Atualização: 29/03/2019 – Prof. Dr. Daniel Jorge Caetano

Aula 05: O Problema do Transporte

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar a modelagem do problema do transporte e capacitar para sua solução com o uso de algoritmo específico.

Bibliografia: AHUJA *et al*.; MOREIRA; ARENALES *et al.*

INTRODUÇÃO

Conceitos Chave:

- Problema: incluir distribuição no sistema da Qualquer-Cola
- Problema do Transporte
    * Produtores
    * Consumidores
    * Deslocamentos com custos diferentes
    * Minimizar custo
- Simplex?

Ao desenvolver um sistema de vendas de Qualquer-Cola online, para donos de bares, seu cliente solicita que você inclua um sistema que ajude-o a planejar a distribuição dos produtos. A Qualquer-Cola tem uma série de fábricas/centros de distribuição, cada um deles com uma determinada produção, e deseja saber quantos engradados enviará de cada centro de distribuição para cada ponto de venda, sendo que cada um destes pontos possui uma demanda específica, com o objetivo de reduzir os custos de transporte.

Este tipo de problema, bastante comum, é denominado "Problema do Transporte", e se refere ao problema básico em que temos uma determinada quantidade de origens de um produto (fábricas, por exemplo), com uma capacidade de produção limitada, e destinos para este produto (lojas, por exemplo), que possuem uma determinada demanda pelos produtos.

Em geral, é possível transportar de qualquer fábrica para qualquer loja. Entretanto, os custos podem variar bastante em cada caso. Por esta razão, existe uma dúvida clássica: quanto levar de cada fábrica para cada loja de modo que o custo de transporte seja mínimo?

Este tipo de problema pode ser modelado e resolvido pelo Simplex, mas veremos também uma forma mais rápida e eficiente de solucioná-los.

1. UM PROBLEMA DE TRANSPORTE

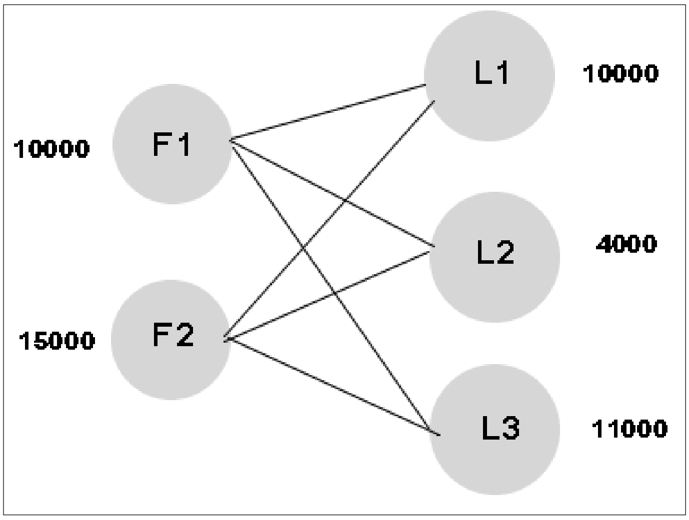
Conceitos Chave:

- Fabricas => Capacidade de Produção
- Lojas => Demanda
- Custos F para L
- Grafo

Duas fábricas (F1 e F2) possuem capacidade de produção de 10000 e 15000 engradados de Qualquer-Cola respectivamente, fornecendo um total de 25000 engradados que devem ser entregues em 3 lojas (L1, L2 e L3), que possuem demandas de 10000, 4000 e 11000 engradados respectivamente, completando demanda por 25000 engradados. Os custos de transporte (por engradado) de uma fábrica até uma loja são:

	L1	**L2**	**L3**
F1	13	8	9
F2	12	9	10

Qual a quantidade de engradados que deve ser levada de cada fábrica Fx para cada loja Ly, de forma a minimizar o custo de transporte?



2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Conceitos Chave:

- Variáveis de Decisão: X_{ij} => Quanto de i para j?
- Função Objetivo: Minimizar soma dos custos de todos os deslocamentos
- Restrição de Envio: Envio de Fábricas $\leqslant$ Produção
- Restrição de Recepção: Recepção de Lojas $\geqslant$ Demanda
- Forma Padrão? Simplex?

A primeira coisa a se analisar, são as variáveis de decisão, que é baseada na pergunta original: "quanto deve ser transportado de cada fábrica para cada loja?".

Assim, se a quantidade de engradados transportada da fábrica **i** para a loja **j** for chamada de X_{ij}, pode-se dizer, por exemplo, que X_{11} representa a quantidade de engradados que deve ser transportada da fábrica 1 para a loja 1. Da mesma forma, X_{12} representa a quantidade de engradados que deve ser transportada da fábrica 1 para a loja 2, X_{21} representa a quantidade de engradados que deve ser transportada da fábrica 2 para a loja 1 e assim por diante.

Como decorrência, se transportar um engradado da fábrica 1 para a loja 1 custa \$ 13 (como indicado na tabela) e o número de engradados transportado da loja 1 para a fábrica 1 é X_{11}, então pode-se dizer que o custo do transporte dos engradados da fábrica 1 para a loja 1 é:

$$\mathbf{13 * X_{11}}$$

Se nenhum engradado for transportado, $X_{11} = 0$, então o custo será 13 * 0 = 0... ou seja, se nada for transportado da fábrica 1 para a loja 1, o custo será zero. Se um engradado for transportado, $X_{11} = 1$ e o custo será 13 * 1= 13. Finalmente, se 100 engradados forem transportados da fábrica 1 para a loja 1, $X_{11} = 100$ e o custo será 13 * 100 = 1300.

O raciocínio pode ser feito para todas as outras possibilidades de transporte; o custo total do transporte será a soma de todas estas parcelas que, neste caso, podem ser representadas da seguinte forma.

$$CT = 13 * X_{11} + 8 * X_{12} + 9 * X_{13} + 12 * X_{21} + 9 * X_{22} + 10 * X_{23}$$

Como o objetivo é minimizar o custo de transporte, a função objetivo fica:

$$[MIN]\ 13 * X_{11} + 8 * X_{12} + 9 * X_{13} + 12 * X_{21} + 9 * X_{22} + 10 * X_{23}$$

Para um modelo matemático completo falta, ainda, definir as restrições do problema. Neste tipo de problema há basicamente 2 conjuntos de restrições: a) Nenhuma fábrica pode enviar mais do que produz; b) Nenhuma loja pode receber menos do que necessita.

2.1. Nenhuma fábrica envia mais do que produz

A soma de tudo que sai de uma fábrica deve ser menor ou igual à sua produção. No caso da fábrica 1, que produz 10000 unidades, seu envio total é $X_{11} + X_{12} + X_{13}$ (soma daquilo que ela envia para as lojas 1, 2 e 3, respectivamente). Assim, a primeira restrição será:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leqslant 10000$$

No caso da fábrica 2, que produz 15000, e seu envio total é $X_{21} + X_{22} + X_{23}$ (soma daquilo que ela envia para as lojas 1, 2 e 3, respectivamente). A segunda restrição, então, fica:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leqslant 15000$$

2.2. Nenhuma loja recebe menos do que necessita

A loja 1 precisa receber 10000 unidades. Tudo que ela recebe é $X_{11} + X_{21}$ (soma do que é enviado para ela pelas fábricas 1 e 2, respectivamente). Assim, a terceira restrição será:

$$X_{11} + X_{21} \geqslant 10000$$

Analogamente, as restrições quatro e cinco (referentes às lojas 2 e 3) são:

$$X_{12} + X_{22} \geqslant 4000$$
$$X_{13} + X_{23} \geqslant 11000$$

Desta maneira, o modelo final será:

$$\begin{array}{ll}
\text{F.O.} & [\text{MIN}]\ 13 * X_{11} + 8 * X_{12} + 9 * X_{13} + 12 * X_{21} + 9 * X_{22} + 10 * X_{23} \\
\text{S.A.} & X_{11} + X_{12} + X_{13} \leqslant 10000 \\
 & X_{21} + X_{22} + X_{23} \leqslant 15000 \\
 & X_{11} + X_{21} \geqslant 10000 \\
 & X_{12} + X_{22} \geqslant 4000 \\
 & X_{13} + X_{23} \geqslant 11000
\end{array}$$

Em alguns casos pode-se desejar que o número de unidades enviadas a cada loja seja exatamente igual à demanda; basta, neste caso, substituir os sinais "$\geqslant$" por "=".

É possível passar este problema para a forma padrão e resolvê-lo pelo Simplex. Entretanto, será apresentada uma maneira de realizar esse processo... que será vista na próxima aula.

3. BIBLIOGRAFIA

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.

ARENALES, M; ARMENTANO, V; MORABITO, R; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2006

AHUJA, R.K; MAGNANTI, T.L; ORLIN, J.B. **Network Flows**: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey: Prentice Hall, 1993.