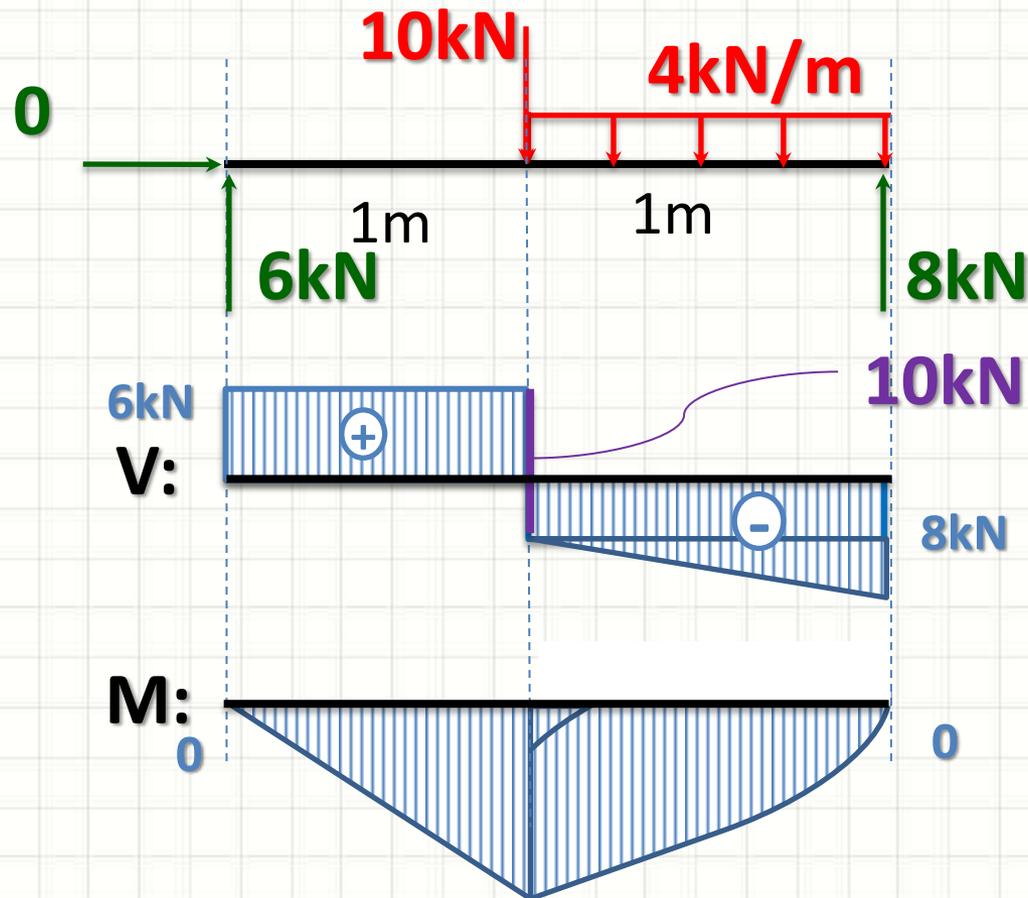
Exemplo

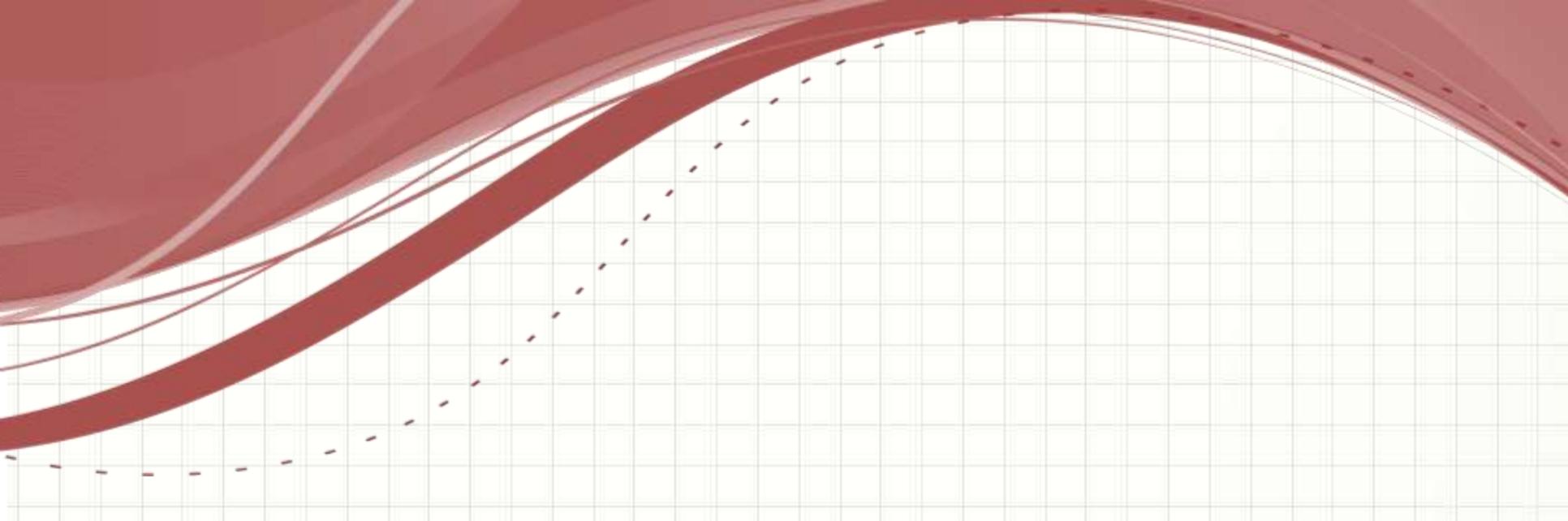
- Diagramas, para $L = 2\text{m}$, $Q = 10\text{kN}$ e $p = 4\text{kN/m}$:



Exemplo

- Diagramas, para $L = 2\text{m}$, $Q = 10\text{kN}$ e $p = 4\text{kN/m}$:

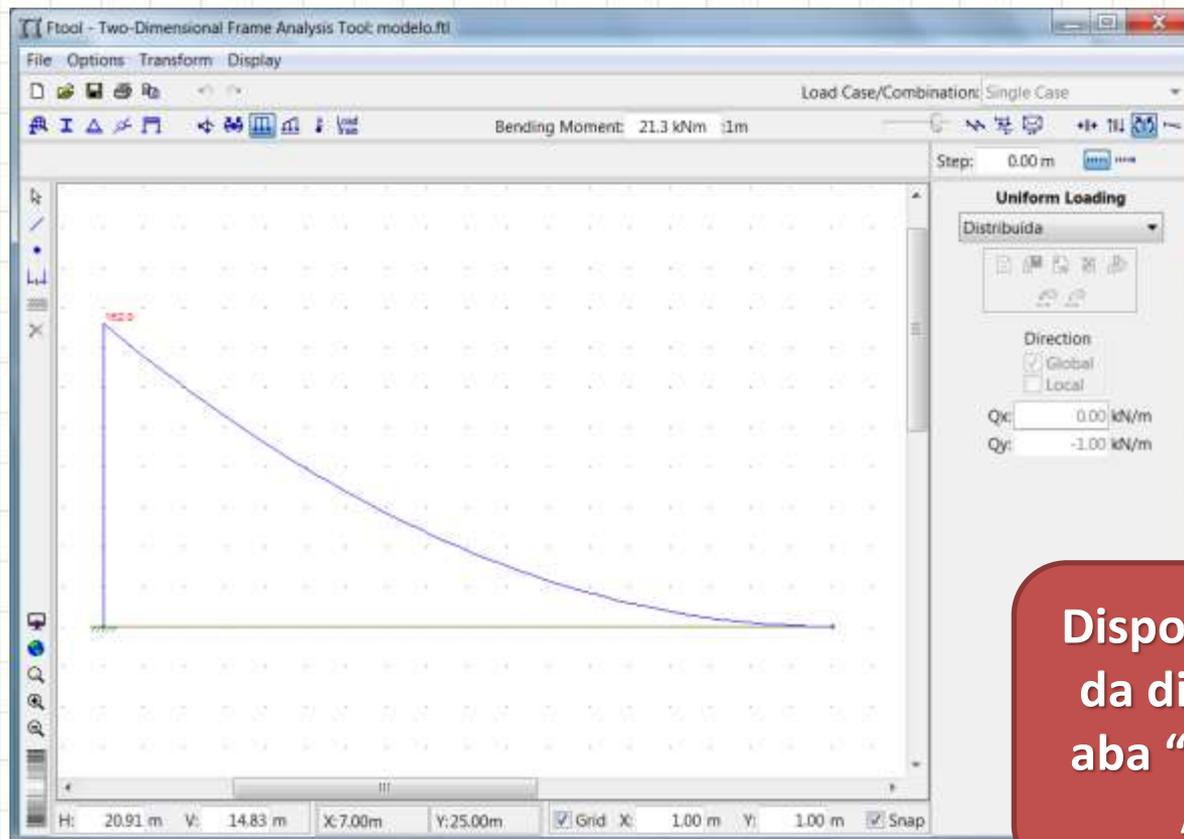




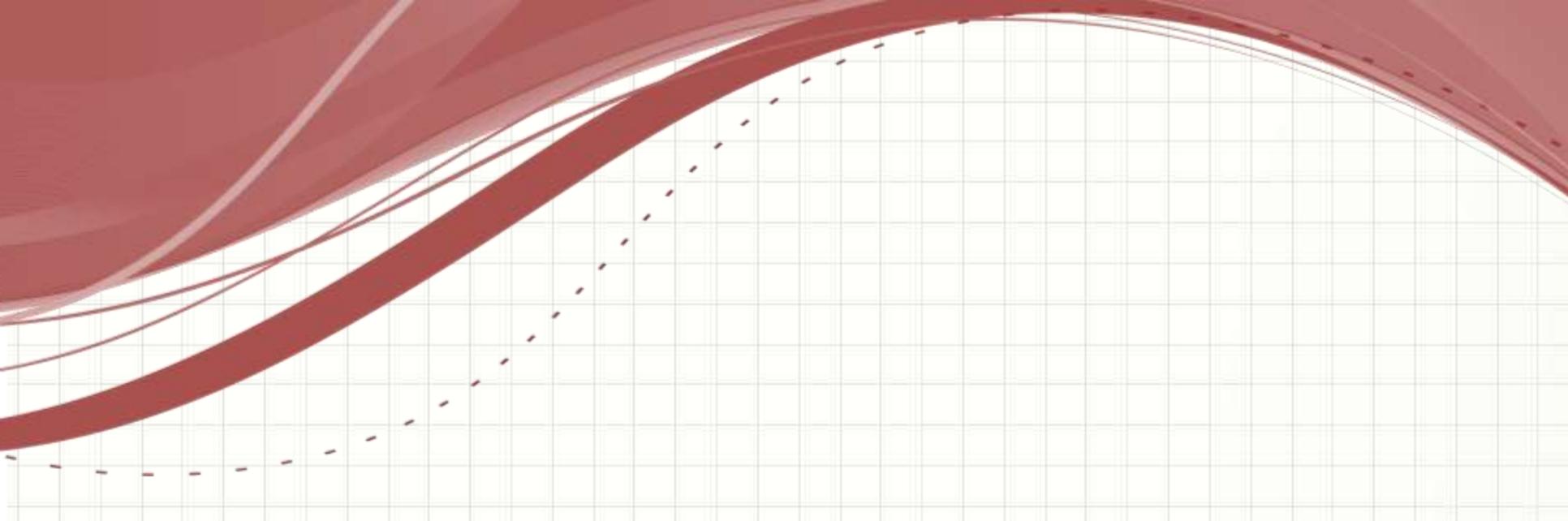
FTOOL

FTool

- Programa de auxílio no aprendizado
 - Construir estruturas simples e verificar diagramas



Disponível no site da disciplina, na aba "Material de Apoio"

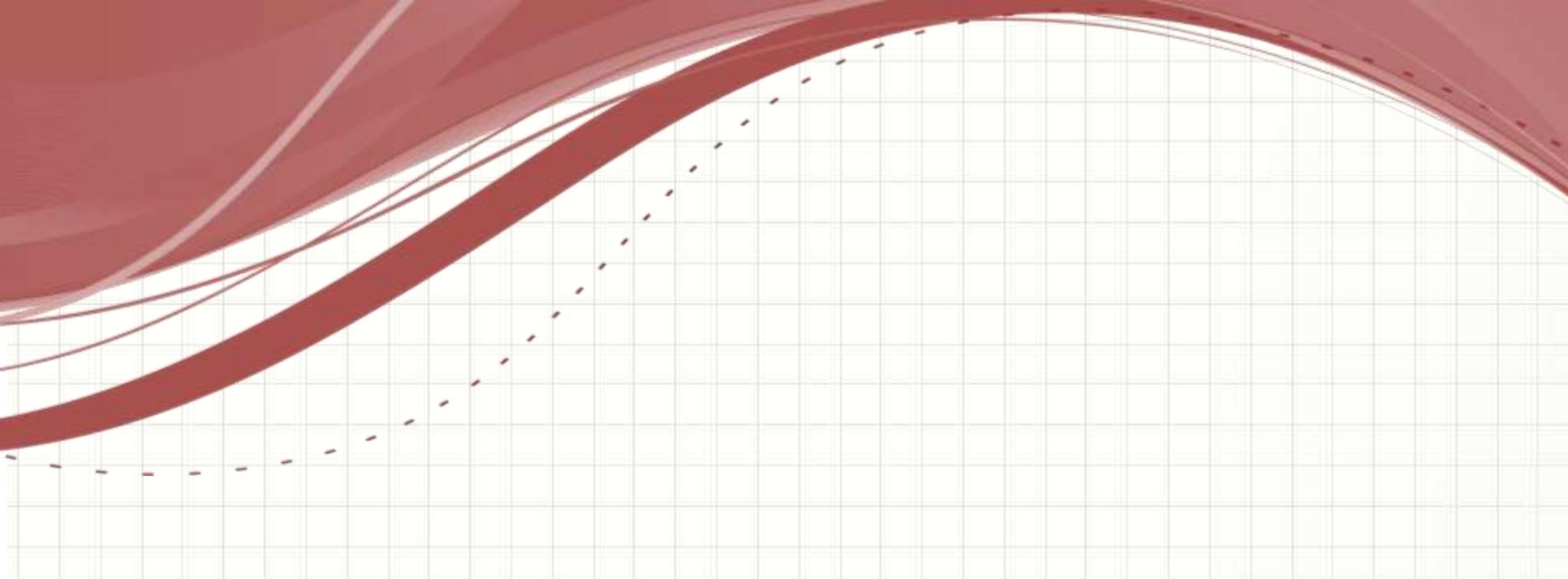


CONCLUSÕES

Resumo

- A partir das cargas podemos determinar:
 - Cortante em qualquer ponto da viga
 - Momento em qualquer ponto da viga
- Os diagramas permitem encontrar facilmente
 - Pontos de maior solicitação
- **Exercitar: Hibbeler**

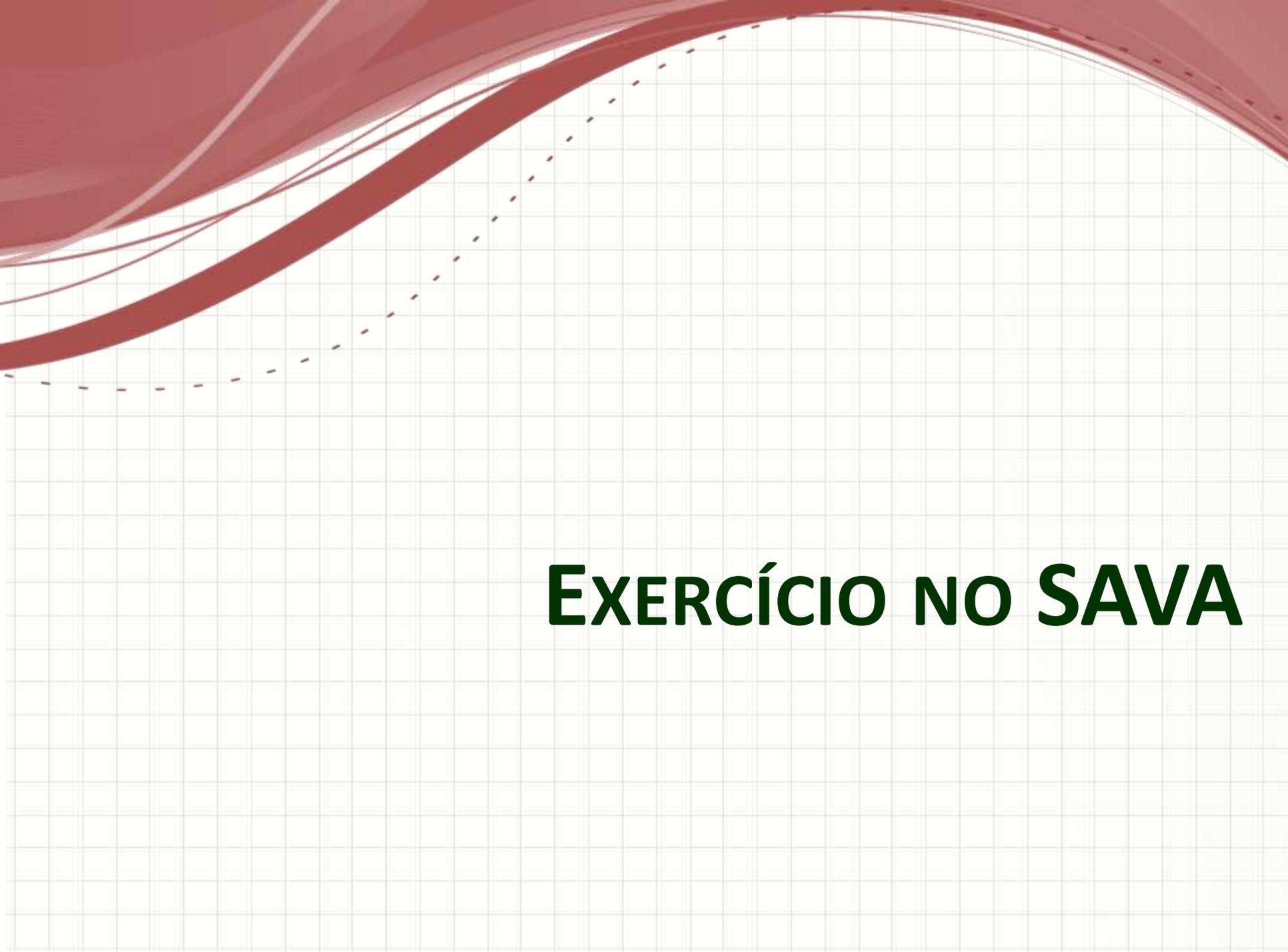
-
- Como é a deformação por momento fletor?
 - Como é a distribuição de tensões dentro da viga?



PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

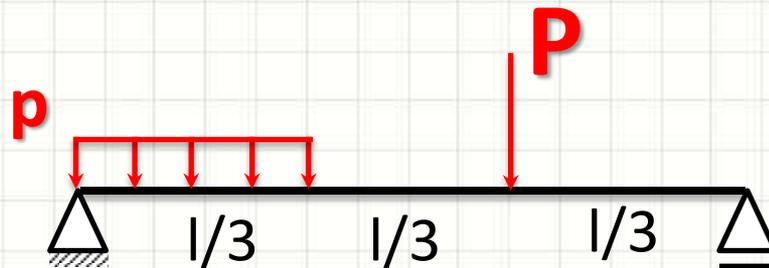
- Mínimos:
 - Exercícios 6.1, 6.3, 6.16, 6.33
- Extras:
 - Exercícios 6.5, 6.20, 6.21, 6.29

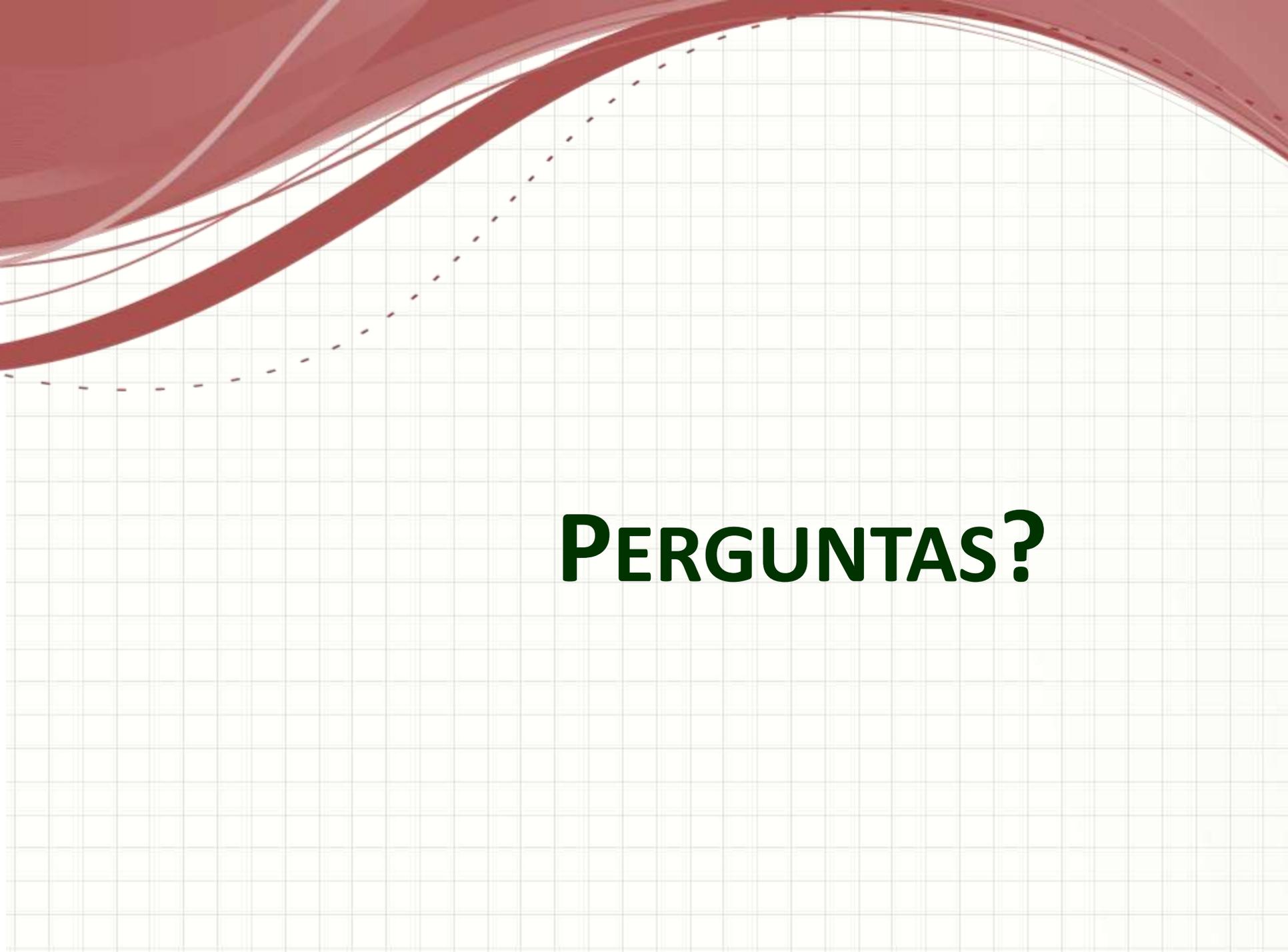


EXERCÍCIO NO SAVA

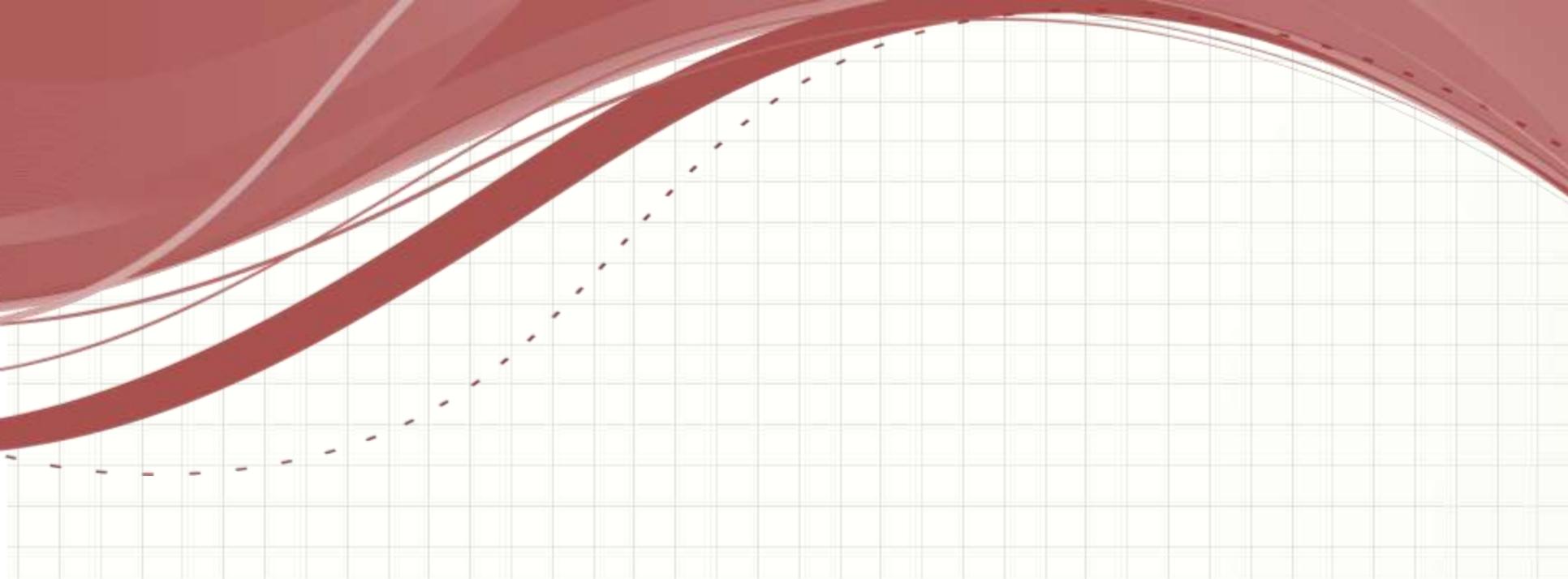
Exercício – Entrega Individual

- Trace, intuitivamente os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo. Para estimar a magnitude, considere que:
 $P = 100\text{N}$, $p = 10\text{N/m}$ e $l = 3\text{m}$.





PERGUNTAS?



EXERCÍCIO EM SALA

Exercício – Individual, para Agora!

- Trace os diagramas de cortante e momento fletor da barra abaixo

