Resistência dos Materiais II

Flexão
Parte II

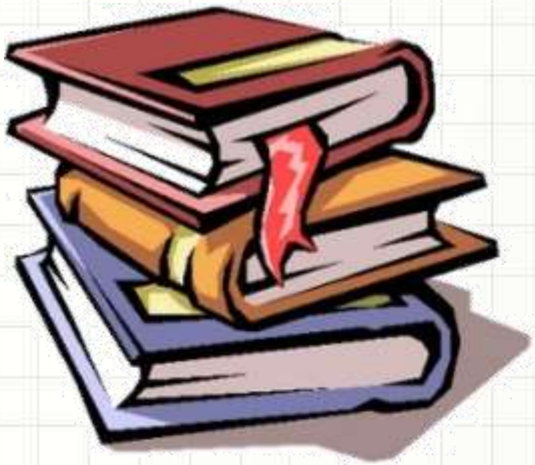
Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 2

Objetivos

- Conhecer hipóteses simplificadoras na flexão
- Conceituar a linha neutra
- Capacitar para a localização da linha neutra e a determinar a distribuição de tensões na flexão pura reta
- Conceituar flexão inelástica, momento elástico máximo e momento plástico último

Material de Estudo



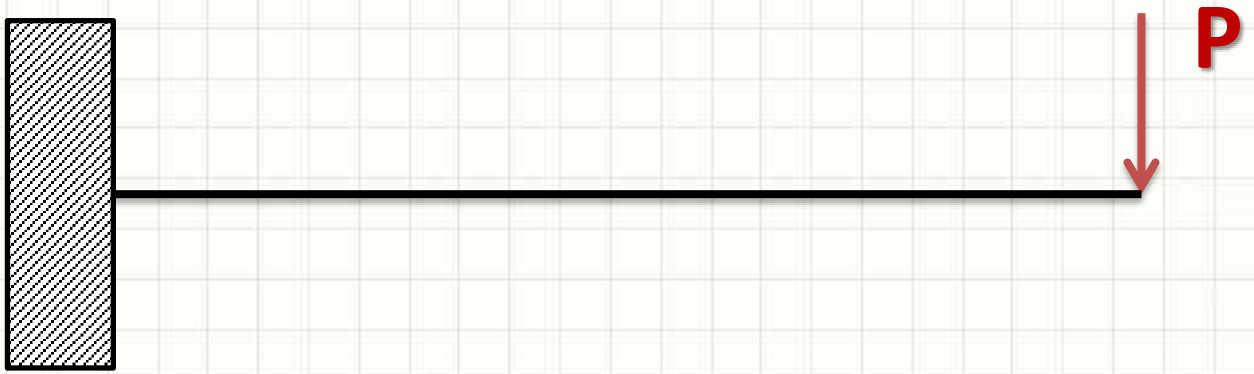
Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 10)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 201 a 216.
Biblioteca Virtual	“Resistência dos Materiais”

Retomando...

Esforços Cortantes e Momentos Fletores

Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Causado por forças cortantes



Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Causado por forças cortantes

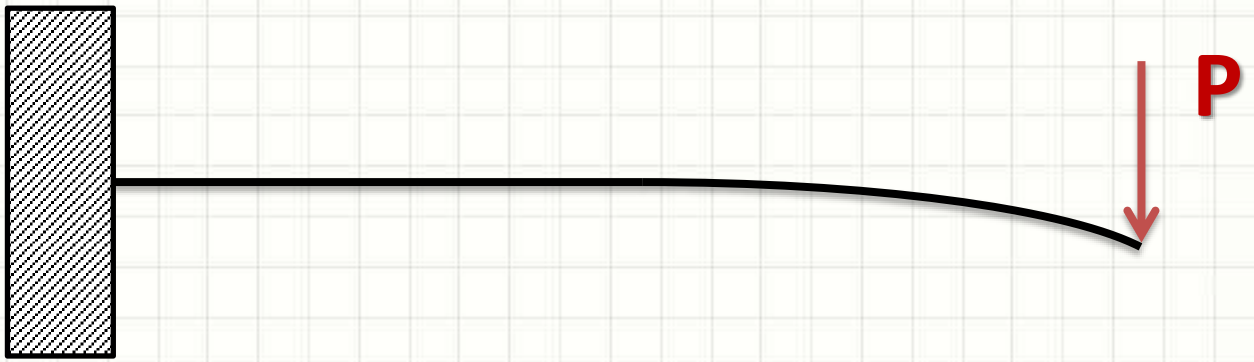
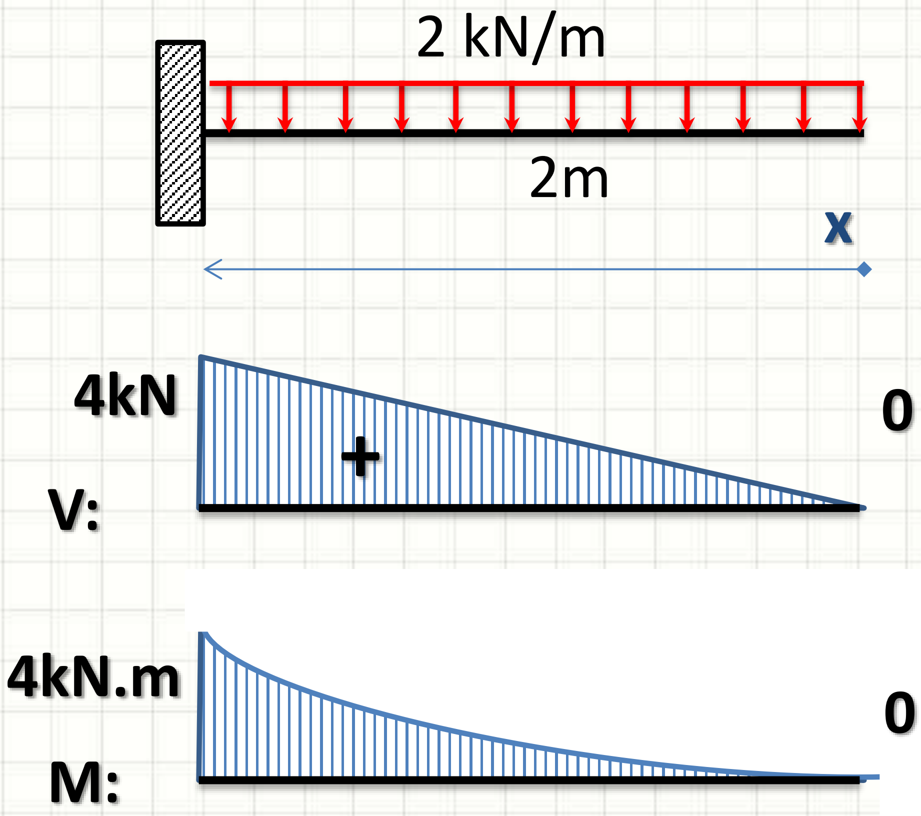


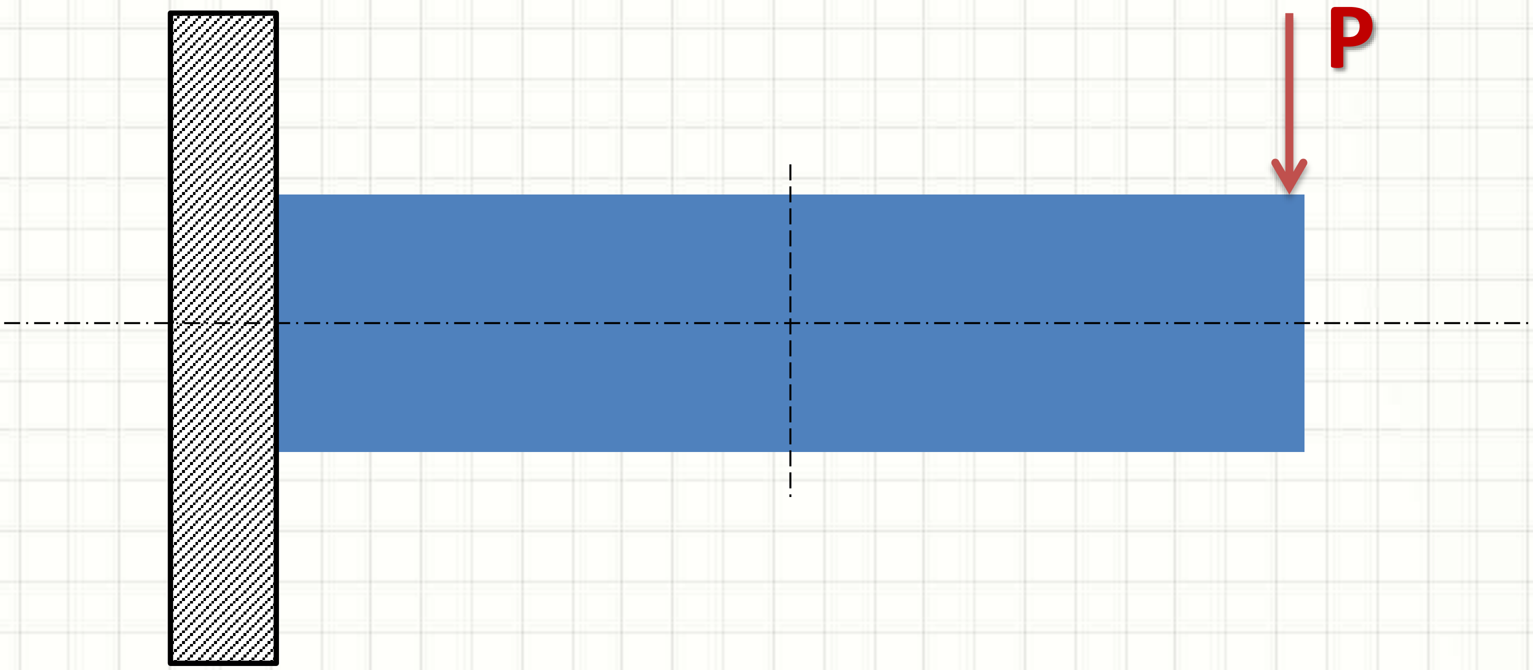
Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



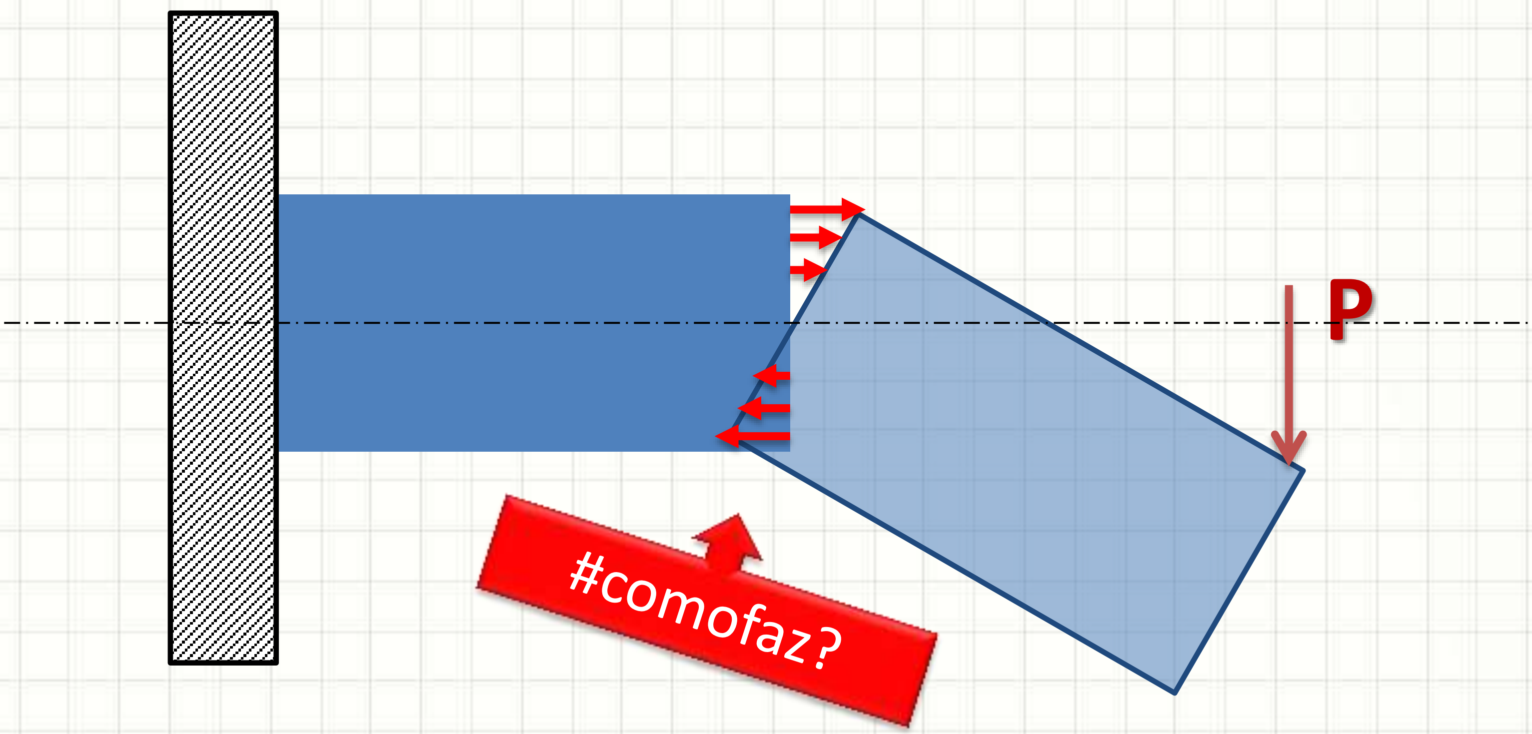
Esforços Internos

- Carga cortante desta maneira...



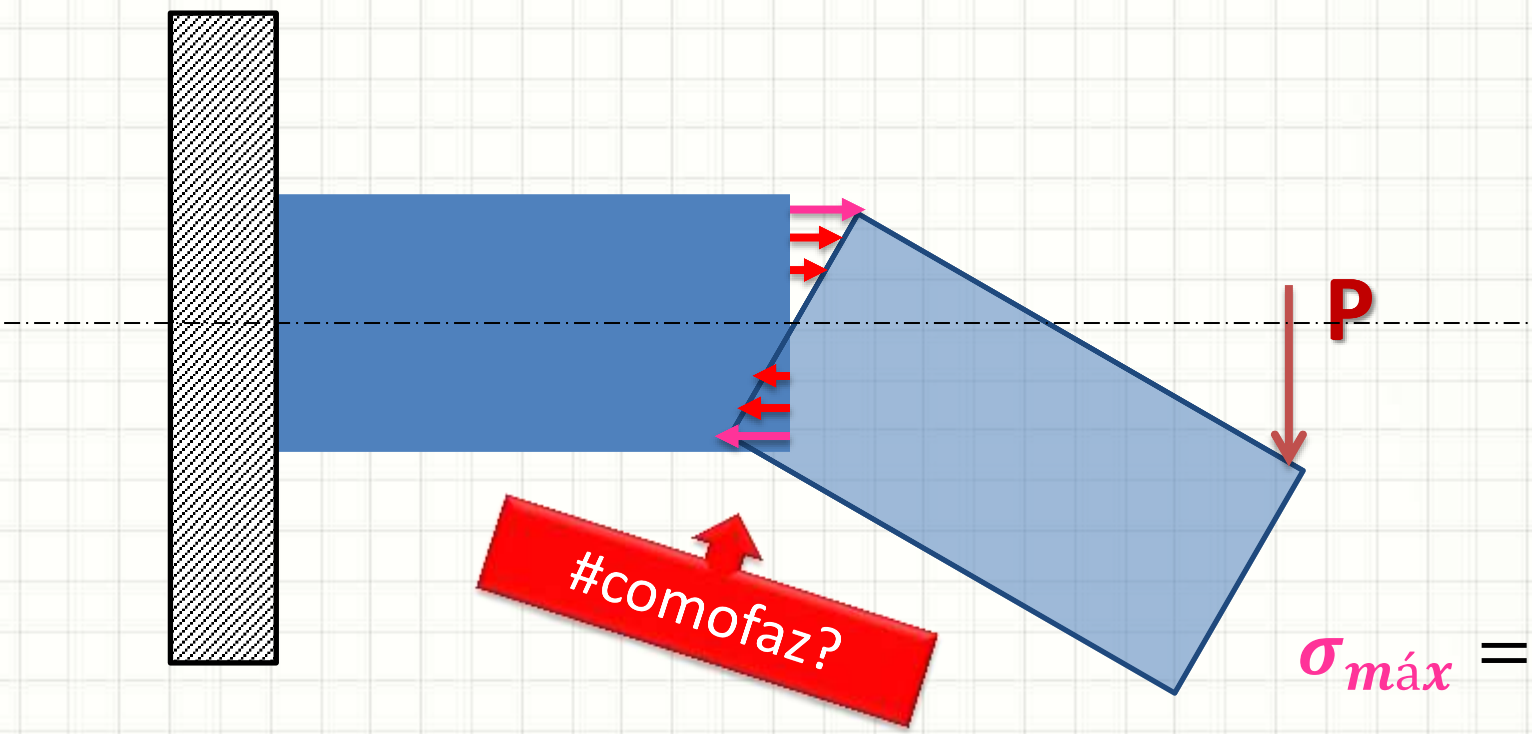
Esforços Internos

- Carga cortante desta maneira...
  - Causa esforços internos: tensões normais!



Esforços Internos

- Carga cortante desta maneira...
  - Causa esforços internos: tensões normais!



$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

Esforços Internos

- Como chegamos nesse cara?

$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

- Bem, pela lei de Hooke:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

- Então...

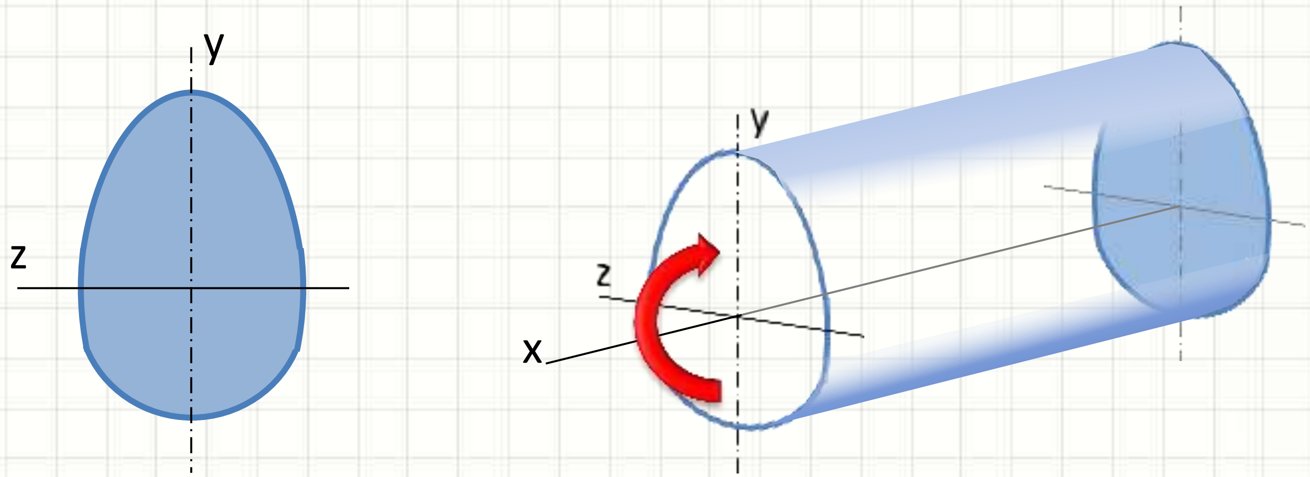
$$\sigma_{máx} = E.\varepsilon_{máx}$$

- Mas como determinar $\varepsilon_{máx}$?

Compreendendo a Deformação por Flexão

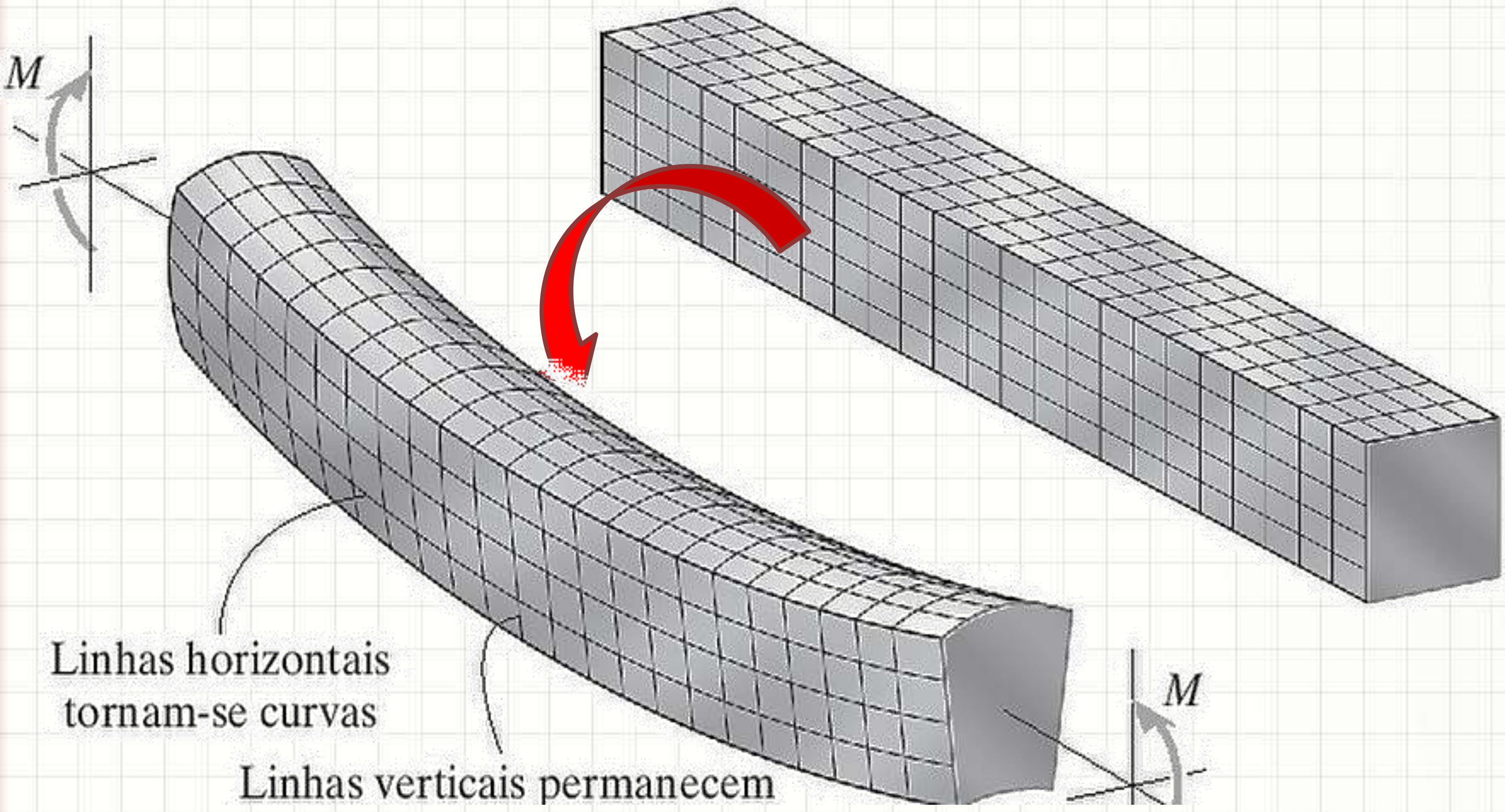
Deformação na Flexão

- Material Homogêneo e Alta Deformabilidade
- Seção transversal simétrica a um eixo
- Momento aplicado em torno de linha central perpendicular a esse eixo



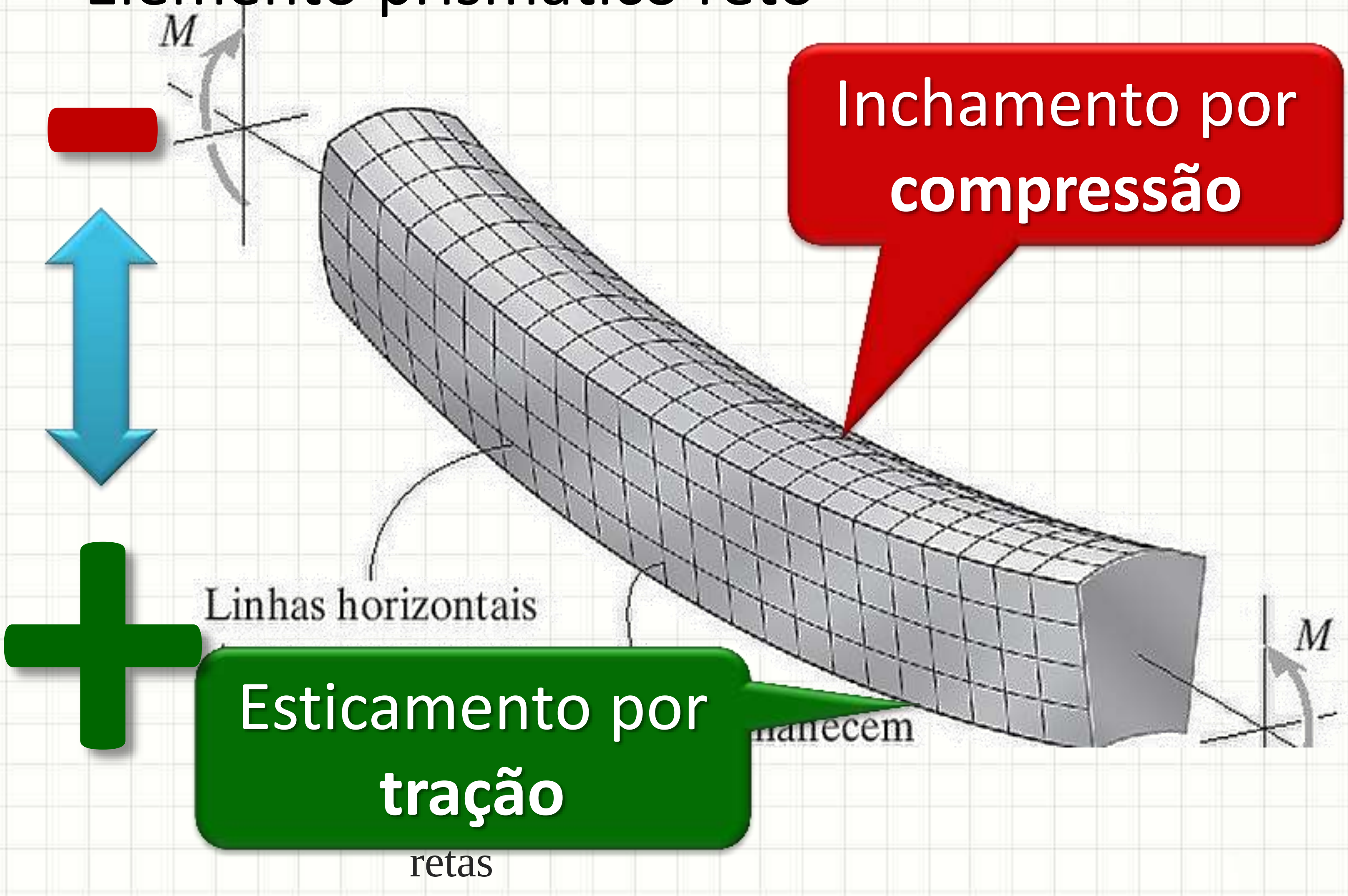
Deformação na Flexão

- Elemento prismático reto



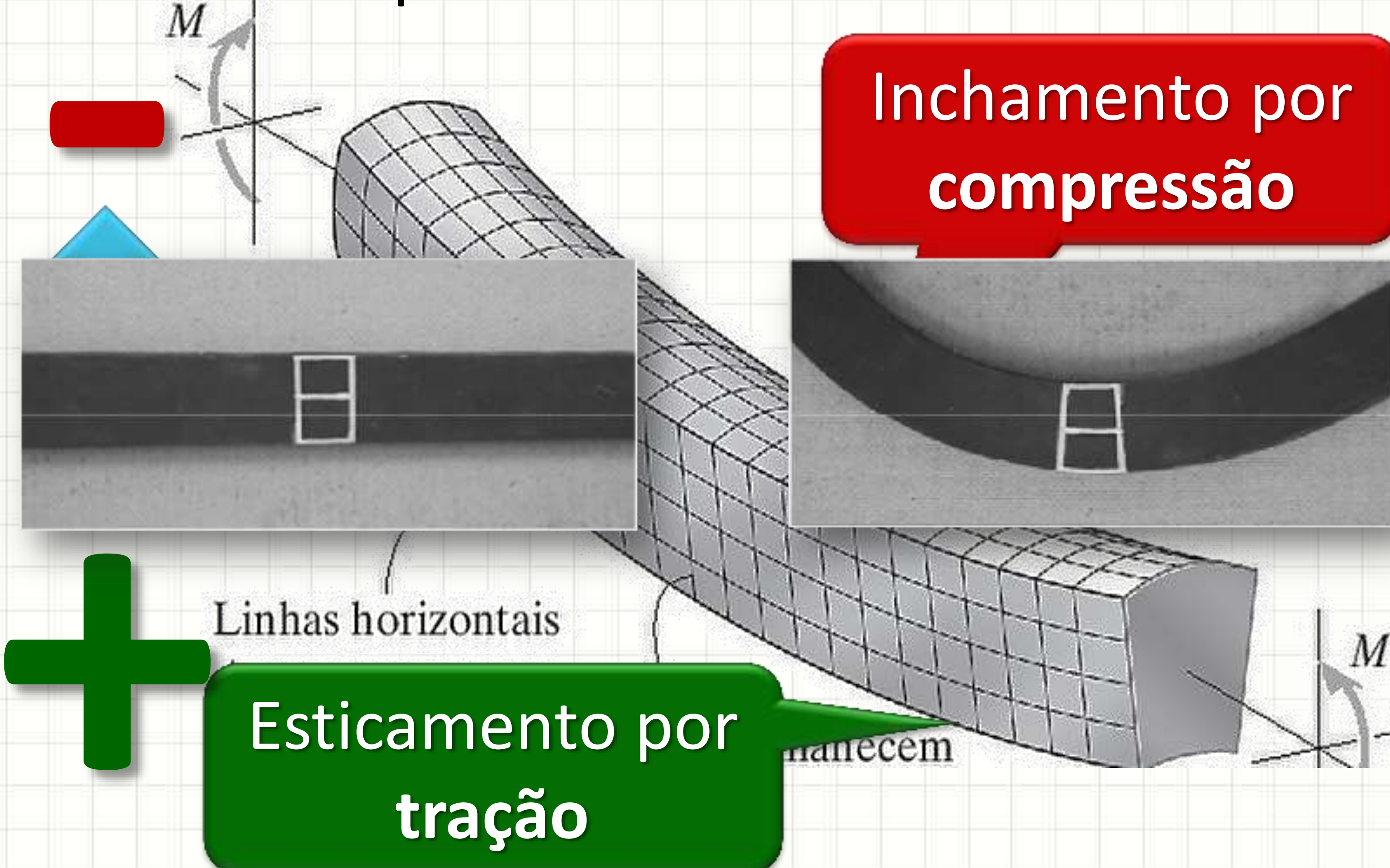
Deformação na Flexão

- Elemento prismático reto



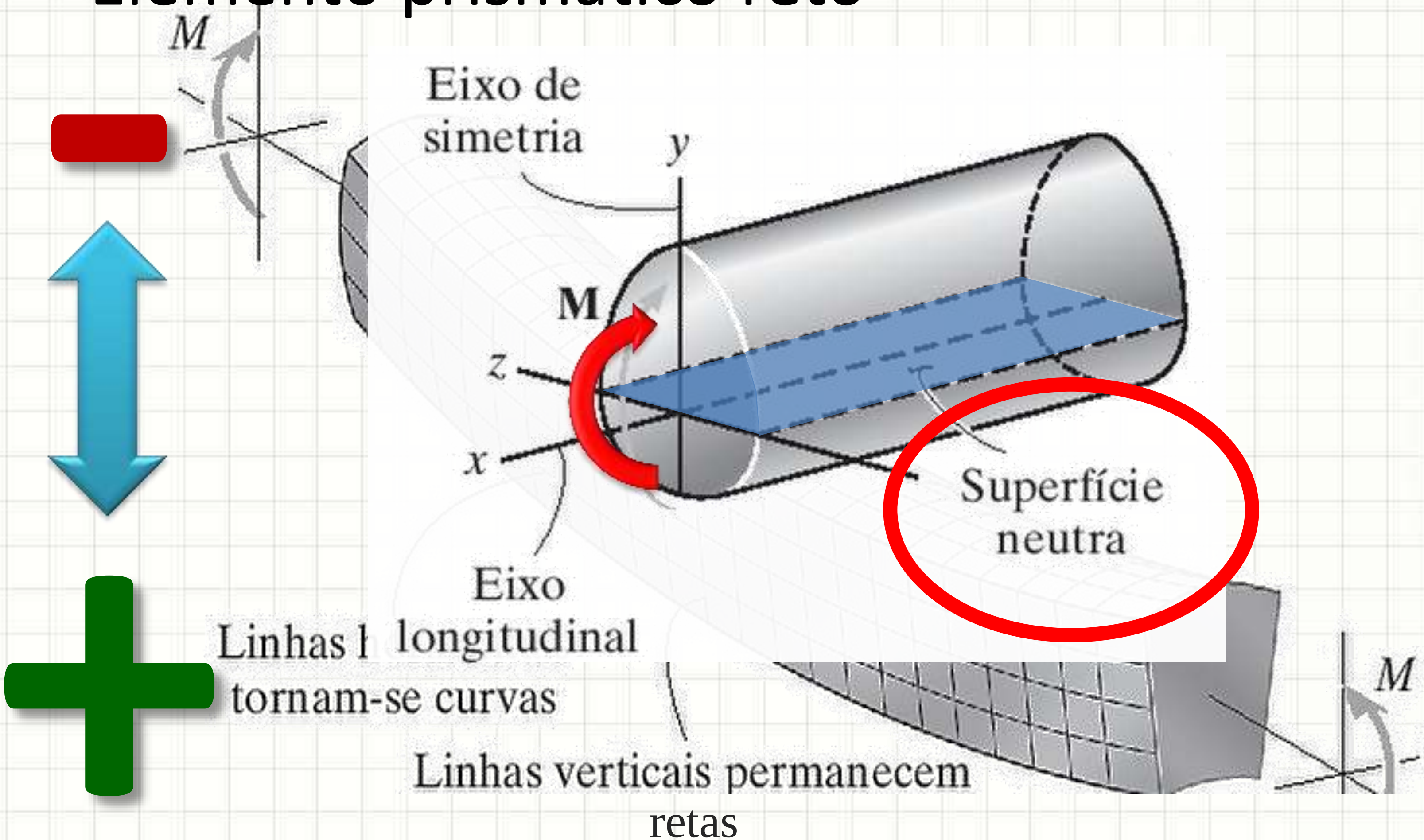
Deformação na Flexão

- Elemento prismático reto



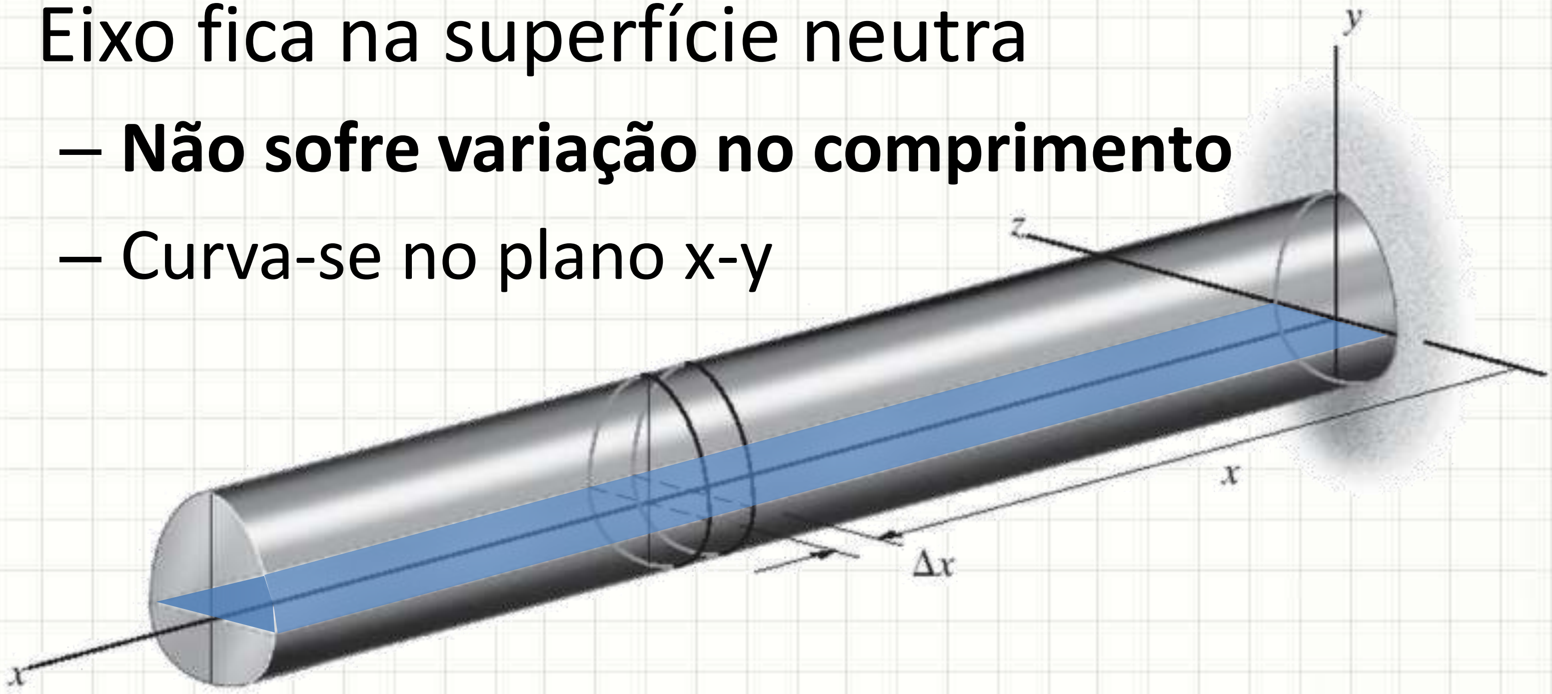
Deformação na Flexão

- Elemento prismático reto



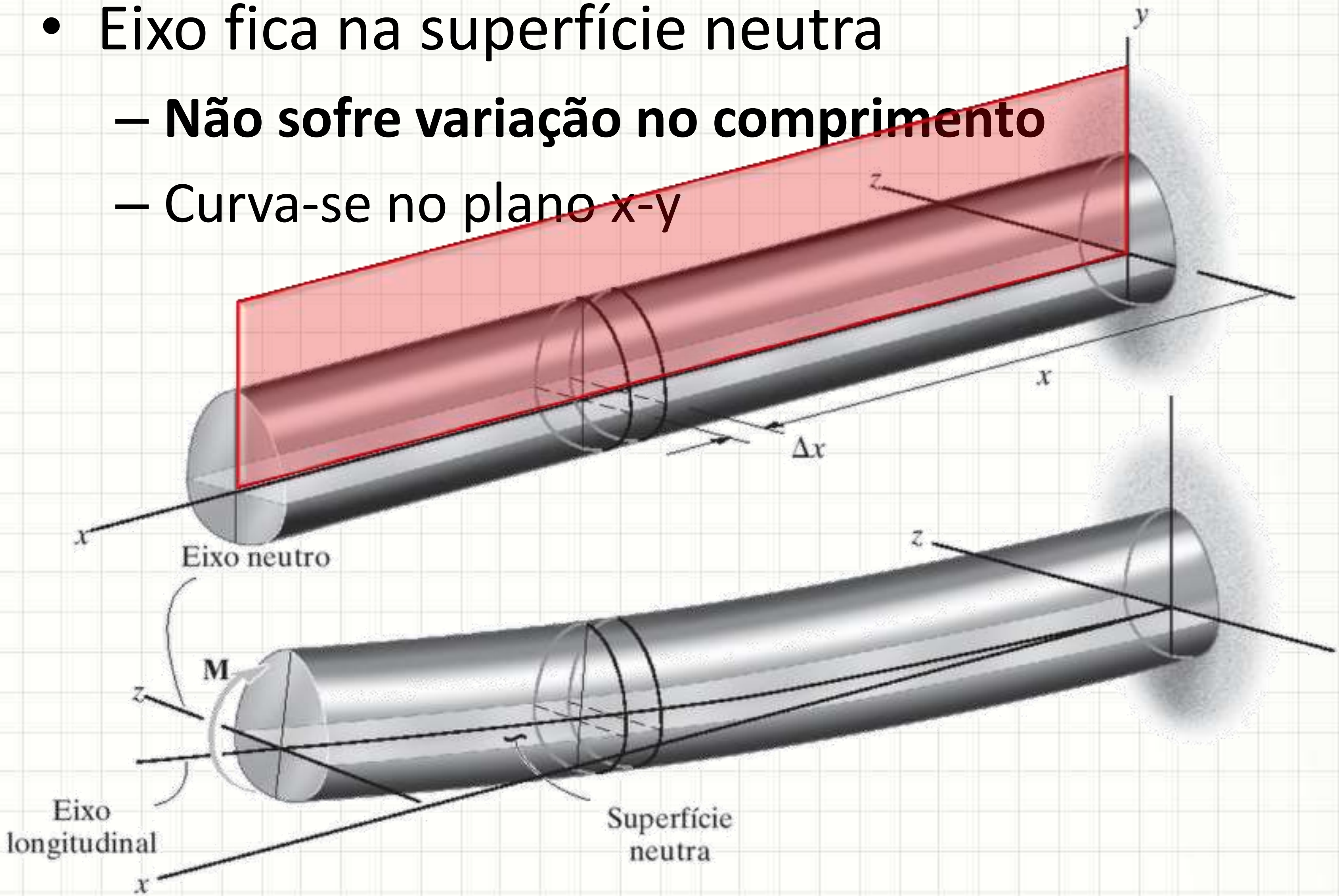
Deformação na Flexão

- Eixo fica na superfície neutra
  - **Não sofre variação no comprimento**
  - Curva-se no plano x-y



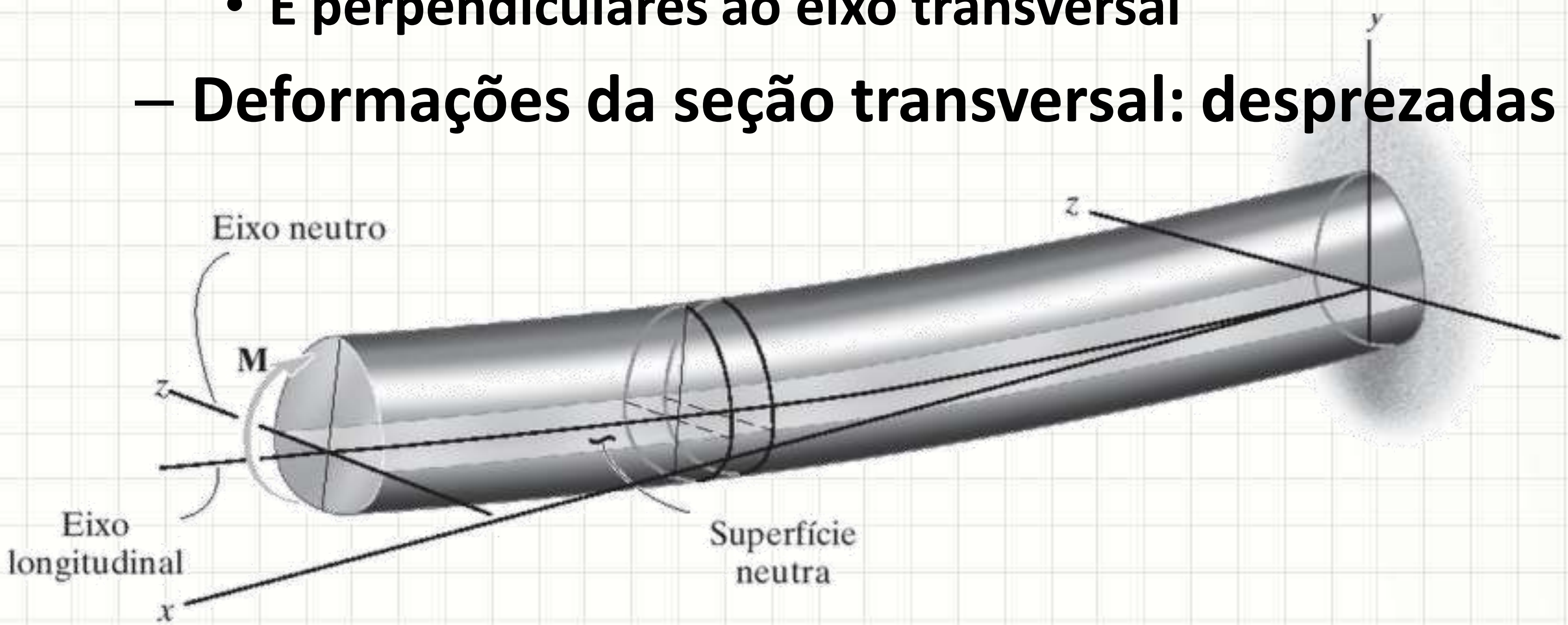
Deformação na Flexão

- Eixo fica na superfície neutra
  - **Não sofre variação no comprimento**
  - Curva-se no plano x-y



Deformação na Flexão

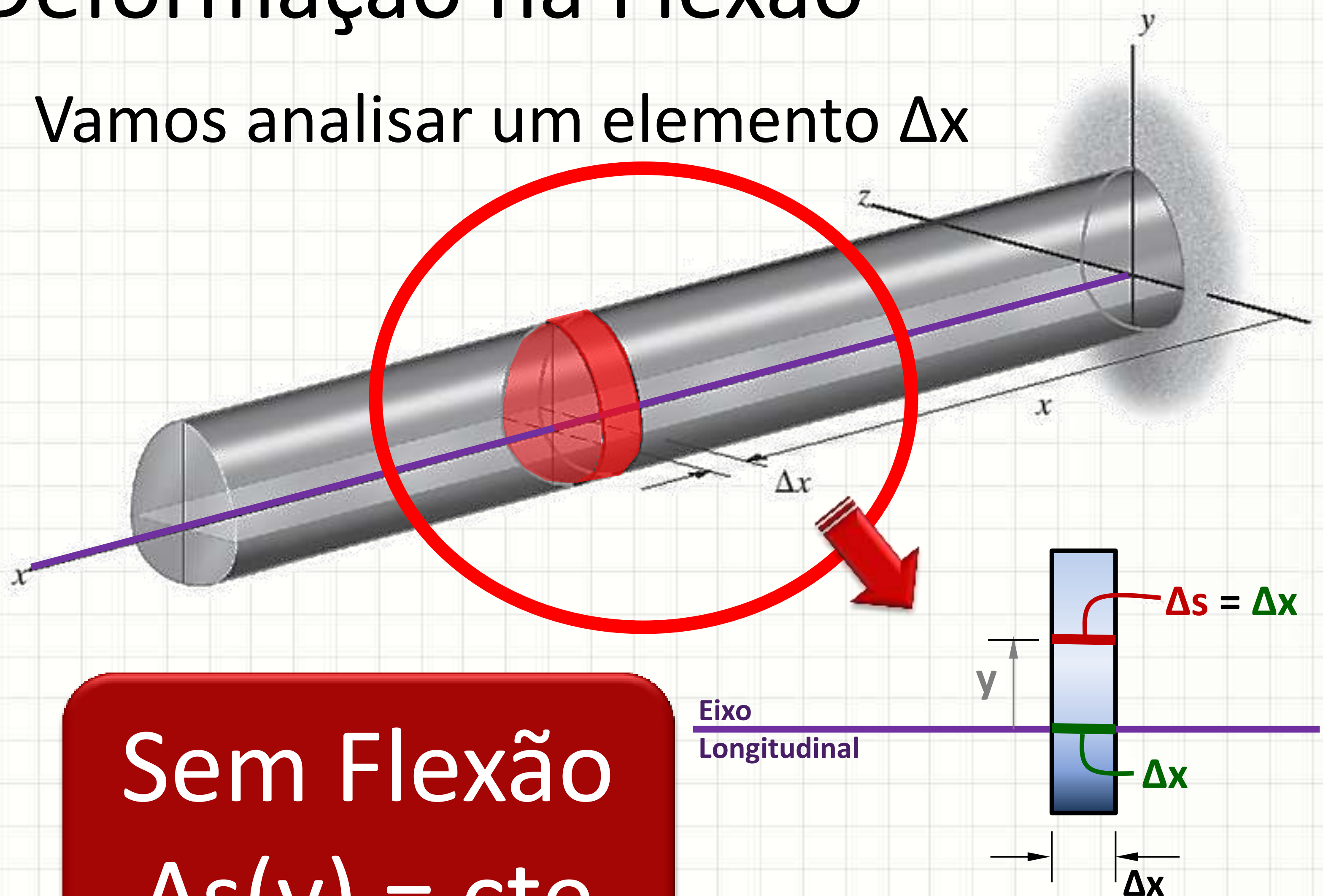
- Eixo fica na superfície neutra
  - **Não sofre variação no comprimento**
  - Curva-se no plano x-y
  - **Seções transversais permanecem planas**
    - **E perpendiculares ao eixo transversal**
  - **Deformações da seção transversal: desprezadas**



>

Deformação na Flexão

- Vamos analisar um elemento Δx

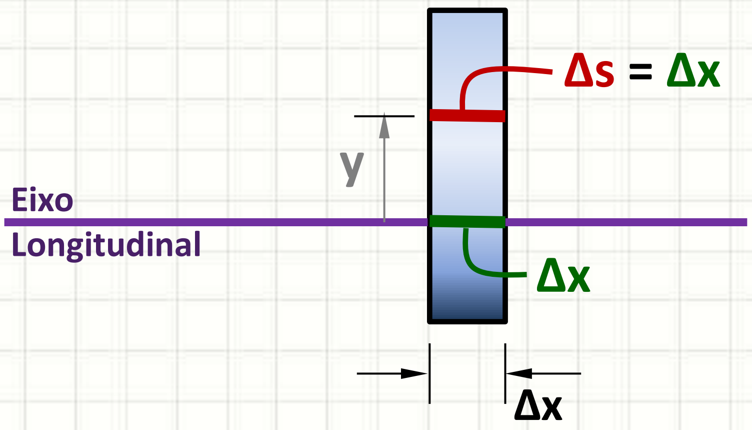


Sem Flexão
Δs(y) = cte

Elemento Não Deformado

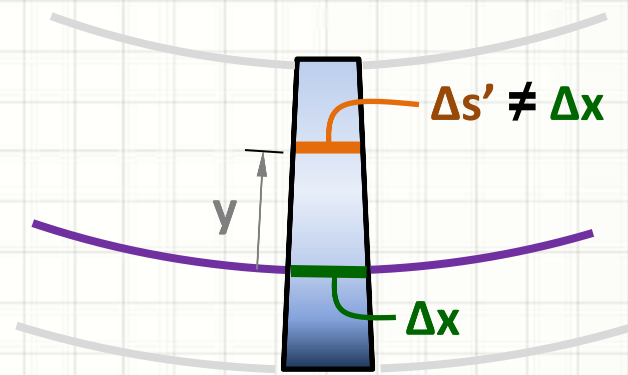
Deformação na Flexão

- Vamos analisar um elemento Δx



Elemento Não Deformado

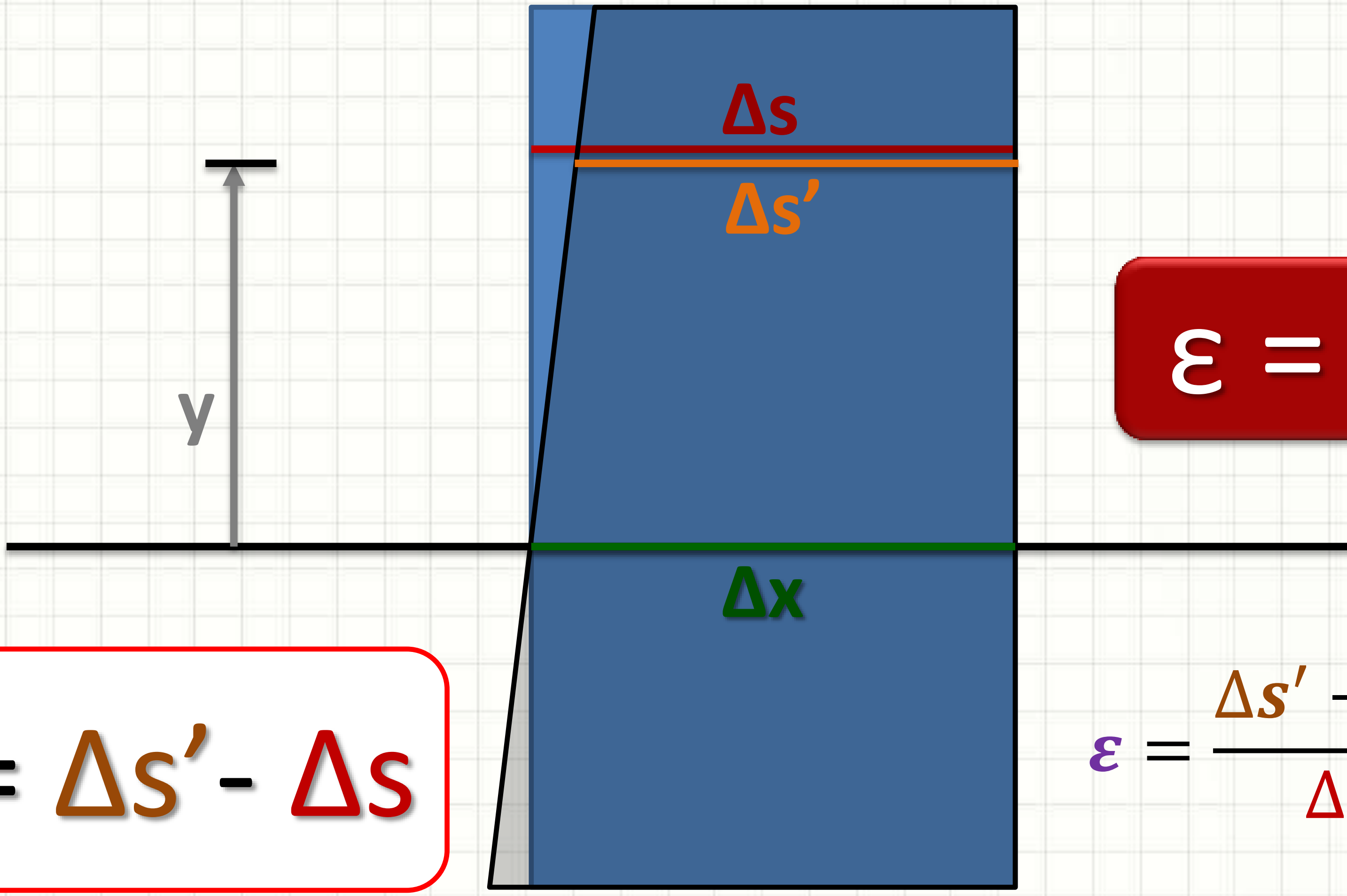
Com Flexão
$\Delta s'(y) \neq cte$



Elemento Deformado

Deformação na Flexão

- Vamos analisar um elemento Δx de perto



$\varepsilon = ?$

$\delta = \Delta s' - \Delta s$

$$\varepsilon = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

Deformação na Flexão

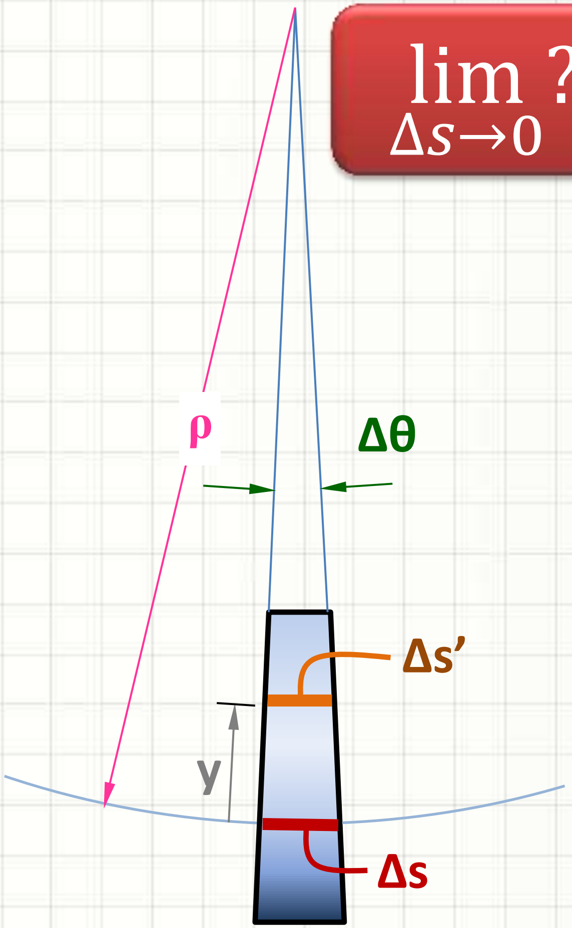
$$\varepsilon = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

$$\varepsilon(y) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s'(y) - \Delta s}{\Delta s}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} ?$$

$$\varepsilon(y) = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{(\rho - y).\Delta\theta - \rho.\Delta\theta}{\rho.\Delta\theta}$$

$$\boxed{\varepsilon(y) = -\frac{y}{\rho}}$$



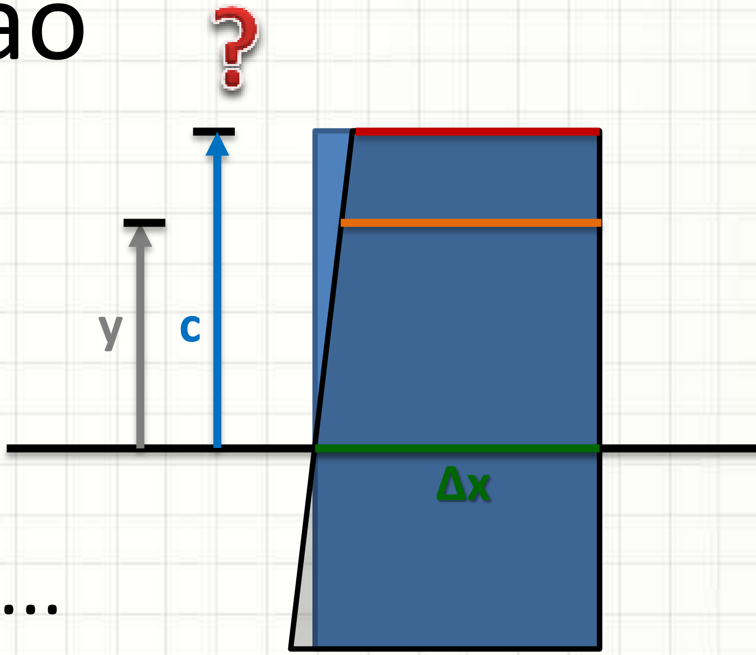
- A deformação depende:
  - Altura na seção transversal y
  - Raio de curvatura da flexão ρ
- Deform. normal longitudinal:
  - **Varia linearmente com y**

Como nos livramos do ρ?

Deformação na Flexão

$$\varepsilon(y) = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon_{máx} = \frac{c}{\rho}$$



- Identificando a proporção...

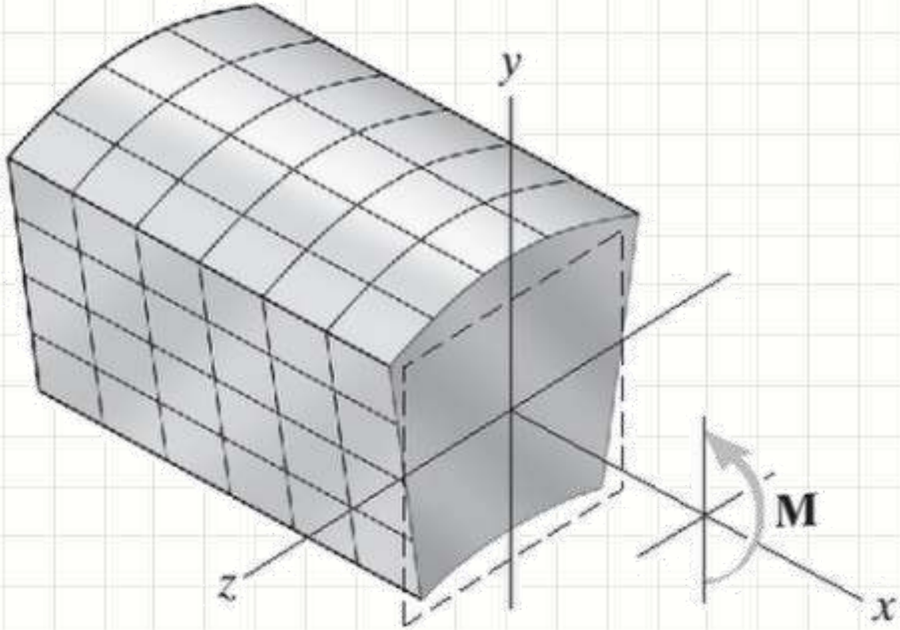
$$\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_{máx}} = \varepsilon(y).\frac{1}{\varepsilon_{máx}} = -\frac{y}{\rho}.\frac{\rho}{c} \rightarrow \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_{máx}} = -\frac{y}{c}$$

$$\boxed{\varepsilon(y) = -\left(\frac{y}{c}\right).\varepsilon_{máx}}$$

Deformação na Flexão

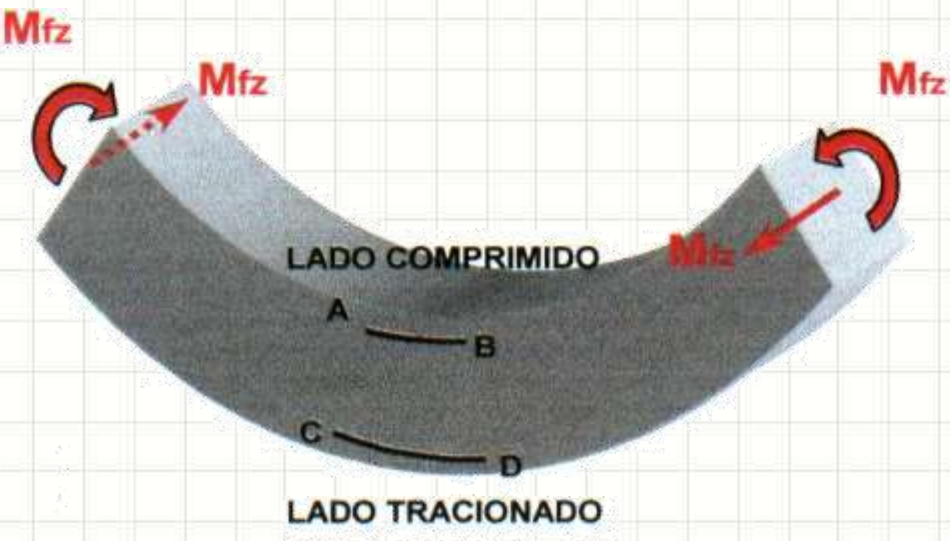
$$\boxed{\varepsilon(y) = -\left(\frac{y}{c}\right) . \varepsilon_{máx}}$$

- Lembre das premissas!
- Há apenas tensões normais longitudinais

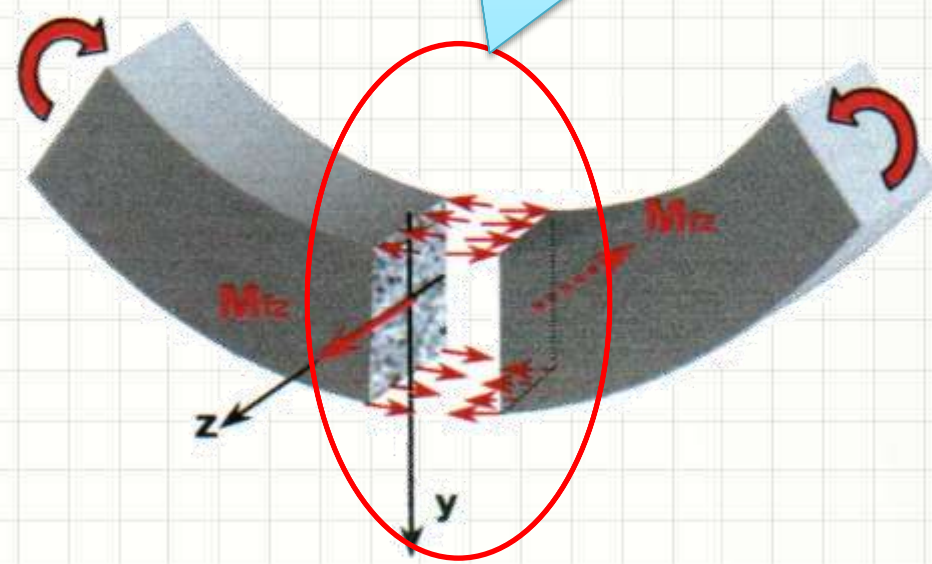


Onde Fica a Linha Neutra?

Onde Fica a Linha Neutra?



Qual o valor das tensões?



Onde Fica a Linha Neutra?

- Voltando na lei de Hooke: $\sigma = E.\varepsilon$
- Então, podemos transformar....

$$\varepsilon(y) = -\left(\frac{y}{c}\right).\varepsilon_{máx}$$

$$\varepsilon(y).E = -\left(\frac{y}{c}\right).\varepsilon_{máx}.E$$

$$\boxed{\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right).\sigma_{máx}}$$

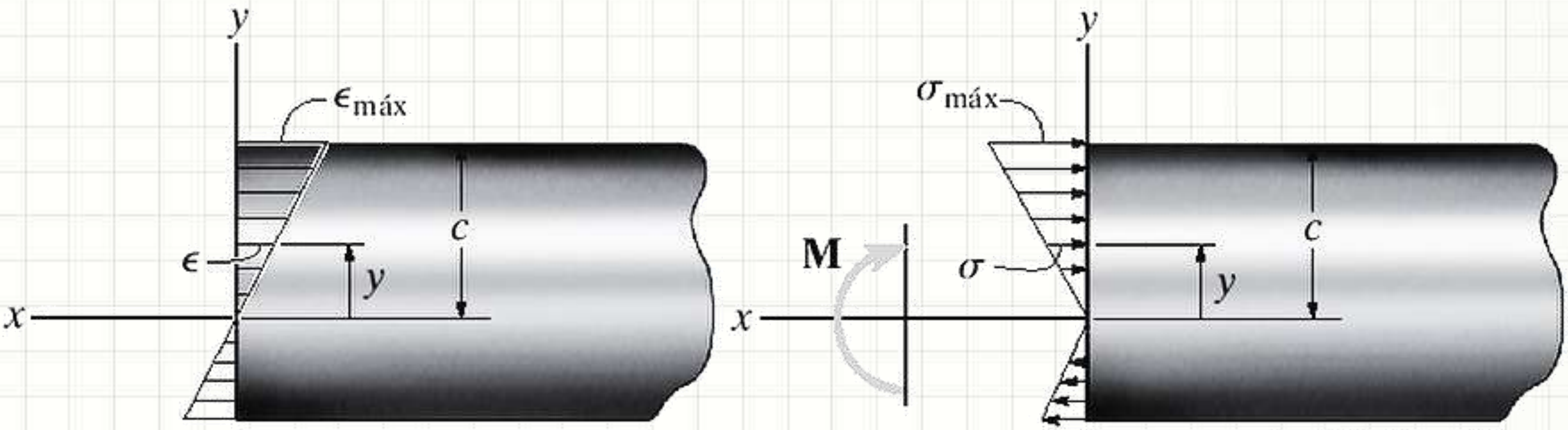
- Como é ε linear com y, σ também!

Onde Fica a Linha Neutra?

- O que significa **ε** e **σ** serem lineares com y?

$$\varepsilon(y) = -\left(\frac{y}{c}\right) . \varepsilon_{máx}$$

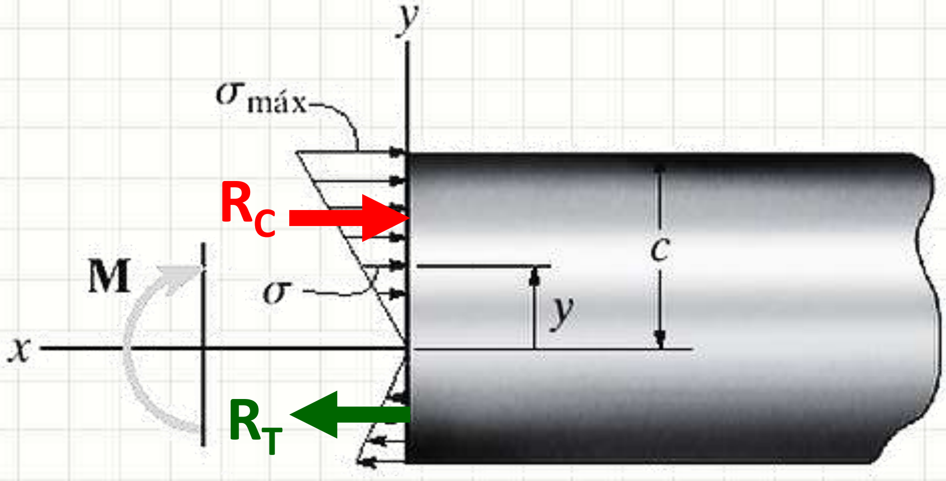
$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right) . \sigma_{máx}$$



Onde Fica a Linha Neutra?

- Sabemos que, por equilíbrio estático

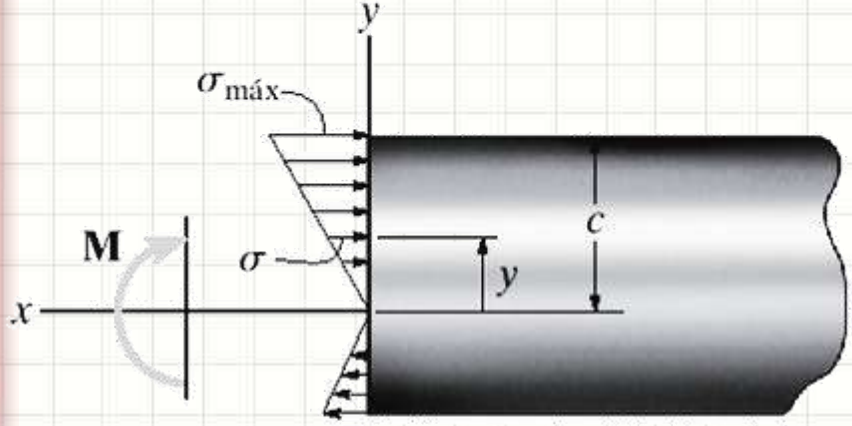
$$F_R = \sum F_x = 0$$

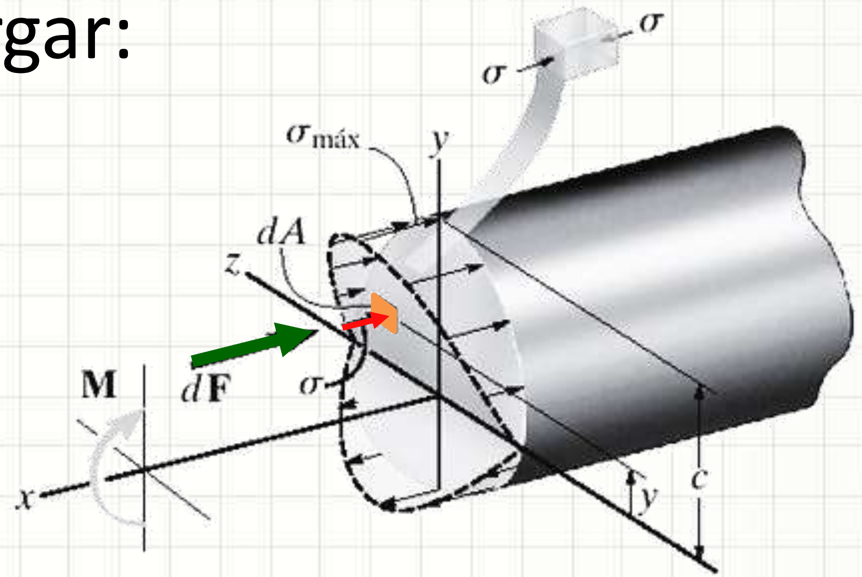


$$R_T - R_C = 0$$

Onde Fica a Linha Neutra?

- Outra forma de enxergar:





$$dF = \sigma . dA$$

$$F_R = 0 = \int_A dF = \int_A \sigma . dA$$

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right) . \sigma_{máx}$$

$$F_R = \int_A -\left(\frac{y}{c}\right) . \sigma_{máx} . dA = 0$$

Onde Fica a Linha Neutra?

- Em outras palavras,

$$\int_A -\left(\frac{y}{c}\right).\sigma_{máx}.dA$$ Tem que valer ZERO!

Isso não tem como valer 0!

$$-\frac{\sigma_{máx}}{c}.\int_A y.dA = \mathbf{0}$$

Quando isso vale 0?

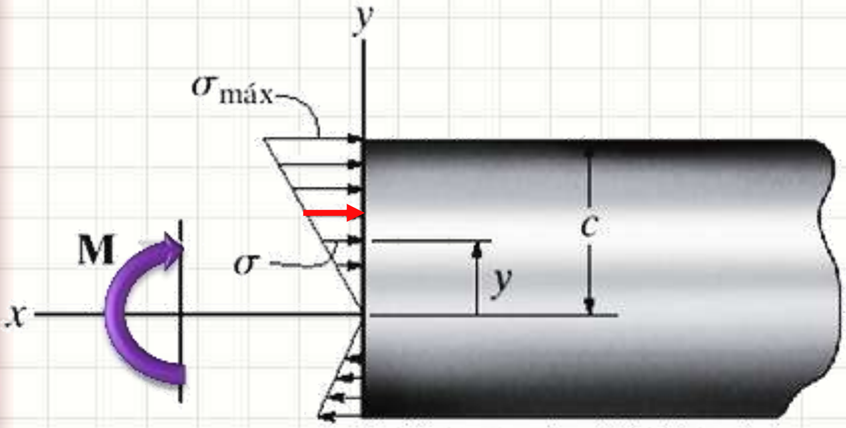
- Para equilíbrio: linha neutra no centroide

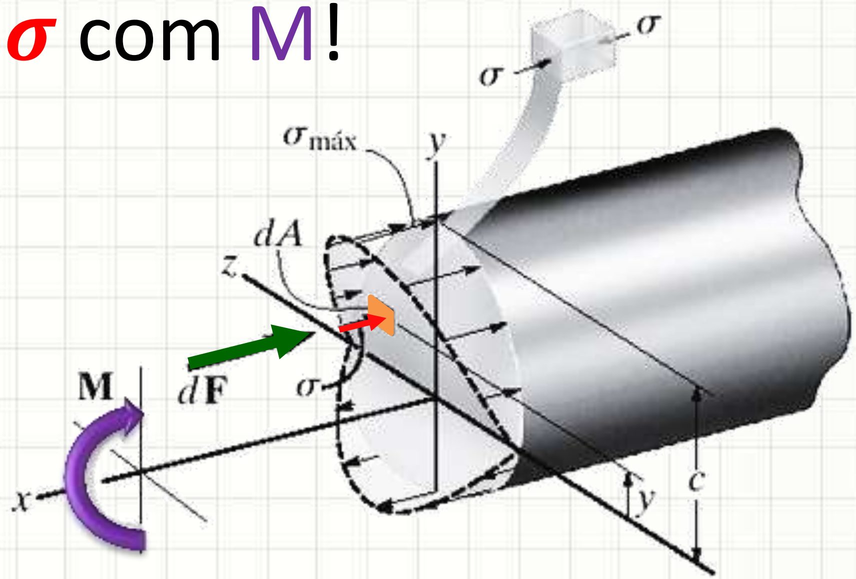
A superfície neutra é aquela que passa pelo eixo do centroide de cada seção transversal!

Fórmula da Flexão

Fórmula da Flexão

- Queremos relacionar $\boldsymbol{\sigma}$ com M!





- Vejamos...

$$\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{dA} \qquad \boldsymbol{M_z} = \int_A -y.\boldsymbol{dF}$$

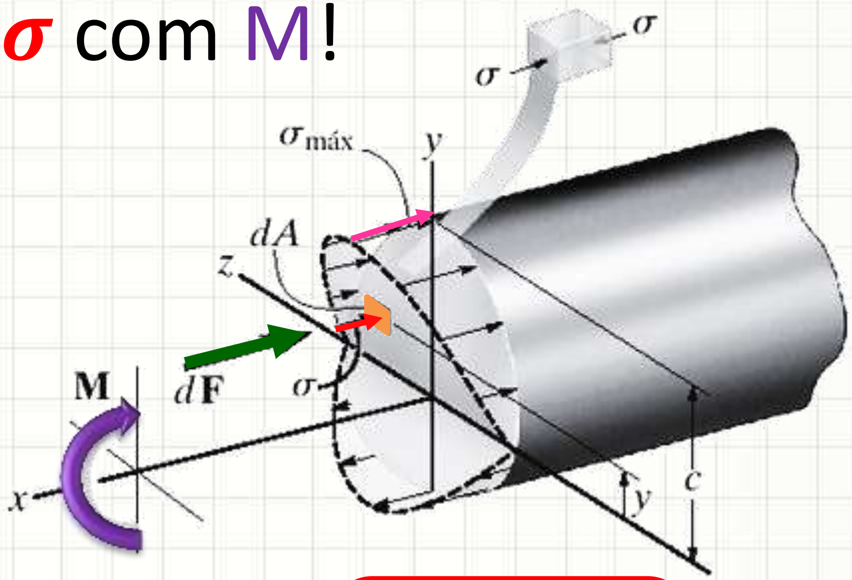
$$\boldsymbol{M_z} = \int_A -y.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{dA}$$

Fórmula da Flexão

$$\boxed{M_z = \int_A -y.\sigma.dA}$$

- Queremos relacionar $\boldsymbol{\sigma}$ com M!
- No entanto...

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right).\sigma_{máx}$$



- Então...

$$M_z = \int_A y.\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx}.dA = \frac{\sigma_{máx}}{c}\boxed{\int_A y^2.dA}\ ?$$

$$M_z = \frac{\sigma_{máx}}{c}.I_z \qquad \text{Ou...} \qquad M_z = \sigma_{máx}.\frac{I_z}{c}$$

Fórmula da Flexão

$$M_z = \sigma_{máx}.\frac{I_z}{c}$$ Ou... $$M_z = \sigma_{máx}.w$$

- Módulo resistente: $w = \frac{I_z}{c}$
- Isolando o $\sigma_{máx}$ ...

$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}}$$ Ou... $$\sigma_{máx} = \frac{M}{w}$$

Fórmula da Flexão

- Tensão em qualquer altura da seção:

$$\boxed{\sigma = -\frac{M.y}{I}}$$

Analogia com Fórmula da Torção

- Compare:

Flexão

$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

Torção

$$\tau_{máx} = \frac{T.R}{J}$$

Exemplo

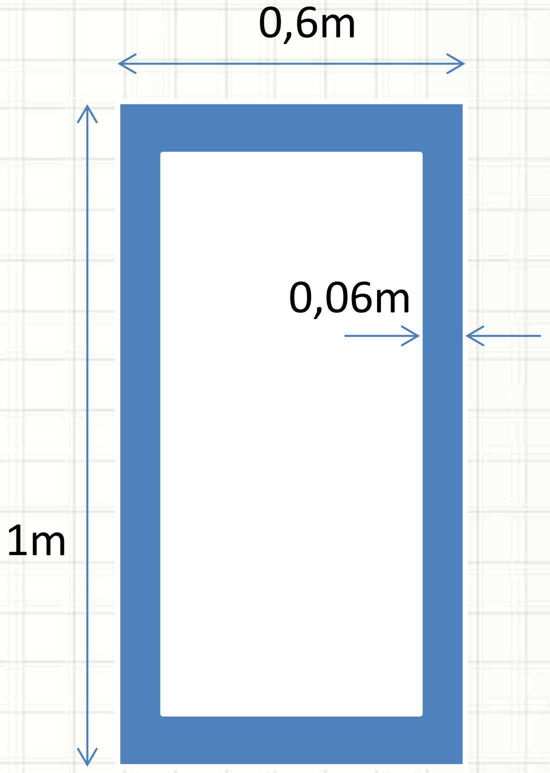
- Calcule o Módulo Resistente

$$I_C = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,6.1^3}{12} = 0,05$$

$$I_V = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,48.0,88^3}{12} \cong 0,027$$

$$I = I_C - I_V = 0,023m^4$$

$$w = \frac{I}{c} = \frac{0,023}{0,5} = 0,046m^3$$



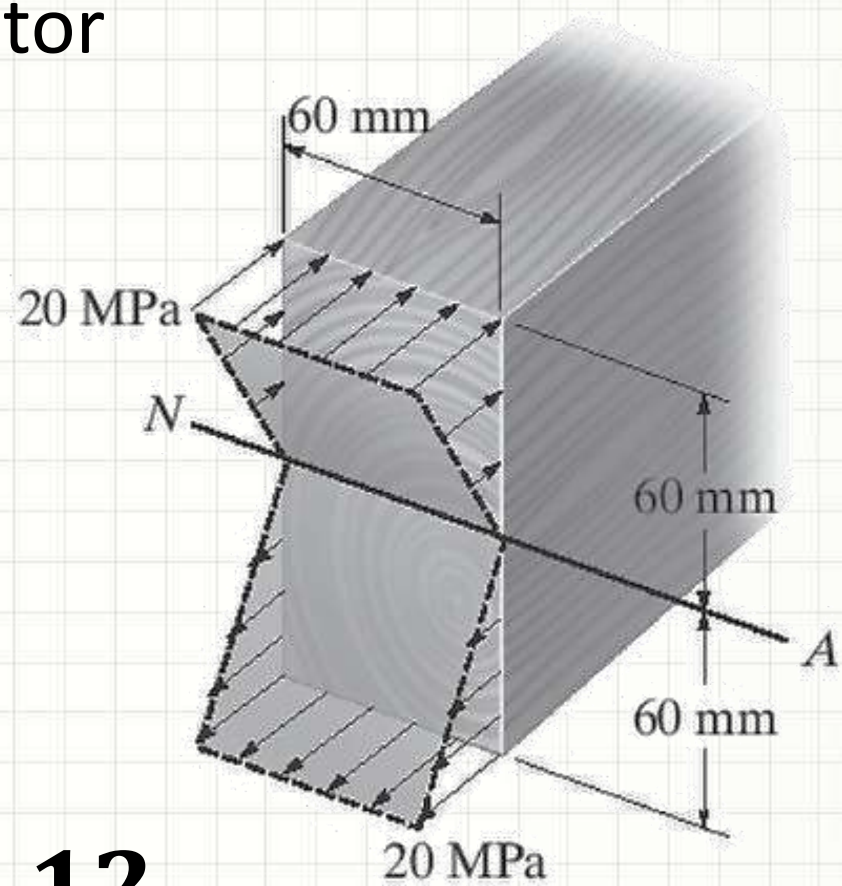
Exemplo

- Calcule o Momento Fletor

$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

- Mas...

$$I = \frac{b.h^3}{12}$$



$$\sigma_{máx} = \frac{M.c.12}{b.h^3}$$

Exemplo

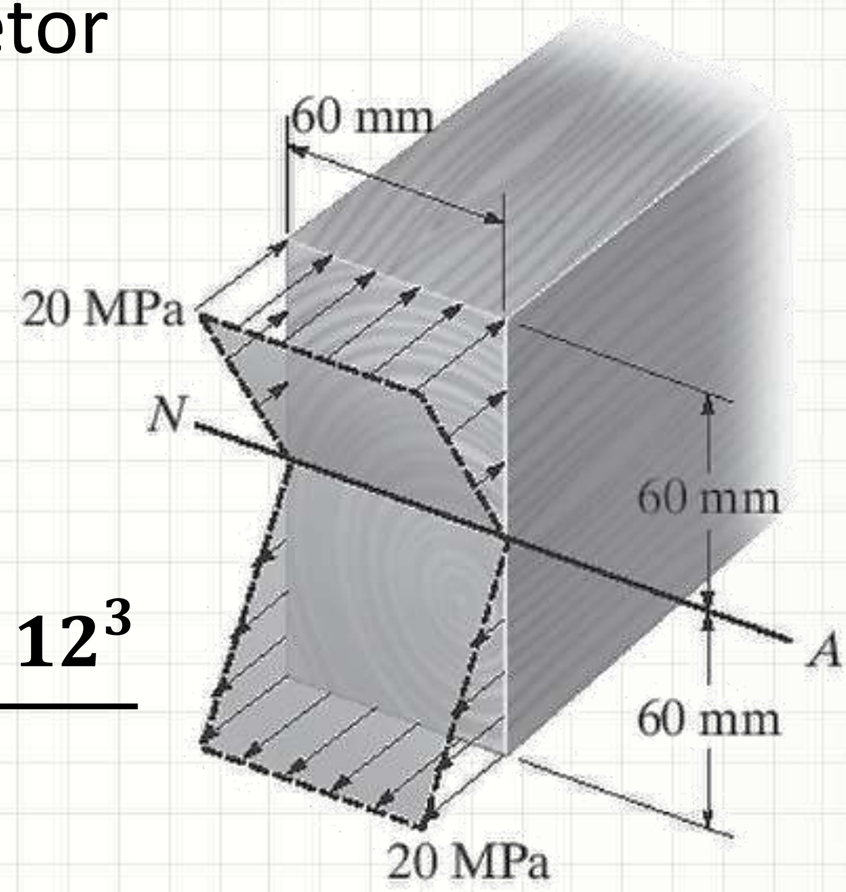
- Calcule o Momento Fletor

$$\sigma_{máx} = \frac{M.c.12}{b.h^3}$$

$$M = \frac{\sigma_{máx}.b.h^3}{c.12}$$

$$M = \frac{20.10^6.0,06.0,12^3}{0,06.12}$$

$$\boxed{M \cong 2,9kN.m}$$



Exercício Pré-Intervalo

Exercício

- Calcule $\sigma_{máx}$ para r = 20cm e M = 200kN.m

$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

$$I = \frac{\pi.R^4}{4}$$

Exercício

- Calcule $\sigma_{máx}$ para r = 20cm e M = 200kN.m

$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

$$I = \frac{\pi.R^4}{4}$$

$$I = \frac{\pi.0,2^4}{4} = 0,0004\pi$$

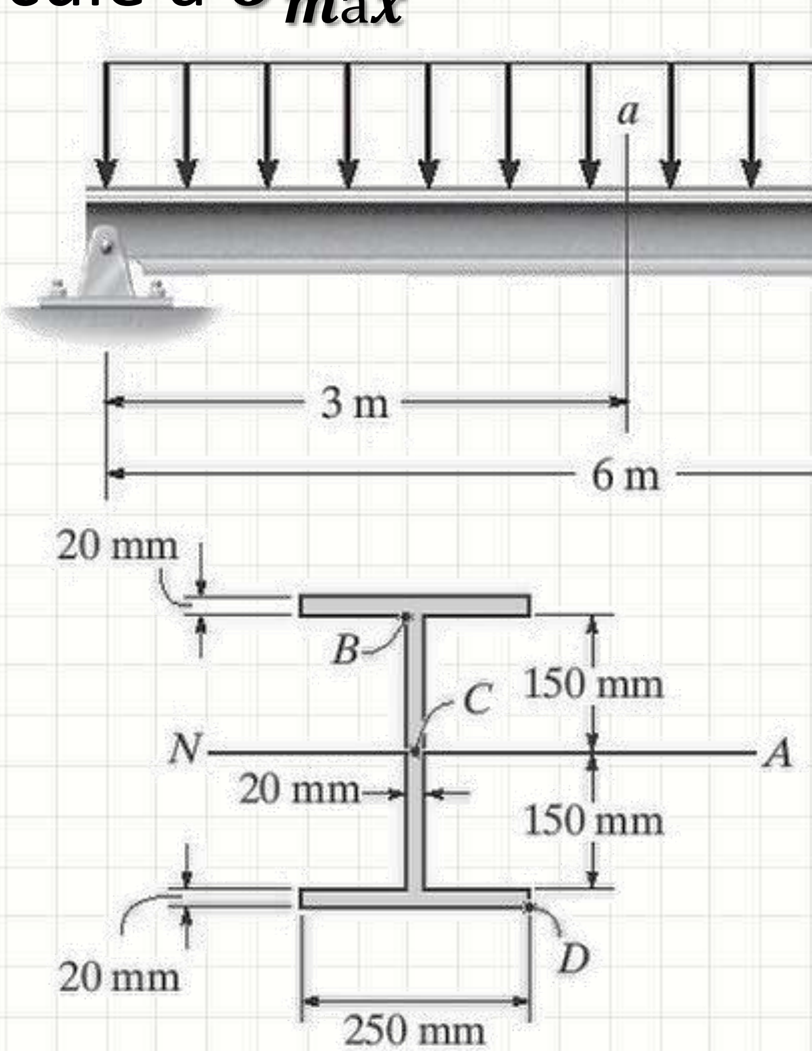
$$\sigma_{máx} = \frac{200000.0,2}{0,0004\pi} \cong 31,8MPa$$

Pausa para o Café

Exemplo Mais Completo

Exemplo: Flexão

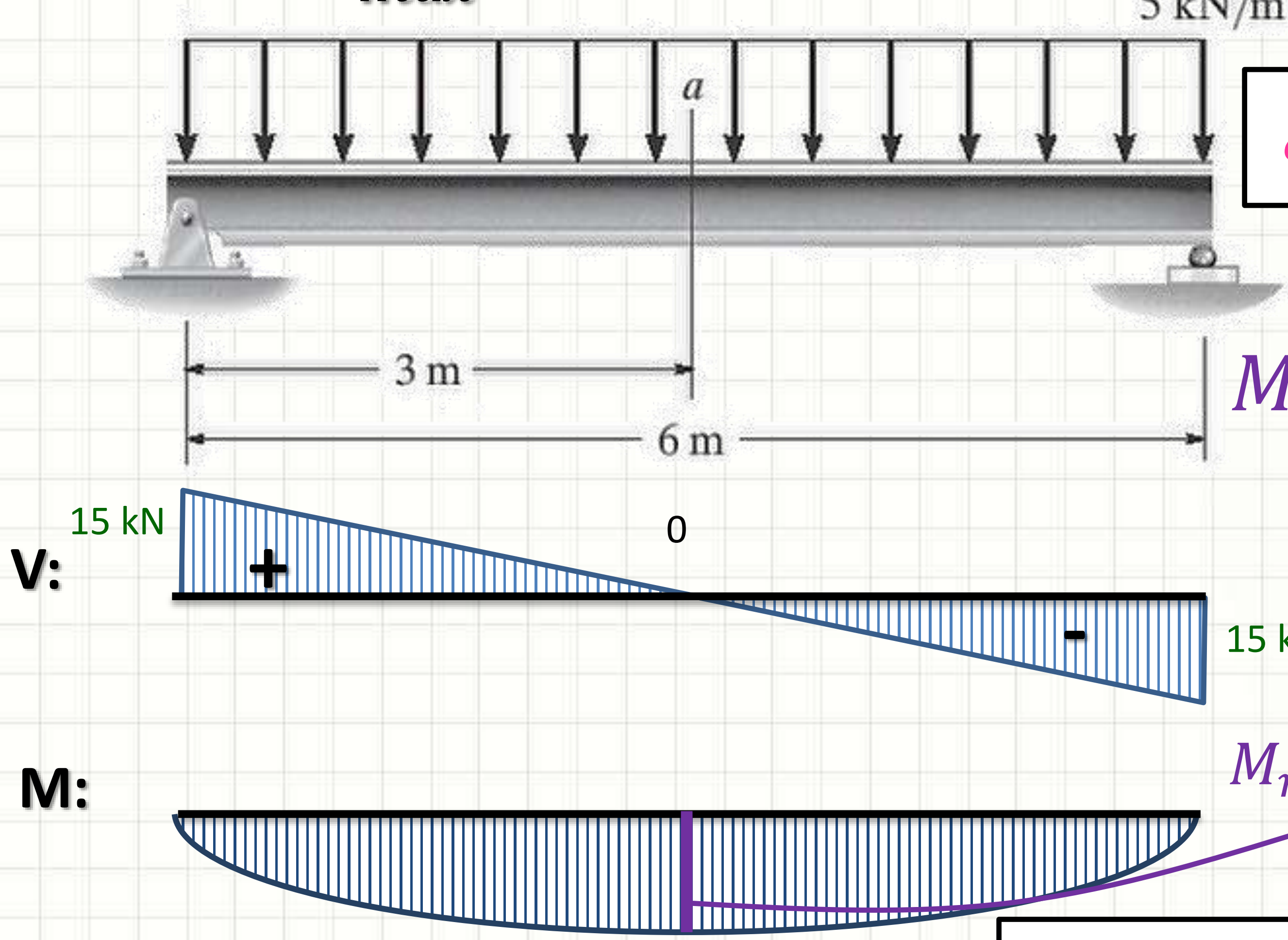
- Calcule a $\boldsymbol{\sigma_{máx}}$



$$\sigma_{máx} = \frac{M \cdot c}{I}$$

Exemplo: Flexão – Diagrama de M

- Calcule a $\boldsymbol{\sigma_{máx}}$



$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}}$$

$$M_{máx} = ?$$

$$M_{máx} = \frac{p.L^2}{8}$$

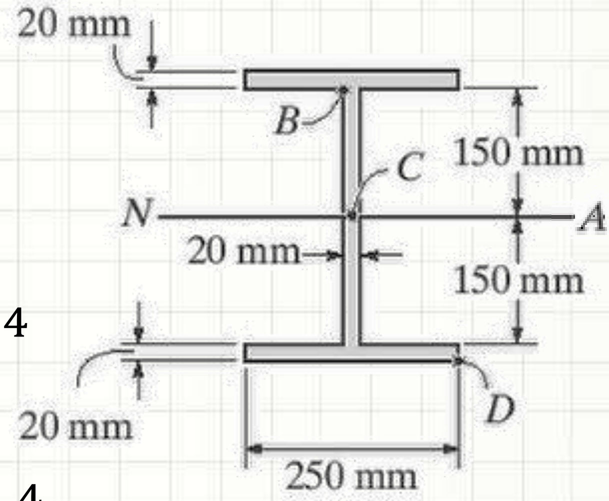
$$\boxed{M_{máx} = 22,5kN.m}$$

Exemplo: Flexão – Cálculo de I

- Calcule a $\boldsymbol{\sigma_{máx}}$

$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}}$$

$$\boxed{M = 22{,}5\ kN.m}$$



$$I = I_1 - 2.I_2$$

$$I_1 = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0{,}25.0{,}34^3}{12} \cong 8{,}2.10^{-4}m^4$$

$$I_2 = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0{,}115.0{,}3^3}{12} \cong 2{,}6.10^{-4}m^4$$

$$I = 8{,}2.10^{-4} - 2.2{,}6.10^{-4}$$

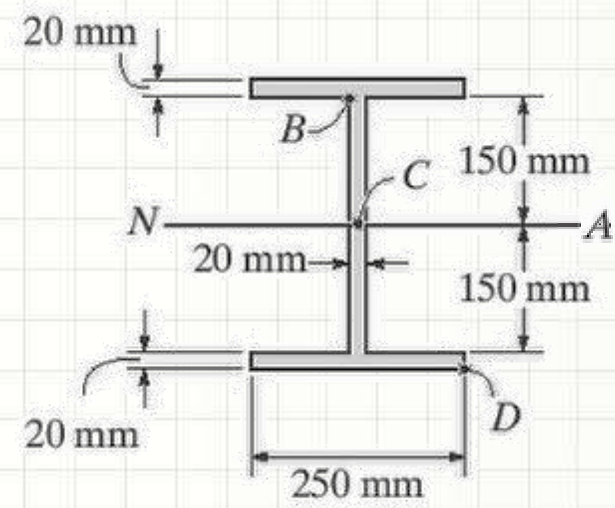
$$\boxed{I = 3{,}0.10^{-4}m^4}$$

Exemplo: Flexão – Cálculo de $\sigma_{máx}$

- Calcule a $\sigma_{máx}$

$$M = 22{,}5\ kN.m$$

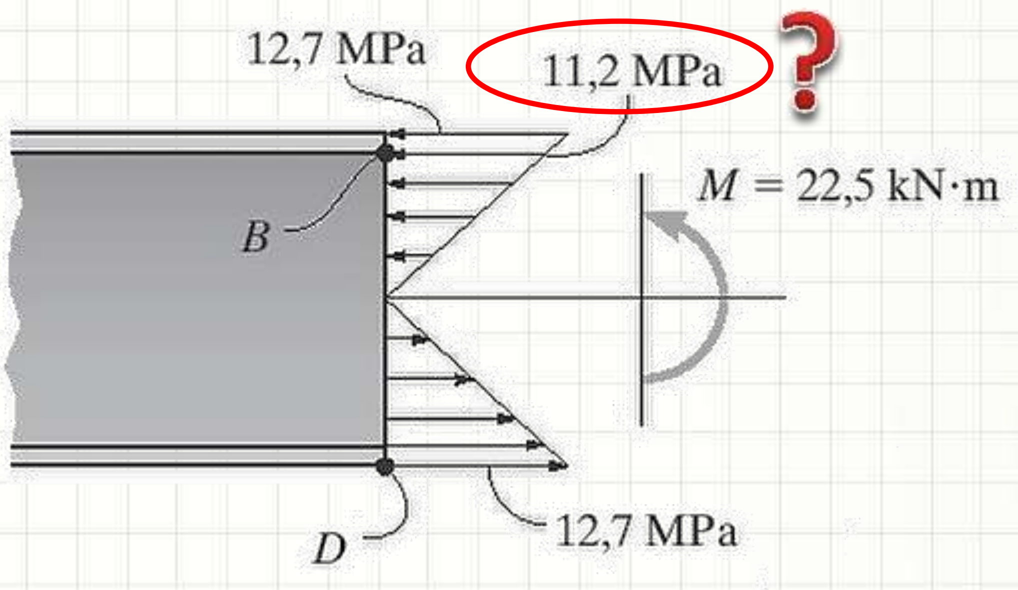
$$I = 3{,}0.10^{-4} m^4$$



$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{22500.0{,}17}{0{,}0003}$$

$$\boxed{\sigma_{máx} \cong 12{,}7MPa}$$

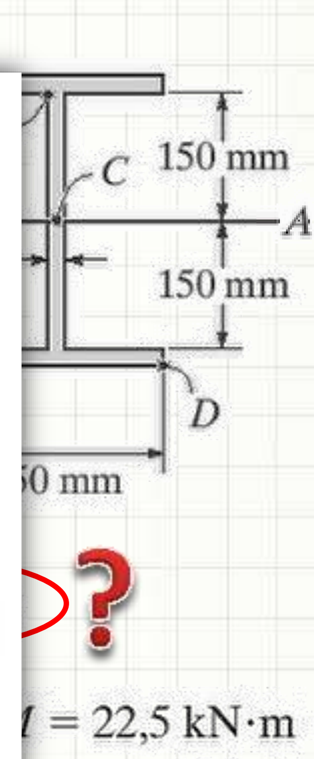


$$\sigma = \frac{22500.0{,}15}{0{,}0003}$$

$$\sigma = 11{,}2MPa$$

Exemplo: Flexão – Cálculo de $\boldsymbol{\sigma_{máx}}$

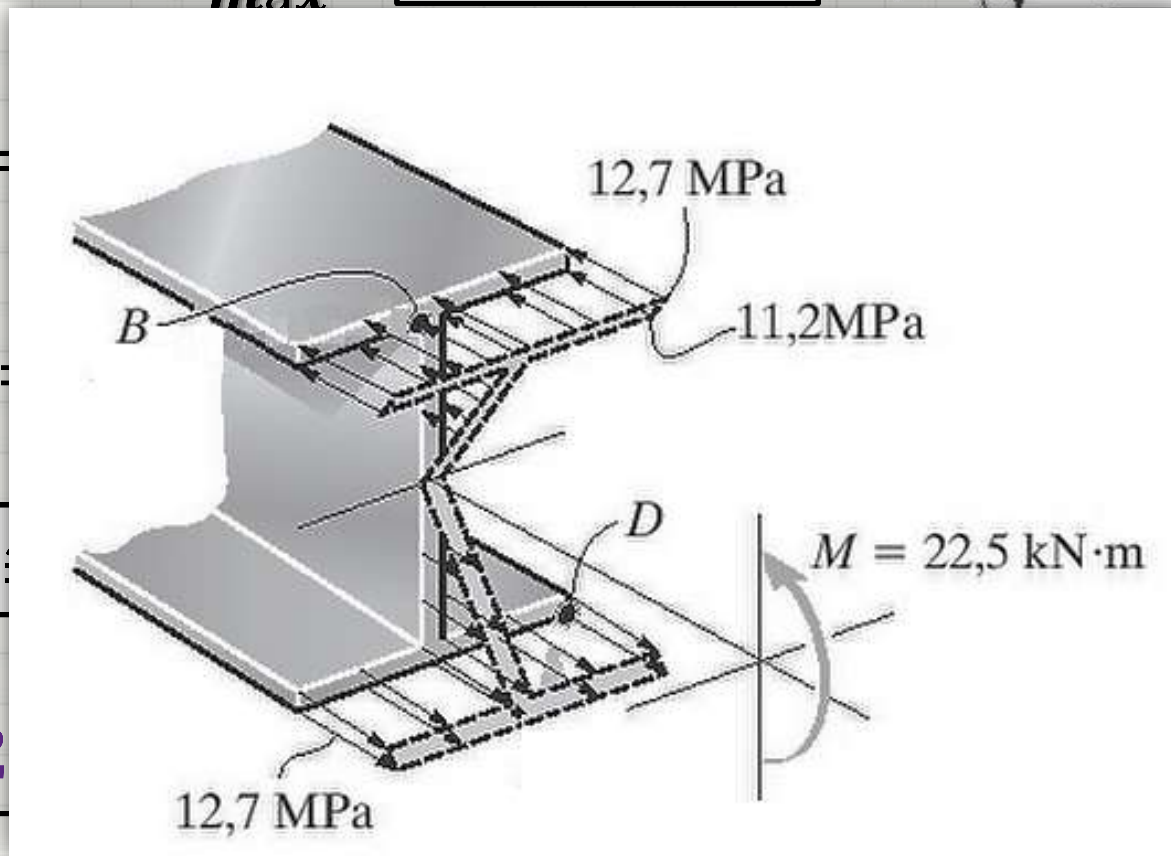
- Calcule a $\boldsymbol{\sigma_{máx}}$ $\boxed{M = 22{,}5\ kN.m}$



$\sigma_{máx} =$

$\sigma_{máx} =$

$\boxed{\sigma_{máx} =}$



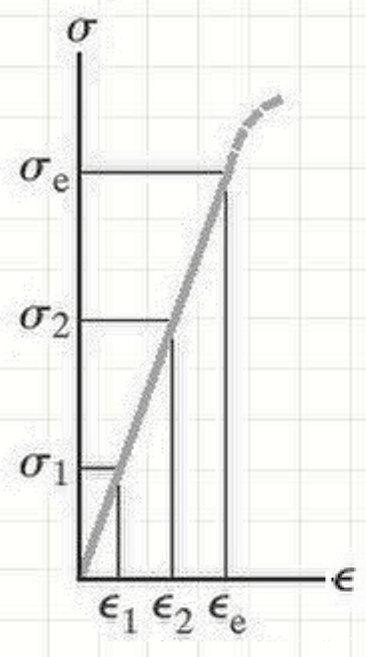
$\sigma = \frac{2}{0,0003}$

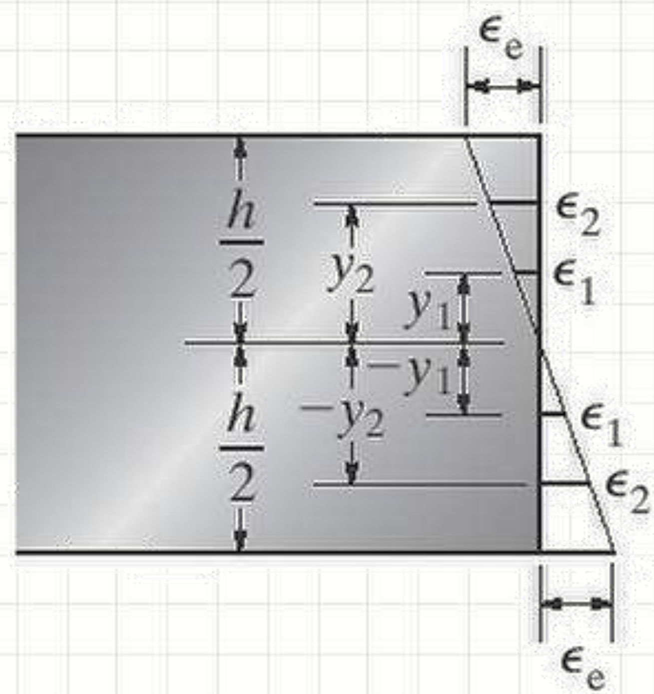
$\sigma = 11,2MPa$

Flexão Inelástica

Flexão Inelástica

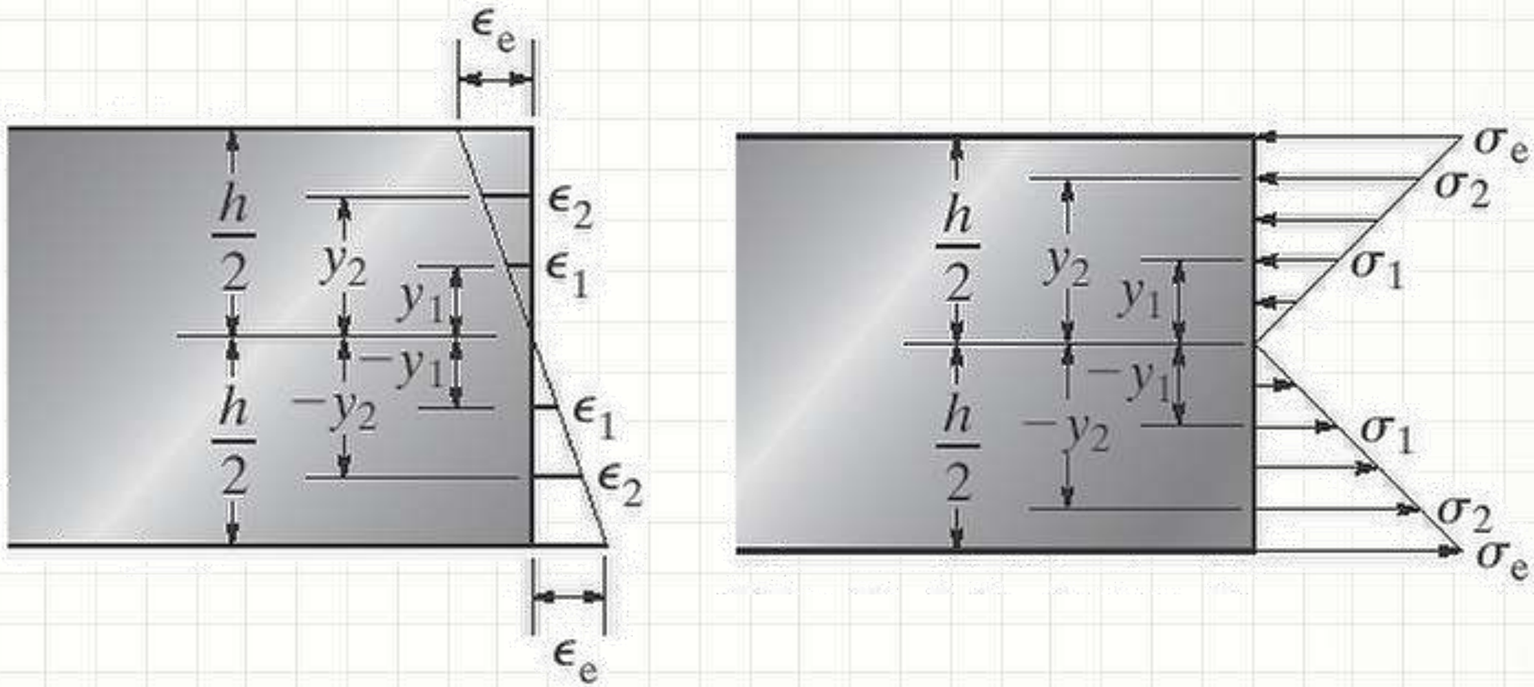
- Momento Elástico Máximo
  - Fibra superior e inferior escoando
  - Seção transversal também simétrica ao eixo de M





Flexão Inelástica

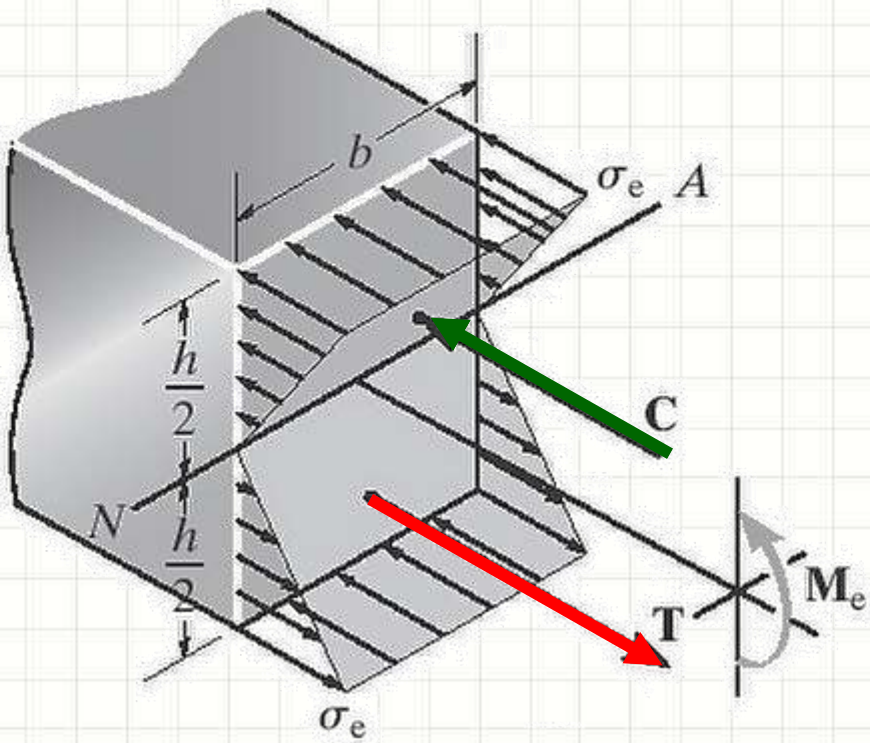
- Momento Elástico Máximo
  - Pela lei de Hooke...



Flexão Inelástica

Maior momento resistente "sem estragar"

- Cálculo do **Momento Elástico Máximo**
  - Retangular, em 3D...



- Cálculo pelo volume

$$M_e = C.d + T.d$$

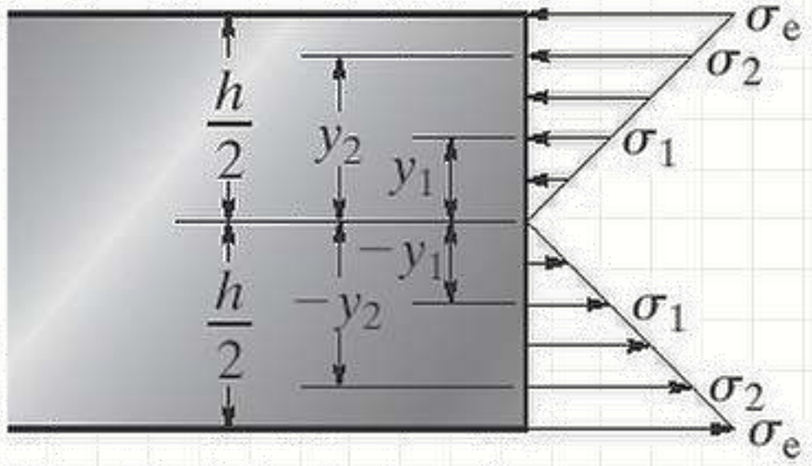
- Ou...

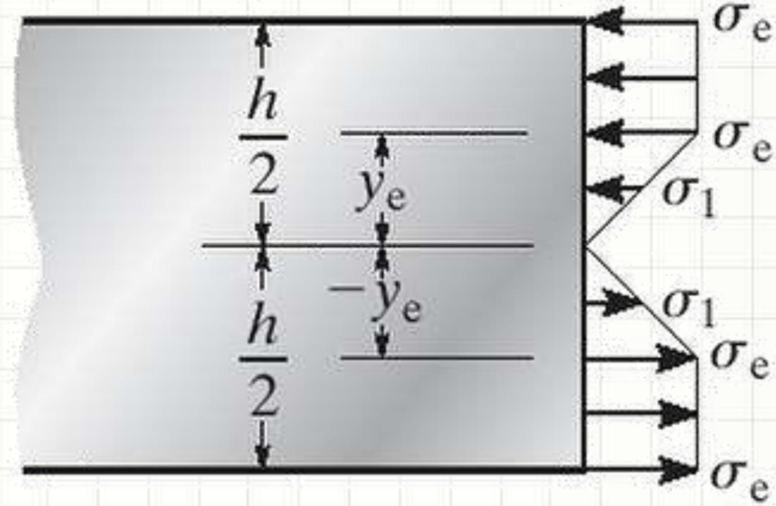
$$\boldsymbol{M_e = \sigma_e \cdot \frac{I}{c}}$$

$$\boldsymbol{M_e = \sigma_e \cdot \frac{b.h^2}{6}}$$

Flexão Inelástica

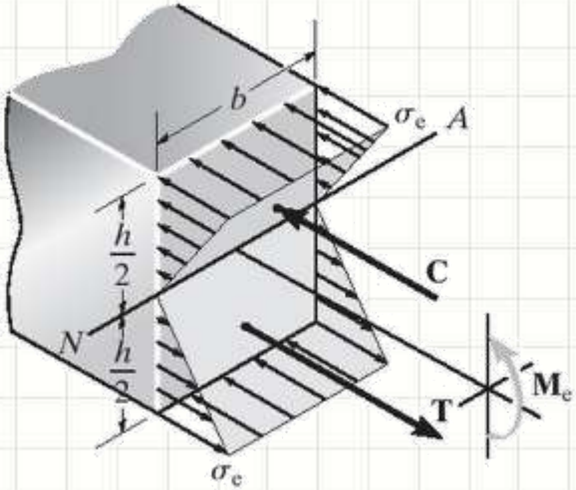
- Momento Plástico Máximo
  – Toda a seção escoando

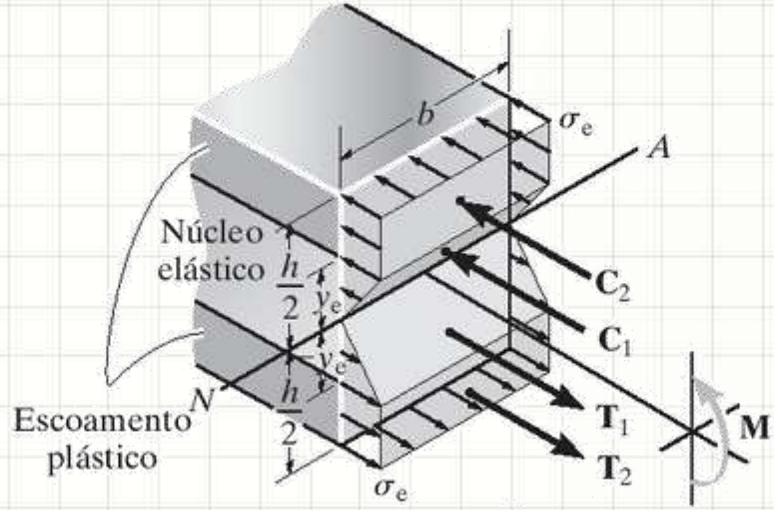


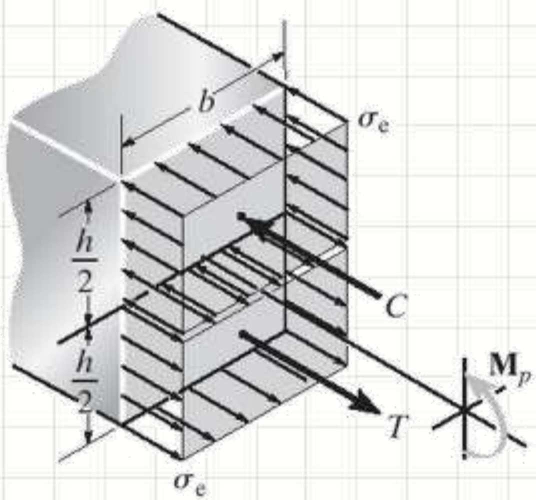


Flexão Inelástica

- Momento Plástico Máximo

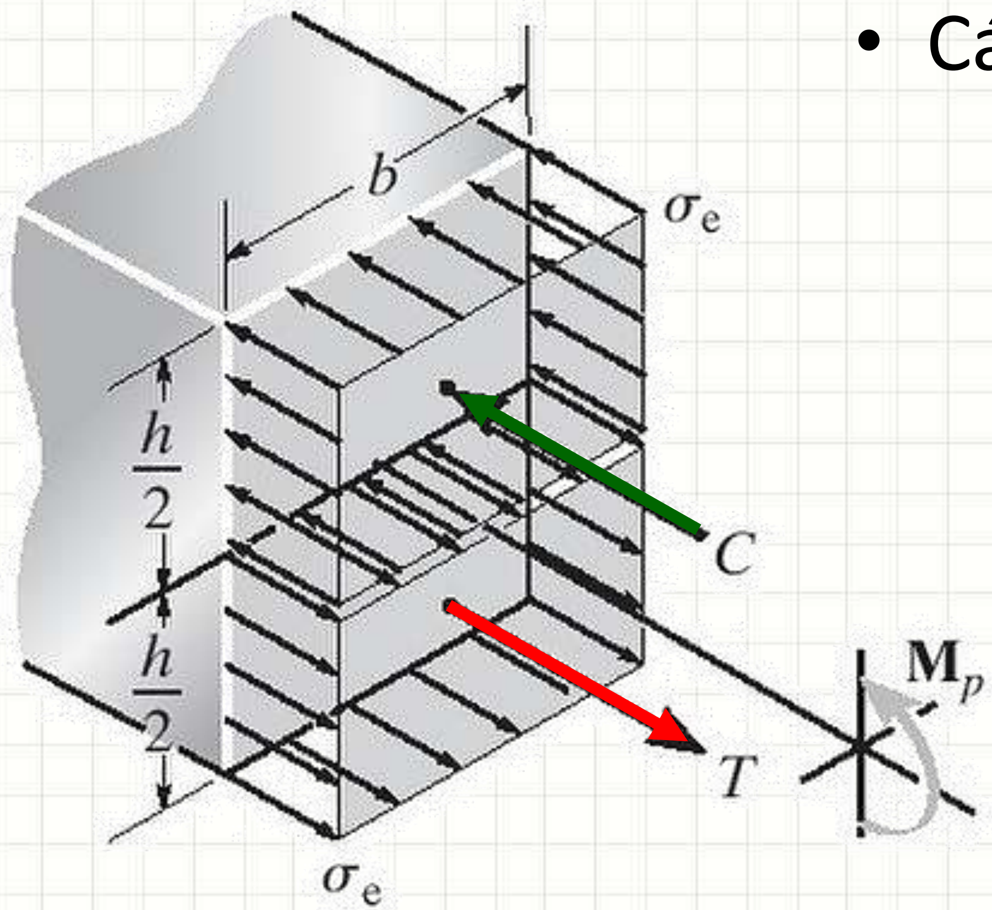






Flexão Inelástica

- Cálculo do Momento Plástico Máximo



- Cálculo pelo volume

$M_p = C.d + T.d$

$$M_p = \frac{b.h^2.\sigma_e}{4}$$

Flexão Inelástica

- Fator de Forma: Relação entre Mp e Me
  - Para **seção retangular**:

$$M_p = \frac{b.h^2.\sigma_e}{4} \qquad M_e = \frac{b.h^2.\sigma_e}{6}$$

$$K = \frac{M_p}{M_e}$$

$$\boxed{K = 1,5}$$

- No limite, viga retangular aguenta 50% a mais
- Manuais trazem K para cada seção

Conclusões

Resumo

- Flexão Pura causa uma deformação
  - Linear com a distância do eixo
  - Provoca tensões lineares com distância do eixo
- A fórmula da flexão permite calcular as tensões normais pelo momento fletor
- Elasto-plásticos: resistência última majorada
- **<u>Exercitar</u>: Exercícios Hibbeler**

- E em pilares, com mais de um momento?
- Compressão e flexão simultâneas?

Para Treinar

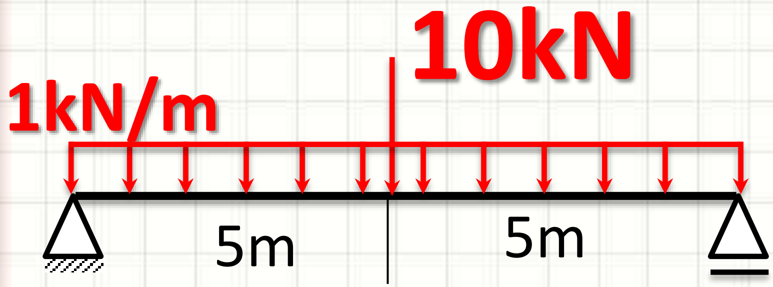
Para Treinar em Casa

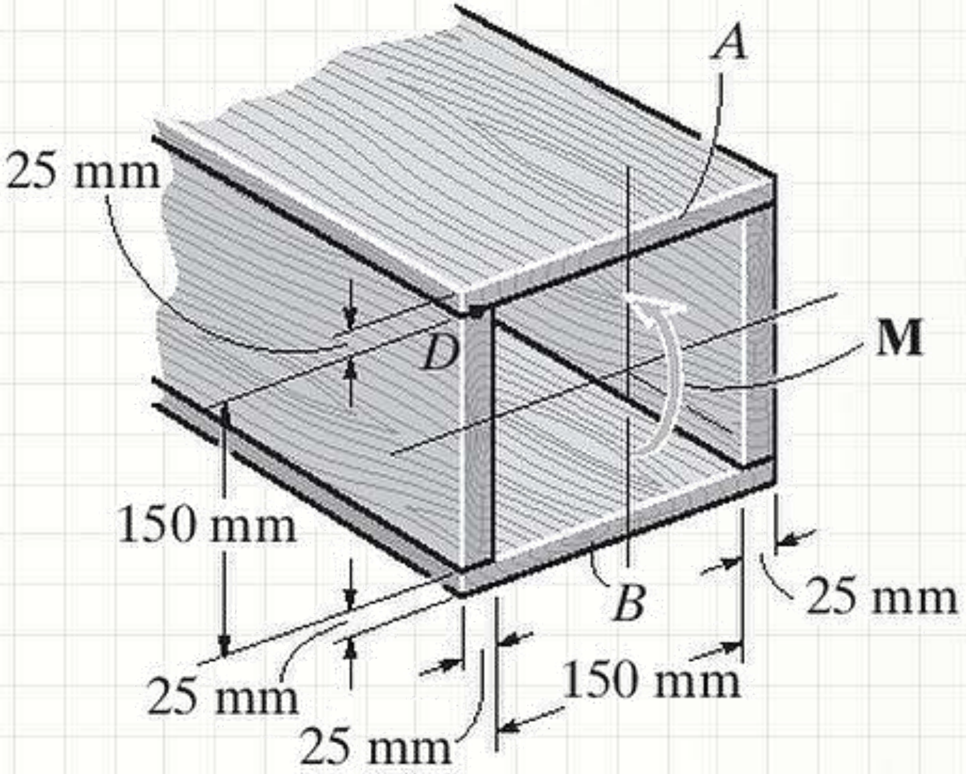
- Mínimos:
  - Exercícios 6.45, 6.50, 6.73, 6.74
- Extras:
  - Exercícios 6.51, 6.53, 6.90, 6.94

EXERCÍCIO NO SAVA

Exercício – Entrega Individual

- Calcule a $\sigma_{máx}$ na viga abaixo:



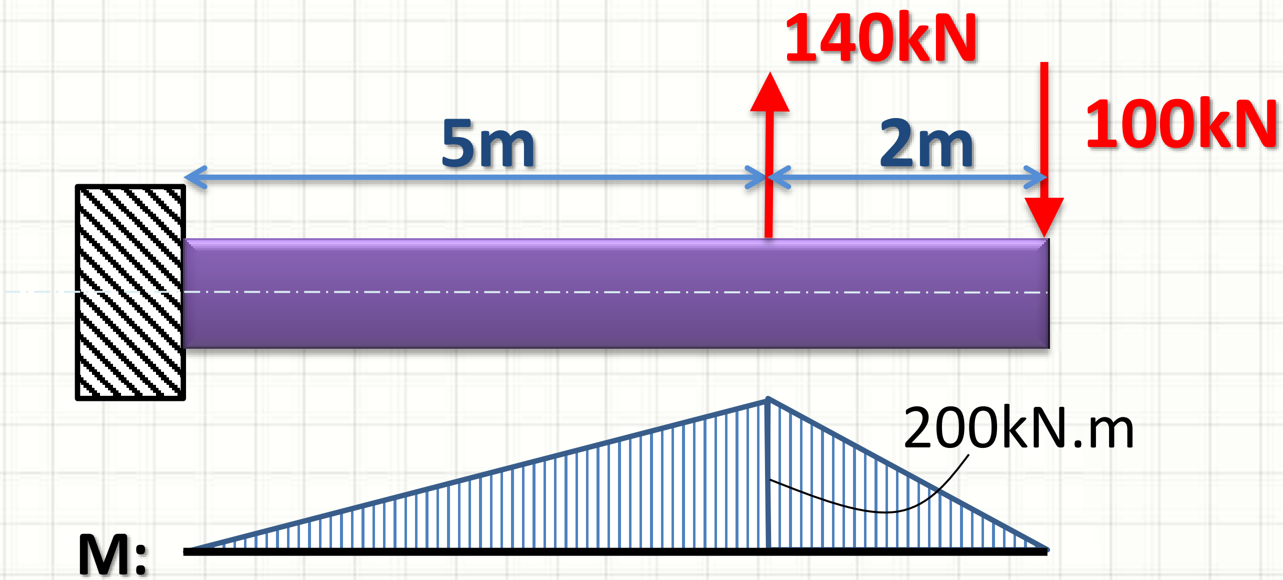


Perguntas?

Exercício em Sala

Exercício – Individual, para **Agora**!

- Trace o diagrama de momento fletor da barra abaixo e calcule a tensão de tração máxima da barra, com seção quadrada maciça de **lado 30cm**



$$\sigma_{máx} = \frac{M.c}{I}$$

$$\boxed{\sigma_{máx} \cong 44,4\ MPa}$$