Aula 07: O Problema do Transporte: Evolução ao Ótimo

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar o método de evolução ao ótimo para o Problema do Transporte.

Bibliografia: AHUJA *et al.*; MOREIRA; ARENALES *et al.*

INTRODUÇÃO

Na aula passada foi apresentado o método de solução inicial denominado Canto Noroeste, sendo que com a aplicação do mesmo chegou-se ao resultado abaixo:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000
F2	(12) -	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

Solução essa com um valor de R$ 276.000,00. Vejamos agora como transformar essa solução para que ela se torne a solução ótima.

1. A LÓGICA DA REALOCAÇÃO DE CARGAS

O algoritmo baseia-se na realocação de cargas, ou seja, pequenas mudanças na solução, trocando o fornecedor de uma loja por outro. Antes de ser apresentado o algoritmo propriamente dito, é preciso entender com clareza o mecanismo de realocação de carga.

Suponha, por exemplo, que tenha sido detectado que seria interessante passar a transportar UM ENGRADADO da fábrica F2 para a loja L1. Isso pode ser representado colocando mais uma unidade na célula F2-L1 da tabela:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000
F2	(12) +1	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000 15.001
Demanda	10.000 10.001	4.000	11.000	

Entretanto, como é possível ver, isso provoca um desequilíbrio: para atender a esta situação, F2 teria que produzir 15001 unidades (ao invés de 15000). Para contornar este problema, é preciso diminuir o número de engradados entregues pela fábrica F2 em alguma das outras lojas, como por exemplo a loja 2 (célula F2/L2):

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000
F2	(12) +1	(9) 4.000-1	(10) 11.000	15.000 15.000
Demanda	10.000 10.001	4.000 3.999	11.000	

Entretanto, apesar de isso ter corrigido o suprimento de F2, agora a demanda de L2 não está sendo atendida (3999, ao invés de 4000). Para acertar esta situação, é necessário enviar um engradado de F1 para L2:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0+1	(9) -	10.000 10.001
F2	(12) +1	(9) 4.000-1	(10) 11.000	15.000 15.000
Demanda	10.000 10.001	4.000 4.000	11.000	

A demanda de L2 está corrigida, agora. Entretanto, o suprimento de F1 está maior que sua capacidade (10001, ao invés de 10000). Para ajustar o suprimento de F1, pode-se reduzir o envio de engradados da fábrica F1 para a loja L1, sendo isso indicado com a subtração de uma unidade da posição F1/L1:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000-1	(8) 0+1	(9) -	10.000 10.000
F2	(12) +1	(9) 4.000-1	(10) 11.000	15.000 15.000
Demanda	10.000 10.000	4.000 4.000	11.000	

Agora, com a realocação completa, a tabela está novamente equilibrada. Mas será que realmente valeu a pena fazer essa realocação? Quanto o custo diminuiu por realocar as cargas desta maneira?

Isto pode ser calculado de duas formas: a primeira delas é refazendo toda a conta de custo novamente... ou fazer a conta da diferença de custo. Isso pode ser feito verificando que, nas células em que foi aumentada uma unidade, haverá um acréscimo de custo:

F1/L2: +1 * 8 = 8
F2/L1: +1 * 12 = 12

Por outro lado, nas células onde houve uma diminuição de uma unidade, houve um decréscimo de custo:

F1/L1: -1 * 13 = -13
F2/L2: -1 * 9 = -9

O valor total da diferença de custo foi: 8 + 12 -13 -9 = 20 - 22 = -2

O resultado -2 significa que o transporte ficou $ 2,00 <u>mais barato</u> com essa relocação. É uma diferença baixa porque apenas um engradado foi realocado. Se mais engradados forem realocados, a economia será maior. Como saber qual o máximo de relocações que posso fazer? Simples. O truque é substituir o "+1" e "-1" das células por uma variável ***d***, da seguinte forma:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000-d	(8) 0+d	(9) -	10.000
F2	(12) +d	(9) 4.000-d	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

Observando as células que estão perdendo unidades (***-d***), ou seja, F1/L1 e F2/L2, é possível ver que elas possuem, respectivamente, 10.000 e 4.000 engradados. O menor valor entre eles é, portanto, 4.000. Assim, o máximo valor que ***d*** pode assumir é 4.000 (pois, obviamente, nenhum valor na tabela pode ser negativo). Assim, se for considerado que ***d = 4000***, o resultado da relocação máxima será:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 6.000	(8) 4000	(9) -	10.000
F2	(12) 4000	(9) 0	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

Observe, porém, que a célula que limitou o valor de ***d*** e que agora possui valor ZERO (F2/L2) deve ser alterada para que possua um "-".

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 6.000	(8) 4000	(9) -	10.000
F2	(12) 4000	(9) -	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

Este é o princípio da relocação, que pode ser realizada de uma forma mecânica: a relocação sempre ocorre escolhendo-se uma célula vazia para acrescentar um valor ***d***, determinando um ***ciclo*** fechado com células que possuem valores de carga a transportar, alternando o sinal entre + e -, como representado na seqüência abaixo:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000
F2	(12) +d	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000
F2	(12) +d	(9) 4.000 -d	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000	(8) 0+d	(9) -	10.000
F2	(12) +d	(9) 4.000 -d	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000-d	(8) 0+d	(9) -	10.000
F2	(12) +d	(9) 4.000 -d	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

Com o ciclo determinado, verifica-se qual célula perde carga (***-d***) que possui o menor valor de carga e este será o valor limite para **d**. Feito isso, Realiza-se as contas de economia, a célula que ficou zerada ganha o "-" e o passo está finalizado.

Entretanto, apesar de este exemplo ter sido apresentado com uma célula qualquer, esse processo não deve ser realizado a esmo, para todas as células vazias. A escolha de qual célula receberá a realocação de carga é a essência do Algoritmo do Problema do Transporte.

2. O ALGORITMO DO PROBLEMA DO TRANSPORTE

O algoritmo do problema do transporte é um procedimento que permite identificar qual a célula vazia que trará maior ganho se passar a conter carga, através de um processo de realocação de carga. Adicionalmente, o procedimento permite verificar em que momento nenhuma realocação permitirá economias, indicando o fim do processo.

Assim, a idéia do algoritmo é:

1) Identificar qual a melhor célula para receber realocação de carga;
2) Verificar se o problema está finalizado;
3) Se não, realizar a realocação de carga, como já apresentado, e voltar ao passo 1.

Quando nenhuma relocação trouxer qualquer benefício, a solução ótima terá sido encontrada. O algoritmo é mais facilmente compreendido na forma de exemplo.

Para identificar a célula que trará mais economia, será necessário voltar à tabela inicial do problema da Qualquer Cola, com uma linha e uma coluna somadas à mesma:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000	
F2	(12) -	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000	
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K					

O processo inicia-se pela determinação dos valores da linha K e coluna L. Para isso, determinamos que o valor da primeira linha da coluna L será ZERO:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000	0
F2	(12) -	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000	
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K					

Os outros valores serão determinados iterativamente: para cada célula já com carga, o valor correspondente de L e K deve ser tal que sua soma seja exatamente o custo unitário da célula. Por exemplo, sendo o L da primeira linha é igual a zero e o custo da célula F1/L1 igual a 13, tem-se que 0 + K = 13 e, portanto, K da coluna L1 =13.

Da mesma forma, sendo o L da primeira linha é igual a zero e o custo da célula F1/L2 igual a 8, tem-se que 0 + K = 8 e, portanto, K da coluna L2 =8.

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000	0
F2	(12) -	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000	
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K	13	8			

Uma vez determinado o K da coluna L2, o L da linha F2 fica automaticamente definido: uma vez que a célula F2/L2 tem custo 9 e o K da coluna L2 é 8, então é preciso que 8 + L = 9, o que leva a um L = 1 para a linha F2.

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000	0
F2	(12) -	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000	1
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K	13	8			

Este L, junto com o custo da célula F2/L3, define o K da coluna L3:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 10.000	(8) 0	(9) -	10.000	0
F2	(12) -	(9) 4.000	(10) 11.000	15.000	1
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K	13	8	9		

Com base nesta tabela, agora, é possível calcular o **índice de melhoria** de cada célula vazia. Este índice é calculado com o custo da célula vazia, subtraído do K de sua coluna e do L de sua linha. Por exemplo, a melhoria da célula F1/L3 é:

Célula	C	- K	- L	=	
F1/L3	9	- 9	- 0	=	0

Calculando para as outras, temos:

Célula	C	- K	- L	=	
F1/L3	9	- 9	- 0	=	0
F2/L1	12	-13	- 1	=	-2

Este resultado significa que realocar carga para a célula F1/L3 não melhora em nada a solução... mas realocar carga na célula F2/L1 vai reduzir o custo em $ 2,00 por cada unidade realocada!

Então, deve-se determinar o ciclo de realocação que acrescenta **+d** na célula F2/L1:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 10.000-d	(8) 0+d	(9) -	10.000
F2	(12) +d	(9) 4.000 -d	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

A célula F2/L2 determina o limite para ***d***, que é 4000. Fazendo as contas, o resultado da realocação é:

	L1	L2	L3	Suprimento
F1	(13) 6.000	(8) 4000	(9) -	10.000
F2	(12) 4000	(9) -	(10) 11.000	15.000
Demanda	10.000	4.000	11.000	

Com a nova distribuição, repete-se o processo, calculando os novos Ls e Ks:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 6.000	(8) 4000	(9) -	10.000	0
F2	(12) 4000	(9) -	(10) 11.000	15.000	-1
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K	13	8	11		

E, agora, calcula-se novamente os índices de melhoria para as células vazias:

Célula	C	- K	- L	=	
F1/L3	9	-11	- 0	=	-2
F2/L2	9	-8	-(-1)	=	2

Agora a célula que provoca melhoria é a célula F1/L3. O ciclo dela fica:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) 6.000-d	(8) 4000	(9) +d	10.000	
F2	(12) 4000+d	(9) -	(10) 11.000-d	15.000	
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K					

E o valor máximo que ***d*** pode assumir agora é 6000. Assim, recalculando, o resultado será:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) -	(8) 4000	(9) 6.000	10.000	
F2	(12) 10.000	(9) -	(10) 5.000	15.000	
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K					

Novamente, repete-se o processo, calculando os novos Ls e Ks:

	L1	L2	L3	Suprimento	L
F1	(13) -	(8) 4000	(9) 6.000	10.000	0
F2	(12) 10.000	(9) -	(10) 5.000	15.000	1
Demanda	10.000	4.000	11.000		
K	11	8	9		

E os índices de melhoria das células vazias:

Célula	C	- K	- L	=	
F1/L1	13	-11	- 0	=	2
F2/L2	9	-8	-1	=	0

Como não é possível mais melhorar a solução, o problema está finalizado. O resultado final, ótimo, é: X_{12} = 4.000, X_{13} = 6.000, X_{21} = 10.000 e X_{23} = 5.000. Os demais X_{ij} são zero.

3. BIBLIOGRAFIA

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.

ARENALES, M; ARMENTANO, V; MORABITO, R; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2006

AHUJA, R.K; MAGNANTI, T.L; ORLIN, J.B. **Network Flows**: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey: Prentice Hall, 1993.