



# **MECÂNICA GERAL**

## **MOMENTO DE UMA FORÇA**

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 1

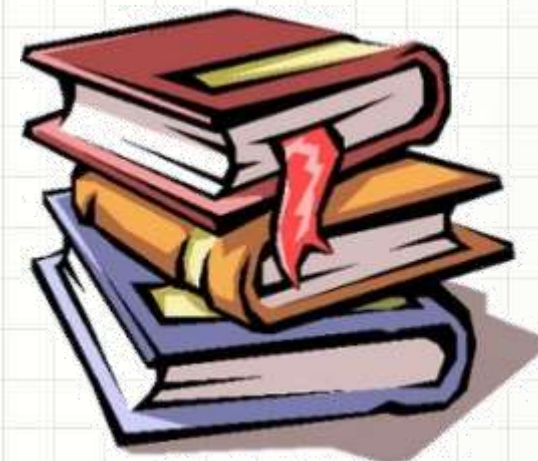
# Objetivos

- Compreender o momento de uma força
- Recordar produto vetorial

- **Atividade Aula 6 – SAVA!**



# Material de Estudo



---

<b>Material</b>	<b>Acesso ao Material</b>
Apresentação	<a href="http://www.caetano.eng.br/">http://www.caetano.eng.br/</a> (Mecânica Geral – Aula 6)
Material Didático	Mecânica Geral (MACIEL), Cap 2 - páginas 31 a 37
Minha Biblioteca	Estática e Mecânica dos Materiais (BERR;JOHNSTON), Cap. 4
Biblioteca Virtual	Estática (Hibbeler), Cap.5
Aula Online	Aula 3



**RELEMBRANDO:**  
**EQUILÍBRIO DE**  
**FORÇAS**

# Equilíbrio de Forças

- Sempre que a resultante em uma direção é 0
  - Existe um equilíbrio de forças naquela direção

Condição de  
Equilíbrio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$



**Se equilibram!**

- Equilíbrio significa “parado”?
  - “Sem alterar estado de movimento” na direção!

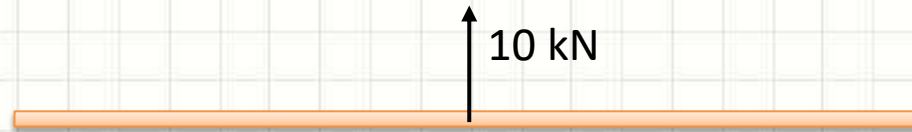


**MOTIVAÇÃO:**

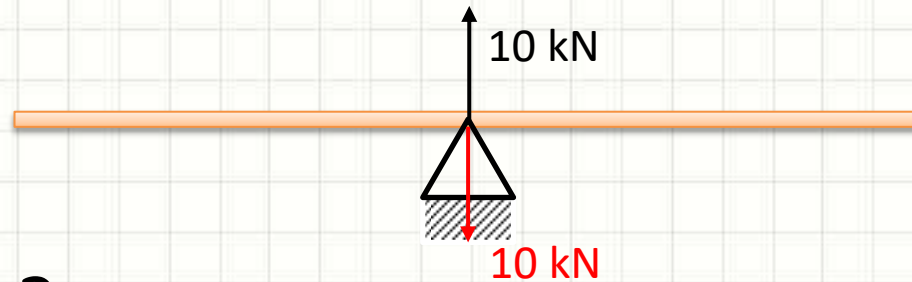
# **EQUILÍBRIO EM CORPOS**

# Equilíbrio em Corpos

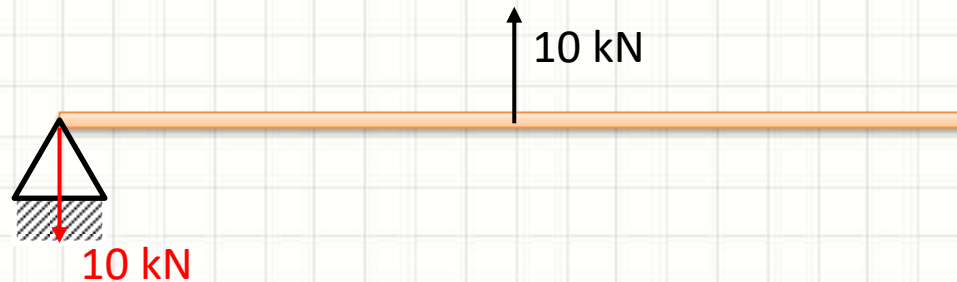
- O que acontece com essa barra?  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$



- E se ela estiver presa?

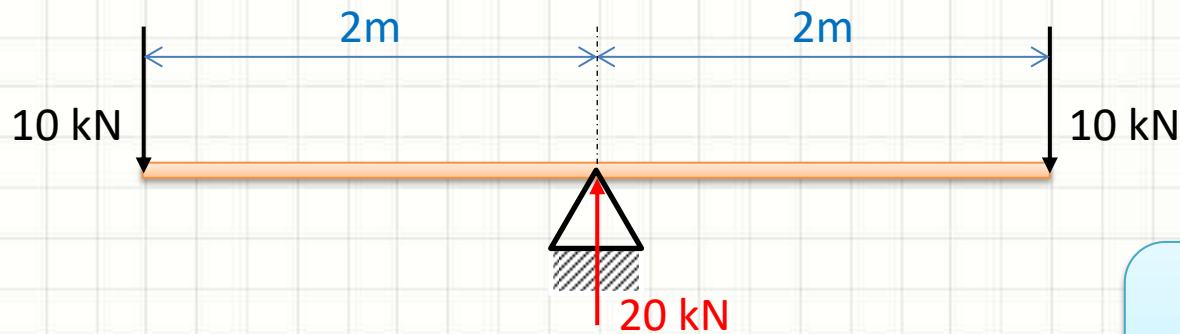


- E assim?

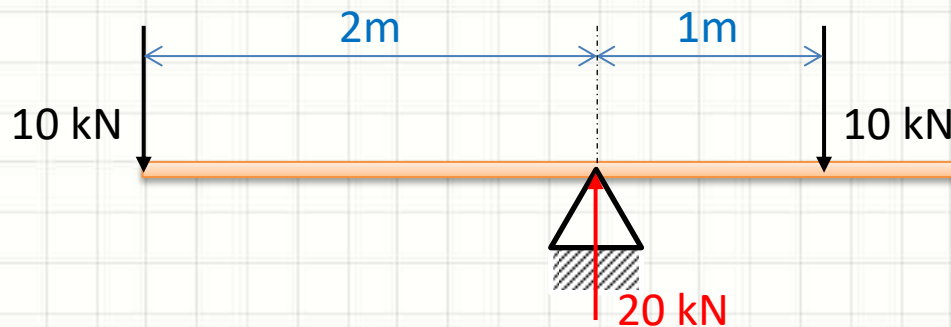


# Equilíbrio em Corpos

- E nesse outro caso?



- E agora?



Condição de Equilíbrio

$$\vec{R}_X = \sum \vec{F}_X = 0$$

$$\vec{R}_Y = \sum \vec{F}_Y = 0$$

**Parece que, para barras\*, as condições que vimos não são suficientes!**





# **MOMENTO DE UMA FORÇA E RESULTANTE DE MOMENTOS**

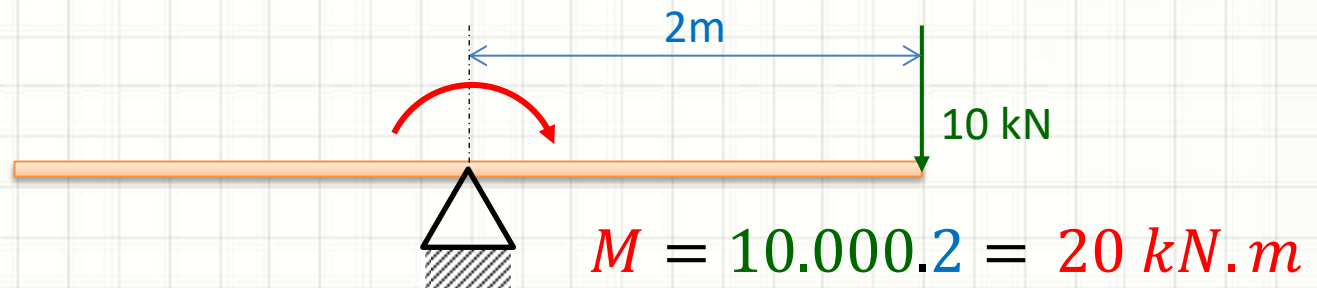
# Momento de uma Força

- O **momento de uma força** em relação a um ponto nos dá a medida com que aquela força provoca uma **rotação ao redor do ponto**
- O momento é proporcional à:

– Força

$$M = F \cdot d$$

– Distância da linha de ação da força ao ponto

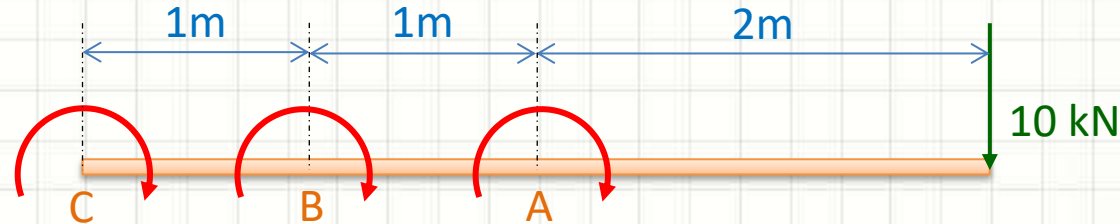


- A unidade do *momento* é **N.m**

# Momento de uma Força

- O momento varia de acordo com o ponto!

$$M = F \cdot d$$



$$M_A = 10.000 \cdot 2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 10.000 \cdot (2 + 1) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = 10.000 \cdot (2 + 1 + 1) = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

# Momento de uma Força

- A distância **d** deve ser sempre medida perpendicularmente à força  $M = F \cdot d$



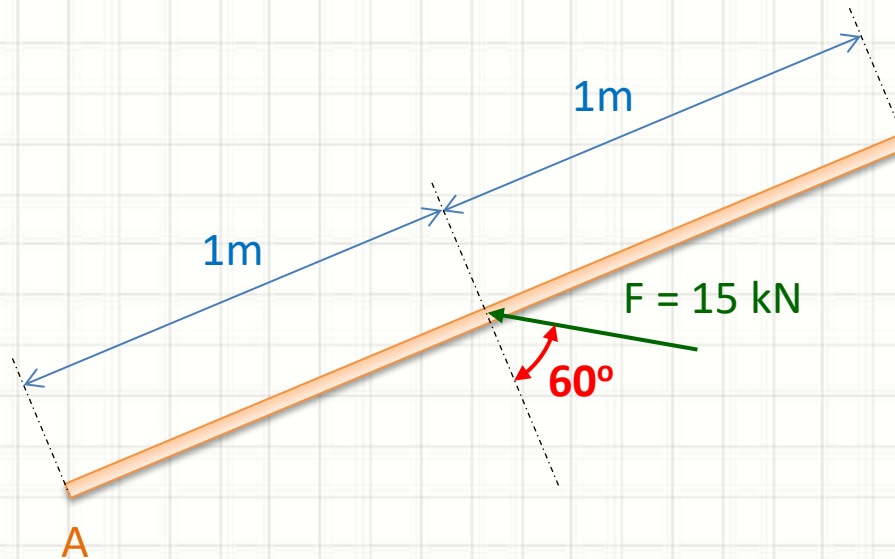
- Se a linha de ação passa pelo ponto...



O momento será zero:  $M = 0!$

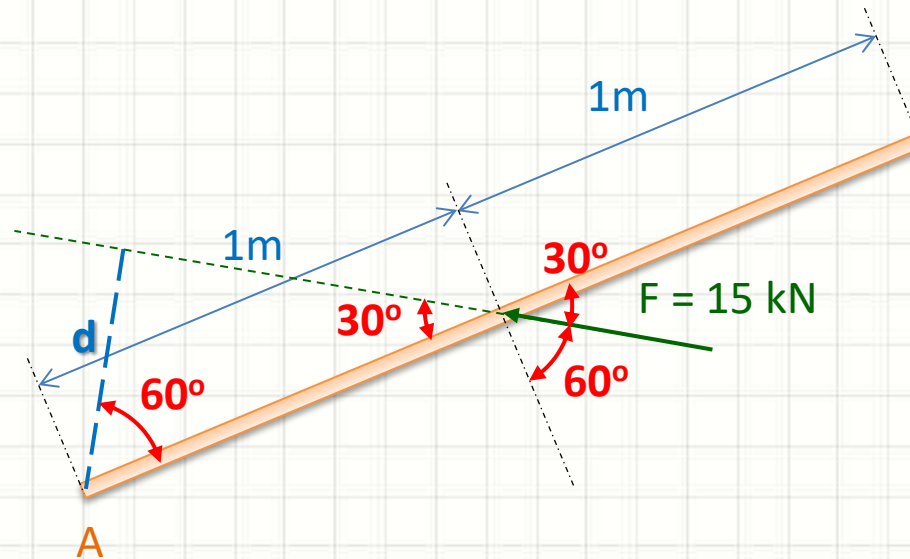
# Exemplo

- Calcule o Momento em A



# Exemplo

- Calcule o Momento em A

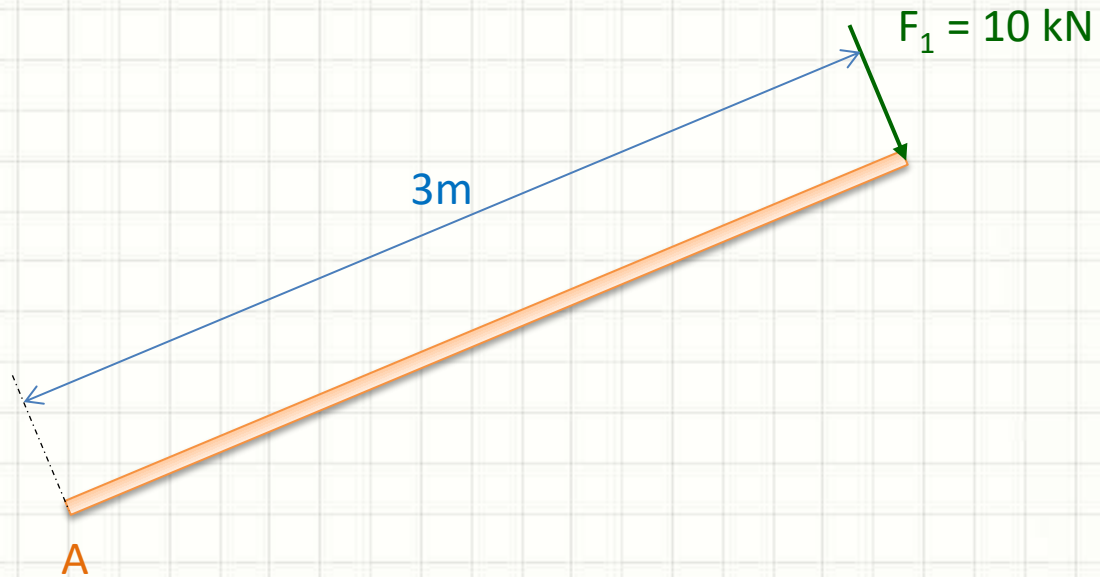


$$\cos 60^\circ = \frac{d}{1} \Rightarrow d = 0,5m$$

$$M = F \cdot d = 15000 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ kN} \cdot m$$

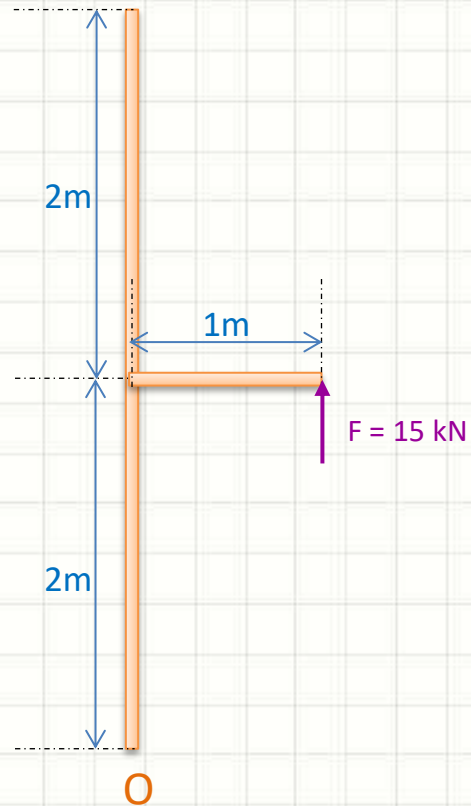
# Exercício

- Calcule o Momento em A



# Exercício

- Calcule o Momento em O



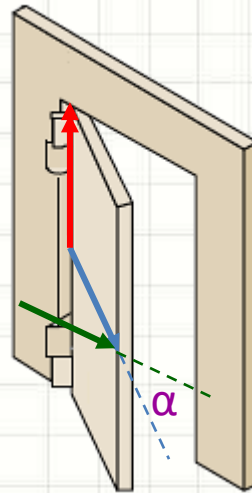




# **REPRESENTAÇÃO VETORIAL DE UM MOMENTO**

# Momento de Força (Vetorial)

- Se considerarmos o corpo um vetor  $\vec{r}$ 
  - Do ponto de rotação ao ponto de aplicação
- E a força um vetor  $\vec{F}$

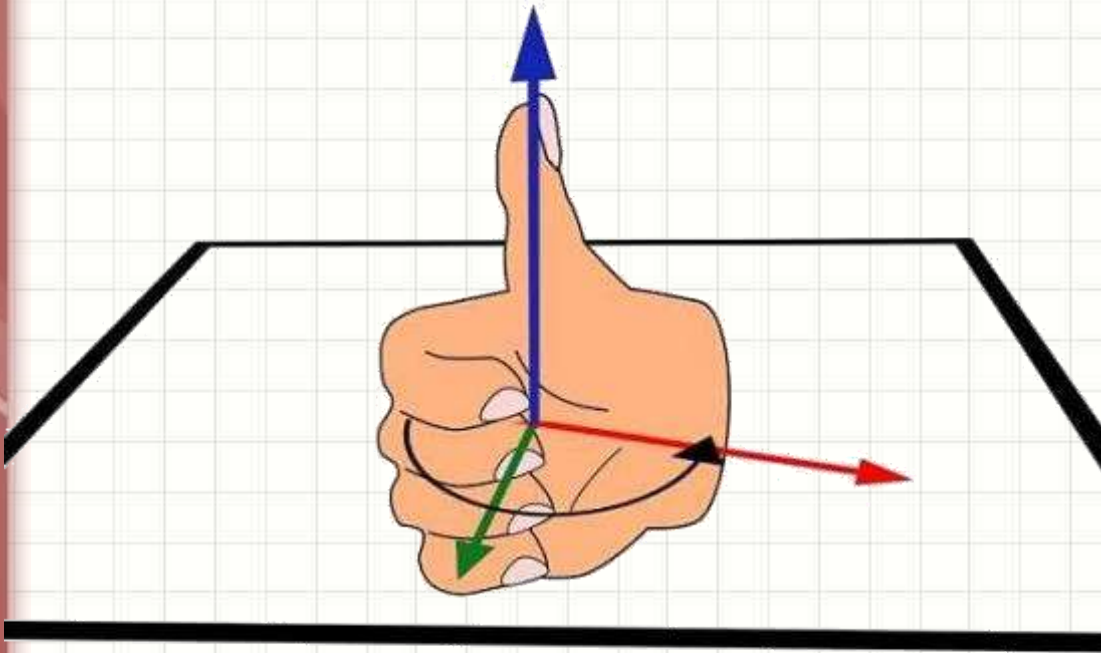


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

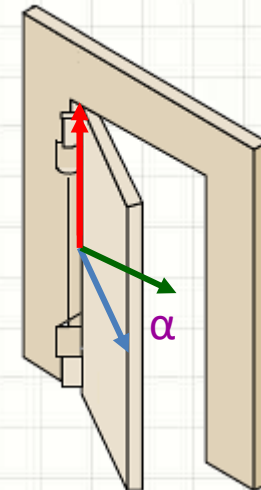
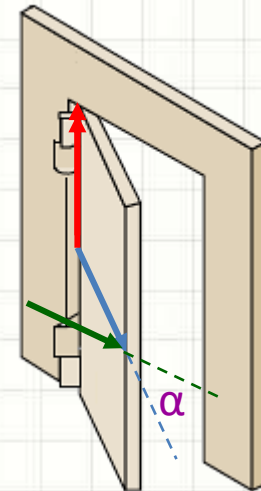
$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \alpha$$

# Direção do Momento Resultante

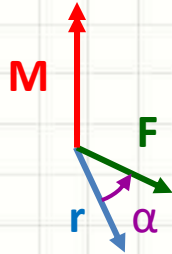
- Observa-se a regra da mão direita



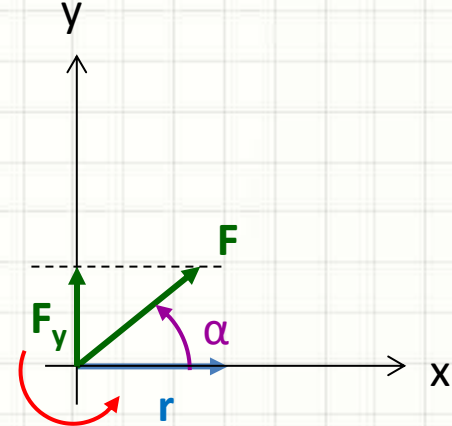
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$



# Forma de Visualizar



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



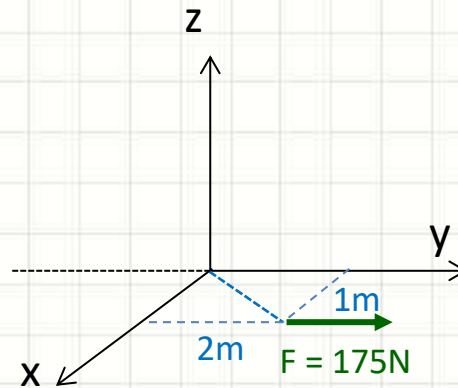
$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_y|$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

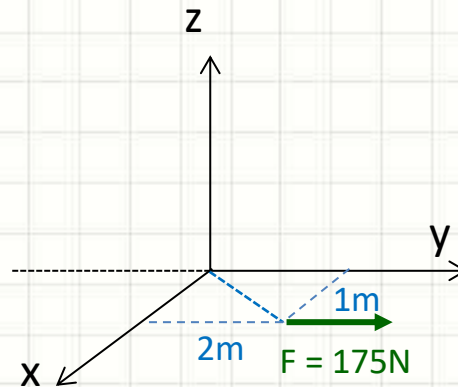
# Exemplo

- Determine a intensidade e as componentes do momento que resulta da aplicação da força abaixo, com a rotação na origem:



# Exemplo

- Determine a intensidade e as componentes do momento que resulta da aplicação da força abaixo, com a rotação na origem:



$$M = F \cdot d$$

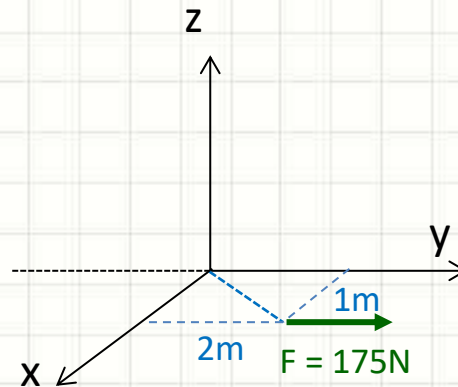
$$M = 175 \cdot 1$$

$$M = 175 \text{ N}\cdot\text{m}$$

# Exemplo



- Determine a intensidade e as componentes do momento que resulta da aplicação da força abaixo, com a rotação na origem:



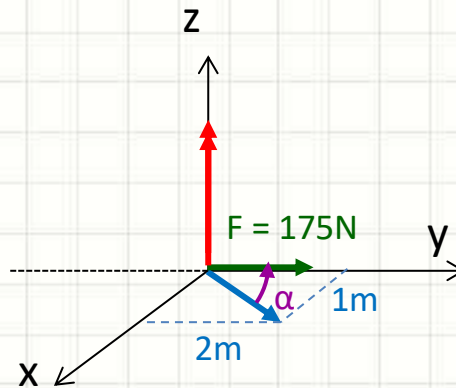
$$M = F \cdot d$$

$$M = 175 \cdot 1$$

$$M = 175 \text{ N}\cdot\text{m}$$

# Exemplo

- Determine a intensidade e as componentes do momento que resulta da aplicação da força abaixo, com a rotação na origem:





# Exemplo

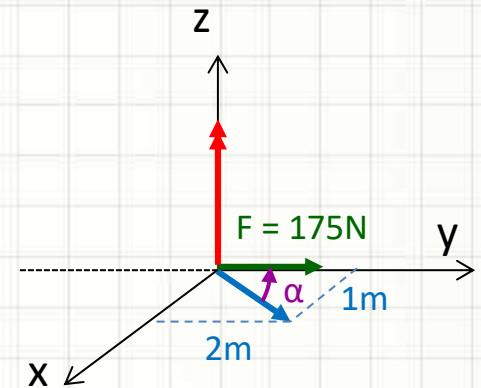
- Determine a intensidade e as componentes do momento que resulta da aplicação da força abaixo, com a rotação na origem:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \alpha \quad \alpha = \text{atg} \frac{1}{2} = 26,6^\circ$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot 175 \cdot \text{sen } 26,6^\circ$$

$$|\vec{M}| = 2,236 \cdot 175 \cdot 0,448$$

$$|\vec{M}| = 175,3 \text{ N}\cdot\text{m}$$



$$\vec{M} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 175 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

$$\det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 175 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & + & + \\ - & - & - \end{matrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \\ 0 & 175 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & + & + \\ - & - & - \end{matrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \\ 0 & 175 \end{vmatrix}$$

$$+0\vec{i} + 0\vec{j} + 175\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{i} - 0\vec{j}$$

$$+175\vec{k}$$

# Exercício

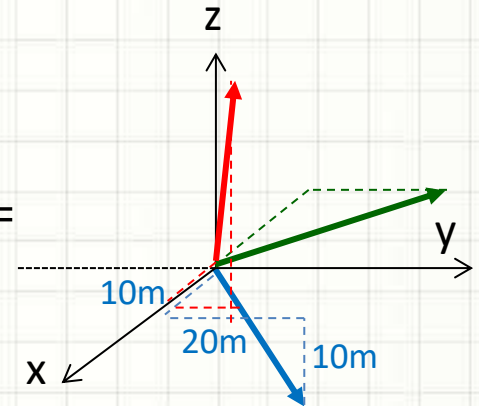
- Sabendo que o vetor posição do ponto de rotação ao ponto de aplicação da força é  $\vec{r} = 10\vec{i} + 20\vec{j} - 10\vec{k}$  e o vetor força  $\vec{F} = -2000\vec{i} + 2000\vec{j} + 0\vec{k}$ , determine as componentes do vetor momento e sua intensidade.

# Exercício

- Sabendo que o vetor posição do ponto de rotação ao ponto de aplicação da força é  $\vec{r} = 10\vec{i} + 20\vec{j} - 10\vec{k}$  m e o vetor força  $\vec{F} = -2000\vec{i} + 2000\vec{j} + 0\vec{k}$  N, determine as componentes do vetor momento e sua intensidade.

$F = 175\text{N}$

$$\vec{M} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 20 & 10 \\ -2000 & 2000 & 0 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{vmatrix} + & + & + & - & - \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 10 & 20 & -10 & 10 & 20 \\ -2000 & 2000 & 0 & -2000 & 2000 \end{vmatrix}$$

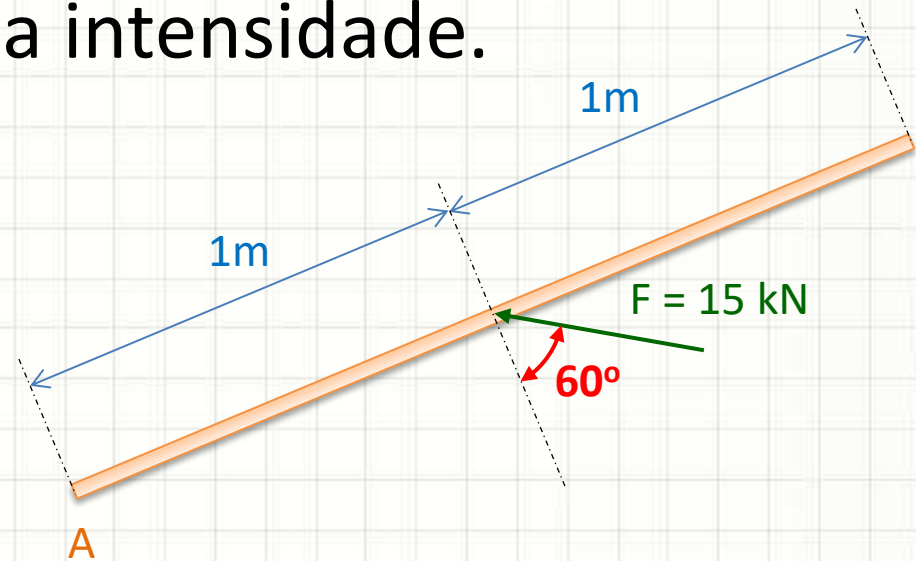
$$+0\vec{i} + 20000\vec{j} + 20000\vec{k} + 40000\vec{k} + 20000\vec{i} - 0\vec{j}$$

$$\vec{M} = +20000\vec{i} + 20000\vec{j} + 60000\vec{k} \text{ N.m}$$

$$|\vec{M}| \cong 66,3 \text{ kN.m}$$

# Exercício

- Determine as componentes do vetor momento em A e sua intensidade.



# Exercício

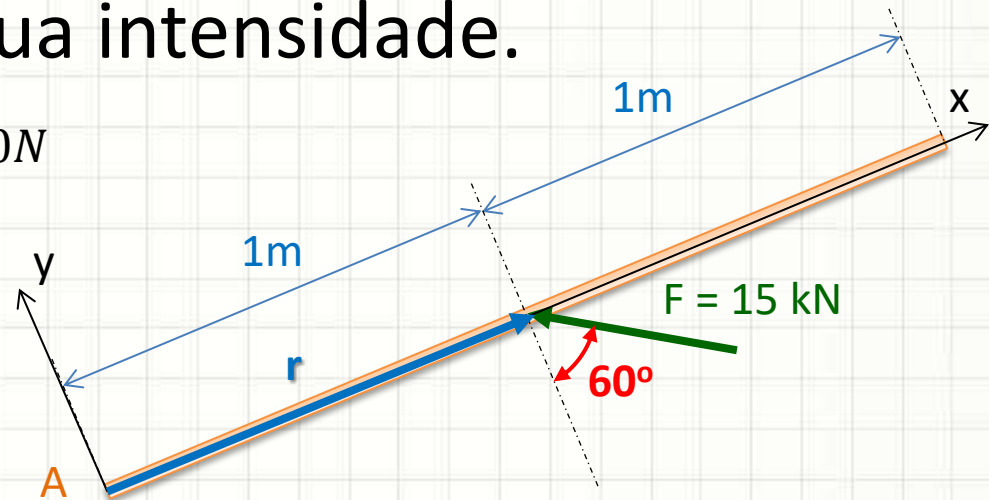
- Determine as componentes do vetor momento em A e sua intensidade.

$$F_x = -15000 \cdot \sin 60^\circ = -12990 \text{ N}$$

$$F_y = 15000 \cdot \cos 60^\circ = 7500 \text{ N}$$

$$\vec{F} = -12990\vec{i} + 7500\vec{j} + 0\vec{k} \text{ N}$$

$$\vec{r} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \text{ m}$$



$$\vec{M} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -12990 & 7500 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} + & + & + & - & - & - \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12990 & 7500 & 0 & -12990 & 7500 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} = +7500\vec{k}$$



# CONCLUSÕES

# Resumo

- Momento: equilíbrio dos corpos
  - Noção Escalar do Momento
  - Noção Vetorial do Momento
  
  - **TAREFA:** Exercícios Aula 6
- 
- Resultantes de Momentos
    - Teorema de Varignon
    - Trabalhando com as componentes das forças



**PERGUNTAS?**



# Exercício para Casa

- Determine as componentes do momento que resulta da aplicação da força abaixo, com a rotação em O, e determine sua intensidade:

