



MECÂNICA GERAL

ANÁLISE ESTRUTURAL: TRELIÇAS PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 1

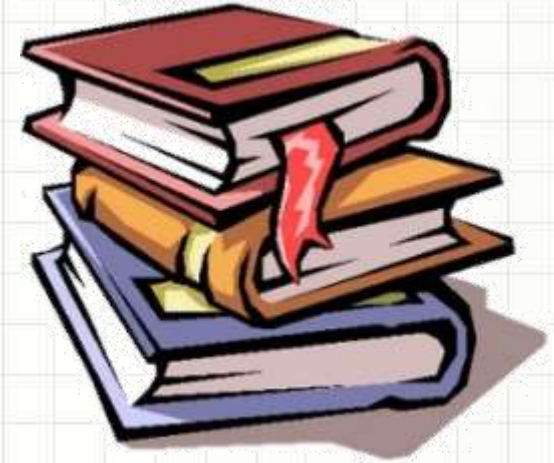
Objetivos

- Aplicar os conceitos vistos anteriormente
- Conhecer a geometria de uma treliça
- Compreender como os esforços agem em uma treliça e seu comportamento
- Compreender o método dos nós

- **Atividade Aula 12 – SAVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica Geral – Aula 12)

Material Didático

Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 3.2, pgs 93 a 104

Minha Biblioteca

Estática e Mecânica dos Materiais (BEER;JOHNSTON),
Cap. 6 – Seção 6.1. a 6.6

Biblioteca Virtual

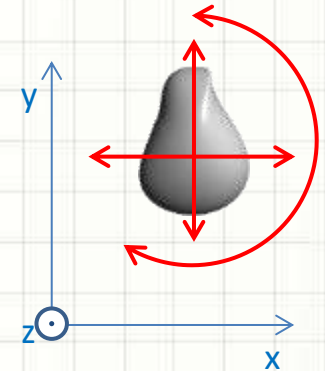
Estática (Hibbeler), Cap. 6 – Seções 6.1 a 6.3

Aula Online

Aula 8

Graus de Liberdade e Equilíbrio

- No plano, corpo rígido: 3 graus de liberdade
 - Translação horizontal
 - Translação vertical
 - Rotação no plano (ao redor de z)



- Condição de Equilíbrio do Corpo Rígido

**Condição de
Equilíbrio em X**

$$R_x = \sum F_x = 0$$

**Condição de
Equilíbrio em Y**

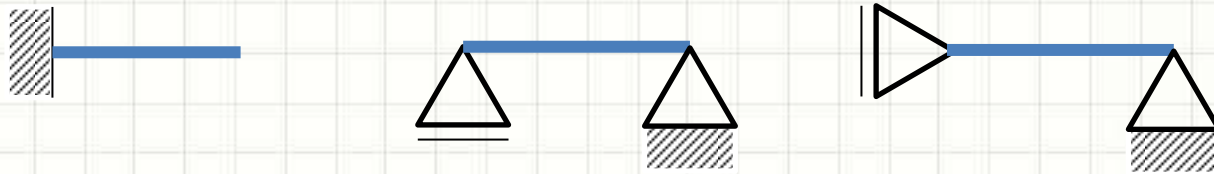
$$R_y = \sum F_y = 0$$

**Condição de
Equilíbrio de Momentos**

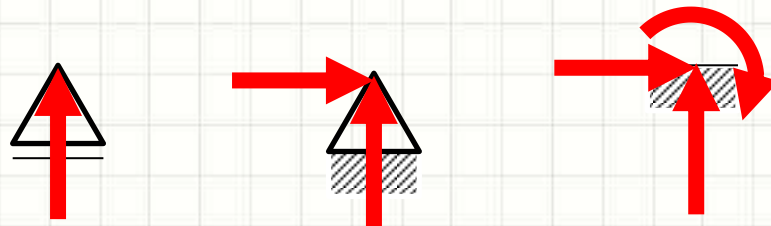
$$M_{R0} = \sum M_o = 0$$

Vínculos e Reações de Apoio

- Equilíbrio estático
 - Todos os graus de liberdade impedidos



- Cada tipo **pode** impor diferentes reações

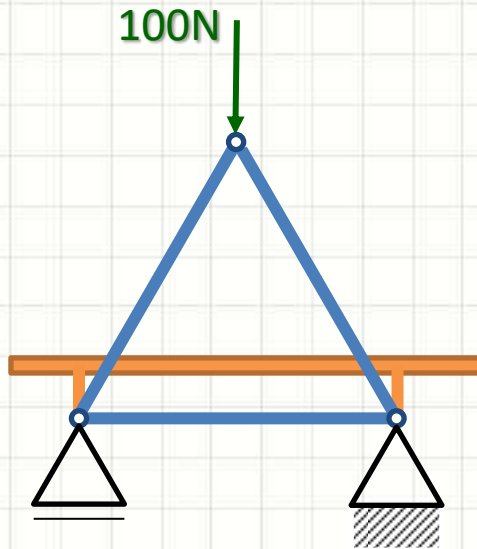


The background features a light gray grid pattern. In the upper portion, there are several overlapping, wavy red lines of varying thickness and opacity, creating a dynamic, abstract design. A dashed red line also curves across the upper part of the grid.

TRELIÇAS PLANAS RÍGIDAS

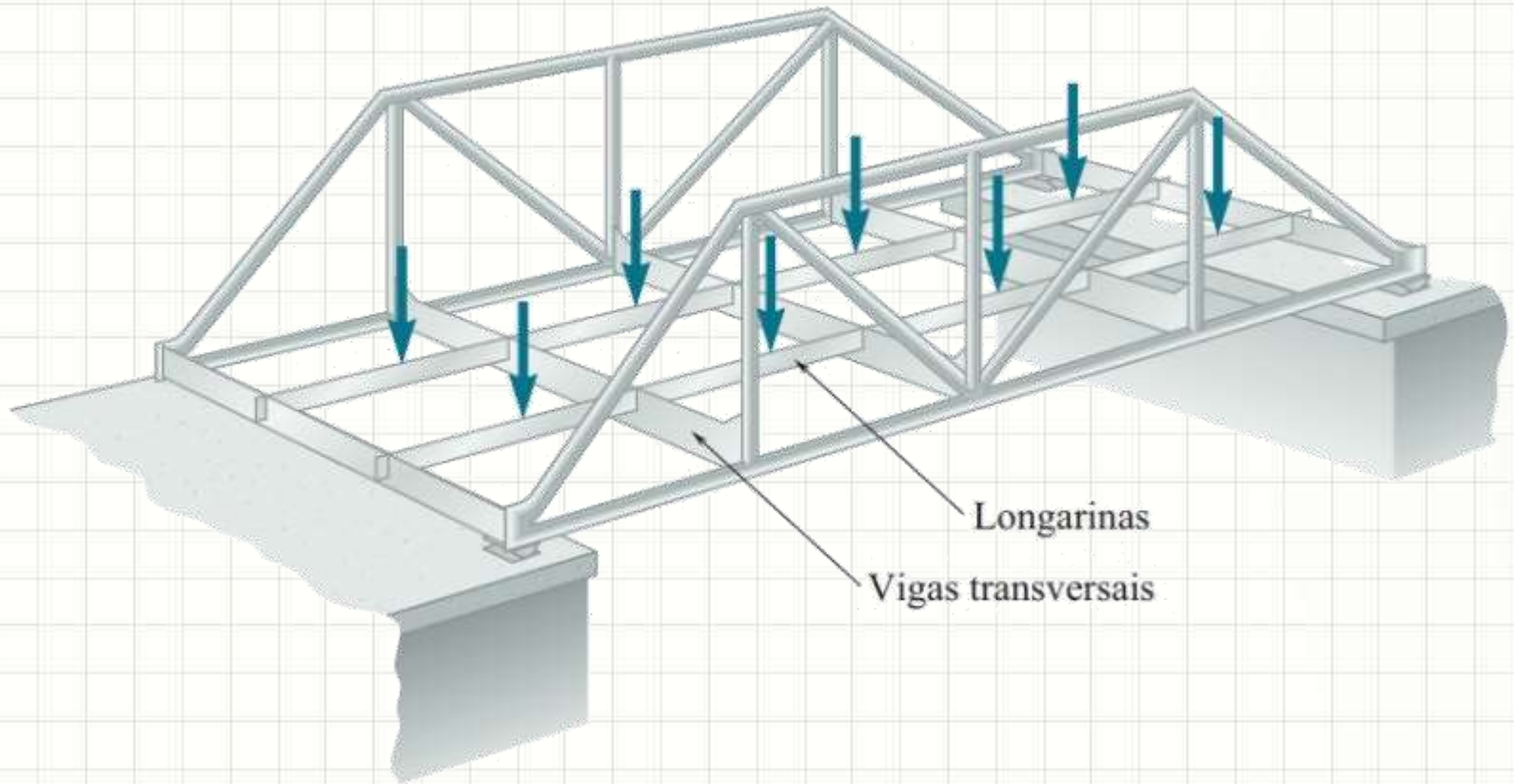
Treliças Planas Rígidas

- Estrutura composta por barras
 - Em geral, compondo elementos triangulares
 - Articuladas nas extremidades
 - As cargas são aplicadas sempre nos nós



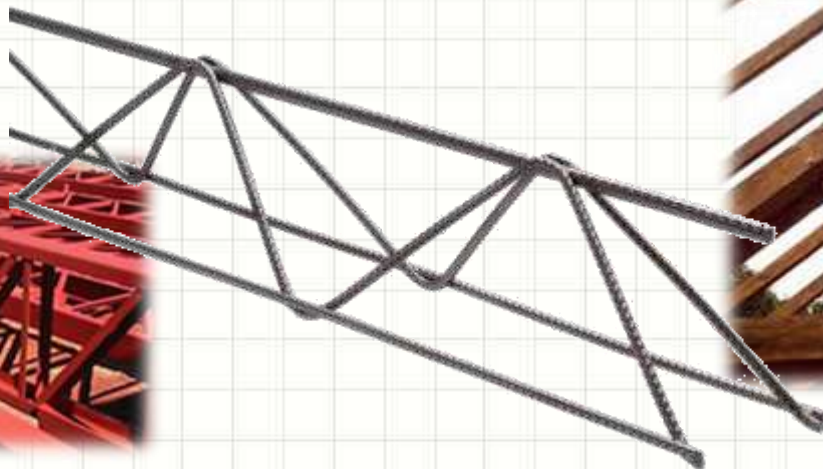
E o peso das barras?

Exemplo de Aplicação: Ponte



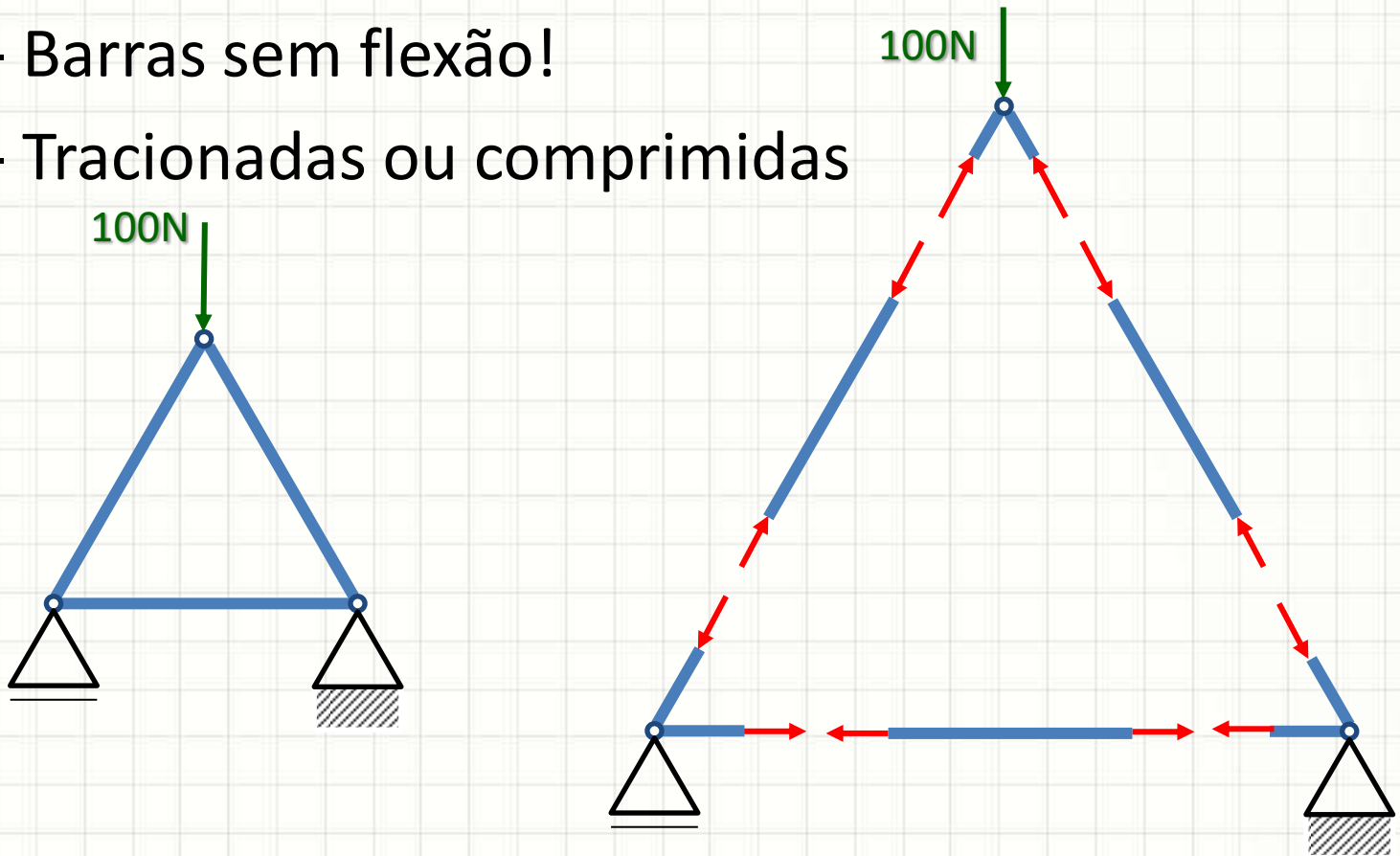
Treliças Planas Rígidas

- Na prática...
 - As extremidades nem sempre são articuladas



Forças Internas

- Até agora, forças externas: equilíbrio externo
- Forças Internas: mantém estrutura coesa
 - Barras sem flexão!
 - Tencionadas ou comprimidas

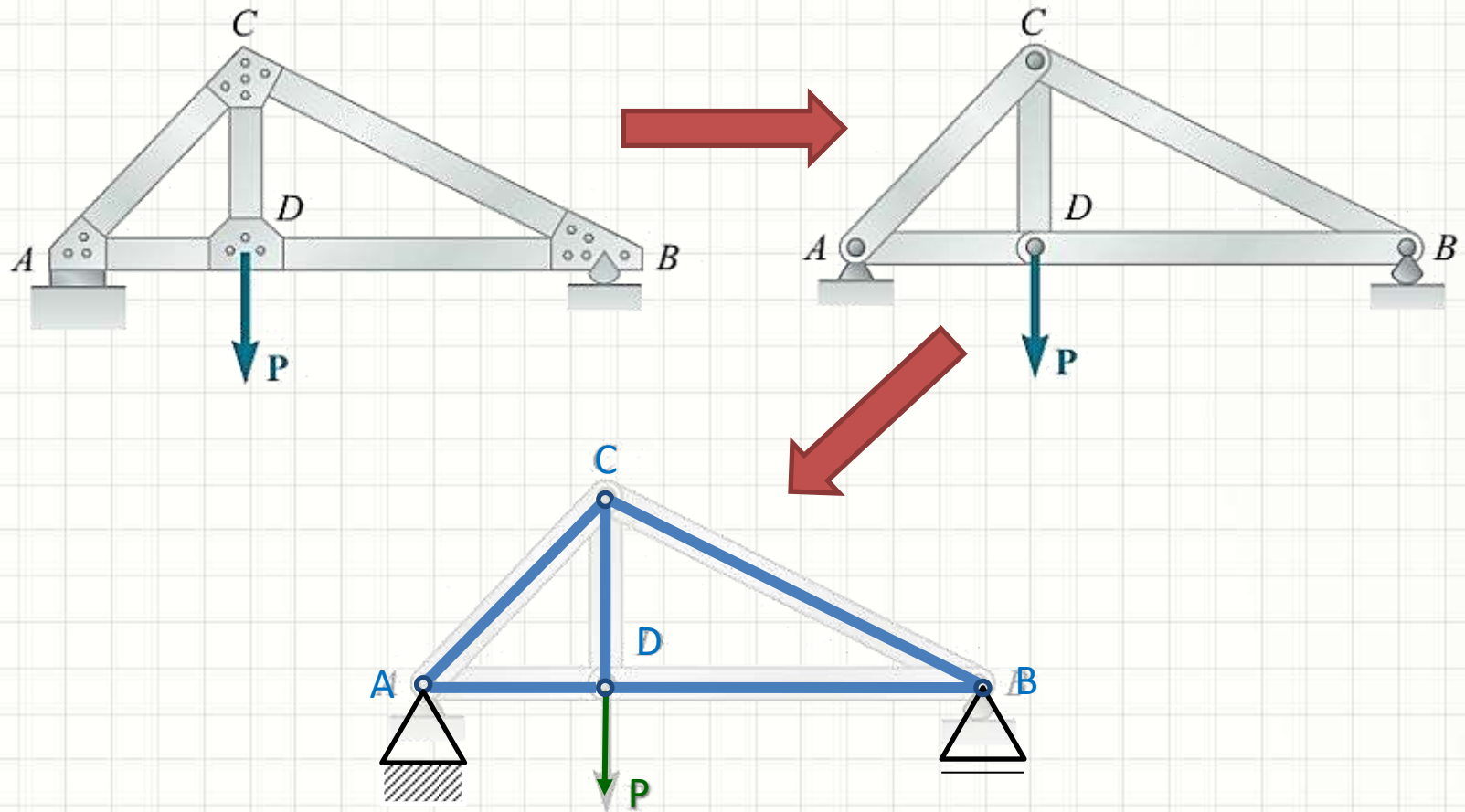




REPRESENTAÇÃO DOS COMPONENTES

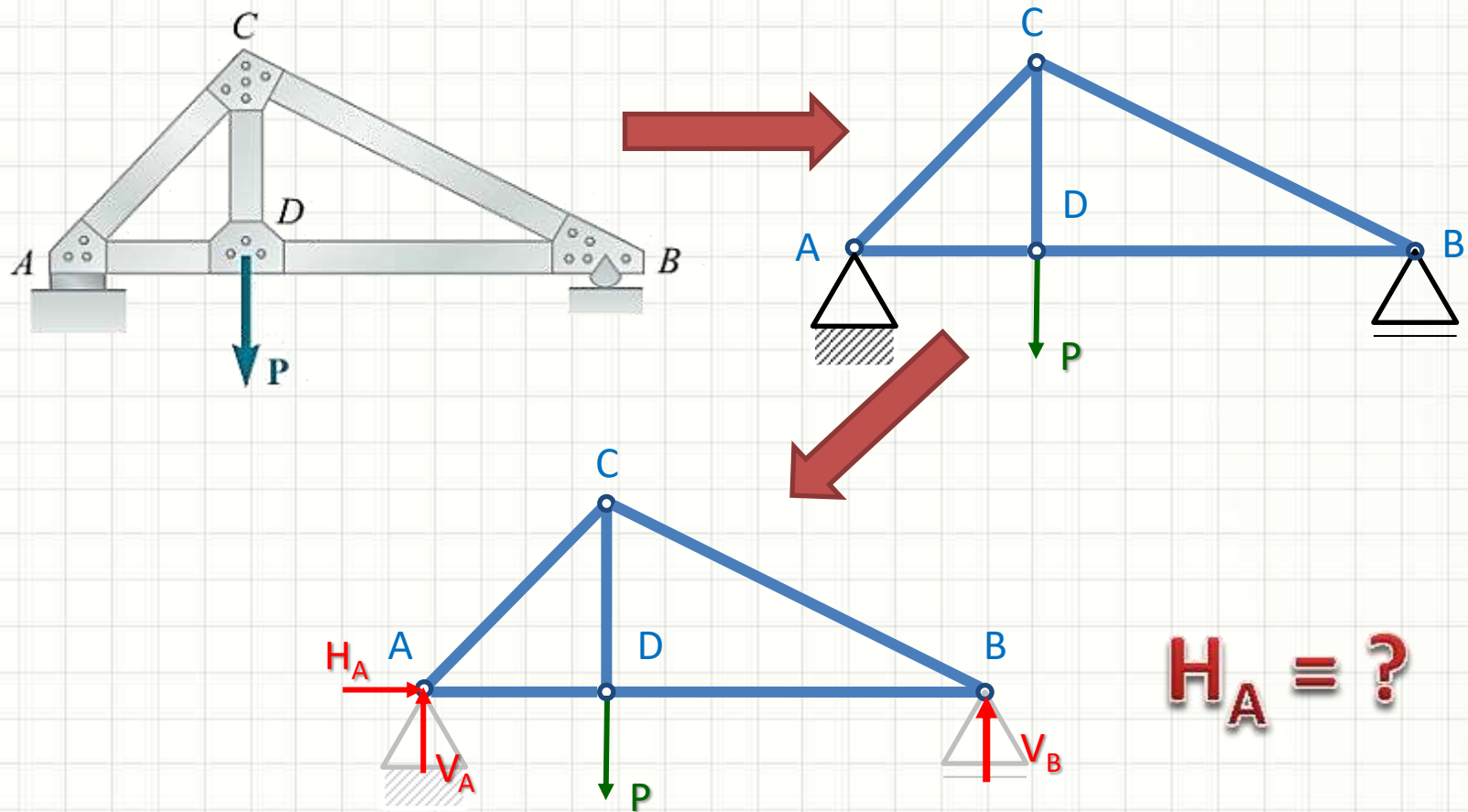
Representação

- Tomemos como exemplo a estrutura real



Representação

- Tomemos como exemplo a estrutura real



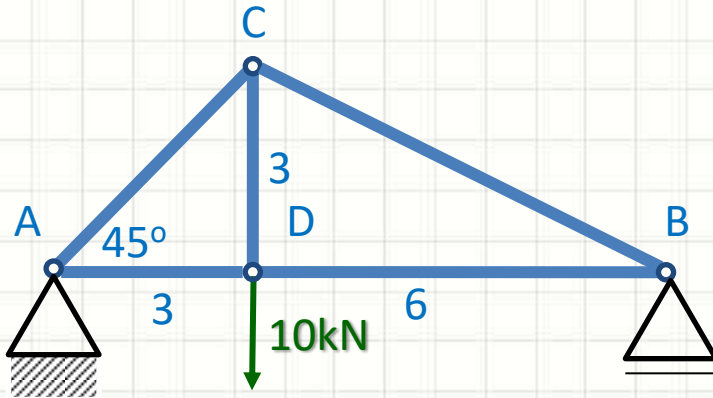
$H_A = ?$



CALCULANDO AS REAÇÕES DE APOIO DA TRELIÇA

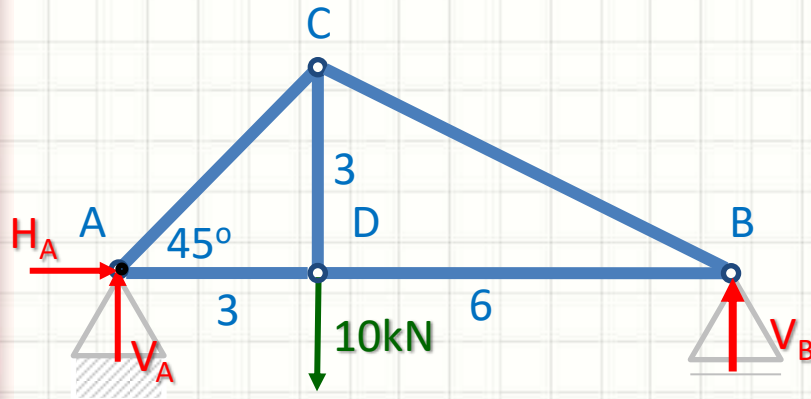
Exemplo

- Calcule as reações de apoio



Exemplo

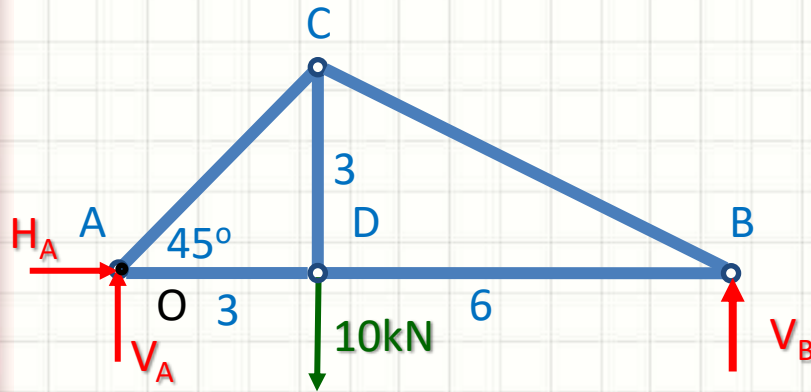
- Calcule as reações de apoio



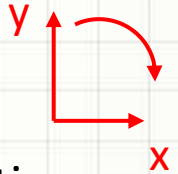
1. Corpo livre

Exemplo

- Calcule as reações de apoio



1. Corpo livre
2. Decompor esforços
3. Identificar as direções positivas
4. Determinar as reações



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_A + 0 = 0 \Rightarrow H_A = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 10000 + V_B = 0 \Rightarrow V_A = 10000 - V_B$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow +(10000 \cdot 3) - (V_B \cdot 9) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{30000}{9} = 3,33kN$$

$$\therefore V_A = 6,67kN$$

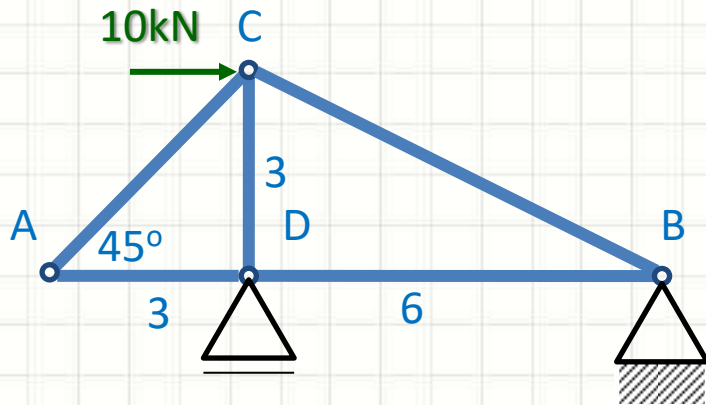
Do ponto de vista dos apoios, a treliça se comporta como uma barra!



EXERCÍCIO

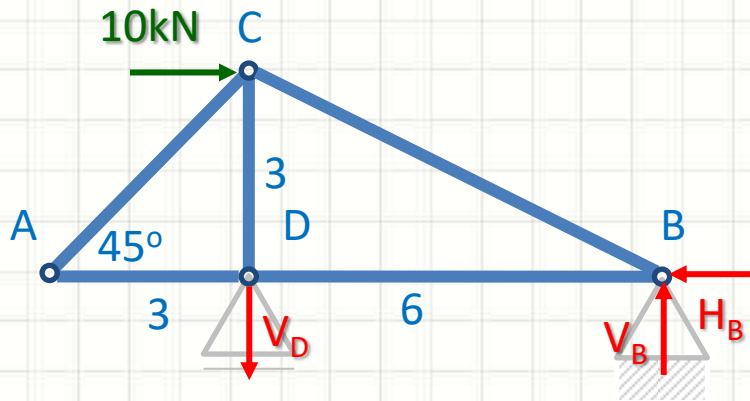
Exercício

- Calcule as reações de apoio



Exercício

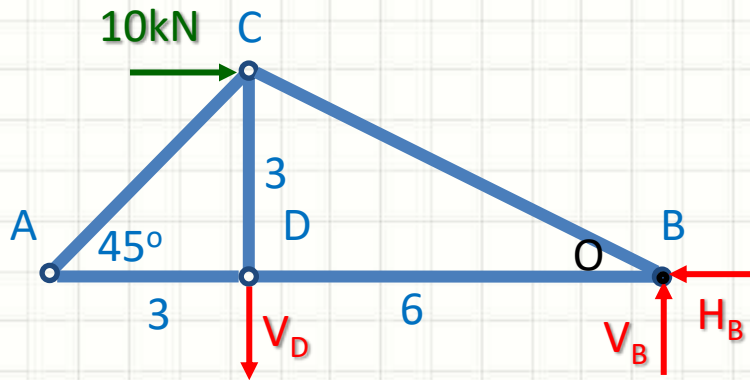
- Calcule as reações de apoio



1. Corpo livre

Exercício

- Calcule as reações de apoio




1. Corpo livre
2. Decompor esforços
3. Identificar as direções positivas
4. Determinar as reações

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_B + 10000 = 0 \quad \Rightarrow H_B = 10kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_D + V_B = 0 \quad \Rightarrow V_B = V_D$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(10000 \cdot 3) - (V_D \cdot 6) = 0 \Rightarrow V_D = \frac{30000}{6} = 5kN$$

$$\therefore V_B = 5kN$$



CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS

Cálculo dos Esforços Internos

- Como calcular os esforços nas barras?
 - Tração x Compressão
- 1º Método: de Cremona
 - “Método do Equilíbrios dos Nós”
 - “Método dos Nós”

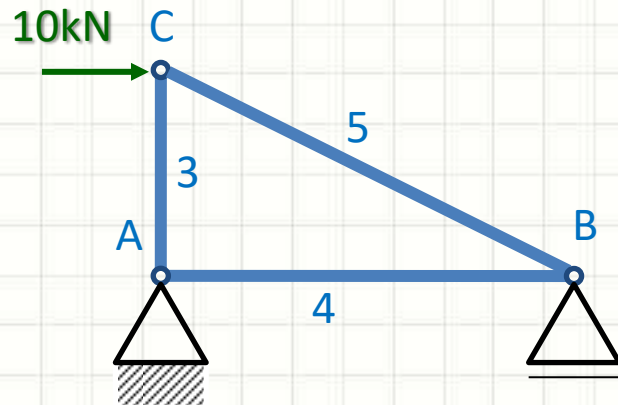
Em uma treliça em equilíbrio, todos os nós dessa treliça estão em equilíbrio.

Método de Cremona

- Procedimento
 1. Determinar as reações de apoio
 2. Identificar as barras tracionadas / comprimidas
 3. Verificar o equilíbrio de cada nó
 - Do com menos incógnitas para o com mais incógnitas

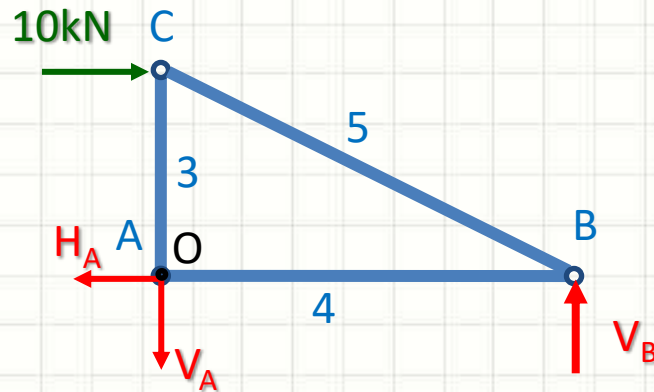
Exemplo

- Método de Cremona



Exemplo – Método de Cremona

1. Determinar as Reações



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 10000 = 0 \Rightarrow H_A = 10kN$$

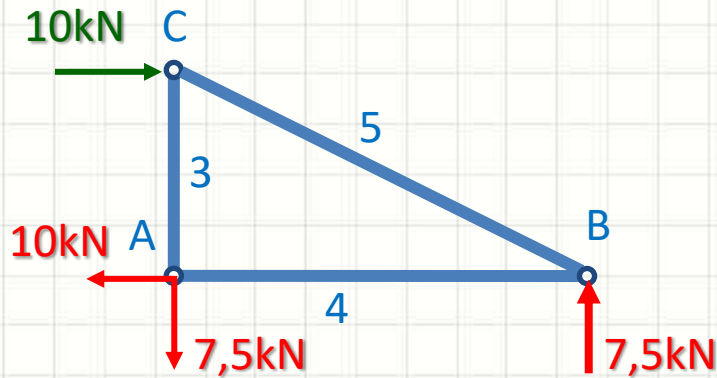
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(10000 \cdot 3) - (V_B \cdot 4) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{30000}{4} = 7,5kN$$

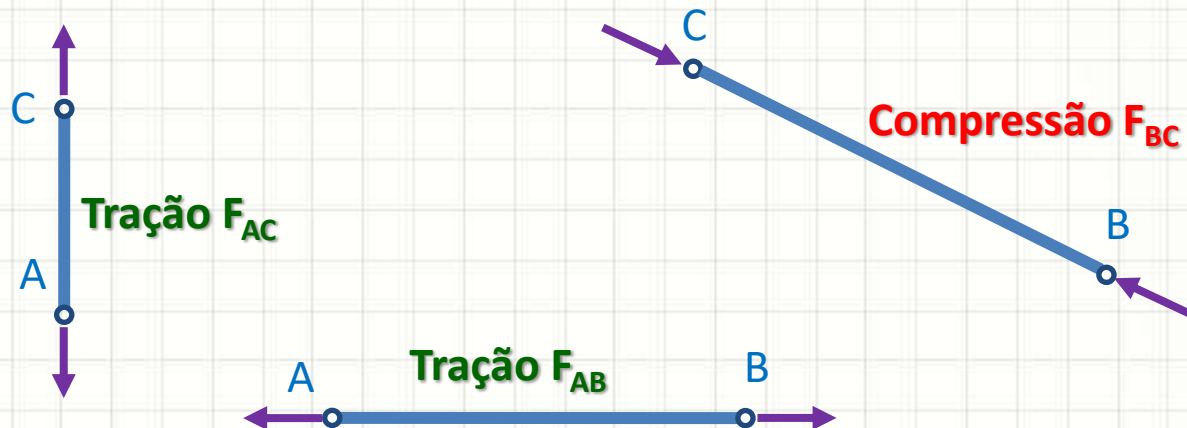
$$\therefore V_A = 7,5kN$$

Exemplo – Método de Cremona

2. Determinar barras tracionadas/comprimidas

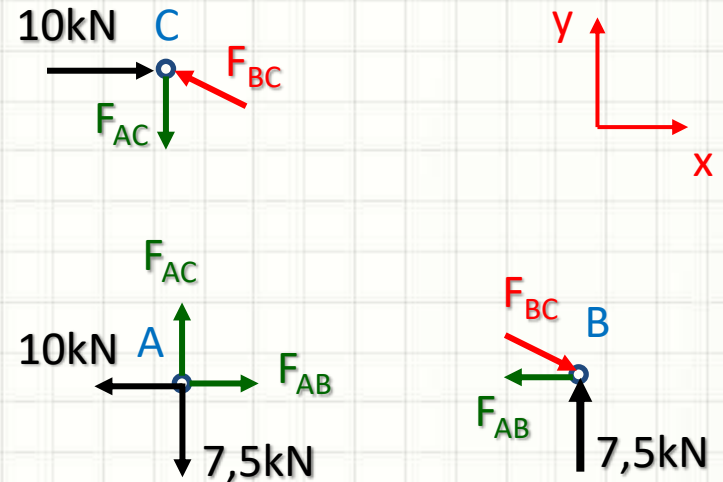
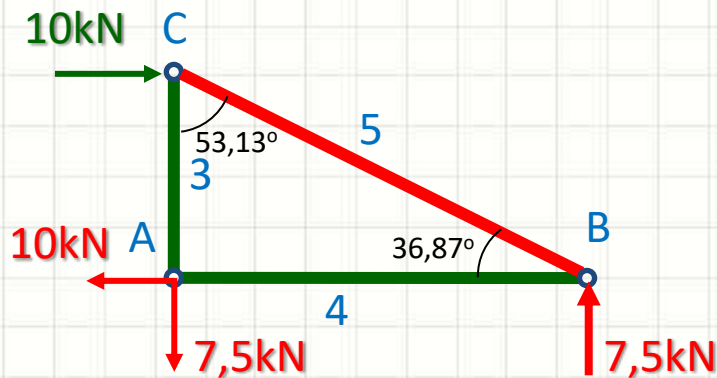


a. Estimado!



Exemplo – Método de Cremona

3. Equilíbrio nos Nós



$$\text{A) } \sum F_x = 0 \Rightarrow -10000 + F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 10\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -7500 + F_{AC} = 0 \Rightarrow F_{AC} = 7,5\text{kN}$$

$$\text{B) } \sum F_x = 0 \Rightarrow -10000 + F_{BC} \cdot \cos 36,87^\circ = 0 \Rightarrow F_{BC} = 12,5\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +7500 - 12500 \cdot \sin 36,87^\circ = 0 \quad \text{Ok!}$$

$$\text{C) } \sum F_x = 0 \Rightarrow +10000 - 12500 \cdot \sin 53,13^\circ = 0 \quad \text{Ok!}$$

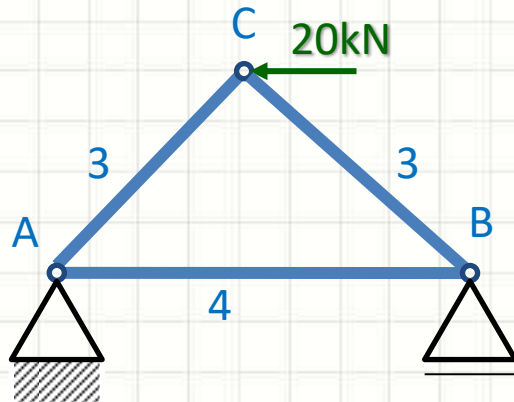
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -7500 + 12500 \cdot \cos 53,13^\circ = 0 \quad \text{Ok!}$$



EXERCÍCIO

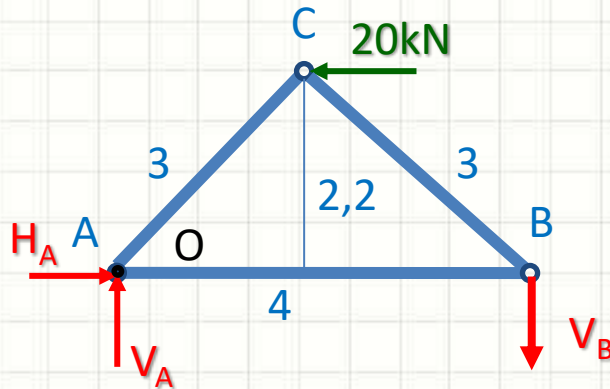
Exercício

Aplique o Método de Cremona



Exercício

Aplique o Método de Cremona



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 20000 = 0 \Rightarrow H_A = 20kN$$

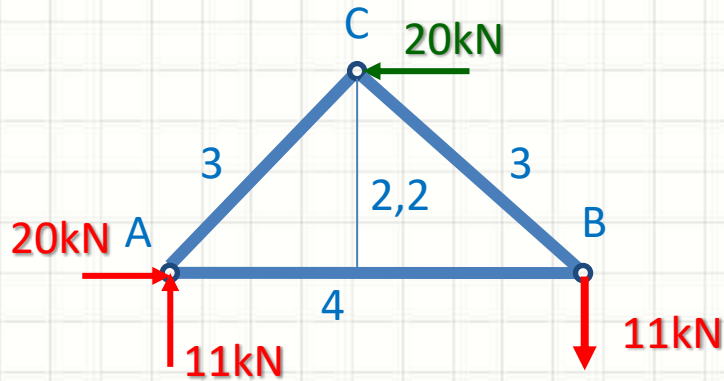
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(20000 \cdot 2,2) + (V_B \cdot 4) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{44000}{4} = 11kN$$

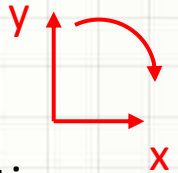
$$\therefore V_A = 11kN$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona

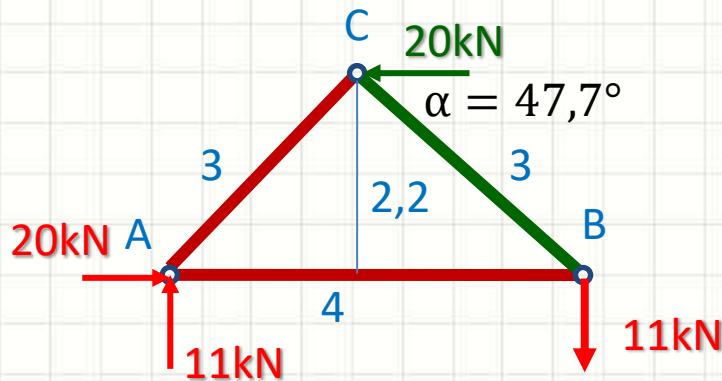


- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações
- Estimar trações/compressões

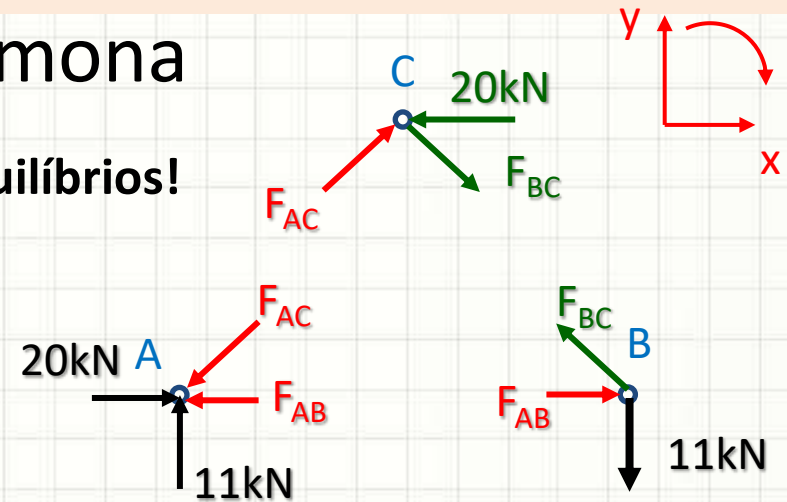


Exercício

Aplique o Método de Cremona



Equilíbrios!



$$\begin{aligned} \text{C) } \sum F_x = 0 &\Rightarrow -20000 + F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ + F_{BC} \cdot \cos 47,7^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow +F_{AC} \cdot \sin 47,7^\circ - F_{BC} \cdot \sin 47,7^\circ = 0 \Rightarrow F_{AC} = F_{BC} \end{aligned}$$

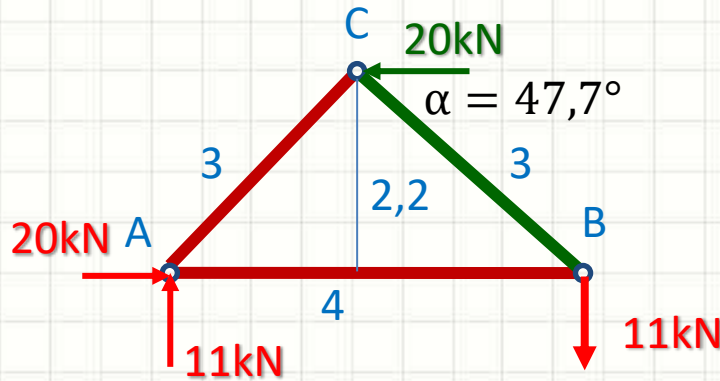
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -20000 + 2 \cdot F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ = 0$$

$$2 \cdot F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ = 20000$$

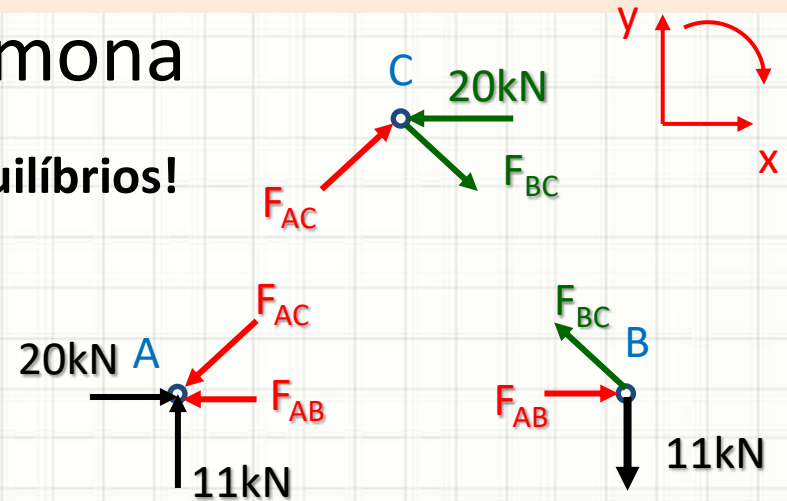
$$F_{AC} \cdot 0,67 = 10000 \Rightarrow F_{AC} = 14925N$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona



Equilíbrios!



C) $F_{AC} = 14925N$ $F_{BC} = 14925N$

A) $\sum F_x = 0 \Rightarrow +20000 - F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ - F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 9955N$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow +11000 - F_{AC} \cdot \sin 47,7^\circ = 0$

Ok!

B) $\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC} \cdot \cos 47,7^\circ + F_{AB} = 0$

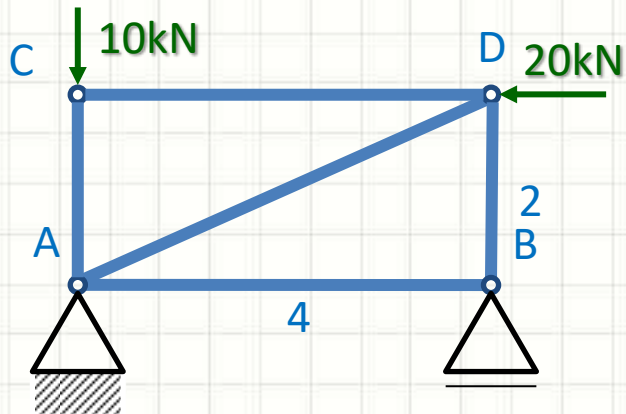
Ok!

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -11000 + F_{BC} \cdot \sin 47,7^\circ = 0$

Ok!

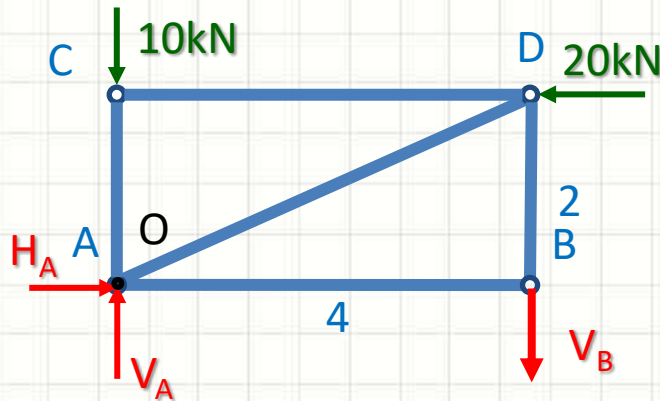
Exercício

Aplique o Método de Cremona

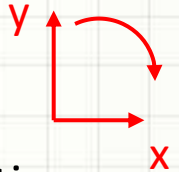


Exercício

Aplique o Método de Cremona



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 20000 = 0 \Rightarrow H_A = 20kN$$

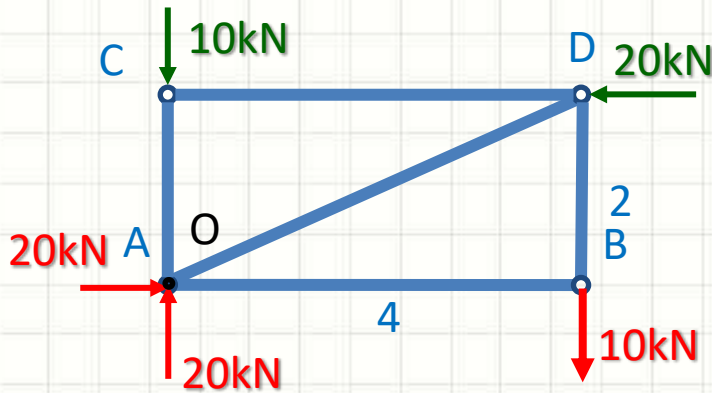
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - V_B - 10000 = 0 \Rightarrow V_A = 10000 + V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(20000 \cdot 2) + (V_B \cdot 4) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{40000}{4} = 10kN$$

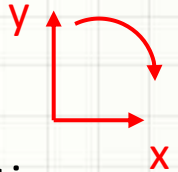
$$\therefore V_A = 20kN$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona

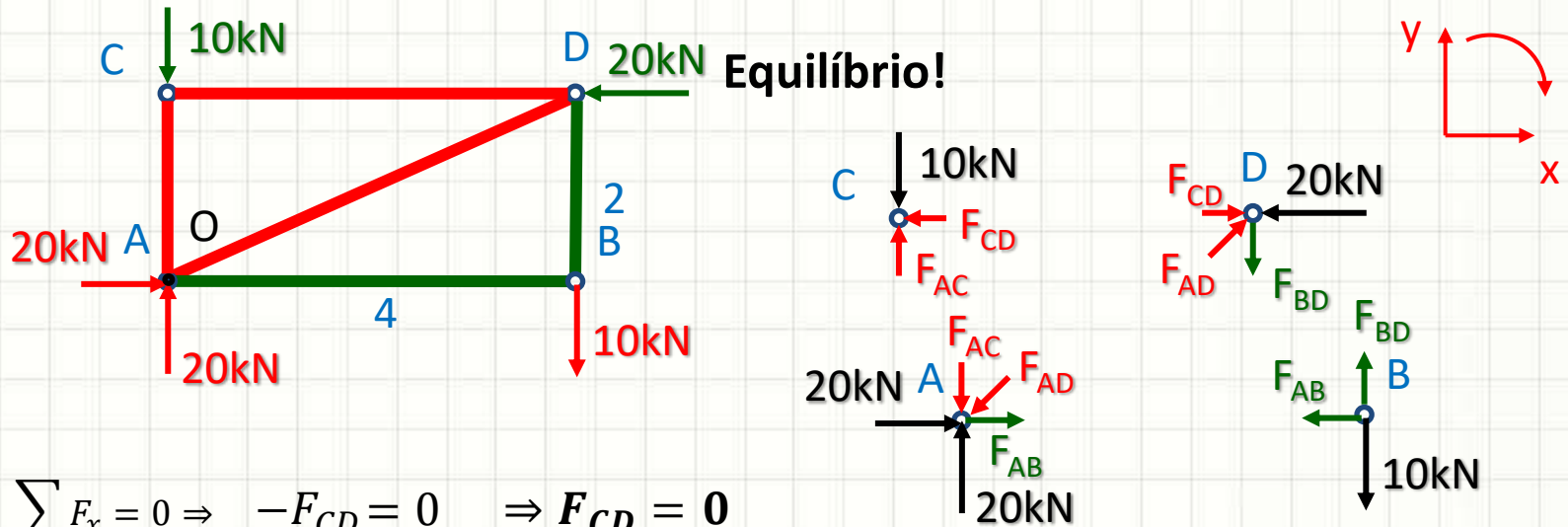


- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações
- Estimar trações/compressões



Exercício

Aplique o Método de Cremona

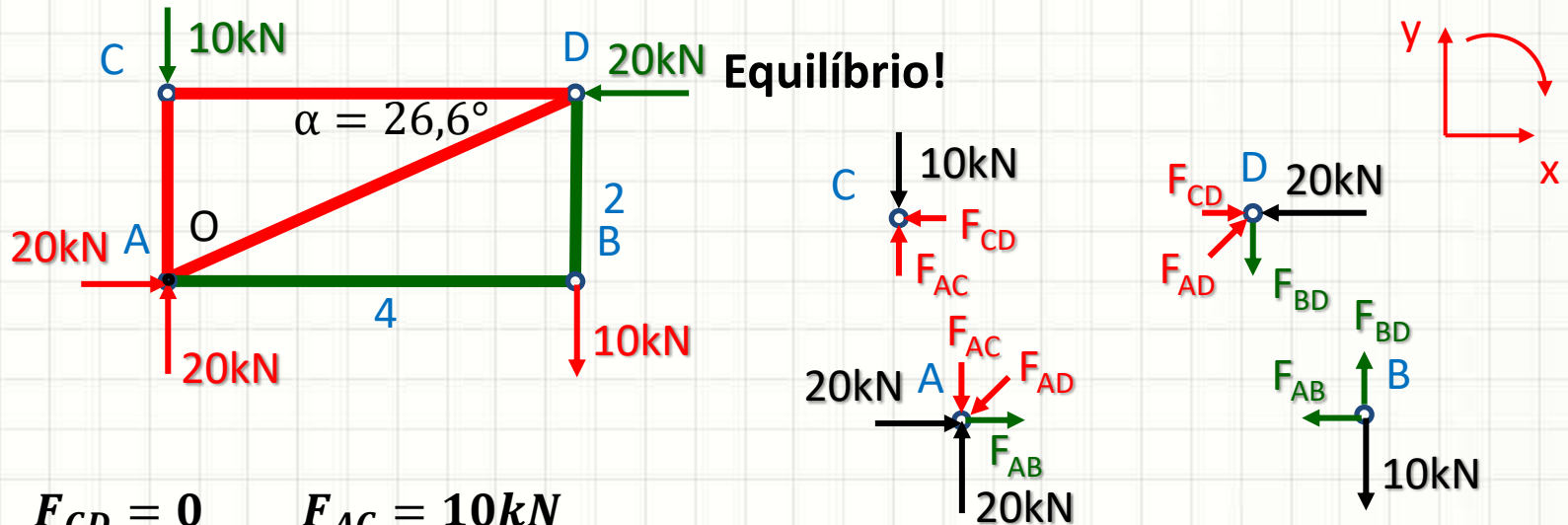


C)
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{CD} = 0 \Rightarrow F_{CD} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +F_{AC} - 10000 = 0 \Rightarrow F_{AC} = 10kN$$

B)
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +F_{BD} - 10000 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 10kN$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona



C) $F_{CD} = 0$ $F_{AC} = 10kN$

B) $F_{AB} = 0$ $F_{BD} = 10kN$

D) $\sum F_x = 0 \Rightarrow +F_{CD} + F_{AD} \cdot \cos 26,6^\circ - 20000 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 22,4kN$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{BD} + F_{AD} \cdot \sin 26,6^\circ = 0$ **Ok!**

Precisa do A?



CONCLUSÕES

Resumo

- O que é uma treliça
 - Características de uma treliça
 - Cálculo de reações de treliça
 - Cálculo de treliças pelo método dos nós
 - **TAREFA:** Exercícios Aula 12
-
- Outros métodos de cálculo?
 - Método das seções



PERGUNTAS?

Exercício (para casa)

Calcule os esforços nas barras AB, AC e BC pelo Método de Cremona (dos Nós)

