# O Problema do Caminho Mínimo: Algoritmo Label Setting

Prof. Dr. Daniel Caetano

**Objetivo**: Apresentar o algoritmo Label Setting para a resolução de problemas de caminho mínimo sem ciclos.

## INTRODUÇÃO

Conceitos Chave:

- Problema: reduzir caminho
- Algoritmos Específicos
    * Label Setting
    * Label Correcting
    * Network Simplex
    * Out-of-Kilter

Existem diversas situações o projetista de transportes se depara com algum problema em que é necessários otimizar um trajeto, visando redução de custo de custo, tempo... enfim, problemas que envolvem a redução de algum tipo de "custo" que varia de acordo com o trajeto escolhido.

Este tipo de problema de melhor caminho, ponto a ponto, pode ser tratado com algoritmos mais específicos que o Simplex, como o Label Setting, Label Correcting, Network Simplex, Out-of-Kilter, dentre outros. No caso específico de caminho mínimo entre dois pontos sem mais nenhum tipo de restrição, os algoritmos mais adequados são o Label Correcting e o Label Setting. Estas anotações tratam deste último.

## 1. FORMALIZAÇÃO: "O Problema do Motorista de Taxi"

Conceitos Chave:

- Levar um passageiro de uma Origem a um Destino
- Minimizar distância percorrida
- Não se tem informações do próximo passageiro
- Ignorar trânsito

Um taxista trabalha para uma empresa que lhe paga um valor fixo de acordo com a distância entre os baricentros das sub-regiões da cidade. Obviamente, para este taxista, é um grande negócio reduzir ao máximo a distância percorrida, economizando combustível e tempo.

O problema a ser resolvido trata-se, portanto, de um caso específico dentro dos problemas de fluxo em rede: o problema do caminho mínimo. Este problema tem ainda características mais específicas, dentro de um problema de caminho mínimo: é um problema em que um único passageiro será transportado da origem ao destino. E mais: não há como saber qual será a origem ou destino do próximo passageiro a ser transportado, o que restringe a otimização tão somente ao caminho mínimo entre dois pontos.

Como apenas uma unidade (o passageiro) deve ser transportada, também não é necessária uma preocupação com a limitação de capacidade de fluxo nas vias e, por simplicidade, será desconsiderada a possibilidade de uma via congestionada.

Uma representação física de um possível problema a ser resolvido para o taxista é mostrado na figura 1.:

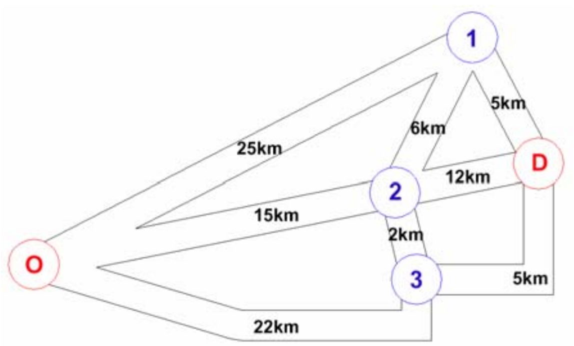
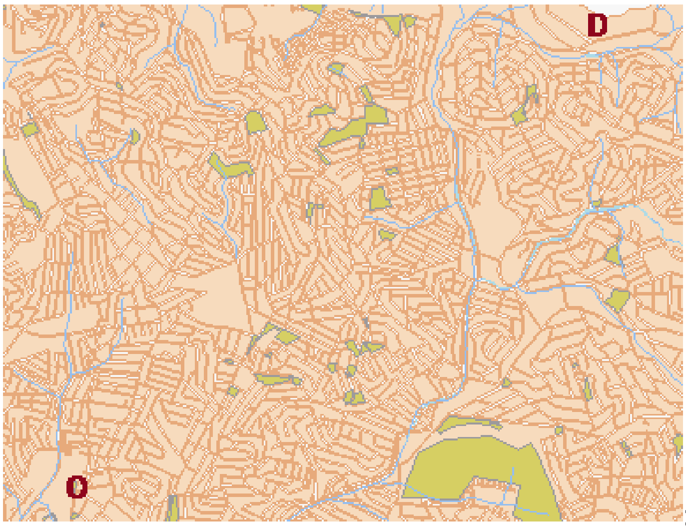



**Figura 1**: Exemplo de um problema a ser resolvido para o taxista

Em um problema deste nível, com este número reduzido de vias, possibilidades e restrições... É até possível pensarmos em um cálculo manual. Entretanto, a situação se torna extremamente mais complexa para um problema maior, como o apresentado na figura 2.



:

**Figura 2**: Um problema real, mais complexo

Apesar de provavelmente ser possível utilizar o mesmo processo de solução, fazer todas as iterações necessárias manualmente seria uma tarefa bastante custosa e ineficiente - para não dizer aborrecida.

Sabe-se que é possível resolver automaticamente problemas deste tipo, já que existem soluções que resolvem este tipo de problema em tempo real, em sistemas como o Google Maps e o Waze, por exemplo.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Conceitos Chave:

- Representação como Grafo
    * Tamanho dos arcos = Distância de um nó a outro
- Entrada e Saída do Sistema
    * Solução possível => rede balanceada
- Equilíbrio no nó
- Equações
    * Genérica
    * Nó de Origem
    * Nó de Destino
    * Geral
- Economia
    * Custo de um arco
    * Minimizar custo total
- Número de Eqüações + Número de Incógnidas => Não pelo Simplex!

O primeiro passo para uma automatização é a modelagem, onde serão desprezadas todas as características irrelevantes para a resolução, além de serem explicitados todos os dados que possam ser necessários à solução.

Como a idéia apresentada desde o início é resolver o problema por um algoritmo de fluxo em rede, modelar o problema como uma rede é praticamente uma necessidade. Para tanto, será utilizada a representação em grafo, com nós e arcos, sendo que os nós representaram as interseções e os arcos as vias (interligações entre os nós).

É possível associar as distâncias aos comprimentos dos arcos, possibilitando o cálculo das distâncias pela soma dos comprimentos dos arcos. Neste instante, a rede do taxista pode ser representada como na figura 3.

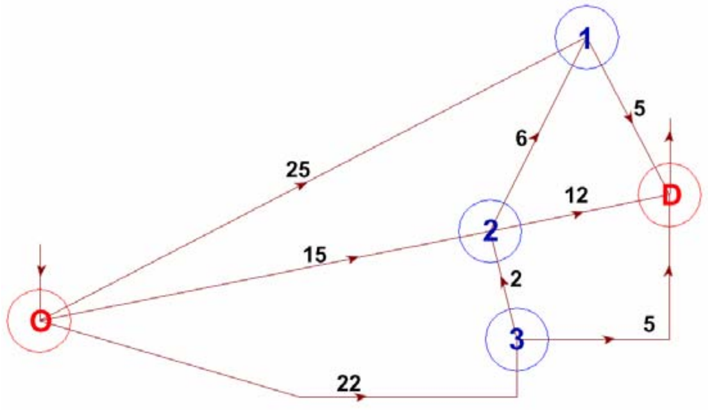



**Figura 3**: "Modelagem gráfica" da rede

A indicação dos pontos de partida e chegada pode ser feita com duas seta, uma mostrando que entrou 1 unidade no ponto de partida e uma indicando que saiu uma unidade no ponto de chegada. Entretanto, do ponto de vista do equilíbrio dos nós (tudo que entra = tudo que sai), isso cria um problema sério: há um indivíduo entrando em um nó (nó inicial) e ele simplesmente desaparece (já que a representação dele saindo do nó simplesmente não foi feita). A mesma incoerência ocorre no nó final, onde um indivíduo sai do sistema sem nunca ter chegado àquele nó.

É necessário, então, indicar variáveis em cada um dos arcos, especificando se o indivíduo está passando por aquele arco ou não, de forma que todos os nós estejam equilibrados: se chegou um indivíduo a um dado nó, este indivíduo também precisa sair daquele nó, por algum outro arco. Nesta situação, pode-se dizer que a rede estará resolvida, ou seja, balanceada, como pode ser visto na figura 4.

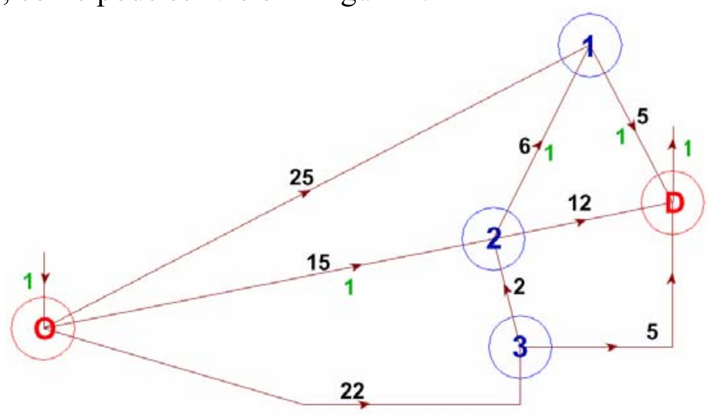
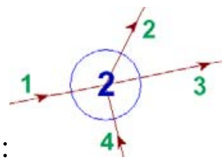



**Figura 4**: *Rede balanceada*, representando uma solução possível para o problema

Para representar isso matematicamente, será definida uma variável para cada arco, indicando se o indivíduo passa ou não por aquele arco. Por exemplo, a variável $X_{ij}$ pode indicar se o indivíduo está usando o arco que sai do nó *i* para o nó *j*. Se esta variável vale 1, indica que o indivíduo passa por aquele arco; se ela valer 0, o indivíduo não passa por aquele arco.

Em um nó podem chegar vários arcos, e também podem sair vários arcos. Assim, para que um nó esteja em equilíbrio, isto é, tudo que chegar nele tem também que sair, a *soma do fluxo de todos os arcos que chegam* neste nó deve ser ser **igual** à *soma do fluxo de todos os arcos que saem* deste nó, como pode ser visto na figura 5.




:

**Figura 5**: Um nó *balanceado*: tudo que chega, sai.

Uma forma simples de dizer isso é que "um nó em equilíbrio é aquele em que não fica ninguém. Todo mundo que chega nele, sai dele". Considerando que A seja o conjunto de todos os arcos (m,n) de uma rede, pode-se representar matematicamente esta situação para o nó i da seguinte forma:

$$\sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = 0$$

:

Esta eqüação pode ser lida da seguinte forma: "Se for somado o fluxo de todos os arcos que chegam em um nó ***i*** e disso for subtraído o fluxo de todos os nós que saem deste mesmo nó ***i***, o resultado deve ser sempre *zero*. Em outras palavras, todo mundo que chega em no nó ***i***, sai do nó ***i***.

Esta representação é boa para nós genéricos, do meio da rede, mas não é válida para os nós de Origem e de Destino, já que nestes nós há o "aparecimento" e o "desaparecimento" de indivíduos, respectivamente.

Assim, nestes nós, a representação matemática do equilíbrio é ligeiramente diferente. Como no nó de Origem haverá o surgimento de uma unidade e no de Destino haverá o desaparecimento de uma unidade, será feita a seguinte modificação: no nó origem, será adicionado *uma* unidade na eqüação, e no nó destino será subtraída *uma* unidade. Assim, as equações serão:

Nó Genérico:

$$\sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = 0$$

Nó de Origem:

$$1 + \sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = -1$$

:

Nó de Destino:

$$-1 + \sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = 1$$

Como é possível observar, o que muda é apenas o lado direito da eqüação: o valor é 0 nos nós genéricos, -1 no nó de origem e 1 no nó de destino. Assim, é possível indicar a eqüação para todos os nós de forma genérica:

$$\sum_{(n,i)\in A} x_{ni} - \sum_{(i,m)\in A} x_{im} = b$$

Se ***i*** é o nó inicial, *b = -1*. Se ***i*** é o nó final, *b = 1*. Em todas as outras situações, *b = 0*.

Como isso, está completo o conjunto de restrições que garantem o balanceamento dos nós e, portanto, da rede. Entretanto, as restrições garantem uma solução possível; é necessário definir uma função objetivo que garanta o menor comprimento possível para a solução.

Como $x_{ij}$ terá valor 1 se um arco estiver sendo usado e 0 se não estiver sendo usado, pode-se afirmar que o custo de um arco na solução é:

$$\mathbf{c_{ij} * x_{ij}}$$

onde $c_{ij}$ é o comprimento do arco que vai de ***i*** para ***j***. Isso significa que se o arco estiver sendo usado, ele terá um custo $\mathbf{c_{ij} * 1 = c_{ij}}$. Se o arco não estiver sendo usado, seu custo será $\mathbf{c_{ij} * 0 = 0}$. A soma do custo de todos os arcos definidos desta forma, dá o custo da solução, e a função objetivo - que é minimizar este custo - pode ser representada da seguinte forma:

$$[\min] \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Em outras palavras, esta eqüação significa que deve-se minimizar a soma do custo de todos os trechos (arcos) que compõem o caminho usado.

Com essa modelagem completa, é possível observar que há praticamente uma equação de restrição para cada nó do sistema (o equilíbrio de cada nó) e cada uma delas terá tantas variáveis quantos forem os arcos que chegam e saem do nó ao qual esta restrição é referente.

O grande número de equações e variáveis decorrentes do grande número de nós e arcos necessários para representar um "problema real" se torna então uma dificuldade a mais, se for considerada uma soluçãoo usando o algoritmo Simplex.

## 3. O ALGORITMO LABEL SETTING

Conceitos Chave:

- Escolher o melhor caminho até cada ponto, partindo do início.
    * Recursivamente
- Lógica
    a) Etiquetar
    b) Selecionar nó "sem pai" para o qual se conhece todos os caminhos
    c) Calcular melhor caminho
    d) Indicar caminho na etiqueta
    e) Voltar ao passo (b)

Se a abordagem para a solução por Simplex torna o problema muito complexo, como proceder? Neste problema, a modelagem matemática será deixada de lado, e ele será atacado por um outro ponto de vista: e se o objetivo fosse apenas calcular o caminho mínimo no pequeno problema do taxista, qual seria uma forma eficiente de realizar o processo?

Ora, se for conhecida a distância até um dado nó por cada um dos caminhos possíveis, é possível determinar qual o melhor caminho até aquele nó, não? Pois o processo é exatamente este: para todo nó que se conhecer todos os caminhos de chegada, seleciona-se o melhor. Esta é exatamente a essência do algoritmo Label Setting.

Entretanto, para resolver problemas grandes é necessário que o processo seja explicitado da forma mais clara e eficiente possível. Uma maneira de sistematizar tal procedimento é descrita a seguir:

1. Cria-se uma "etiqueta" em todos os nós, com duas posições: uma para indicar qual a distância acumulada até aquele nó e outra para indicar qual é o nó que o antecede no melhor caminho, ou seja, seu nó "pai".
2. Indica-se em todos os nós um distância acumulada igual a "0" e o nó pai "-1", indicando que nenhum dos nós possui ancetessor ainda.
3. O processo tem início marcando o nó inicial (de partida) como tendo a si mesmo como nó "pai".
4. Dentre os nós que não possuem antecessores (pai = -1), deve-se selecionar um em que todos os arcos de chegada estejam ligados a nós com pai. Se todos os nós já possuírem pais, chegou-se ao fim do processo.
5. Selecionado o nó nas condições descritas no passo 4, calcula-se as distâncias até este nó por todos os caminhos (arcos de chegada) possíveis, sendo que esta distância é a soma da distância até o nó origem do arco de chegada, somada ao comprimento do arco.
6. Anota-se na etiqueta do nó selecionado a menor distância obstida nos cálculos do passo 5, e marca-se como "nó pai" em sua etiqueta aquele que foi a origem desta menor distância calculada.
7. Volta ao passo 4.

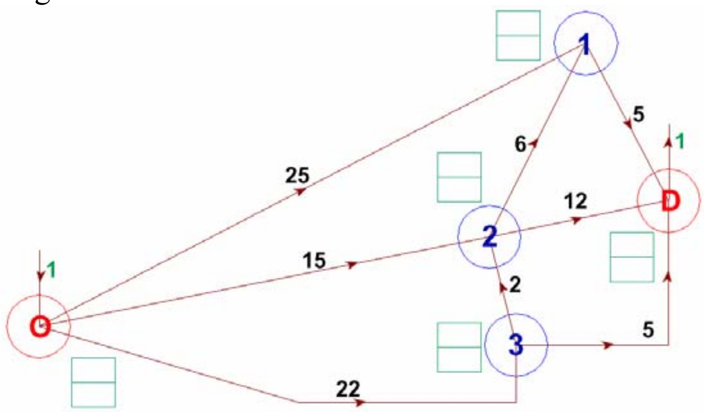
Ou seja, anota-se em cada nó qual o melhor caminho para chegar até ele e qual é o valor da distância acumulada até este ponto, até que todos os nós tenham "o melhor antecessor" indicado.

Apesar de simples, uma descrição de algoritmo nem sempre é muito esclarecedora. Na seção seguinte será apresentado um exemplo da aplicação do algoritmo no problema do taxista, com o objetivo de auxiliar na compreensão do algoritmo.

## 4. RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

1. Indicação das etiquetas:

O primeiro passo do procedimento será desenhar a rede e desenhar uma pequena etiqueta com 2 posições ao lado de cada nó da rede: uma para indicar o nó pai do nó etiquetado e outra para indicar a distância acumulada até o nó etiquetado. Isso pode ser feito como é mostrado na figura 6.

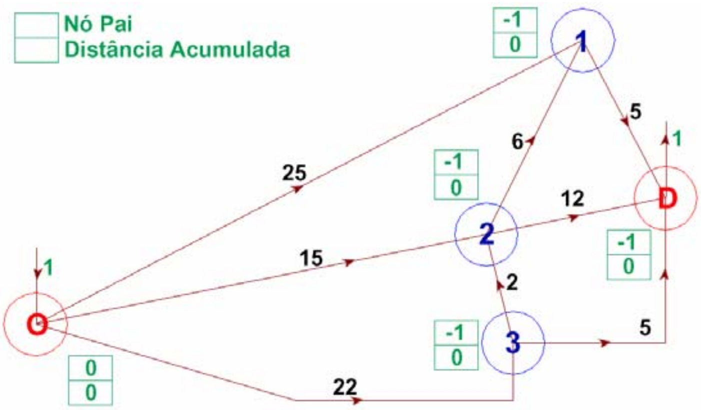



:

**Figura 6**: A rede a ser resolvida com as etiquetas desenhadas.

2. Preenchimento inicial:

Em seguida, deve-se preencher as etiquetas com os valores iniciais para cada nó: para o nó inicial, indica-se ele mesmo como pai (0) e em todos os outros indica-se "sem pai" (-1). Indica-se a distância acumulada igual a 0 em todas as etiquetas. O resultado desta etapa pode ser visto na figura 7.




:

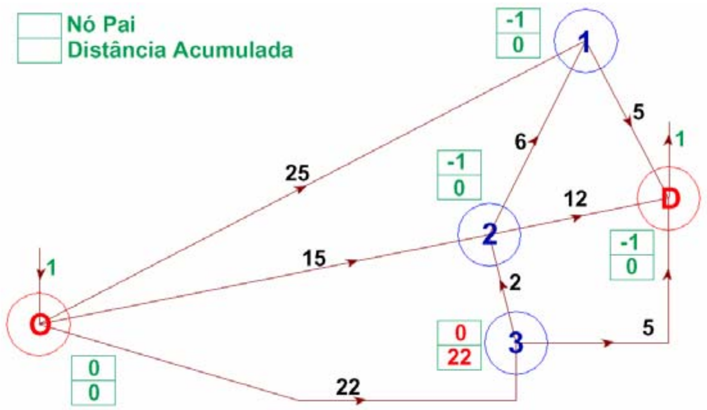
**Figura 7**: Preenchimento inicial das etiquetas.

3. Cálculo e indicação da primeira etiqueta:

Como se pode observar pela figura anterior, o nó 1 recebe ligação do nó 0 (origem) e do nó 2. Como o nó 2 ainda não tem pai (-1 na etiqueta), não se pode etiquetar o nó 1 ainda.

O nó 2, por sua vez, recebe ligação do nó 0 e do nó 3. Como o nó 3 ainda não tem pai, não é possível etiquetar o nó 2 ainda. O nó destino também está totalmente fora de cogitação neste instante, já que depende dos nós 1, 2 e 3... Nenhum deles ainda calculado.

Finalmente, o nó 3 recebe ligação apenas do nó 0, que já está calculado (tem pai indicado). Desta forma, é possível calcular qual a distância acumulada, que será a distância acumulada em 0 (0 km) somada com a distância do caminho de 0 a 3 (22 km). Assim, indica-se na etiqueta do nó 3 que seu novo pai é o nó 0, e que a distância acumulada até então é 22 km, como pode ser visto na figura 8.




:

**Figura 8**: Preenchimento da primeira etiqueta.

4. Cálculo e indicação da segunda etiqueta:

Neste passo é possível observar que o nó 1 continua sendo de cálculo inviável, já que o nó 2 (do qual ele depende) continua sem pai indicado.

Entretanto, agora já é possível calcular o nó 2: ele depende do nó 0 e do nó 3, e ambos já estão calculados e possuem pais. Mas qual será o nó pai do nó 2, o nó 0 ou o nó 3? A resposta é simples: aquele que gerar uma menor distância acumulada.

Considerando o nó 0 como pai, a distância acumulada em 0 (0 km) somada com a distância do arco que liga o nó 0 ao nó 2 (15 km) perfaz uma distância total de 15 km.

Considerando o nó 3 como pai, a distância acumulada em 3 (22 km) somada com a distância do arco que liga o nó 3 ao nó 2 (2 km), perfaz uma distância total de 24 km.

Diante destes valores, a consideração do nó 0 como pai é mais vantajosa, já que 15km é uma distância menor que 24km. Por este motivo, o nó 0 será o eleito como "melhor antecessor". Assim, deve ser indicada na etiqueta do nó 2 que seu "pai" é o nó 0 e que a distância acumulada é 15 km, como pode ser visto na figura 9.

:

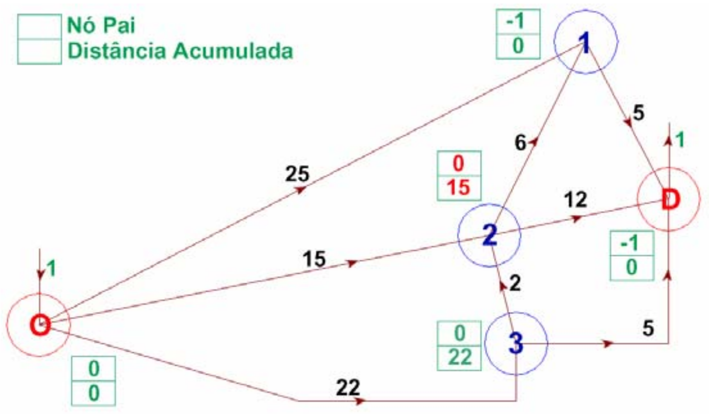



**Figura 9**: Preenchimento da segunda etiqueta.

<u>5. Cálculo e indicação da terceira etiqueta:</u>

Agora restam apenas dois nós a serem calculados (sem pais): o nó 1 e o nó Destino. O nó destino depende de 1, então está fora de questão no momento. O nó 1, entretanto, depende do nó 0 e do nó 2, ambos já calculados. Portanto, o nó 1 é o selecionado para esta etapa.

Novamente, há duas possibilidades de caminho. Vindo pelo nó 0, a distância total acumulada será de 25 km (0 km + 25 km). Vindo pelo nó 2, entretanto, a distância total acumulada será de 21 km (15 km + 6 km). É natural, portanto, a seleção do nó 2 como pai para o nó 1, já que 21km é uma distância menor que 25km.

Assim, deve ser indicado na etiqueta do nó 1 que seu "pai" é o nó 2,e a distância acumulada é 21 km, como mostrado na figura 10.

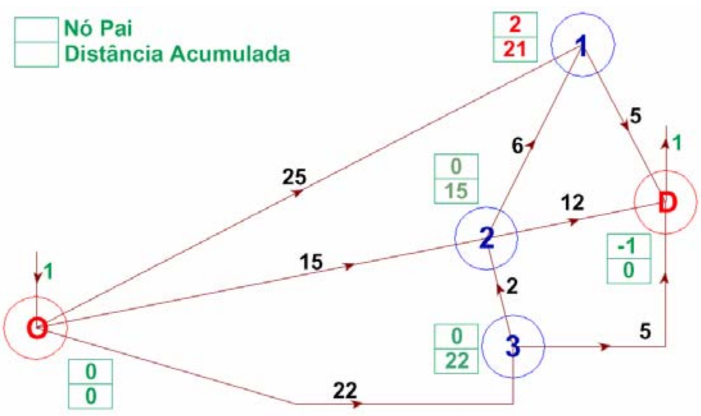


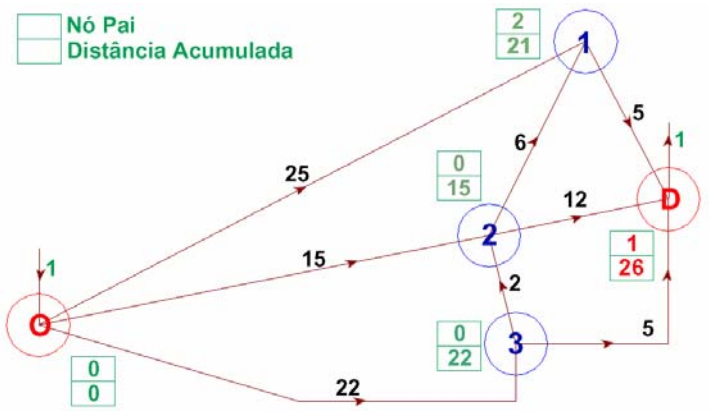

**Figura 10**: Preenchimento da terceira etiqueta.

<u>6. Cálculo e indicação da última etiqueta:</u>

Só resta agora o cálculo do nó Destino, o qual depende dos nós 1, 2 e 3, sendo que todos eles já estão devidamente calculados. Há, então, três possibilidades de caminho:

- Vindo pelo nó 1: 21 km + 5 km = 26 km
- Vindo pelo nó 2: 15 km + 12 km = 27 km
- Vindo pelo nó 3:  22 km + 5 km = 27 km

Desta forma, o nó selecionado para nó "pai" do nó Destino é o nó 1, que deve ser indicado na etiqueta como apresentado na figura 11.




:

**Figura 11**: Preenchimento da última etiqueta.

7. Indicação do Caminho Mínimo:

Pelo resultado do passo anterior, pode-se verificar que o caminho mínimo entre o nó Origem e o nó Destino tem um comprimento de 26 km. Entretanto, ainda não está explícito qual é o caminho que tem esta distância total.

Para identificá-lo, basta observar os valores "pai" das etiquetas, partindo do nó Destino... E este será o caminho mínimo. Pela figura do passo anterior, pode-se identificar o seguinte caminho: D-1-2-O, o qual está indicado na figura 12, encerrando a solução do problema.

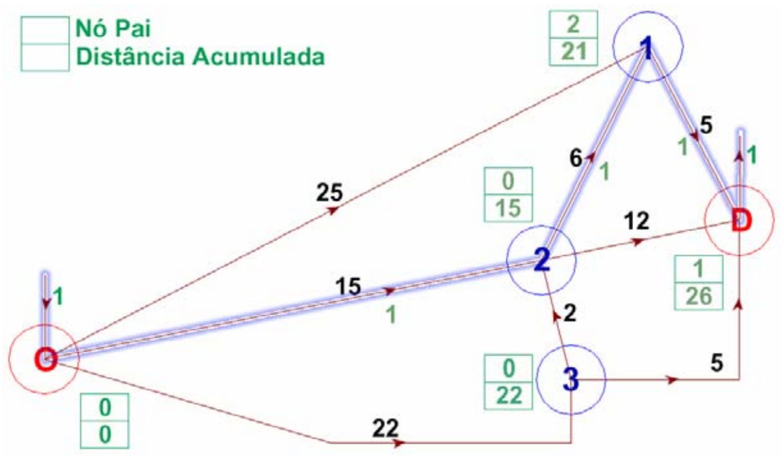



**Figura 12**: Indicação do caminho mínimo.

É claro, entretanto, que este caminho está invertido, sendo o caminho da origem para o destino, é O-2-1-D.

## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Conceitos Chave:

- De uma origem para todos os destinos
- Aproveitamento de cálculos

Uma rápida análise dos resultados obtidos indica que, partido da chegada e seguindo em direção sempre do "melhor antecessor" é possível identificar o melhor caminho, tendo o algoritmo realizado seu trabalho com êxito.

Entretanto, um outro resultado interessante é obtido de sua aplicação: não apenas o melhor caminho para um único destino foi calculado, mas sim o melhor caminho para **qualquer destino**, partindo do mesmo nó inicial.

Esse é um resultado bastante interessante já que em determinadas situações (como entregas realizadas sempre a partir de uma determinada base) basta uma execução e já serão obtidos todos os resultados necessários.

Uma outra observação permite verificar que com uma modificação no algoritmo é possível adicionar novos caminhos e aproveitar cálculos anteriormente realizados. Entretanto, neste momento não haverá aprofundamento deste tópico, já que nas aulas seguintes será apresentado um algoritmo que resolve este problema automaticamente.

## 6. BIBLIOGRAFIA

AHUJA, R.K; MAGNANTI, T.L; ORLIN, J.B. **Network Flows**: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey: Prentice Hall, 1993.

BRADLEY, S. P.; HAX, A. C.; MAGNANTI, T. L. **Applied mathematical programming**. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1977.

CHVATAL, V. **Linear programming**. New York: W. H. Freeman, 1983.

GALLO, G; PALLOTTINO, S. Shortest path methods in transportation models. (M. Florian, ed.) Transportation Planning Models. North Holland, Elsevier Science Publishers. p. 227-256, 1984.

WINSTON, W. L. **Operations research**: applications and algorithms. S.I.: International Thomson Publishing, 1994.

# O Problema do Caminho Mínimo: Algoritmo Label Correcting

Prof. Dr. Daniel Caetano

**Objetivo**: Capacitar para a identificação de ciclos em problemas de fluxo em rede e apresentar o algoritmo Label Correcting para a resolução destes problemas.

## INTRODUÇÃO

Conceitos Chave:

- Problema: reduzir caminho...
    * Grafo com ciclos
- Label Setting => Inadequado
- Label Correcting
- Identificar existência de ciclos

O método de determinação de caminho mínimo chamado "Label Setting" é capaz de resolver um grande número de problemas de caminho mínimo, mas possui uma limitação: não é capaz de resolver problemas que possuam ciclos no grafo.

Nestas notas serão apresentadas as limitações do algoritmo "Label Setting" e, como uma alternativa, o algoritmo "Label Correcting".

## 1. REVISANDO: "O PROBLEMA DO MOTORISTA DE TAXI"

Conceitos Chave:
- Levar um passageiro de uma Origem a um Destino
- Minimizar distância percorrida
- Não se tem informações do próximo passageiro
- Ignorar trânsito

- Lógica do Label Setting
    a) Etiquetar
    b) Selecionar nó "sem pai" para o qual se conhece todos os caminhos
    c) Calcular melhor caminho
    d) Indicar caminho na etiqueta
    e) Voltar ao passo (b)

Um taxista trabalha para uma empresa que lhe paga um valor fixo de acordo com a distância entre os baricentros das sub-regiões da cidade. Obviamente, para este taxista, é um grande negócio reduzir ao máximo a distância percorrida, economizando combustível e tempo.

Neste problema será transportada apenas uma unidade de carga (o passageiro) e o caminho mínimo a ser encontrado é entre apenas dois pontos. Não haverá a preocupação com eventuais limitações de fluxo em cada arco.

## 1.1. Revendo: o Problema Modelado como um Grafo

O seguinte modelo (Figura 1) havia sido proposto anteriormente para estudo:

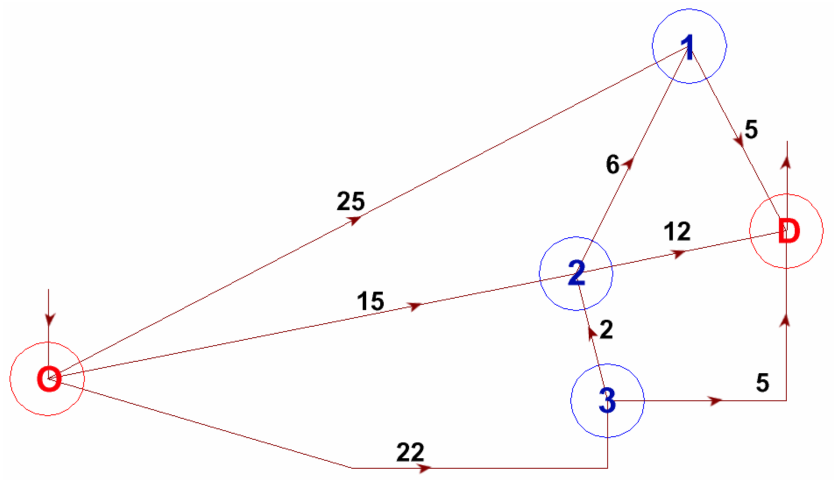



**Figura 1**: "Modelagem gráfica" da rede

E, para a solução, foi apresentado o algoritmo do Label Setting.

## 1.2. Revendo: o Algoritmo Label Setting

O algoritmo Label Setting pode ser sistematizado da seguinte forma:

1. Cria-se uma "etiqueta" em todos os nós, com duas posições: uma para indicar qual a distância acumulada até aquele nó e outra para indicar qual é o nó que o antecede no melhor caminho, ou seja, seu nó "pai".
2. Indica-se em todos os nós um distância acumulada igual a "0" e o nó pai "-1", indicando que nenhum dos nós possui antecessor ainda.
3. O processo tem início marcando o nó inicial (de partida) como tendo a si mesmo como nó "pai".
4. Dentre os nós que não possuem antecessores (pai = -1), deve-se selecionar um em que todos os arcos de chegada estejam ligados a nós com pai. Se todos os nós já possuírem pais, chegou-se ao fim do processo.
5. Selecionado o nó nas condições descritas no passo 4, calcula-se as distâncias até este nó por todos os caminhos (arcos de chegada) possíveis, sendo que esta

distância é a soma da distância até o nó origem do arco de chegada, somada ao comprimento do arco.

6. Anota-se na etiqueta do nó selecionado a menor distância obtida nos cálculos do passo 5, e marca-se como "nó pai" em sua etiqueta aquele que foi a origem desta menor distância calculada.
7. Volta ao passo 4.

## 2. O PROBLEMA DOS CICLOS

Conceitos Chave:

- Label Setting: Eficiência x Limitação
- Verificação de Ciclos: Representação em camadas
    * Caminhamento sempre descendo nas camadas
- Remoção de Ciclos
    * Perda de otimalidade

O algoritmo *Label Setting* é bastante eficiente. Entretanto, na forma como foi apresentado, ele apresenta uma limitação relevante: não permite a resolução de redes que possuam ciclos, uma vez que nestes casos sempre haverá nós cujos cálculos serão interdependentes. Analisando a figura 2, é possível verificar que tal rede possui ciclos e, portanto, não pode ser aplicado o algoritmo *Label Setting*.

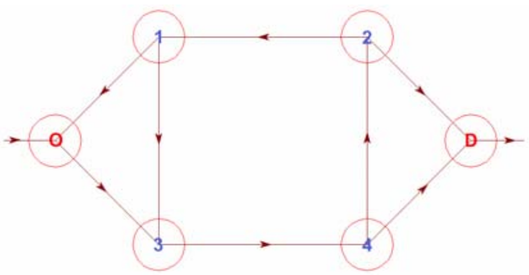



**Figura 2:** Representação de uma rede com ciclos

Uma forma prática para verificar se uma rede contém ou não ciclos é analisar a possibilidade de representá-la em camadas ordenadas, sendo que a movimentação dos arcos deve sempre ir de uma camada para a seguinte, nunca para a mesma camada ou a camada anterior. A rede do problema resolvido pelo algoritmo *Label Setting* na seção anterior, por exemplo, pode ser representada em cinco camadas como representado na figura 3.

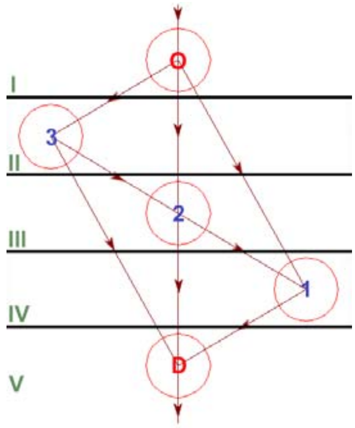



**Figura 3:** Uma rede sem ciclos representada em camadas

É possível notar que não há como representar a rede da figura 2 num formato como este, sendo que inevitavelmente haverá arcos ligando nós de níveis mais altos em direção a nós de níveis mais baixos, evidenciando assim a existência de ciclos.

Uma alternativa para contornar o problema dos ciclos pode ser a prévia utilização de um algoritmo de remoção de ciclos e, apenas depois disso, lançar mão da utilização do *Label Setting*. Entretanto, esta pode não ser uma forma apropriada, já que a eliminação de ciclos pura e simples pode remover arcos que fariam parte da melhor solução e, sendo assim, deteriorando a qualidade da solução do problema.

Por esta razão, é necessária uma alternativa ao *Label Setting* que seja capaz de lidar com o problema dos ciclos, garantindo que a solução ótima seja atingida. Esta é a base da proposta do *Label Correcting*.

## 3. O ALGORITMO LABEL CORRECTING

Conceitos Chave:

- Solução para problemas com ciclos
    * Modificação na ordem de cálculo e critério de parada
- Três dados na etiqueta: *nó pai*, *distância acumulada* e *necessidade de recálculo*.
- Lógica:
    a) Etiquetar
    b) Selecionar nó que deve ter seus descendentes recalculados (com menor distância acumulada)
    c) Calcular todos os seus descendentes (marcando suas etiquetas), trocando eventuais etiquetas existentes, se novo caminho for melhor.
    d) Marcar etiqueta do nó atual como "sem necessidade de recálculo"
    e) Voltar ao passo (b)
- Permite adição de arcos "em tempo de execução".

O algoritmo *Label Correcting* (GALLO; PALOTINO, 1984) foi desenvolvido para lidar com os casos em que o algoritmo *Label Setting* não se comporta bem, ou seja, aqueles que possuem ciclos. De forma geral, o *Label Correcting* nada mais é que uma variação do *Label Setting*, onde foi modificada a ordem de cálculo dos nós e o critério de parada.

Sendo assim, a essência do *Label Setting* permanece, com algumas pequenas variações:

- Existe um novo indicador na etiqueta: 0 se o nó não precisa ter seus sucessores recalculados e 1 se ele precisa ter seus sucessores recalculados.
- A partir de um nó com antecessor (já etiquetado) e que esteja marcado para ter seus sucessores recalculados, são calculados todos os nós sucessores deste, substituindo a etiqueta anterior do sucessor se o novo caminho até ele for mais eficiente.

Estas duas modificações fundamentais alteram todo o mecanismo do *Label Setting*, transformando-o no que foi chamado de *Label Correcting*. Uma possível sistematização para o *Label Correcting* é:

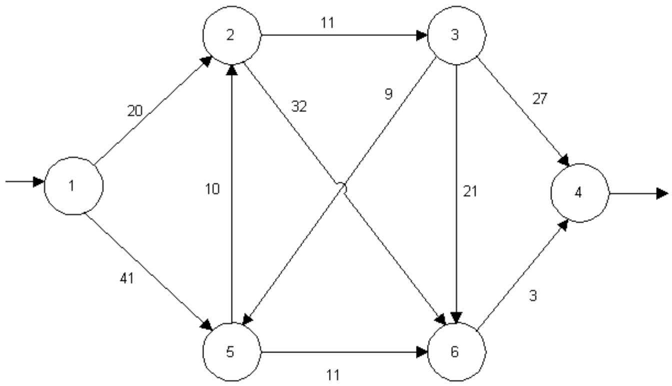
1. Cria-se uma etiqueta em todos os nós, indicando a distância acumulada "0" e "-1" como o nó antecessor. Indica-se também em todas as etiquetas que seus sucessores não precisam ser calculados, com o valor "0".
2. Marca-se o nó 0 (origem) como sendo antecessor de si próprio, indicando "0" em sua etiqueta, distância total acumulada "0" e indicando que este nó precisa ter seus sucessores calculados, indicando "1" na etiqueta.
3. Dentre todos os nós marcados para que seus sucessores sejam calculados, seleciona-se aquele que tem menor distância acumulada. Se não houver qualquer nó com indicação de recálculo de sucessores, fim do processo.
4. Para o nó selecionado, calcula-se a distância total acumulada para todos os nós sucessores deste, sendo esta distância a soma da distância total acumulada até o nó atual com o comprimento do arco que liga este nó ao referido sucessor.
5. Caso o nó sucessor não tenha ainda sido etiquetado com um antecessor ou ainda que a nova distância seja inferior à anteriormente indicada na etiqueta do sucessor, indica-se no nó sucessor a nova distância acumulada, o novo nó antecessor e também se deve indicar que seus descendentes precisam ser recalculados.
6. Voltar ao passo 3.

Embora ligeiramente mais complexo, este algoritmo resolve inclusive casos com ciclos, embora isso signifique um aumento significativo na quantidade de cálculos necessários para a solução do problema.

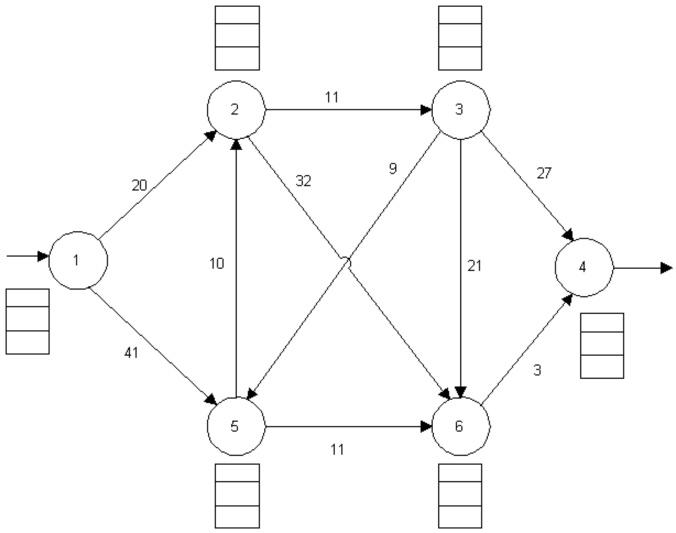
Uma outra característica positiva deste algoritmo é que ele permite que novos nós e arcos sejam adicionados na rede, aproveitando-se o resultado da rede já calculada. Para tanto, basta marcar todos os nós originais aos quais são ligados novos arcos de saída como sendo necessitando recálculo de seus descendentes.

## 4. EXEMPLO

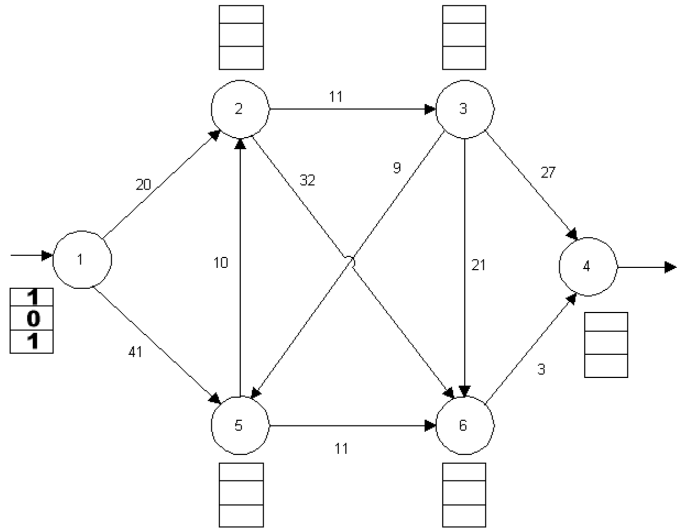
Usando o algoritmo Label Correcting, encontrar o caminho mínimo entre os pontos 1 e 4.




**Passo 1**: O primeiro passo para a resolução é indicar as etiquetas:



**Passo 2**: Realizar as marcações iniciais: o nó 1 é o pai de si mesmo (na parte de cima da etiqueta), com distância acumulada 0 (na parte do meio) e é preciso calcular seus descendentes (1 na parte de baixo):

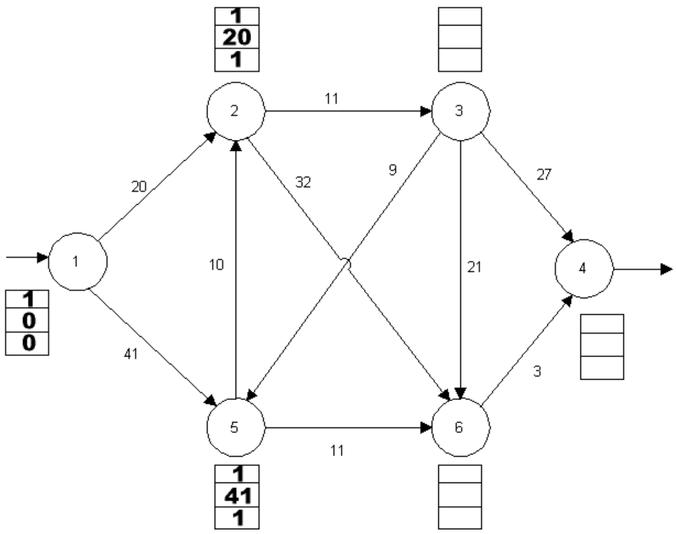



**Passo 3**: Dos nós que possuem descendentes a calcular (apenas o nó 1, por enquanto), deve-se selecionar aquele que tem a menor distância acumulada: o nó 1, tem distância acumulada 0. Assim, o nó 1 será usado para cálculo no próximo passo.

**Passo 4**: A partir do nó selecionado (neste caso, o nó 1), calcula-se todos os seus descendentes: 2 e 5:

- Nó 2: 0 + 20 = 20 (distância acumulada até 1 + comprimento do arco de 1 a 2)
- Nó 5: 0 + 41 = 41 (distância acumulada até 1 + comprimento do arco de 1 a 5)

Como os nós descendentes calculados ainda não haviam sido preenchidos, deve-se simplesmente marcar estes valores na etiqueta de cada nó descendente, indicando também seu antecessor ("pai") como sendo o nó 1. Indica-se ainda que estes 2 nós precisam que seus descendentes sejam calculados (indicando 1 na parte inferior da etiqueta), e que o nó 1 não precisa mais ter seus descendentes calculados (indicando 0 na parte inferior da etiqueta):

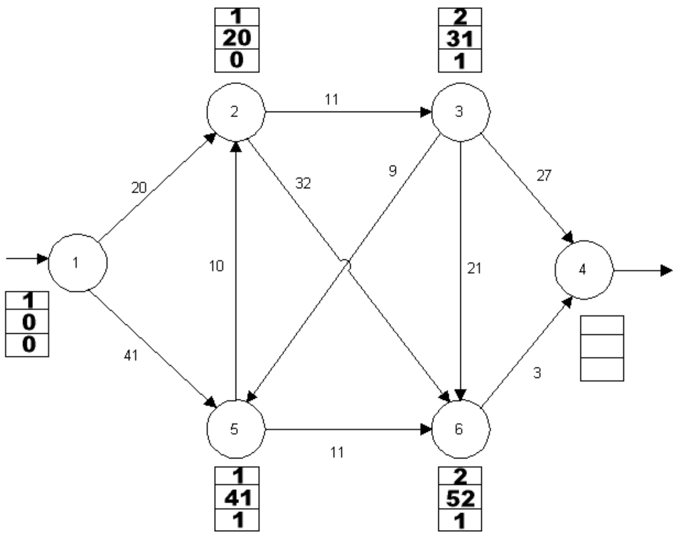


**Passo 5**: Dos nós que possuem descendentes a calcular (2 e 5), selecionar aquele que tem a menor distância acumulada: o nó 2 tem 20 acumulado e o nó 5 tem 41 acumulado. Assim, o nó 2 será usado para cálculo no próximo passo.

**Passo 6**: A partir do nó selecionado (neste caso, o nó 2), calcular todos os seus descendentes: 3 e 6:

- Nó 3: 20 + 11 = 31 (distância acumulada até 2 + comprimento do arco de 2 a 3)
- Nó 6: 20 + 32 = 53 (distância acumulada até 2 + comprimento do arco de 2 a 6)

Como os nós descendentes calculados ainda não foram preenchidos, deve-se simplesmente marcar o valor na etiqueta, indicando também seus antecessores ("pais") como sendo o nó 2. Adicionalmente, indica-se que estes nós precisam que seus descendentes sejam calculados (indicando 1 na parte inferior das etiquetas), e que o nó 2 não precisa mais ter seus descendentes calculados (indicando 0 na parte inferior da etiqueta):




**Passo 7**: Dos nós que possuem descendentes a calcular (3, 5 e 6), selecionar aquele que tem a menor distância acumulada: o nó 3 tem 31 acumulado; o nó 5 tem 41 acumulado; e o nó 6 tem 52 acumulado. Assim, o nó 3 será usado para cálculo no próximo passo.

**Passo 8**: A partir do nó selecionado (neste caso, o nó 3), calcula-se todos os seus descendentes: 4, 5 e 6:

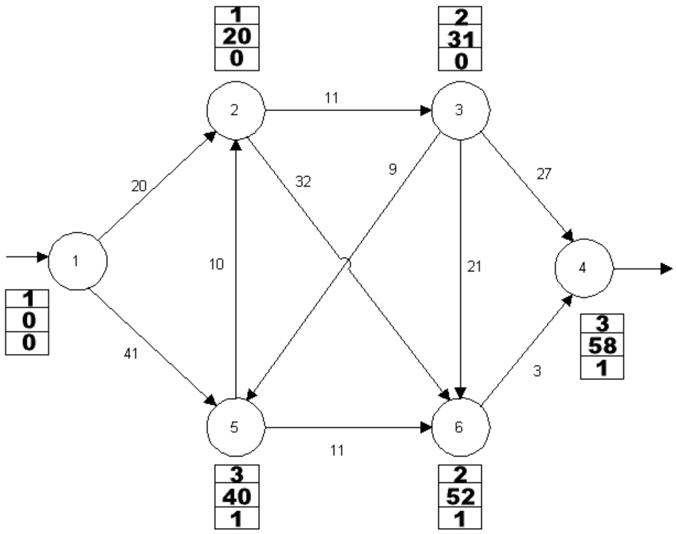
- Nó 4: 31 + 27 = 58 (distância acumulada até 3 + comprimento do arco de 3 a 4)
- Nó 5: 31 + 9 = 40 (distância acumulada até 3 + comprimento do arco de 3 a 5)
- Nó 6: 31 + 21 = 52 (distância acumulada até 3 + comprimento do arco de 3 a 6)

Como o nó 4 ainda não havia sido calculado, deve-se simplesmente preencher sua etiqueta da mesma maneira que nos passos anteriores: pai (3) na parte de cima, distância acumulada (58) no meio e a necessidade de cálculo dos descendentes (1) na parte inferior.

No caso dos nós 5 e 6, entretanto, já havia etiquetas definidas. Antes de substituí-las, é preciso verificar se o novo caminho até estes nós é melhor do que o anteriormente definido.

No nó 5, o valor anterior de distância acumulada era 41, como é possível ver pela etiqueta. Seguindo o novo caminho, o valor acumulado fica 40. Como 40 é menor que 41, o novo caminho é melhor que o antigo. Por esta razão, a etiqueta do nó 5 será **corrigida** com os valores novos de pai (3), distância acumulada (40) e a necessidade de recálculo de seus descendentes.

No nó 6, o valor anterior de distância acumulada era 52, e seguindo o novo caminho, ele permanece 52. Desta forma, **não se mexe** na etiqueta, já que o caminho anterior era tão bom quanto o novo. Finalmente, o nó 3 deve ser remarcado indicando que seus descendentes não mais precisam ser recalculados:



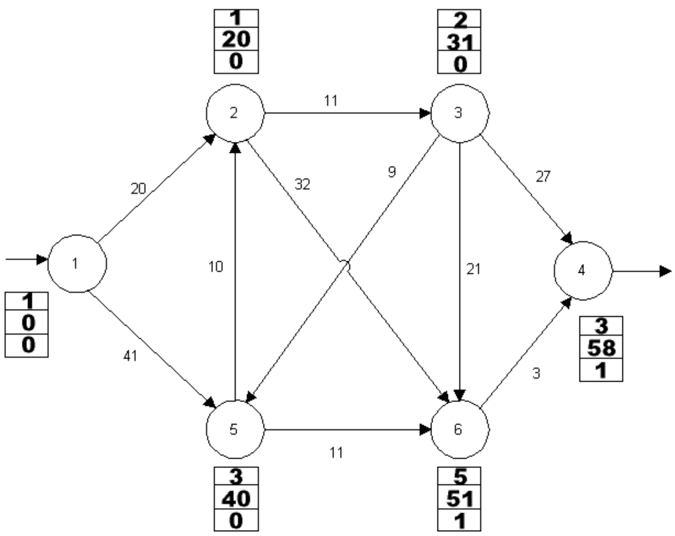

**Passo 9**: Dos nós que possuem descendentes a calcular (4, 5 e 6), deve-se selecionar aquele que tem a menor distância acumulada: o nó 4 tem 58 acumulado; o nó 5 tem 40 acumulado; e o nó 6 tem 52 acumulado. Assim, o nó 5 será usado no próximo passo.

**Passo 10**: A partir do nó selecionado (neste caso, o nó 5), calcular todos os seus descendentes: 2 e 6:

- Nó 2: 40 + 10 = 50
- Nó 6: 40 + 11 = 51

Como todos os nós descendentes calculados já foram preenchidos, deve-se verificar se os novos caminhos são melhores que os antigos. No nó 2, a distância acumulada anterior era 20, e pelo novo caminho ela fica 50, sendo claramente uma piora. Este nó fica como estava.

No nó 6, a distância acumulada anterior era 52, e a nova é 51. Assim, há uma melhoria, e este nó deve ter sua etiqueta remarcada para pai como nó 2, distância acumulada 51 e indicar que seus descendentes precisam ser recalculados. Adicionalmente deve-se indicar que o nó 5 não precisa mais ter seus descendentes calculados:

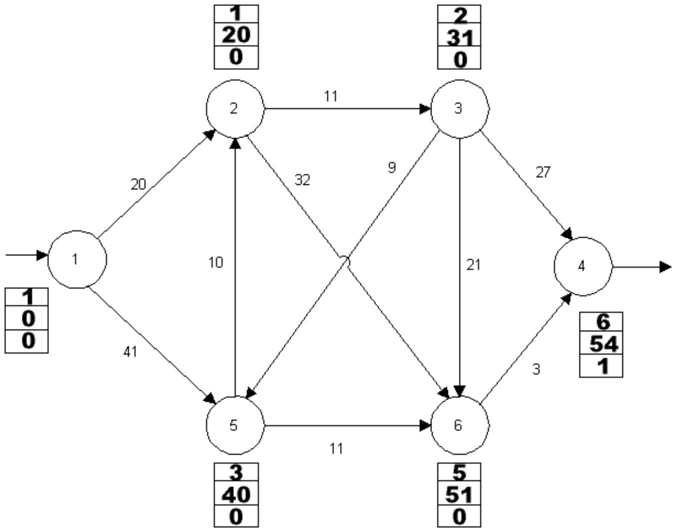


**Passo 11**: Dos nós que possuem descendentes a calcular (4 e 6), selecionar aquele que tem a menor distância acumulada: o nó 4 tem 58 acumulado; e o nó 6 tem 51 acumulado. Assim, o nó 6 será usado no próximo passo.

**Passo 12**: A partir do nó selecionado (neste caso, o nó 6), calcular todos os seus descendentes: 4:

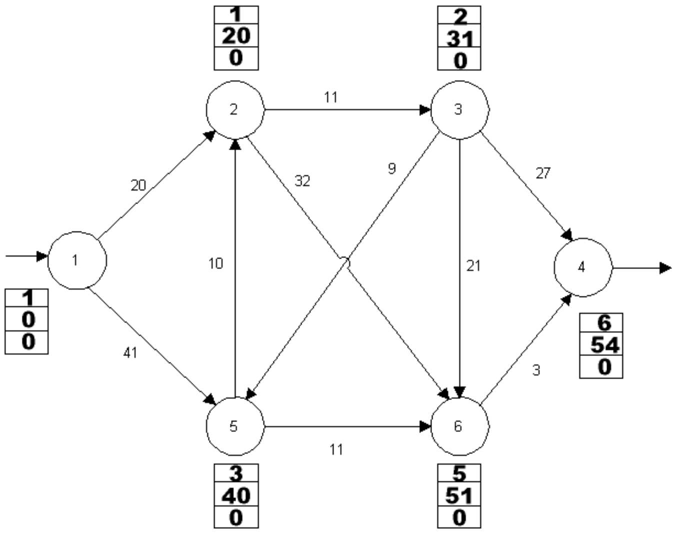
- Nó 4: 51 + 3 = 54

O nó 4 já tinha uma etiqueta, com uma distância acumulada de 58, e pelo novo caminho ela se torna 54. Assim, o novo caminho é melhor que o anterior, e a etiqueta do nó 4 deve ser corrigida: 6 (pai), 54 (distância) e 1 (calcular descendentes). O nó 6 deve ser ajustado para indicar que seus descendentes não mais precisam ser calculados (0):




**Passo 13**: Sobrou apenas um nó (4) com descendentes a serem calculados, então, o nó 9 será usado no próximo passo.

**Passo 14**: Ocorre que o nó 4 não tem descendentes, então sua etiqueta pode ser corrigida para indicar que seus descendentes não precisam ser calculados.




**Passo 15**: Como não há mais nós com descendentes para calcular, esta é a solução do problema. O caminho mínimos é definido da mesma forma que no label setting:

1 a 4: 4-6-5-3-2-1... ou 1-2-3-5-6-4, com distância total 54.

## 5. BIBLIOGRAFIA

AHUJA, R.K; MAGNANTI, T.L; ORLIN, J.B. **Network Flows**: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey: Prentice Hall, 1993.

BRADLEY, S. P.; HAX, A. C.; MAGNANTI, T. L. **Applied mathematical programming**. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1977.

CHVATAL, V. **Linear programming**. New York: W. H. Freeman, 1983.

GALLO, G; PALLOTTINO, S. Shortest path methods in transportation models. (M. Florian, ed.) Transportation Planning Models. North Holland, Elsevier Science Publishers. p. 227-256, 1984.

WINSTON, W. L. **Operations research**: applications and algorithms. S.I.: International Thomson Publishing, 1994.