



MECÂNICA GERAL

REDUÇÃO DE ESFORÇOS EM CARGAS DISTRIBUÍDAS

Prof. Dr. Daniel Caetano

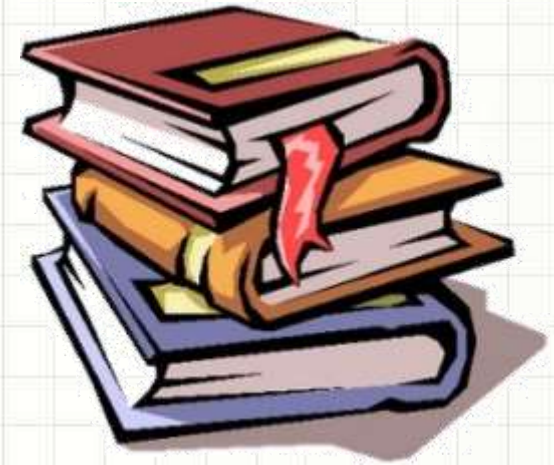
2019 - 1

Objetivos

- Compreender o processo de redução de identificação de esforços de uma carga distribuída por uma carga equivalente
- Capacitar para a redução de esforços envolvendo cargas distribuídas
- **Atividade Aula 10 – SAVA!**



Material de Estudo



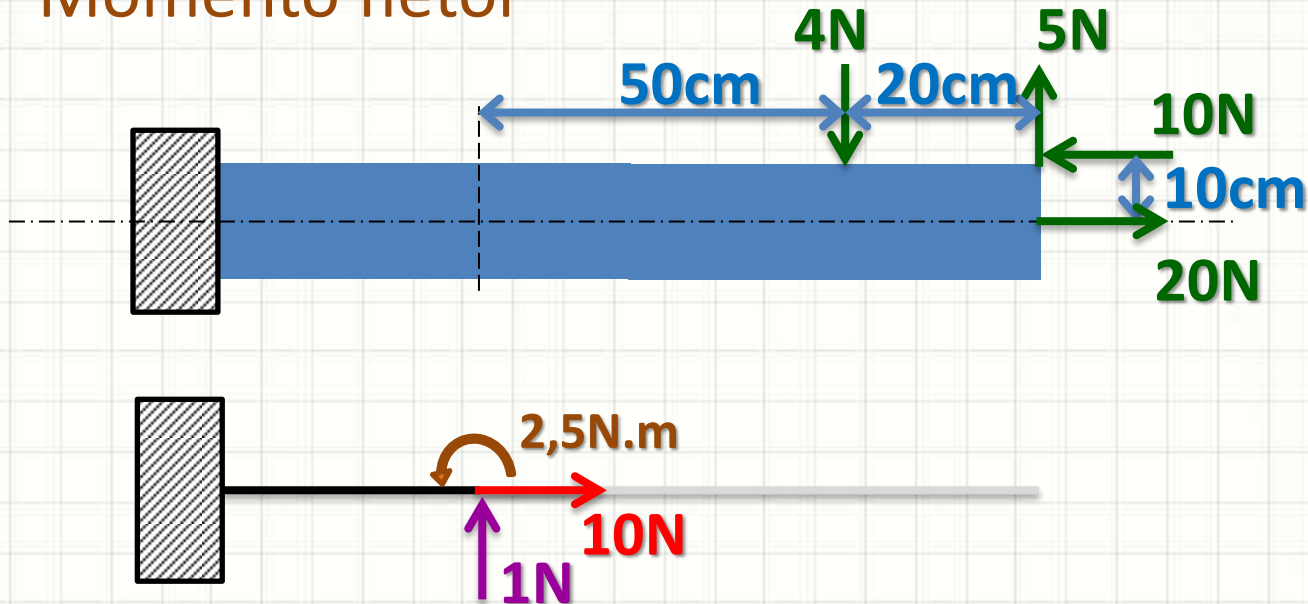
Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Mecânica Geral – Aula 10)
Material Didático	Mecânica Geral (MACIEL), páginas 135 a 138
Minha Biblioteca	Estática e Mecânica dos Materiais (BEER;JOHNSTON), Cap. 5.8
Biblioteca Virtual	Estática (Hibbeler), Cap.4.9
Aula Online	-



RELEMBRANDO:
REDUÇÃO DE
ESFORÇOS A UM PONTO

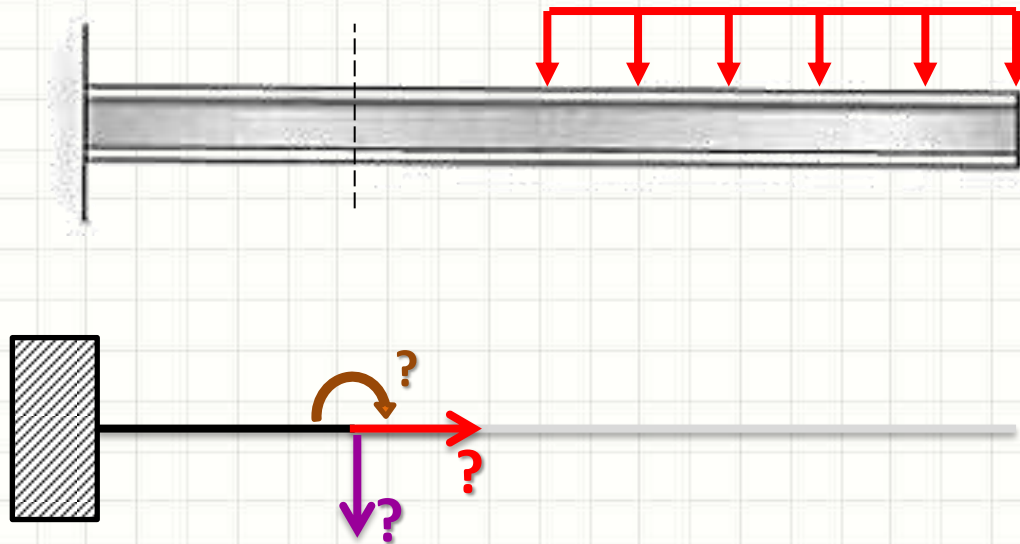
Redução de Múltiplos Esforços

- No plano, pode-se reduzir esforços a:
 - Esforço axial: tração ou compressão
 - Esforço cortante
 - Momento fletor



Redução de Múltiplos Esforços

- Como resolver neste caso?



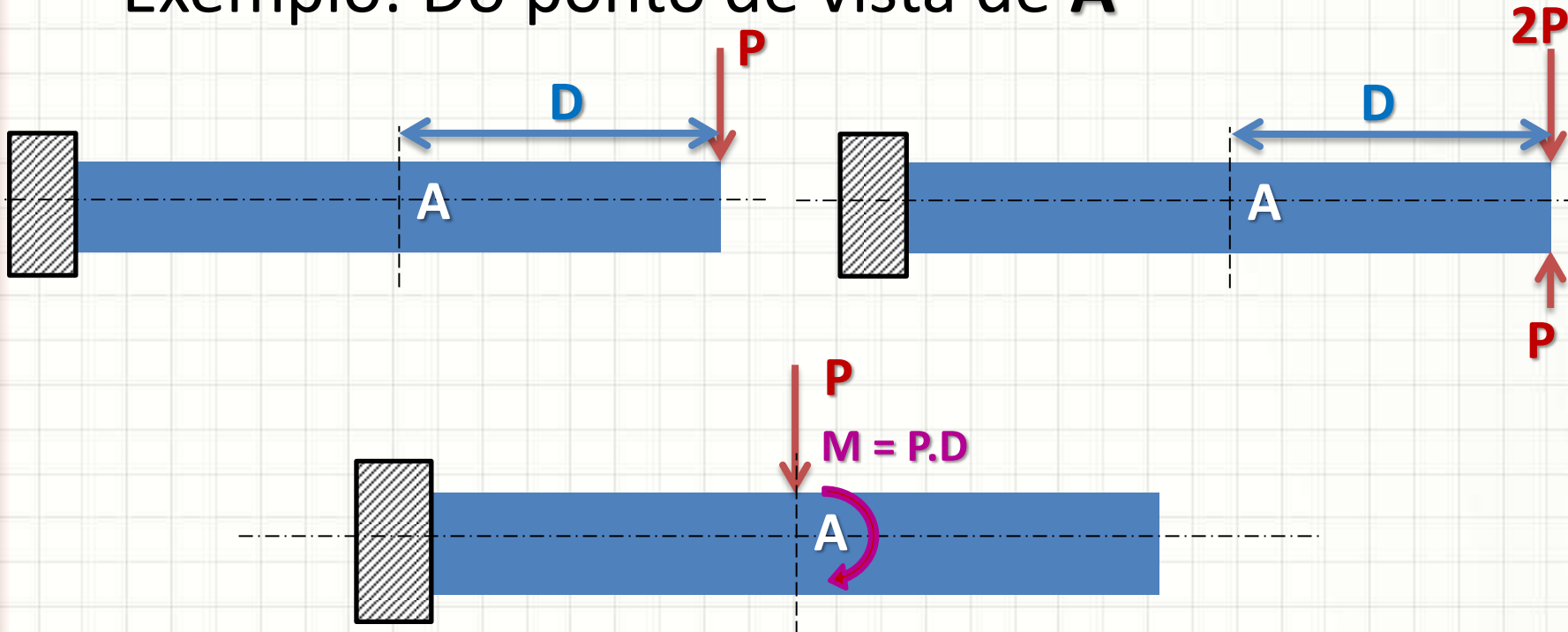


TEOREMA DO CORTE:

SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES

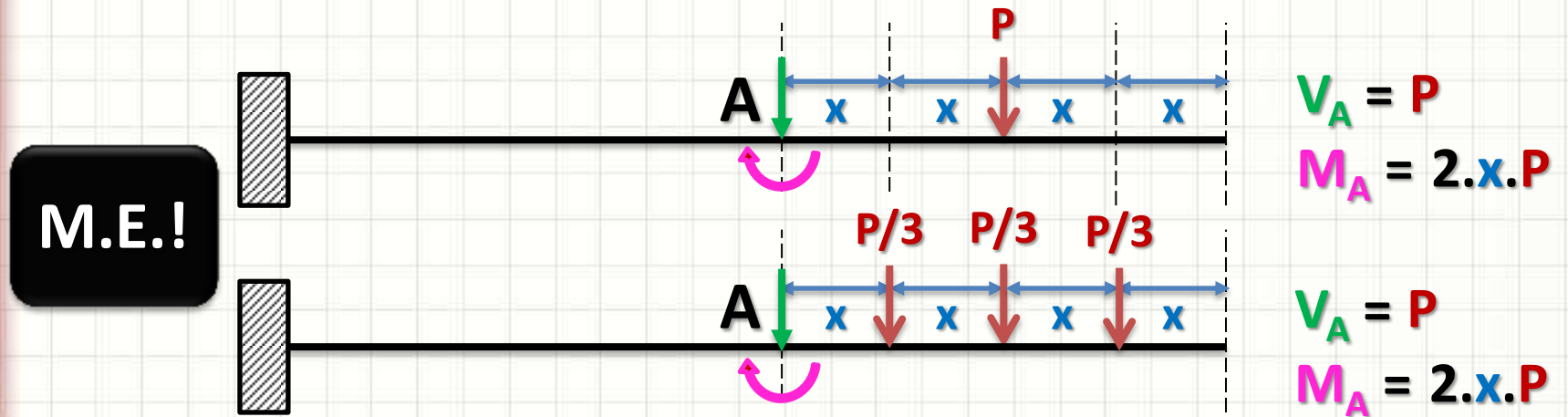
Sistemas de Forças ME

- Quando, para seção transversal específica:
 - Configurações de forças diferentes...
 - Geram esforços equivalentes
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



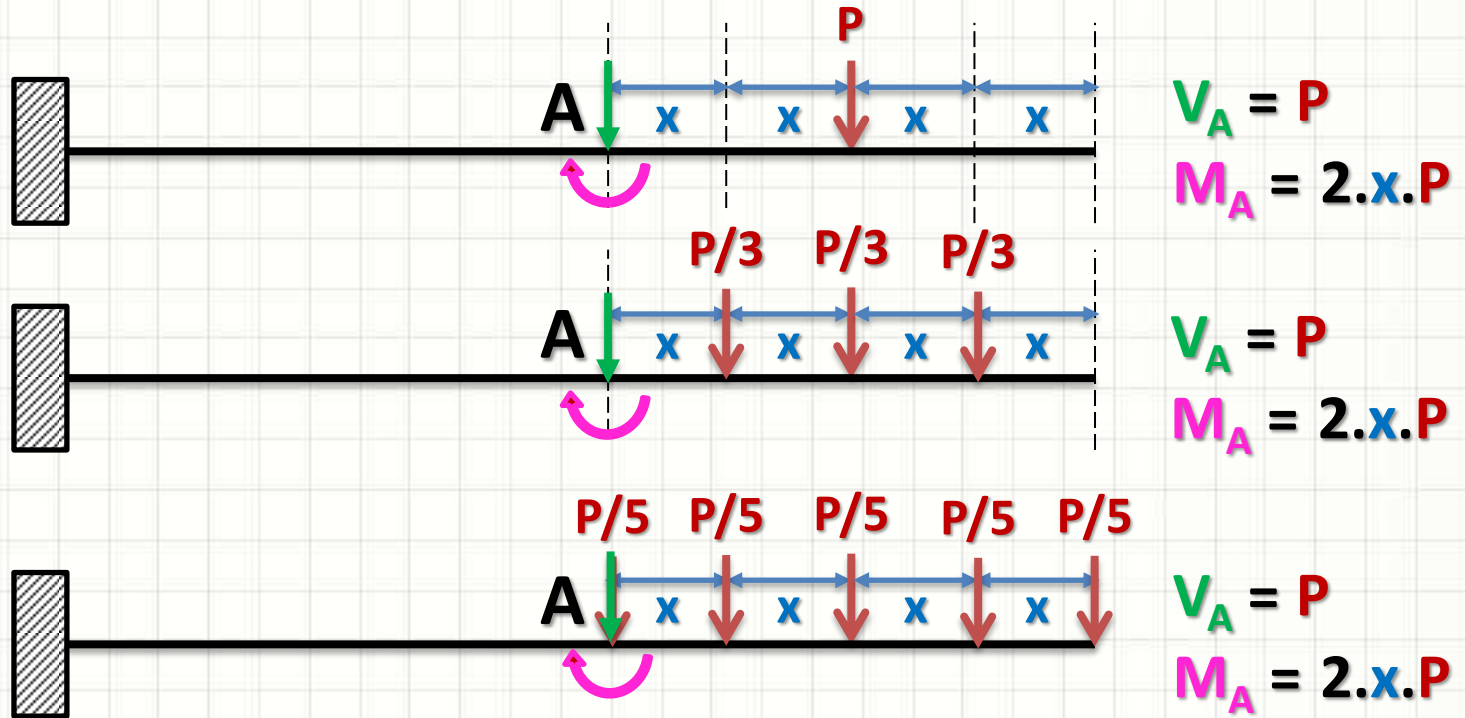
$$V_A = 3 \cdot \frac{P}{3}$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot 6 \cdot x$$

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



M.E.!

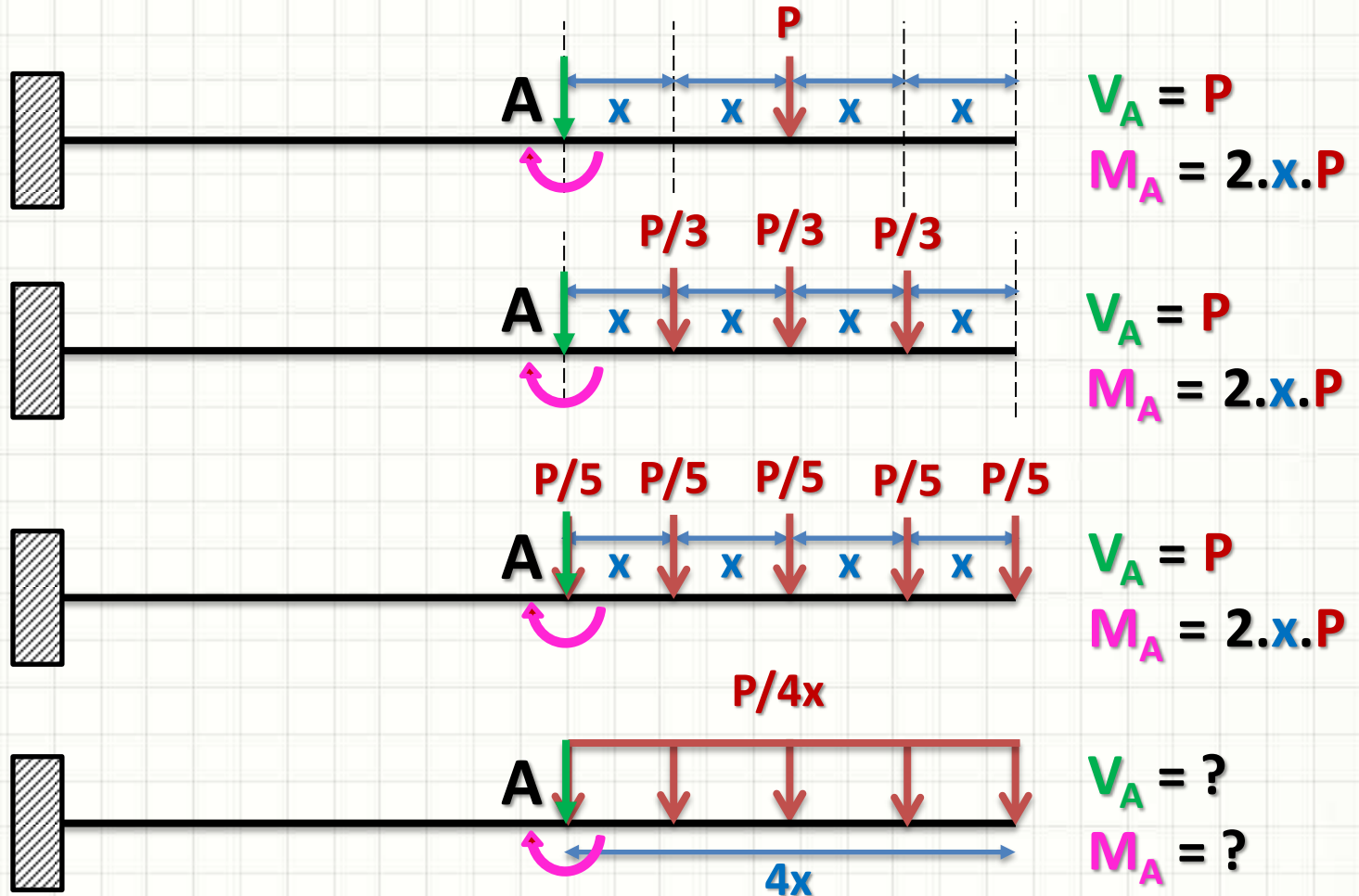
$$V_A = 5 \cdot \frac{P}{5}$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 0 + \frac{P}{5} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 4 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 10 \cdot x$$

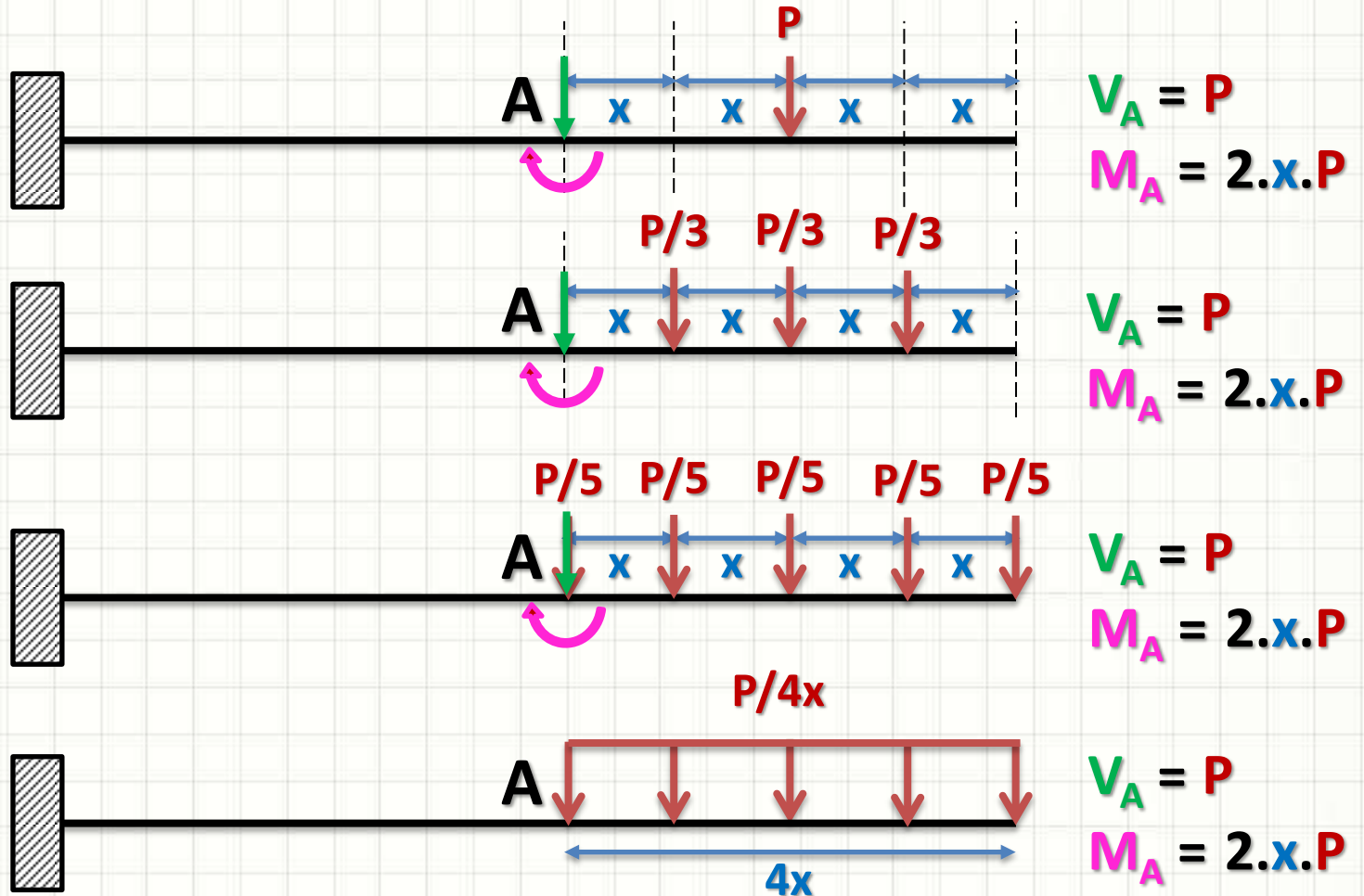
Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**

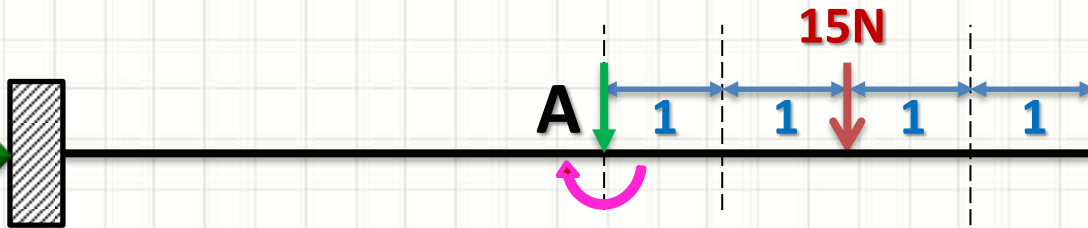


M.E.!

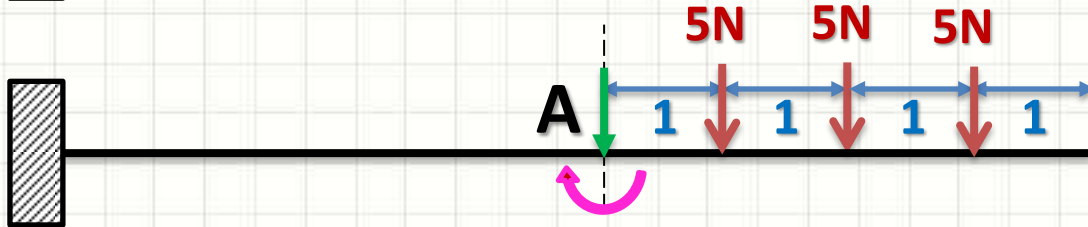
Sistemas de Forças ME

- Com números

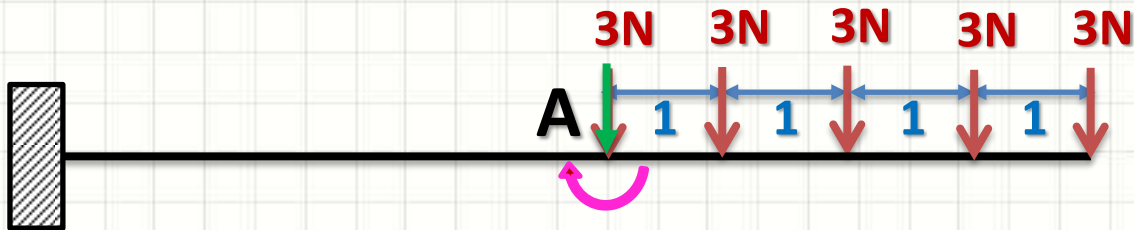
Sei!



$$V_A = 15$$
$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$

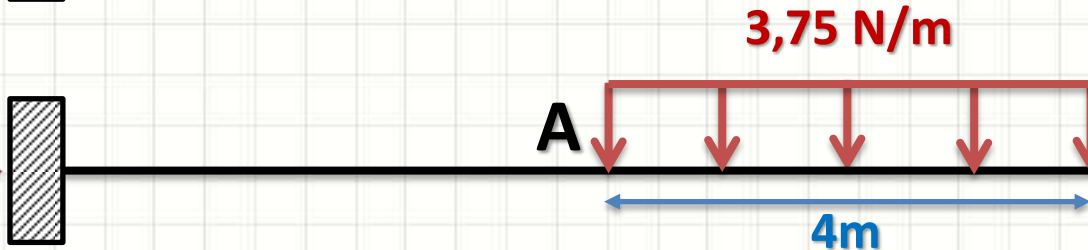


$$V_A = 15$$
$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$



$$V_A = 15$$
$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$

Não sei!

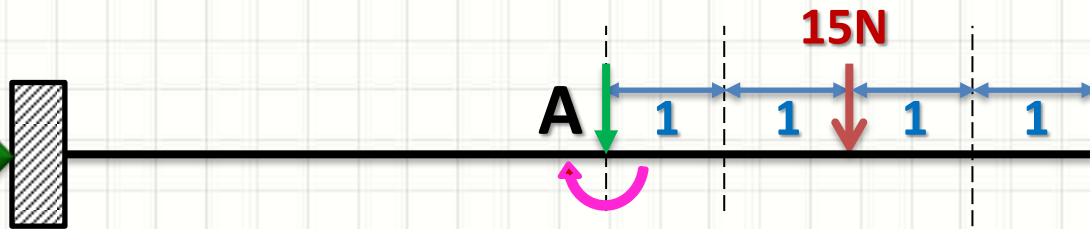


$$V_A = 15$$
$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$

Sempre podemos considerar como se a carga total estivesse concentrada no C.G. da carga distribuída!

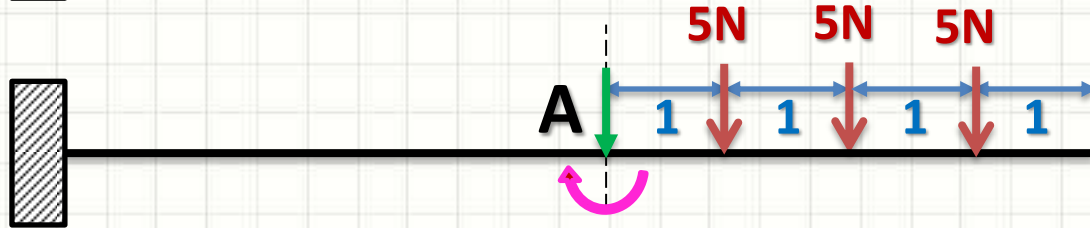
com números

Sei!



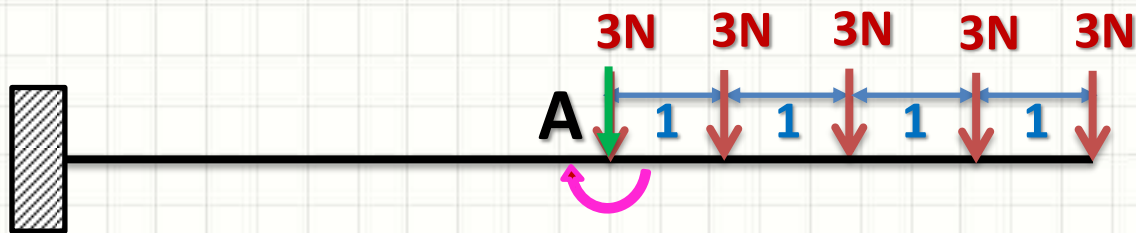
$$V_A = 15$$

$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$



$$V_A = 15$$

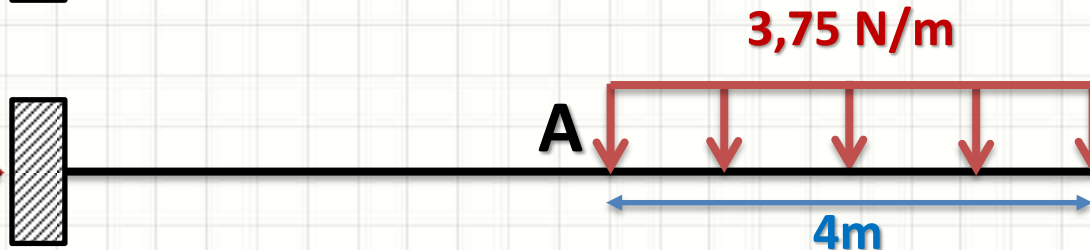
$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$



$$V_A = 15$$

$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$

Não sei!



$$V_A = 15$$

$$M_A = 2 \cdot 1 \cdot 15$$

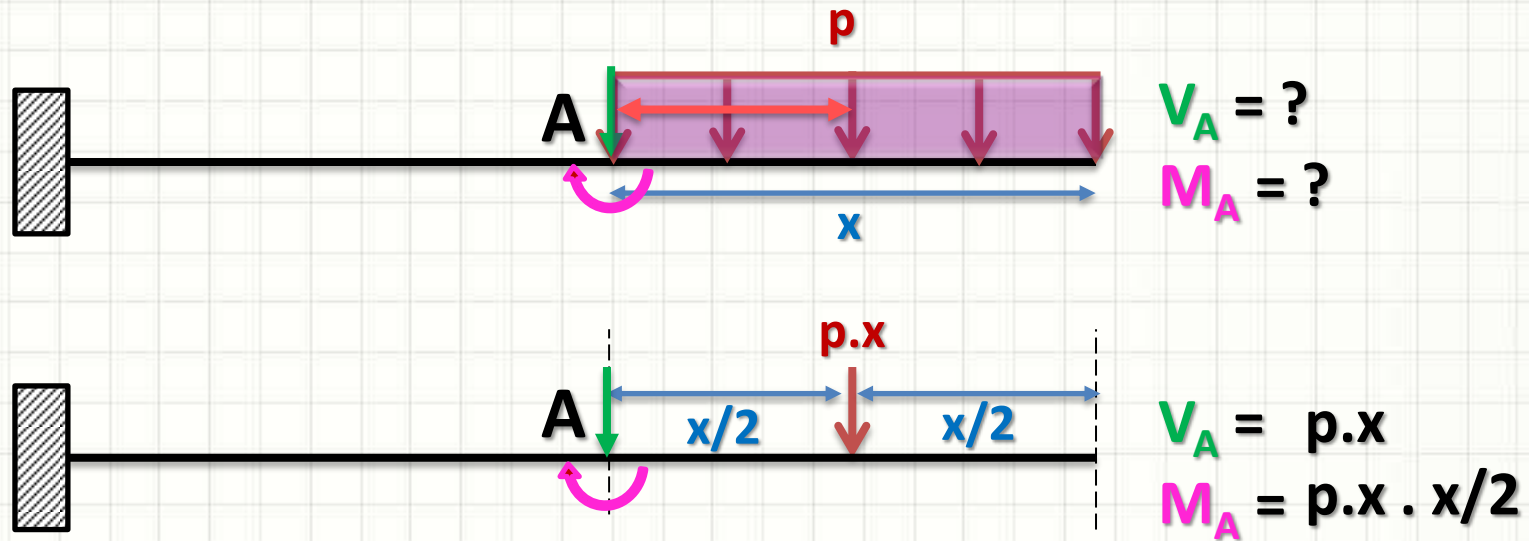


APLICANDO O PRINCÍPIO DOS S.M.E.

CÁLCULO DE ESFORÇOS COM CARGAS DISTRIBUÍDAS

Esforços de Cargas Distribuídas

- Para calcular os esforços no eixo da seção **A**



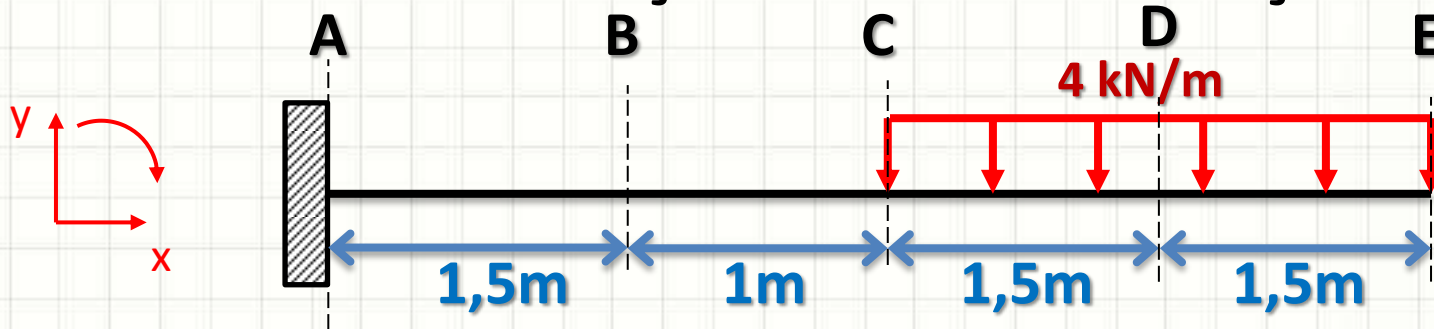
- Observe que:

$$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída}$$

$$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área}$$

Exemplo

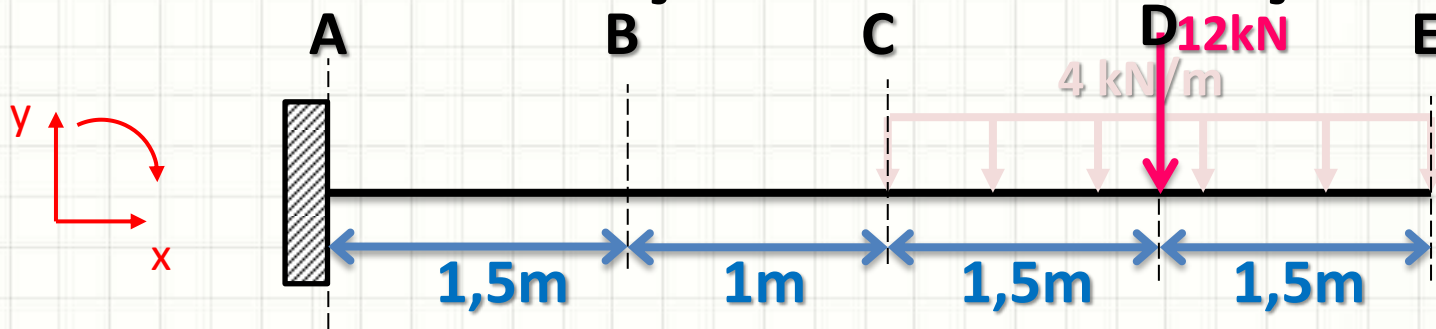
- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E

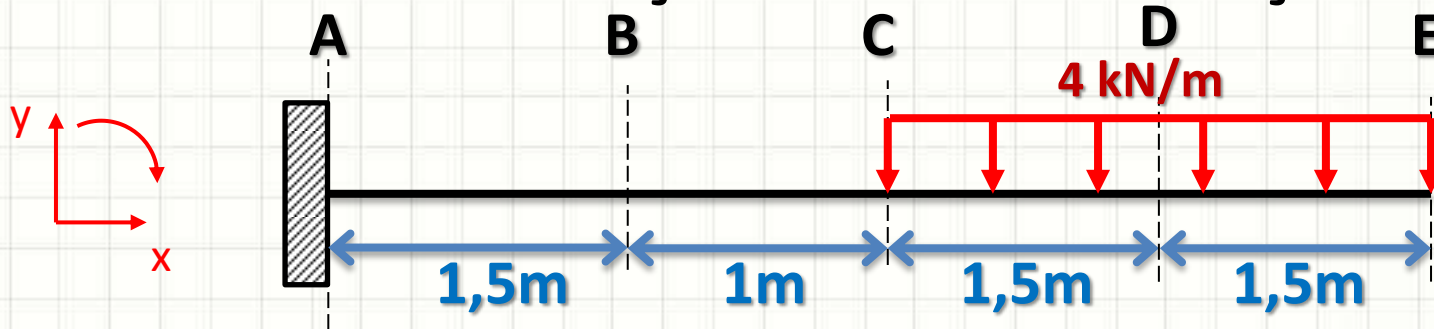


$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



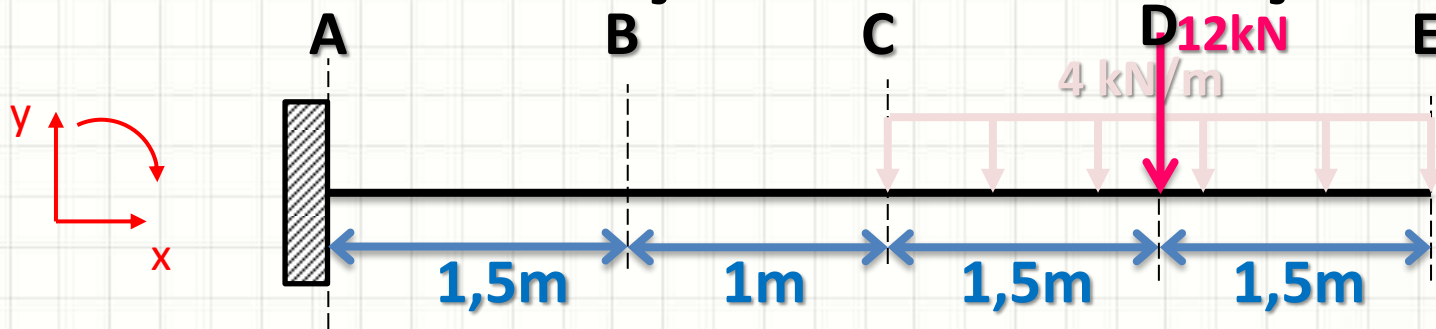
$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

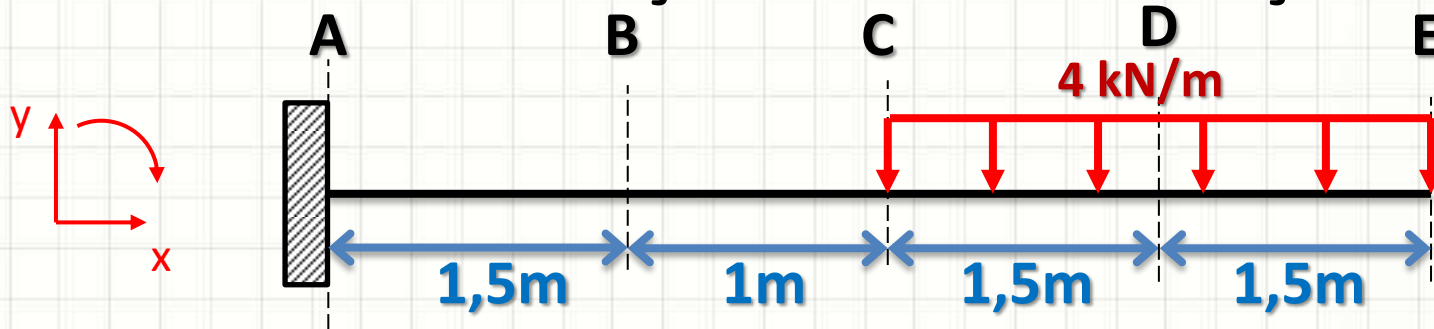
$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_B = 12000 \cdot (1 + 1,5) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

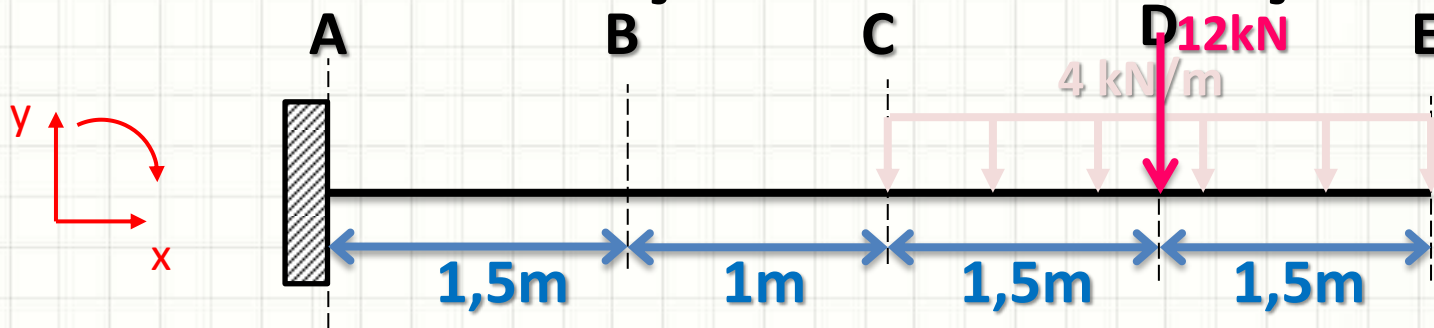
$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_B = 12000 \cdot (1 + 1,5) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Cy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

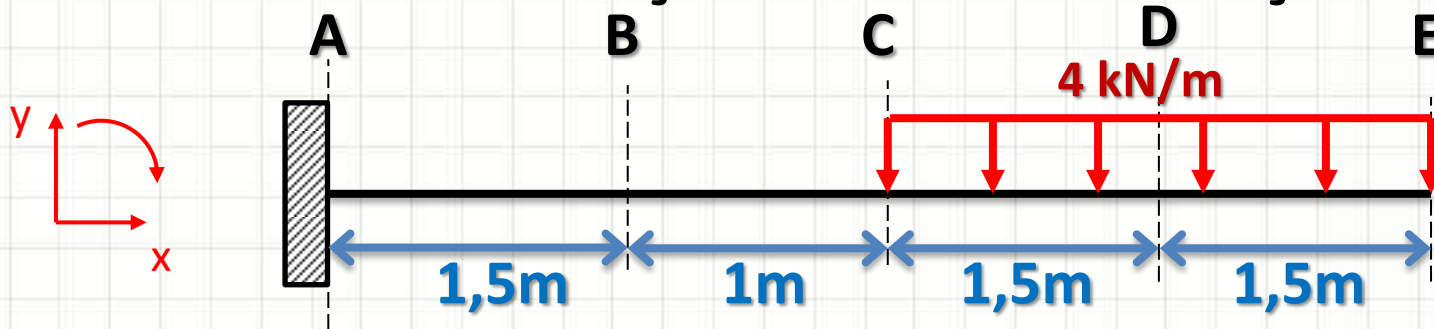
$$M_B = 12000 \cdot (1 + 1,5) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Cy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_C = 12000 \cdot (1,5) = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_B = 12000 \cdot (1 + 1,5) = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

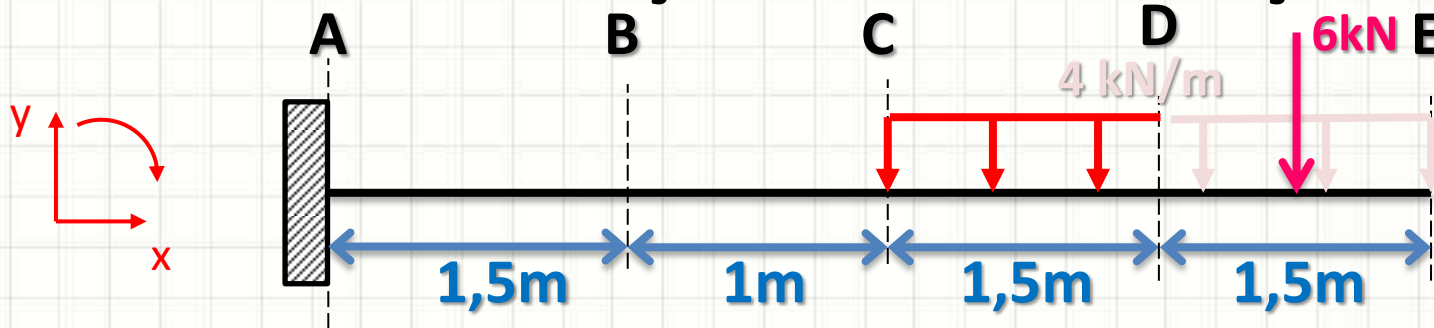
$$F_{Cy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_C = 12000 \cdot (1,5) = 18 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$F_{Dy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 1,5\text{m} = -6 \text{ kN}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_B = 12000 \cdot (1 + 1,5) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Cy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

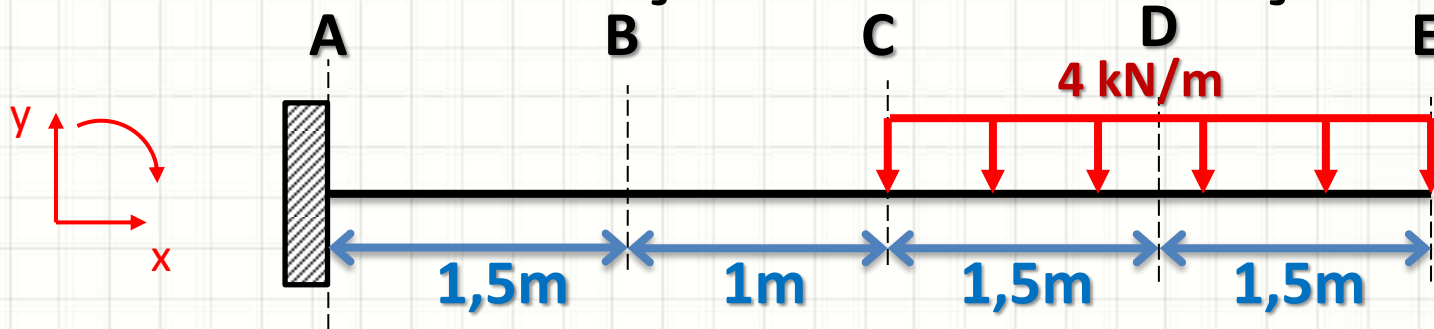
$$M_C = 12000 \cdot (1,5) = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Dy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 1,5\text{m} = -6 \text{ kN}$$

$$M_D = 6000 \cdot (0,75) = 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo das seções A a E



$$F_{Ay} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_A = 12000 \cdot (1,5 + 1 + 1,5) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{By} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_B = 12000 \cdot (1 + 1,5) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Cy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$M_C = 12000 \cdot (1,5) = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Dy} = -4000 \text{ N/m} \cdot 1,5\text{m} = -6 \text{ kN}$$

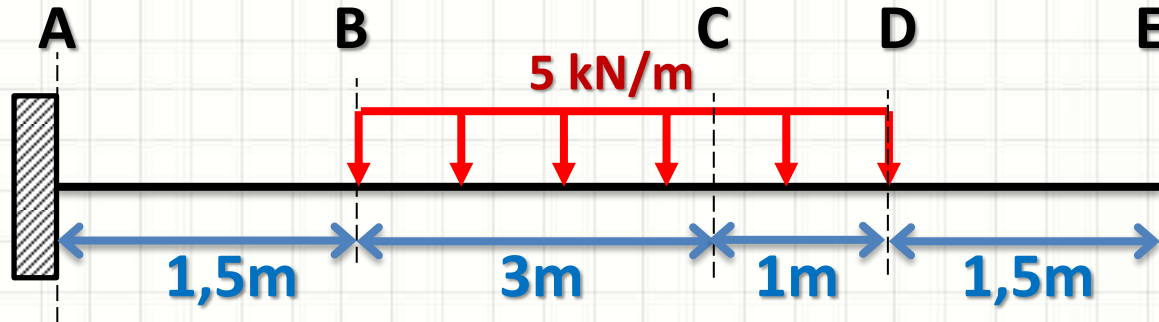
$$M_D = 6000 \cdot (0,75) = 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{Ey} = -4000 \text{ N/m} \cdot 0\text{m} = 0 \text{ kN}$$

$$M_E = 0 \cdot (0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

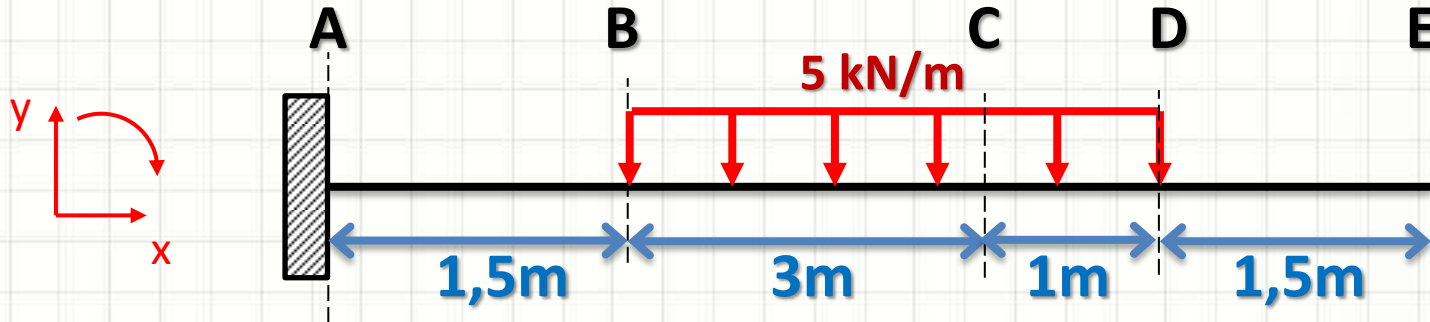
Exercício

- Calcule os esforços no eixo das seções A e C



Exercício

- Calcule os esforços no eixo das seções A e C



$$F_{Ay} = -5000 \text{ N/m} \cdot 4\text{m} = -20 \text{ kN}$$

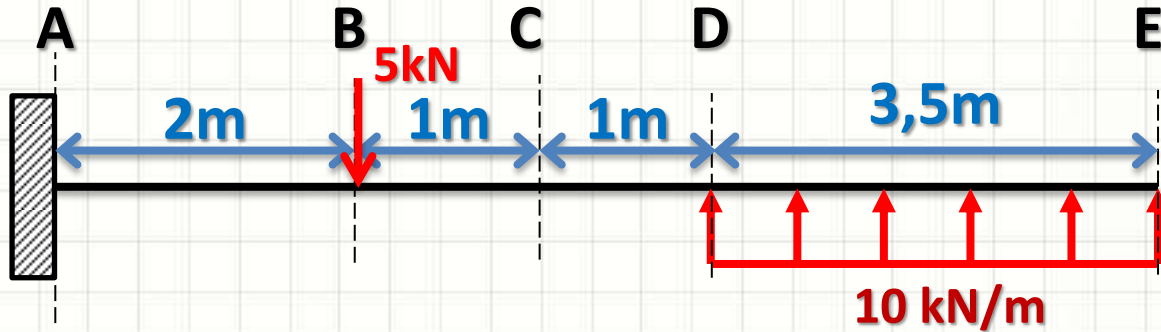
$$M_A = 20000 \cdot 3,5\text{m} = 70 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$F_{Cy} = -5000 \text{ N/m} \cdot 1\text{m} = -5 \text{ kN}$$

$$M_C = 5000 \cdot 0,5\text{m} = 2,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

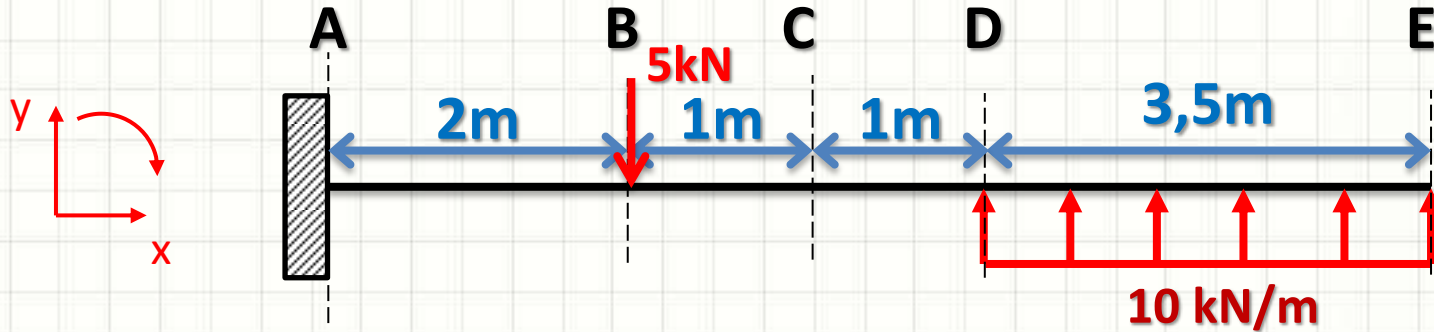
Exercício

- Calcule os esforços no eixo das seções A e C



Exercício

- Calcule os esforços no eixo das seções A e C



$$F_{Ay} = -5000 + 10000 \cdot 3,5 = 30 \text{ kN}$$

$$M_A = 5000 \cdot 2 - 35000 \cdot 5,75 = -191,25 \text{ kN.m}$$

$$F_{Cy} = 10000 \cdot 3,5 = 35 \text{ kN}$$

$$M_C = -35000 \cdot 2,75 = -96,25 \text{ kN.m}$$

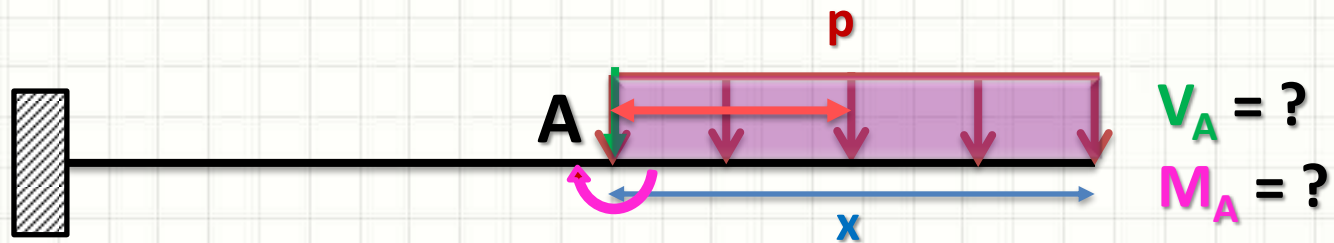


APLICANDO O PRINCÍPIO DOS S.M.E.

CARGAS DISTRIBUÍDAS TRIANGULARES

Esforços de Cargas Triangulares

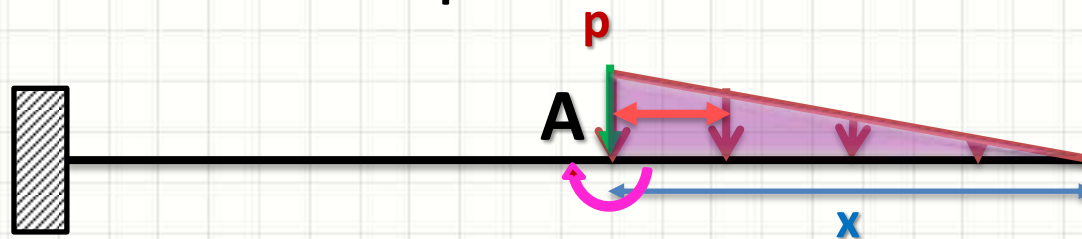
- Como vimos, para uma carga uniforme



$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída}$

$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área}$

- E nesse caso aqui?

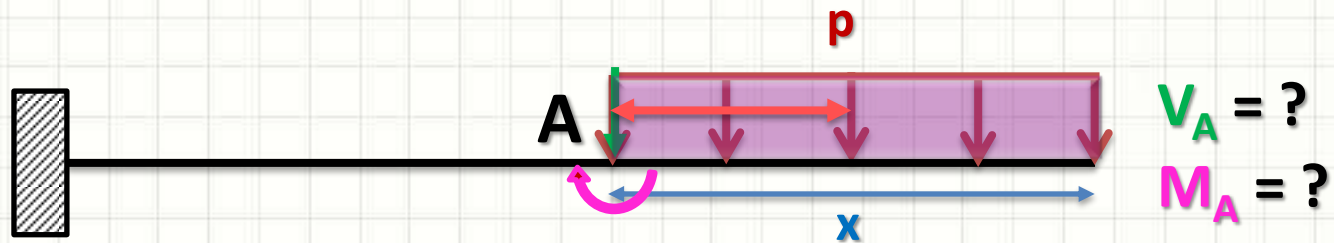


$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída} = x \cdot p / 2$

$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área} = ?$

Esforços de Cargas Triangulares

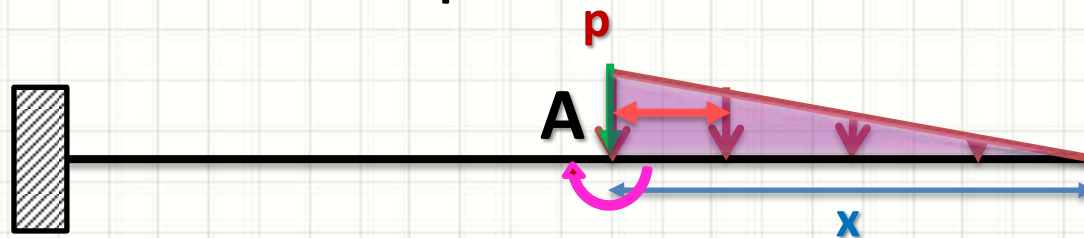
- Como vimos, para uma carga uniforme



$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída}$

$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área}$

- E nesse caso aqui?

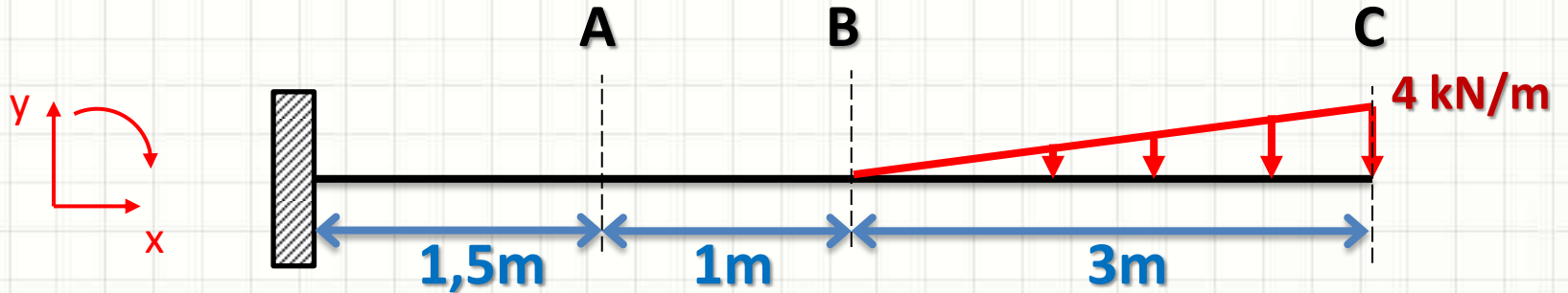


$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída} = x \cdot p / 2$

$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área} = x \cdot p / 2 \cdot x / 3$

Exemplo

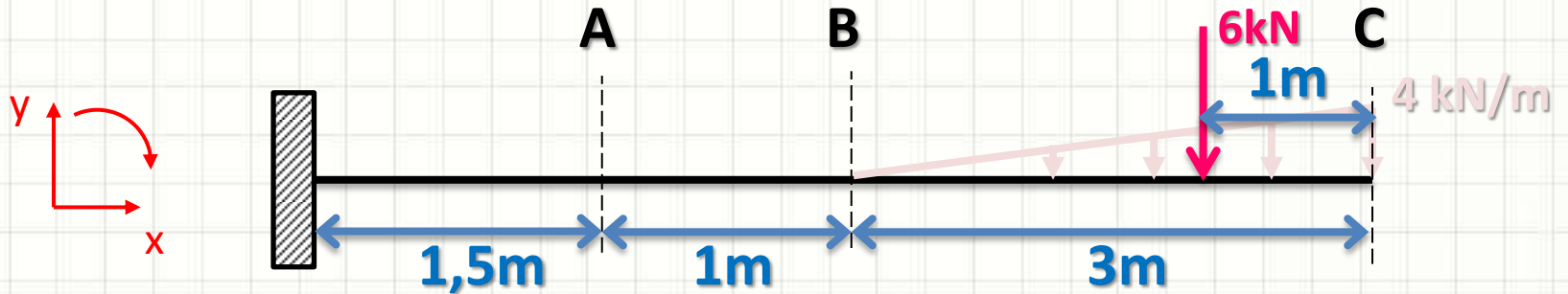
- Calcule os esforços no eixo da seção A



$$F_{Ay} = \frac{3m \cdot -4000 \text{ N/m}}{2} = -6 \text{ kN}$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo da seção A

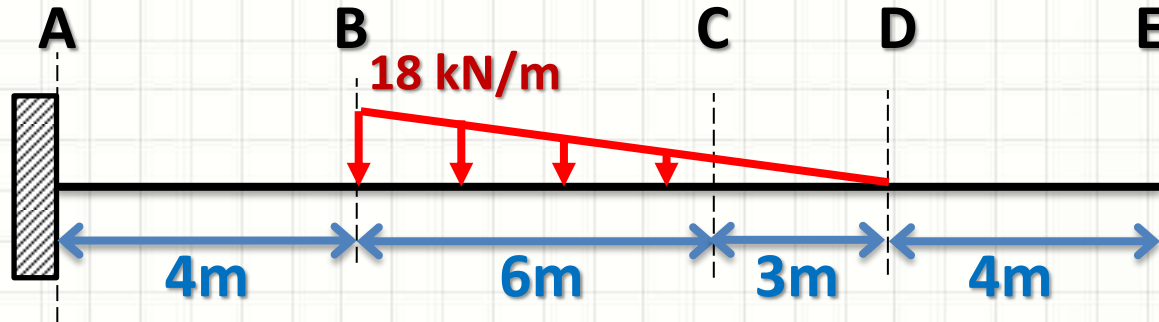


$$F_{Ay} = \frac{3m \cdot -4000 \text{ N/m}}{2} = -6 \text{ kN}$$

$$M_A = 6000 \text{ N} \cdot (1 + 2) \text{ m} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

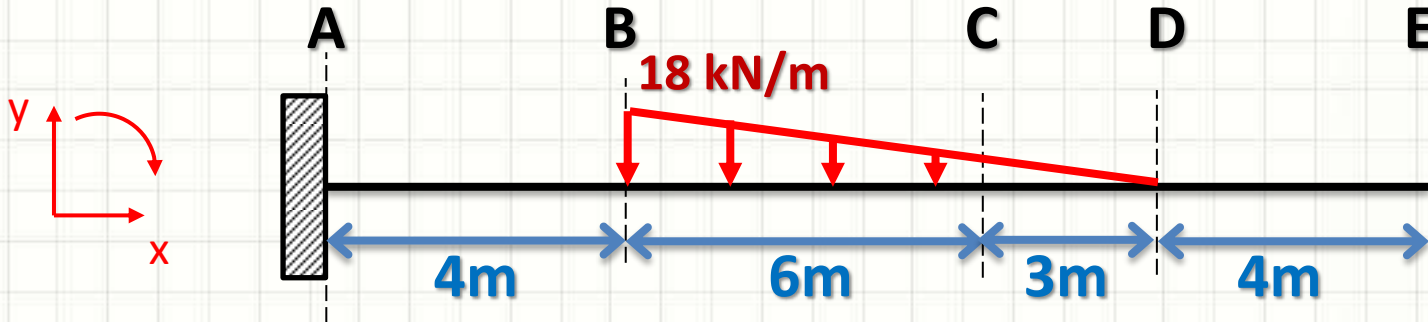
Exercício

- Calcule os esforços no eixo das seções A e C



Exercício

- Calcule os esforços no eixo das seções A e C



$$F_{Ay} = \frac{9m \cdot -18000 \text{ N/m}}{2} = -81 \text{ kN}$$

$$M_A = 81000 \text{ N} \cdot (4 + 3) \text{ m} = 567 \text{ kN.m}$$

$$F_{Cy} = \frac{3m \cdot -6000 \text{ N/m}}{2} = -18 \text{ kN}$$

$$M_A = 18000 \text{ N} \cdot (1) \text{ m} = 18 \text{ kN.m}$$

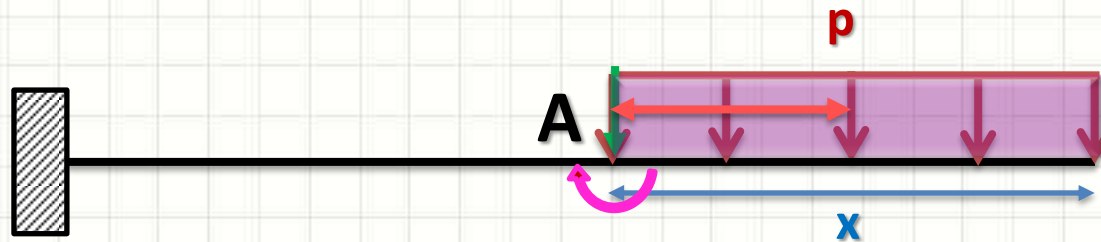


APLICANDO O PRINCÍPIO DOS S.M.E.

CARGAS DISTRIBUÍDAS TRAPEZOIDAIS

Esforços de Cargas Trapezoidais

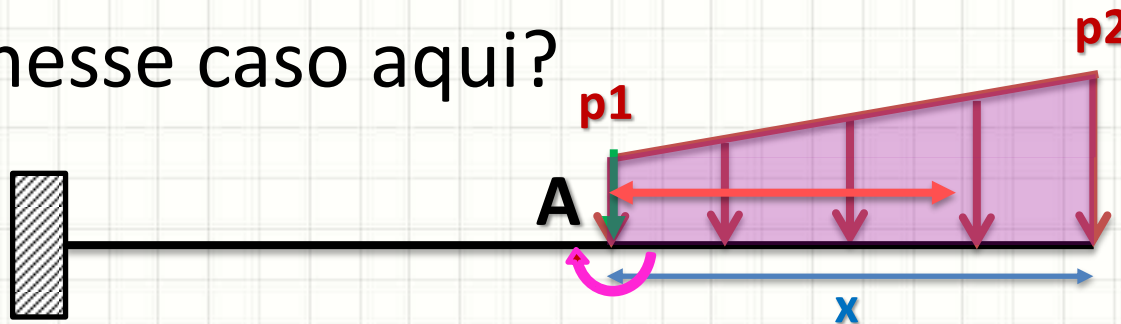
- Como vimos, para uma carga uniforme



$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída}$

$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área}$

- E nesse caso aqui?

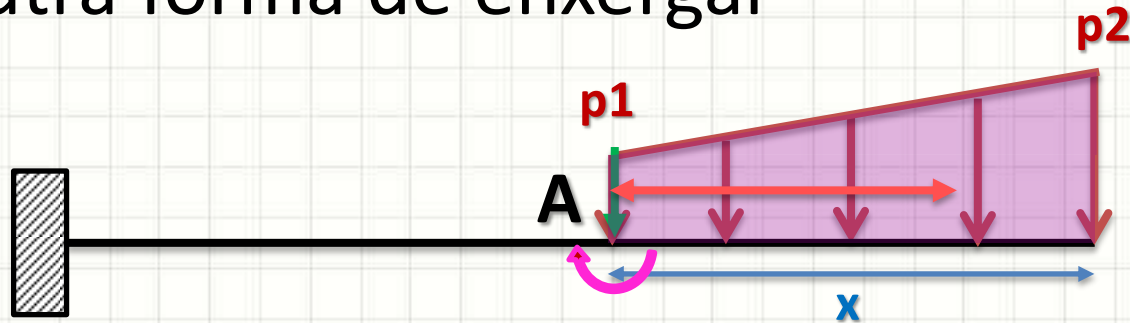


$V_A = \text{Área Sob a Carga Distribuída} = (p_1 + p_2) \cdot x / 2$

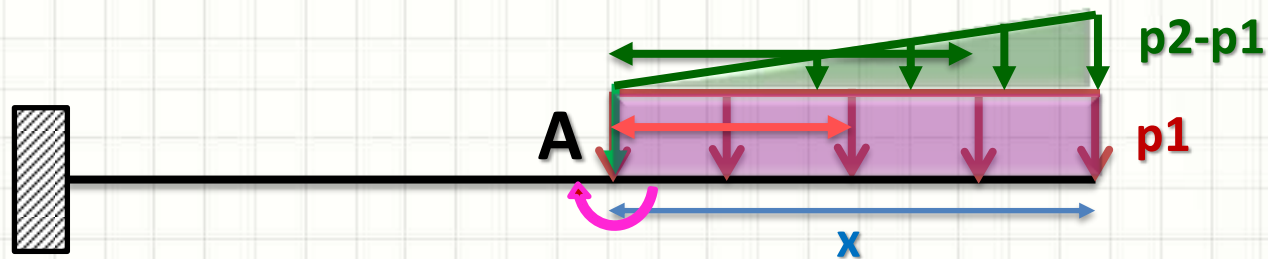
$M_A = V_A \cdot \text{Distância ao CG da Área} = ?$

Esforços de Cargas Trapezoidais

- Outra forma de enxergar



- Sobreposição de cargas

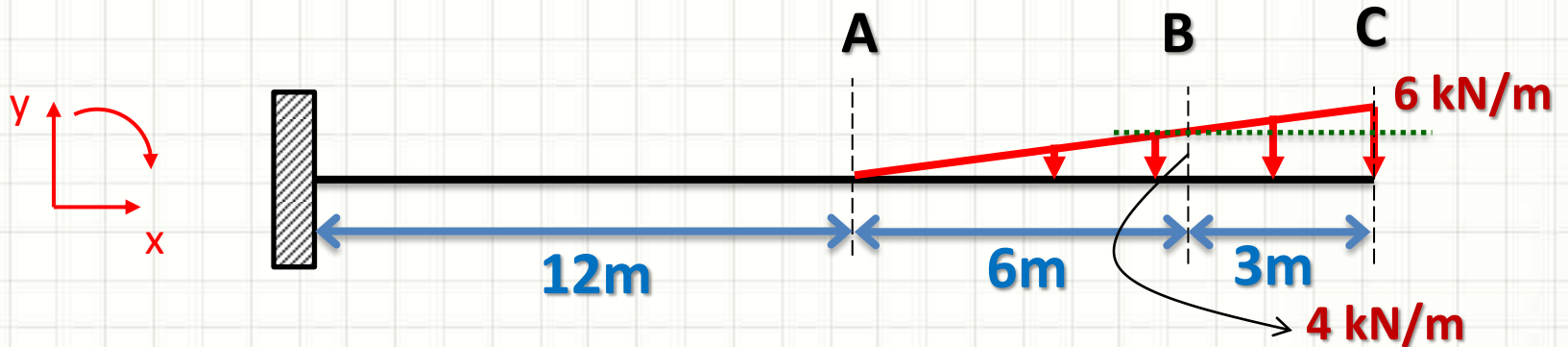


$$V_{AR} = \text{Área Retângulo} \quad V_{AT} = \text{Área Triângulo} \quad V_A = V_{AR} + V_{AT}$$

$$M_A = V_{AR} \cdot x/2 + V_{AT} \cdot 2.x/3$$

Exemplo

- Calcule os esforços no eixo da seção B



$$F_{By} = -4000 \cdot 3 - 2000 \cdot 3/2 = -12000 - 3000 = -9 \text{ kN}$$

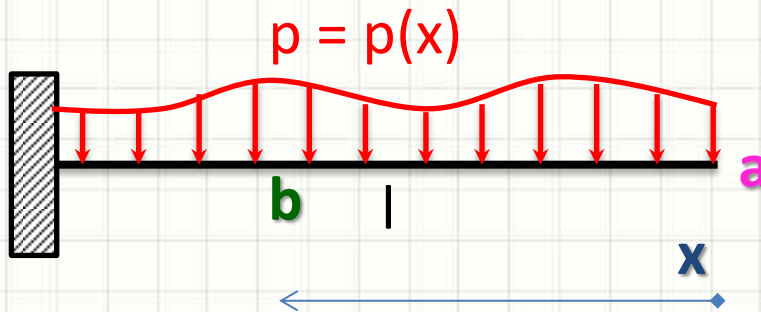
$$M_B = 12000 \cdot 1,5 + 3000 \cdot 3 \cdot 2/3 = 18000 + 6000 = 24 \text{ kN.m}$$



CARGAS GENÉRICAS

Esforço de Carga Genérica

- Esforço em um ponto b



$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$

$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$





CONCLUSÕES

Resumo

- Sistemas Mecanicamente Equivalentes
 - Esforços gerados por cargas distribuídas!
 - Uniformes, triangulares e trapezoidais
 - Cargas Genéricas
 - **TAREFA:** Exercícios Aula 10
-
- Equilíbrio de Corpo Rígido
 - Como saber se um corpo está em equilíbrio completo?
 - Juntando toda a teoria!



PERGUNTAS?

Exercício para Casa

- Determine os esforços no centro da barra e no engastamento:

