



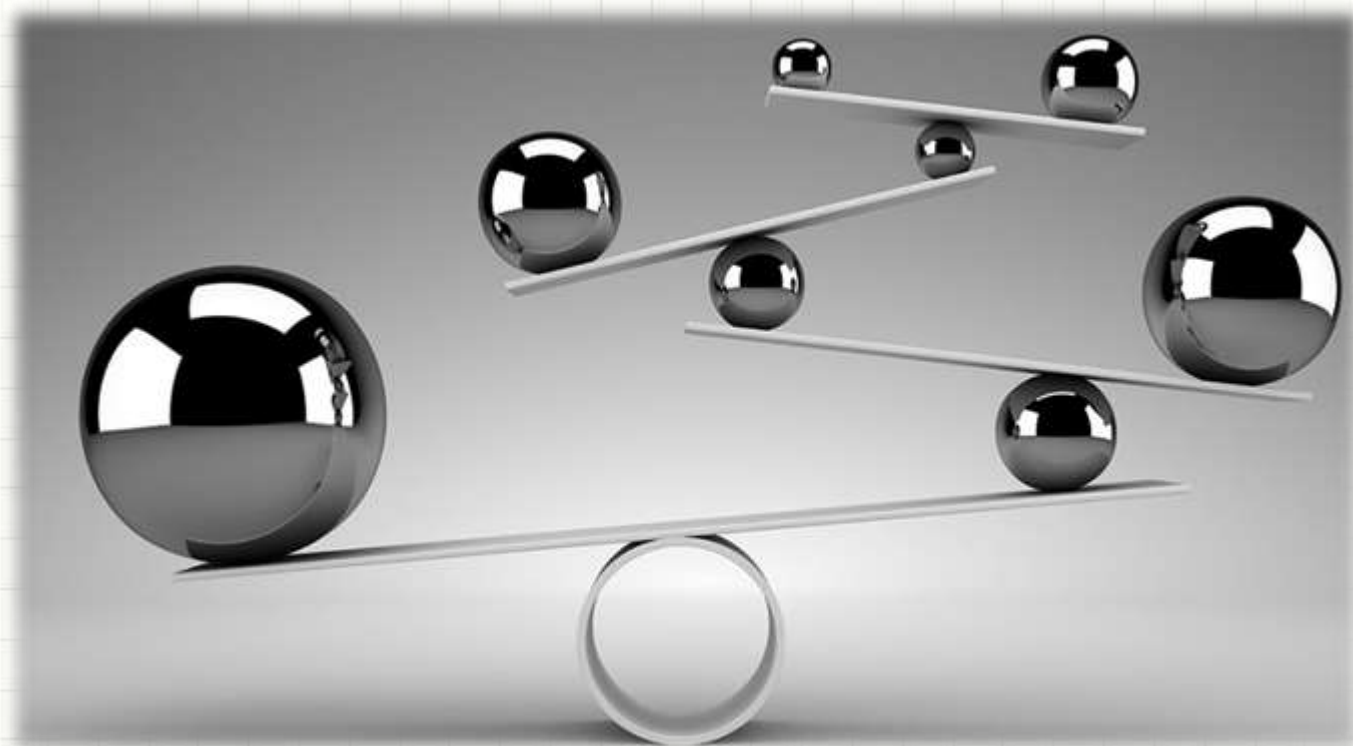
MECÂNICA GERAL

EQUILÍBRIO DE CORPO RÍGIDO

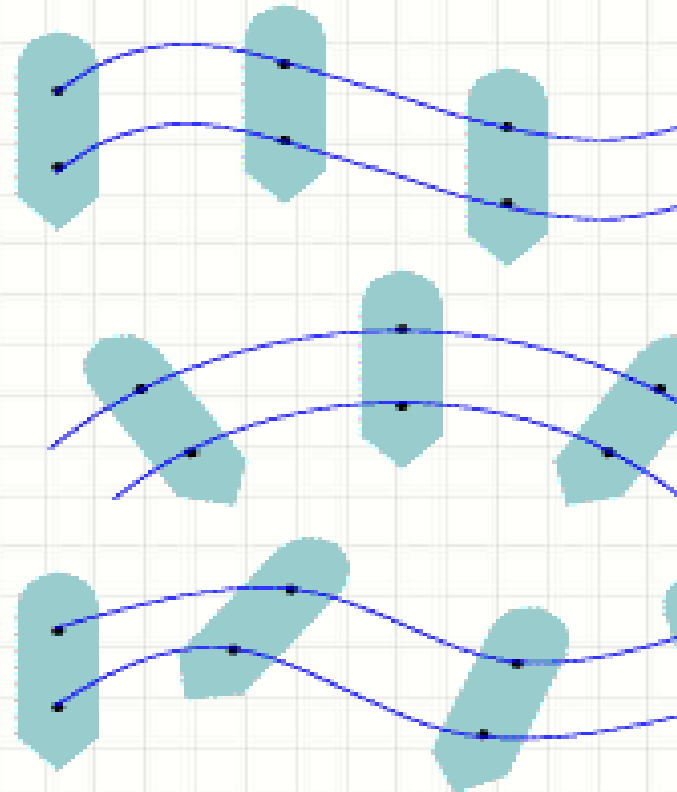
Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 1

O que é necessário para o equilíbrio dos corpos?



Quais são os movimentos de um corpo?



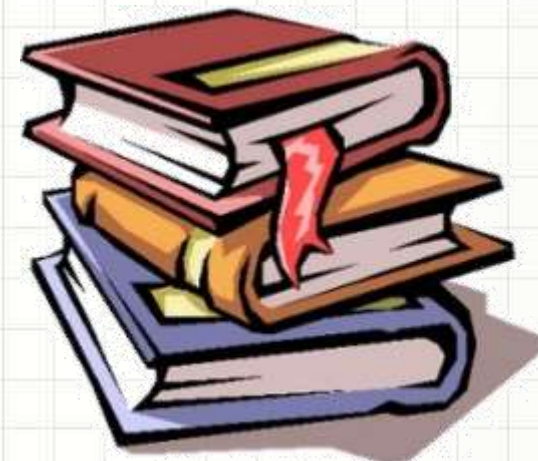
Objetivos

- Conhecer os graus de liberdade de um corpo
- Compreender as condições de equilíbrio de corpo rígido

- **Atividade Aula 11 – SAVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica Geral – Aula 11)

Material Didático

Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 2 (Pags. 74 a 90)

Minha Biblioteca


Estática e Mecânica dos Materiais (BEER;JOHNSTON),
Cap. 4

Biblioteca Virtual

Estática (Hibbeler), Cap. 5

Aula Online

Aula 7



RELEMBRANDO:
EQUILÍBRIO DE
FORÇAS E MOMENTOS

Equilíbrio de Forças

- Sempre que a resultante em uma direção é 0
 - Existe um equilíbrio de forças naquela direção

Condição de
Equilíbrio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$

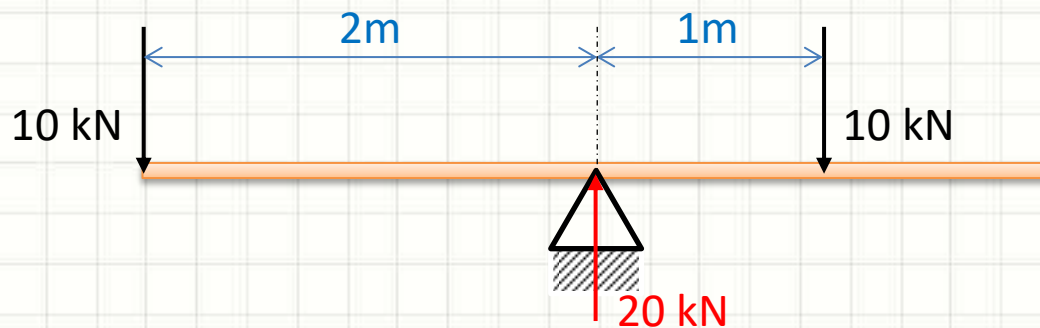
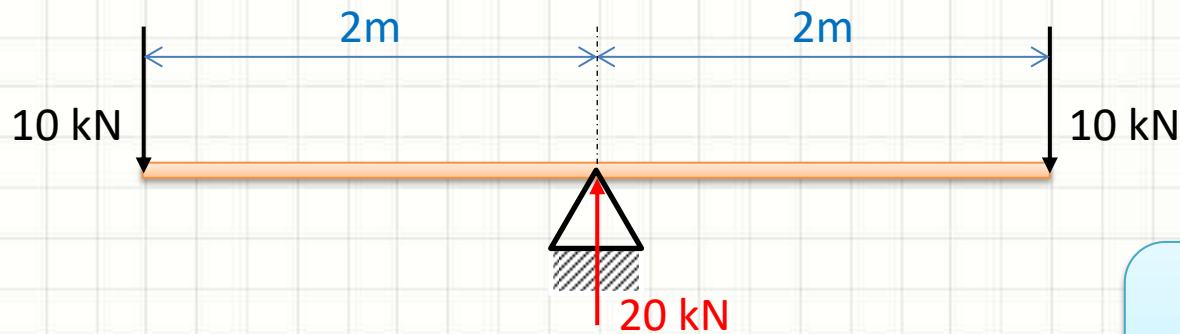


Se equilibram!

- Equilíbrio significa “parado”?
 - “Sem alterar estado de movimento” na direção!

Equilíbrio em Barras

- Nem sempre se garante equilíbrio assim:



Condição de Equilíbrio

$$\vec{R}_X = \sum \vec{F}_X = 0$$

$$\vec{R}_Y = \sum \vec{F}_Y = 0$$

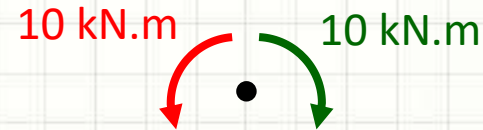
Momentos!

Equilíbrio de Momentos

- Sempre que a resultante dos momentos é 0
 - Momentos estão em equilíbrio!

Condição de Equilíbrio
de Momentos

$$\vec{M}_R = \sum \vec{M} = 0$$



- Equilíbrio significa “parado”?
 - “Não alterar o estado de giro” naquele plano!

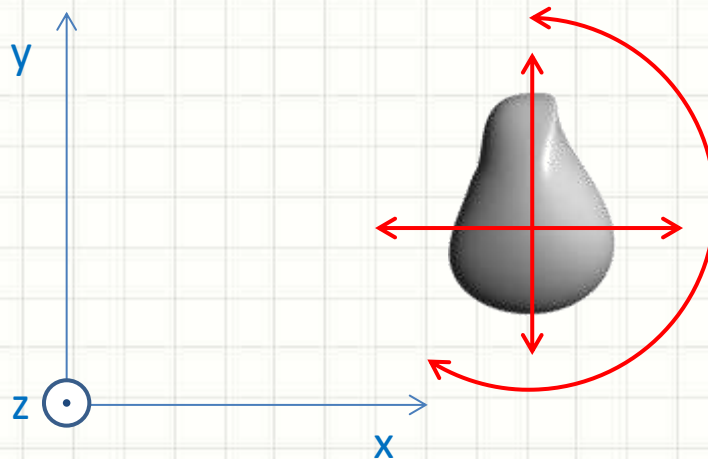
PARA ENTENDER O EQUILÍBRIO ESTÁTICO:

GRAUS DE LIBERDADE DE UM CORPO RÍGIDO

Movimentos Possíveis

- Corpo livre: quantos tipos de movimento?
- Começemos por um mundo bidimensional
 - Translação horizontal
 - Translação vertical
 - Rotação no plano (ao redor de z)

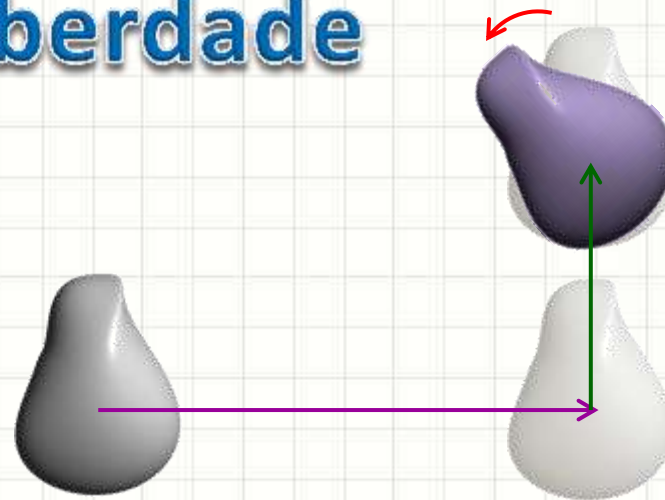
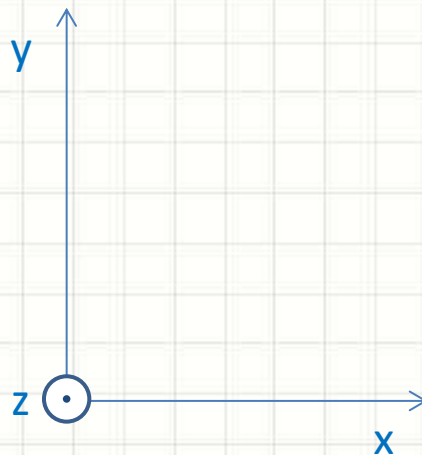
O que significa?



Posicionamento do Corpo

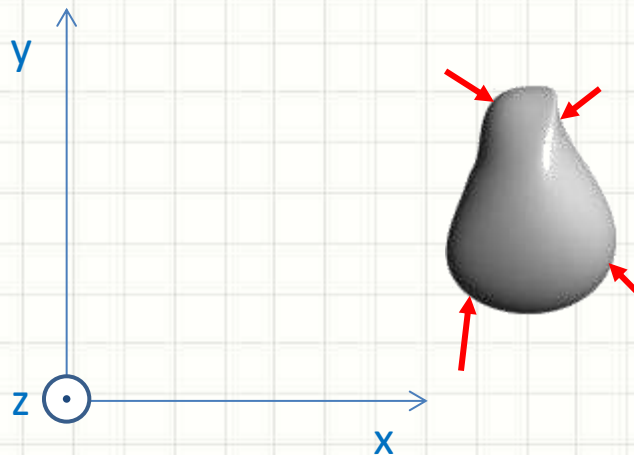
- Pode-se atingir qualquer posição...
 - Com 3 movimentos
- Quais sejam:
 - Translação **horizontal**, **vertical** e uma **rotação**

3 Graus de Liberdade



Foças x Graus de Liberdade

- Corpo sob a ação de forças externas:
 - Pode ser movido dessas três maneiras
 - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**
- Como saber se o corpo está em equilíbrio?
 - Qual deve ser o valor das resultantes?

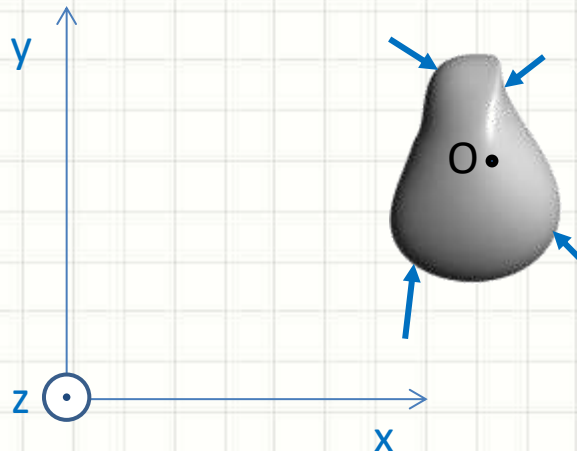




CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO

Equilíbrio de Corpo Rígido

- Primeiro, vamos formalizar um corpo rígido
 - É um corpo em que todos os pontos que o compõem são solidários entre si
- Ou seja, para verificar o equilíbrio de um corpo rígido, basta verificar o que acontece em um ponto arbitrário do mesmo



Equilíbrio de Corpo Rígido

- Para equilíbrio, forças não devem provocar:
 - Translação **horizontal** e **vertical**, nem **rotação**
- Ou seja, equilíbrio: resultantes zero

Condição de Equilíbrio em X

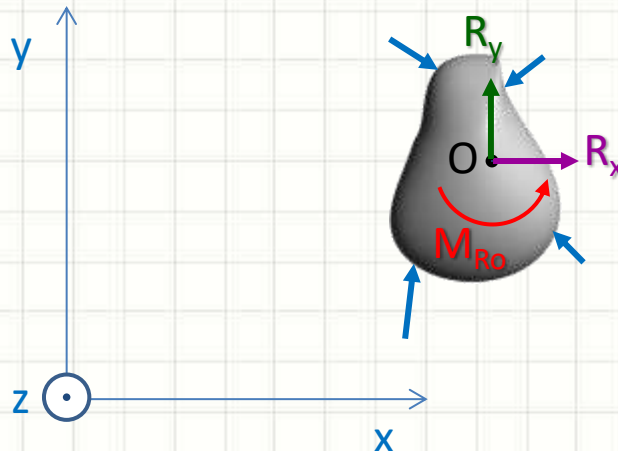
$$R_x = \sum F_x = 0$$

Condição de Equilíbrio em Y

$$R_y = \sum F_y = 0$$

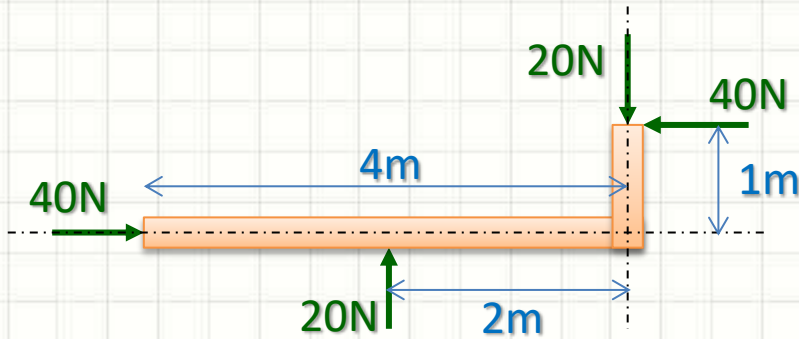
Condição de Equilíbrio de Momentos

$$M_{R_O} = \sum M_O = 0$$



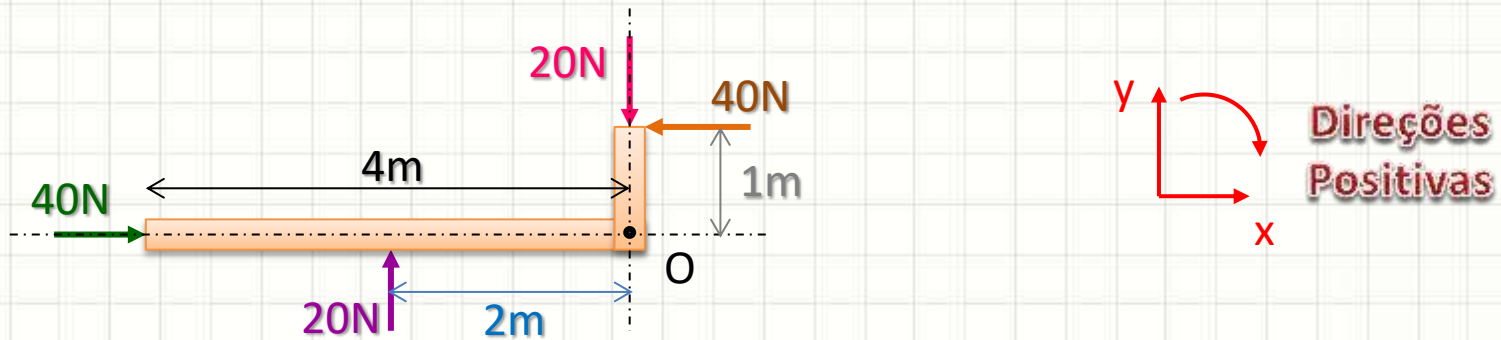
Exemplo

- Verifique se está em equilíbrio estático



Exemplo

- Verifique se está em equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +40 - 40 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

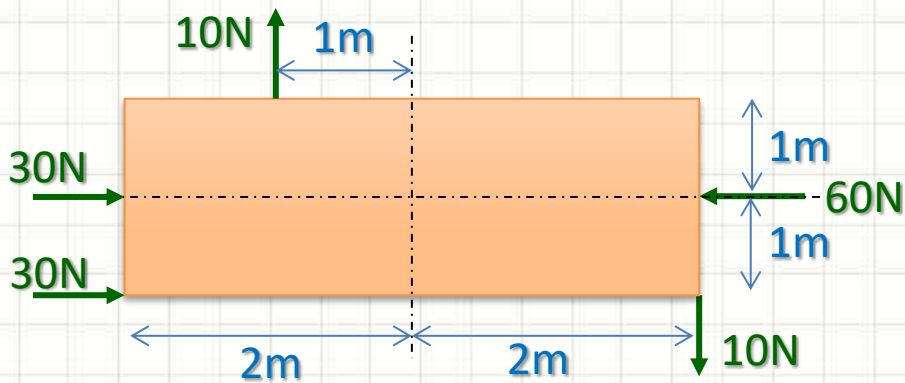
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +20 - 20 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(20 \cdot 2) - (40 \cdot 1) = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

**Corpo em
Equilíbrio!**

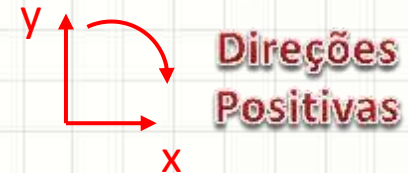
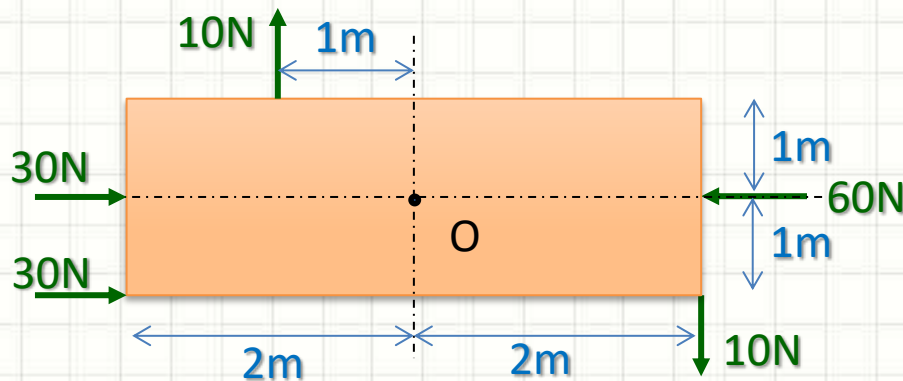
Exercício

- Verifique se está em equilíbrio estático



Exercício

- Verifique se está em equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +30 + 30 - 60 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

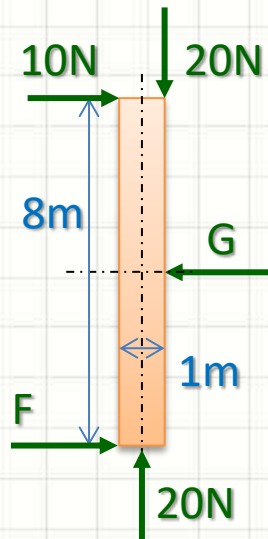
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +10 - 10 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(30 \cdot 0) - (30 \cdot 1) + (10 \cdot 2) + (60 \cdot 0) + (10 \cdot 1) = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

Corpo em
Equilíbrio!

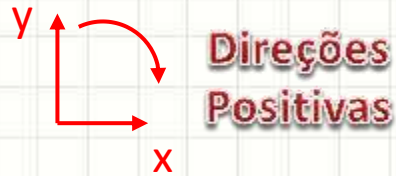
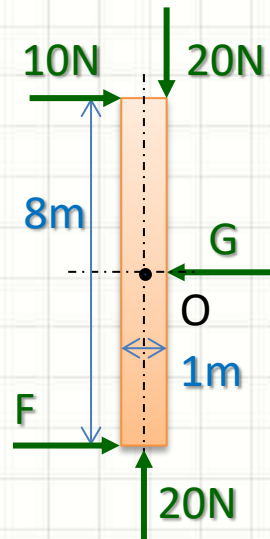
Exercício

- Qual os valores de F e G para equilíbrio?



Exercício

- Qual os valores de F e G para equilíbrio?



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +10 + F - G = 0 \quad \Rightarrow G = F + 10$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -20 + 20 = 0$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(10 \cdot 4) + (20 \cdot 0,5) + (G \cdot 0) + (20 \cdot 0) - (F \cdot 4) = 0$$

$$\Rightarrow 40 + 10 - 4F = 0 \quad \Rightarrow F = 12,5\text{N}$$

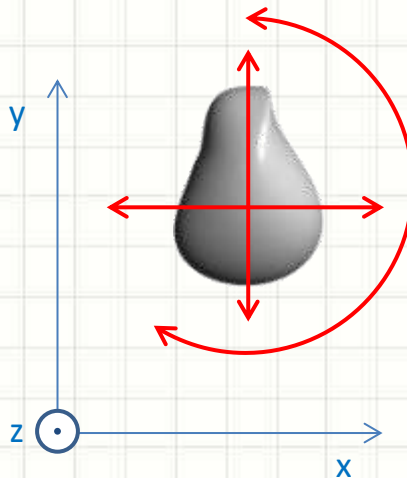
$$\therefore G = 22,5\text{N}$$



VÍNCULOS DE UM CORPO RÍGIDO

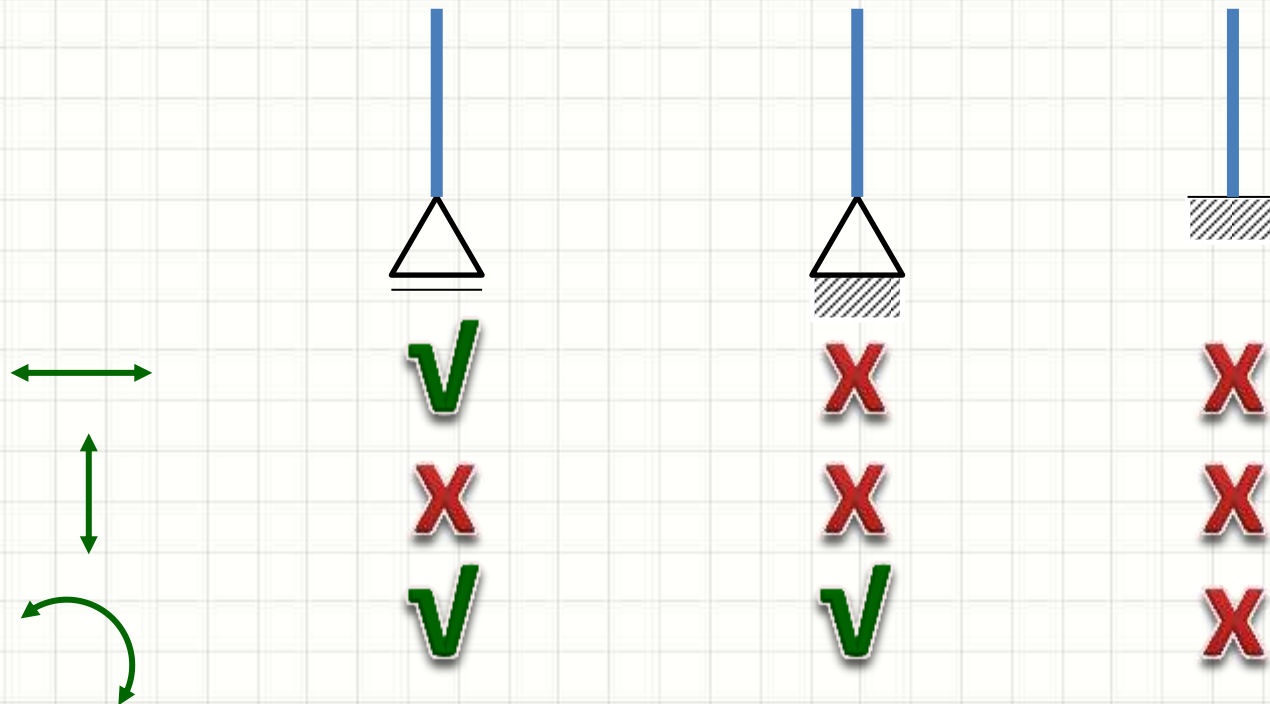
Equilíbrio x Movimento

- Equilíbrio: manutenção do estado
 - Parado x Movimento
- Para garantir ausência de movimento...
 - É necessário “fixar” o elemento



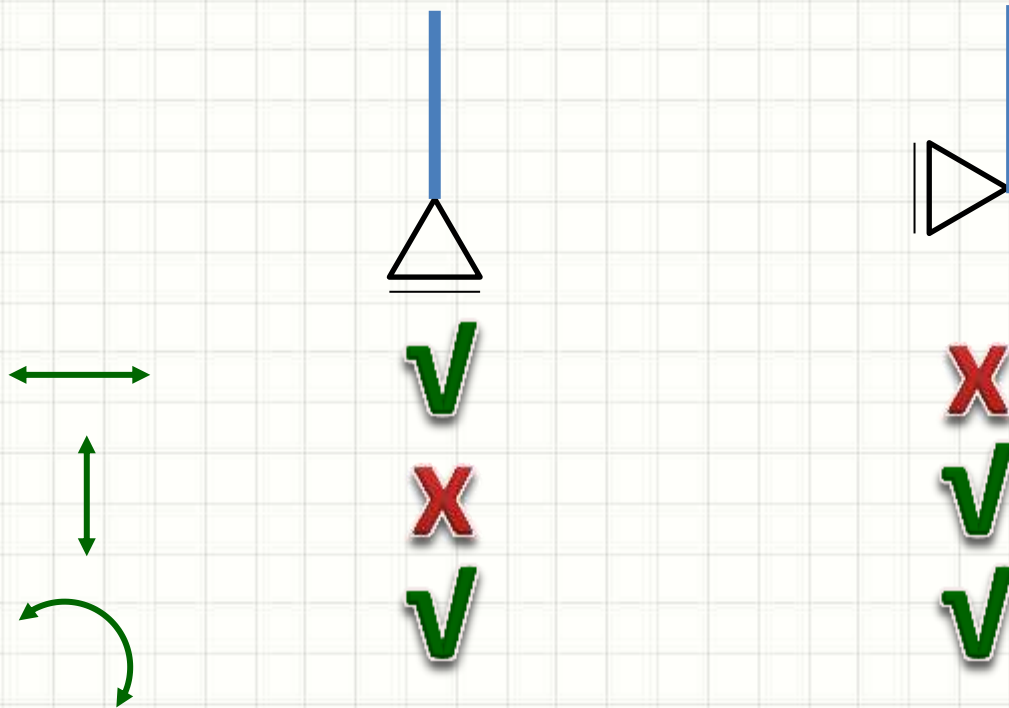
Vínculos de um Corpo Rígido

- Vincular: prender, ligar
- No plano, pode-se vincular para restringir
 - Um, dois ou todos os graus de liberdade



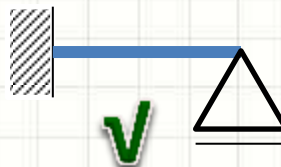
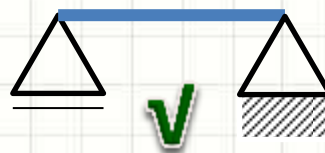
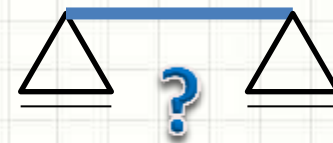
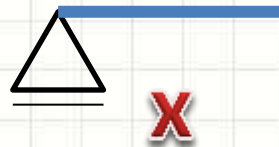
Vínculos de um Corpo Rígido

- Vincular: prender, ligar
- No plano, pode-se vincular para restringir
 - Um, dois ou todos os graus de liberdade



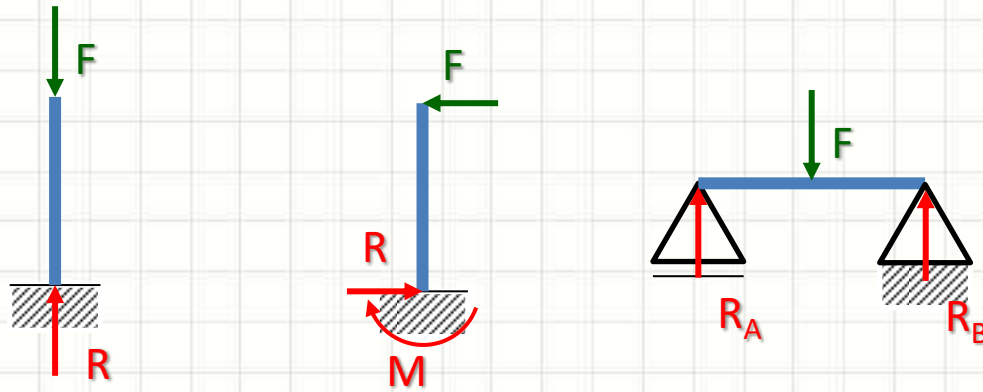
Vínculos x Equilíbrio Estático

- Equilíbrio estático
 - Todos os graus de liberdade impedidos
- Quais estão em equilíbrio estático?



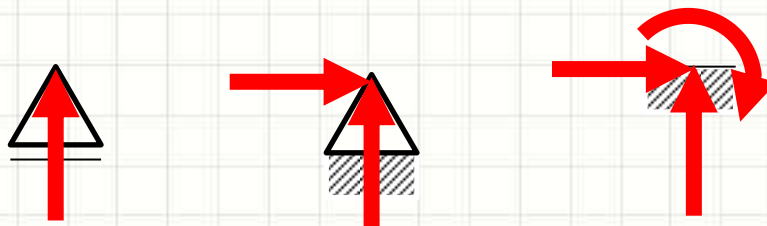
Reações de Apoio

- O equilíbrio ocorre porque...
 - Os vínculos impõem reações aos esforços



Reações de Apoio

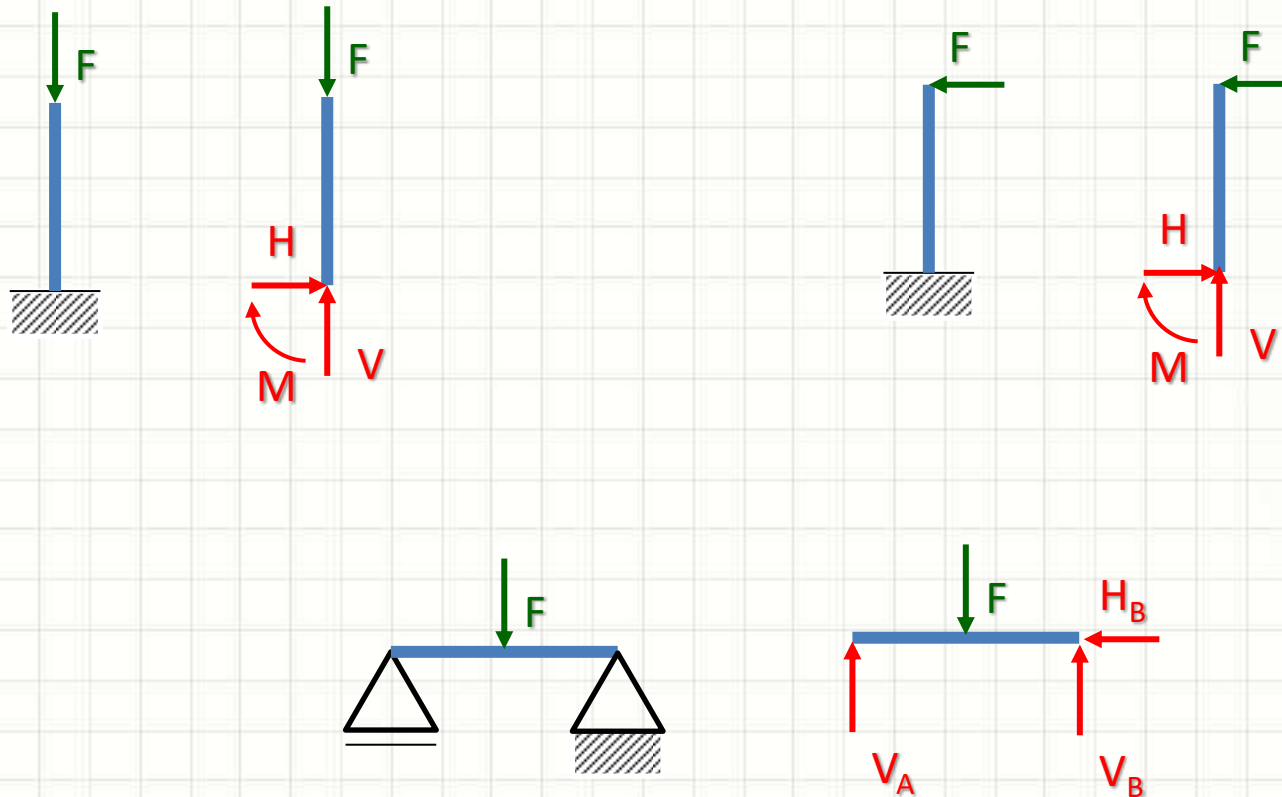
- Cada tipo **pode** impor diferentes reações



Como Calcular?

Diagrama de Corpo Livre

- Quando redesenhamos a estrutura substituindo seus vínculos por reações:

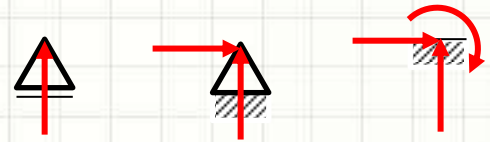
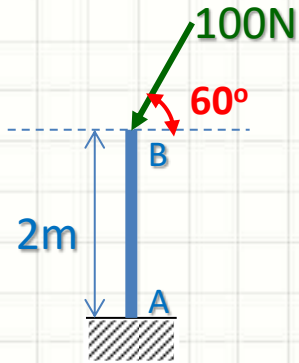




EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Exemplo

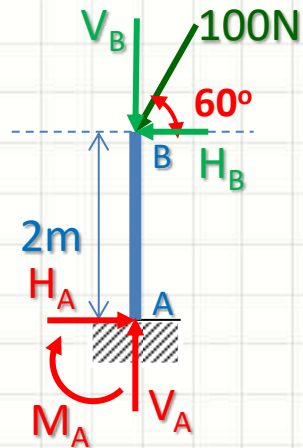
- Calcule as reações de apoio



Exemplo



- Calcule as reações de apoio

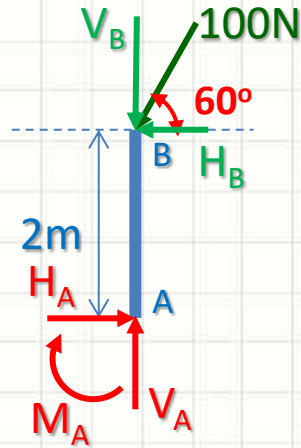


1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)

Exemplo



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)
2. Decompor os esforços nos eixos x e y

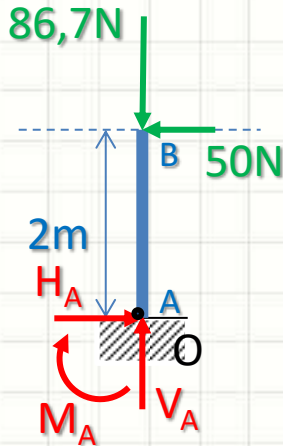
$$H_B = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 \cong 50N$$

$$V_B = 100 \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,867 \cong 86,7N$$

Exemplo



- Calcule as reações de apoio

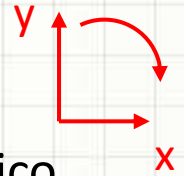


1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)
2. Decompor os esforços nos eixos x e y

$$H_B = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 \cong 50N$$

$$V_B = 100 \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,867 \cong 86,7N$$

3. Identificar as direções positivas
4. Determinar as reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_A - 50 = 0 \quad \Rightarrow H_A = 50N$$

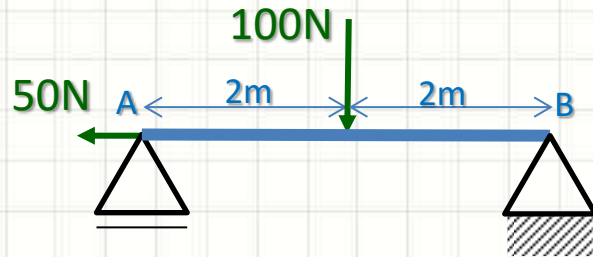
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 86,7 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 86,7N$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(86,7 \cdot 0) - (50 \cdot 2) + (V_A \cdot 0) + (H_A \cdot 0) + M_A = 0 \Rightarrow M_A = 100N \cdot m$$

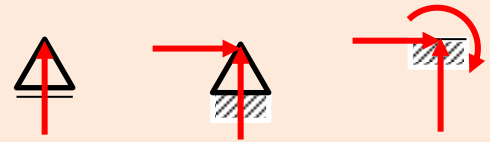
Exercício



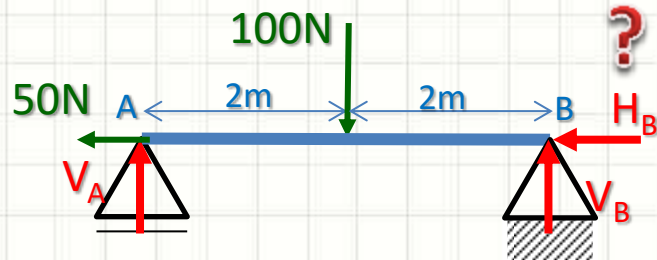
- Calcule as reações de apoio



Exercício

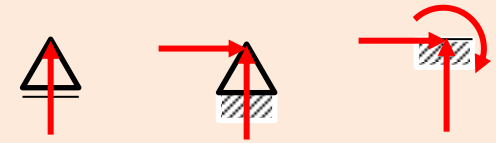


- Calcule as reações de apoio

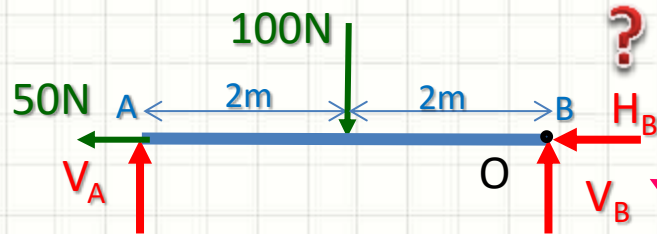


1. Diagrama de corpo livre

Exercício



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -50 - H_B = 0 \quad \Rightarrow H_B = -50N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 100 + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 100 - V_A$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow +(V_A \cdot 4) + (50 \cdot 0) - (100 \cdot 2) + (V_B \cdot 0) + (H_B \cdot 0) = 0$$

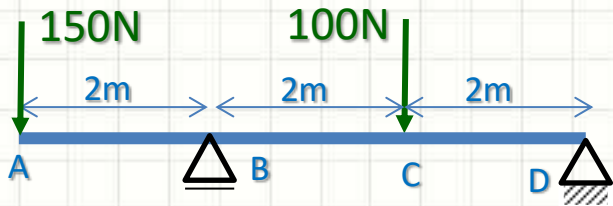
$$\Rightarrow 4 \cdot V_A = 200$$

$$\Rightarrow V_A = 50N \quad \therefore V_B = 50N$$

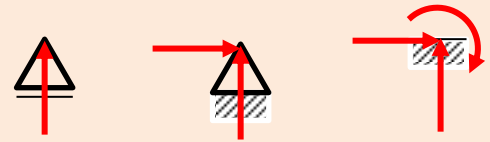
Exercício



- Calcule as reações de apoio

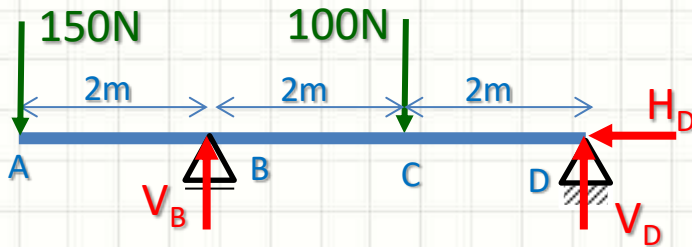


Exercício

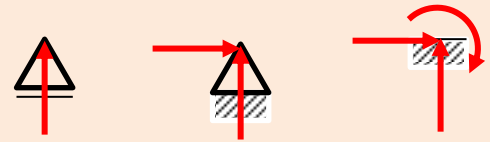


- Calcule as reações de apoio

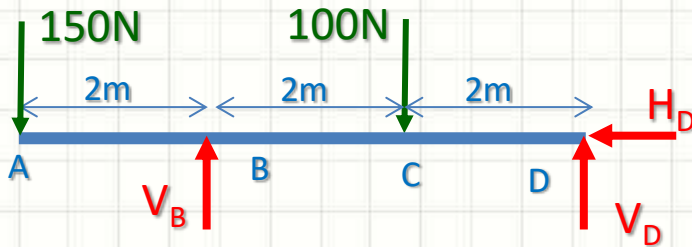
1. Diagrama de corpo livre



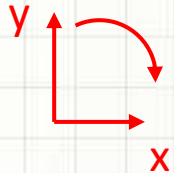
Exercício



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_D = 0 \Rightarrow H_D = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -150 + V_B - 100 + V_D = 0 \Rightarrow V_D = 250 - V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(150 \cdot 6) + (V_B \cdot 4) - (100 \cdot 2) + (V_D \cdot 0) + (H_D \cdot 0) = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot V_B = 1100$$

$$\Rightarrow V_B = 275N \quad \therefore V_D = -25N$$



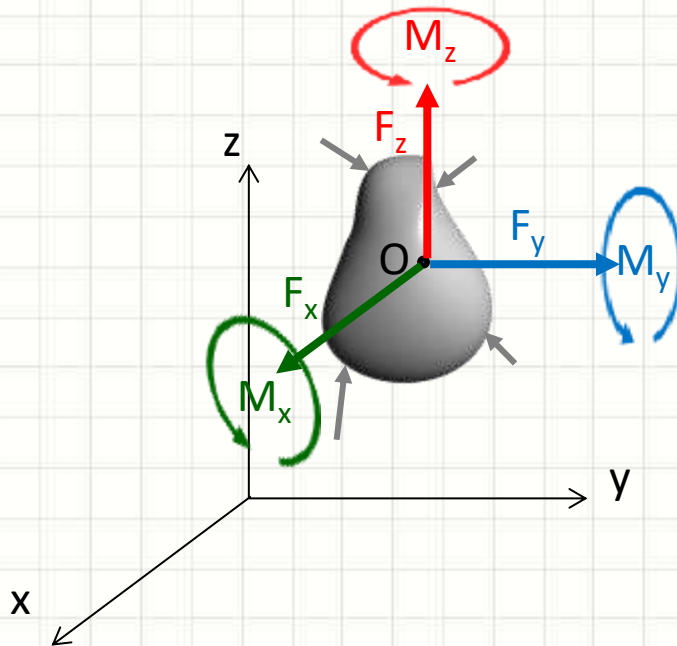
ESTENDENDO O CONCEITO:

EQUILÍBRIO ESTÁTICO TRIDIMENSIONAL

Equilíbrio de Corpo Rígido em 3D

- Para equilíbrio, forças não devem provocar:
 - Translação em x , y e z
 - Rotação ao redor de x , y e z

6 graus de liberdade!



Equilíbrio em X

$$\sum F_x = 0$$

Momento X em O

$$\sum M_{xo} = 0$$

Equilíbrio em Y

$$\sum F_y = 0$$

Momento Y em O

$$\sum M_{yo} = 0$$

Equilíbrio em Z

$$\sum F_z = 0$$

Momento Z em O

$$\sum M_{zo} = 0$$



CONCLUSÕES

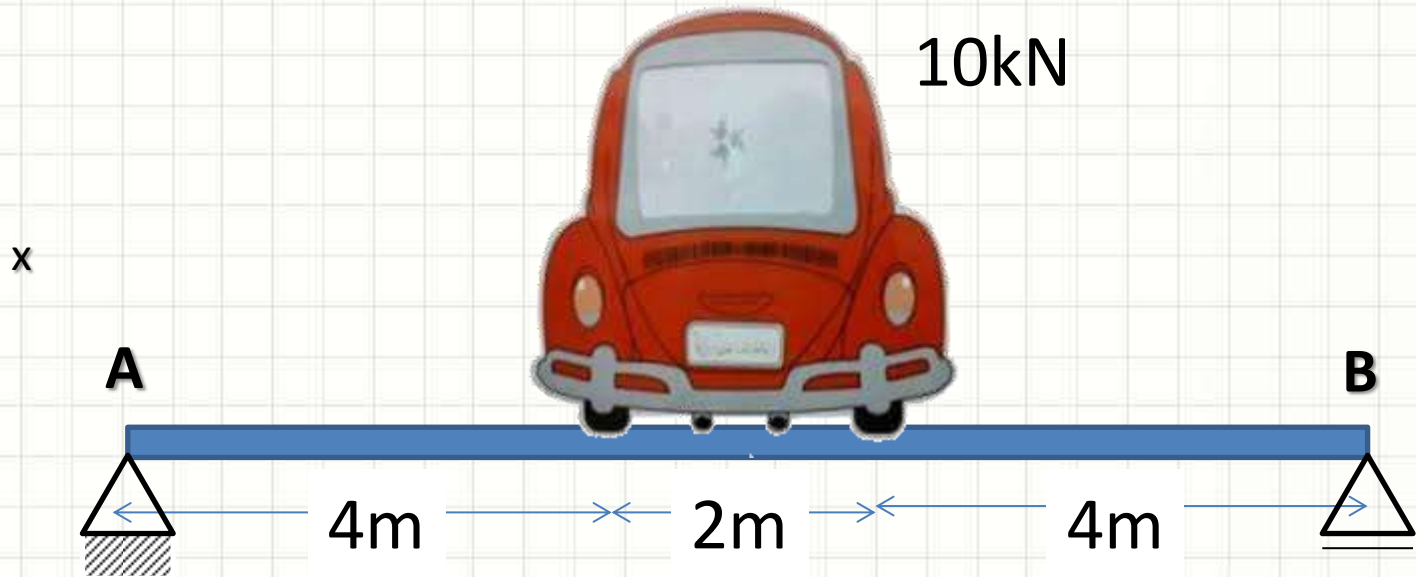
Resumo

- Graus de liberdade: movimentos possíveis
 - Corpos Rígidos: partículas solidárias
 - Equilíbrio do Corpo: forças e momentos
 - Diversos tipos de vínculos
 - Diagramas de corpo livre
 - **TAREFA:** Exercícios Aula 11
-
- Aplicando o conhecimento
 - Cálculo de esforços em telhas
 - Método dos nós



PERGUNTAS?

Exercício para casa



Qual o esforço realizado por cada apoio?

Exercício para casa

- Qual esforço realizado por cada apoio?

