

ARQUITETURA E ORGANIZAÇÃO DE COMPUTADORES

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: REPRESENTAÇÃO EM PONTO FIXO

Prof. Dr. Daniel Caetano

2011 - 2

Visão Geral

1

- O que é Ponto Fixo

2

- Representação de Sinal

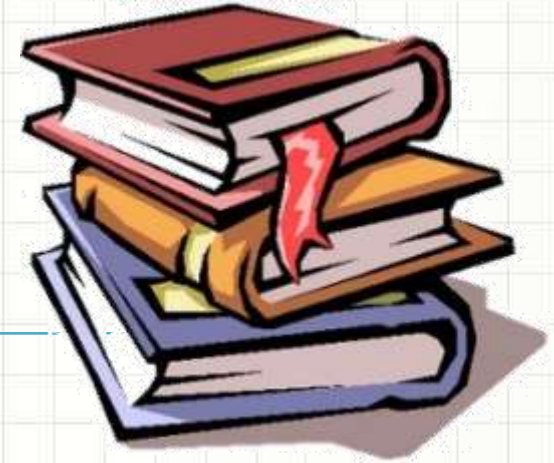
3

- Complemento de Um

4

- Complemento de Dois

Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Notas de Aula

<http://www.caetano.eng.br/aulas/aoc/>
(Aula 4)

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/aulas/aoc/>
(Aula 4)

Material Didático

-

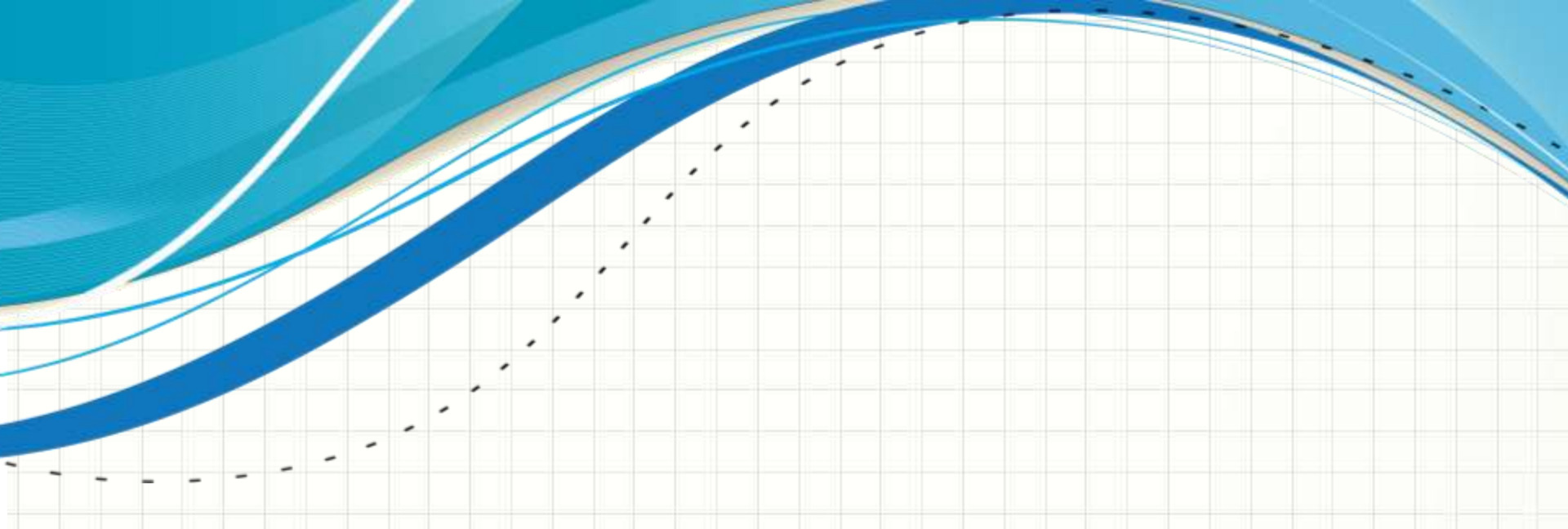
Arquitetura e
Organização dos
Computadores

Biblioteca Virtual, páginas 289 a 292.

Lembretes

- **GRUPOS?**
- **Lista de Exercícios 1!**





O QUE É PONTO FIXO?

Notação em Ponto Fixo

- Já vimos como converter binário para decimal. Ex. 11011001b:

Casa	7	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	1	0	1	1	0	0	1
Quantidade (Decimal)	1×2^7	1×2^6	0×2^5	1×2^4	1×2^3	0×2^2	0×2^1	1×2^0

- $11011001 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 217$
- Ou seja: **11011001b = 217**

Notação em Ponto Fixo

- Essa conversão pressupõe que a vírgula está à direita do dígito 0:

Casa	7	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	1	0	1	1	0	0	1
Quantidade (Decimal)	1×2^7	1×2^6	0×2^5	1×2^4	1×2^3	0×2^2	0×2^1	1×2^0

- O que acontece se a vírgula estiver em outro lugar?

Notação em Ponto Fixo

- Vamos usar os mesmos bits, mas agora com a vírgula no meio dos 8 bits: **1101,1001**b

Casa	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
Dígito Binário	1	1	0	1	1	0	0	1
Quantidade (Decimal)	1×2^3	1×2^2	0×2^1	1×2^0	1×2^{-1}	0×2^{-2}	0×2^{-3}	1×2^{-4}

- $1101,1001 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 13,5625$
- Ou seja: **1101,1001b = 13,5625**

Notação em Ponto Fixo

- Observe que os bits do número são os mesmos
- Observe que a interpretação depende da posição considerada para a vírgula

Casa	7	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	1	0	1	1	0	0	1
Quantidade (Decimal)	1×2^7	1×2^6	0×2^5	1×2^4	1×2^3	0×2^2	0×2^1	1×2^0

Casa	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
Dígito Binário	1	1	0	1	1	0	0	1
Quantidade (Decimal)	1×2^3	1×2^2	0×2^1	1×2^0	1×2^{-1}	0×2^{-2}	0×2^{-3}	1×2^{-4}

Notação em Ponto Fixo

- Qual a vantagem?
 - Ponto Fixo = vírgula sempre no mesmo lugar
 - Somas e subtrações podem ser feitas diretamente, casa a casa (da forma usual)
- Inteiros = ponto fixo à direita do bit 0
- Em geral, computadores só usam ponto fixo em inteiros
- Só existem inteiros positivos?

Notação em Ponto Fixo

- Qual a vantagem?

- Ponto Fixo = vírgula sempre no mesmo lugar

- Somente subtrações em sentido direto
direção para a esquerda da forma usu

NÃO

- Inteiros = ponto fixo à direita do zero
- Em geral, computadores só usam ponto fixo em inteiros
- Só existem inteiros positivos?



REPRESENTAÇÃO DE SINAL

Representação de Sinal

- Como podemos representar sinal?
- Sinal: positivo ou negativo...
 - Que tal usar um bit para isso?

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

+ ou -
Bit 7: Sinal

0 a 127
Bits 0 a 6: Magnitude

Representação de Sinal

- Como podemos representar sinal?
- Sinal: positivo ou negativo...
 - Que tal usar um bit para isso?

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

- Convertendo os bits 0 a 6 para decimal...

Representação de Sinal

- Como podemos representar sinal?
- Sinal: positivo ou negativo...
 - Que tal usar um bit para isso?

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

- Convertendo os bits 0 a 6 para decimal...
 $64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 97$
- Como o bit de sinal é 0, ele é **positivo**

Representação de Sinal

- E se o bit 7 fosse 1?

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	1	1	0	0	0	0	1

- Convertendo os bits 0 a 6 para decimal...

Representação de Sinal

- E se o bit 7 fosse 1?

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	1	1	0	0	0	0	1

- Convertendo os bits 0 a 6 para decimal...
 $64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 97$
- Como o bit de sinal é 1, ele é **negativo**
- Perfeito, não?

Representação de Sinal

- E se o bit 7 fosse 1?

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	1	0	0	0	0	0	1

- Converter todos bits 0 para decimais ...
 $64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1$
- Como o bit de sinal é 1, ele é **negativo**
- Perfeito, não?

NÃO

Representação de Sinal

- Qual o problema?
- O problema é que perdemos a característica “mais legal” dos números de ponto fixo: a soma e subtração deixam de funcionar diretamente
- Por quê?
- Antes de examinar o porque, vamos ver quais são os problemas gerados

Representação de Sinal

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
		1	0	0	0	0	0	1	0	b	-	2
	+	0	0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>												

Representação de Sinal

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
		1	0	0	0	0	0	1	0 b	-	2
+		0	0	0	0	0	0	0	1 b	+	1
<hr/>											
									1		

Representação de Sinal

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
		1	0	0	0	0	0	1	0 b	-	2
	+	0	0	0	0	0	0	0	1 b	+	1
<hr/>											
								1	1		

Representação de Sinal

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
		1	0	0	0	0	0	1	0	b	-	2
+		0	0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>												
		0	0	0	0	0	1	1				

Representação de Sinal

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
	1	0	0	0	0	0	1	0	b	-	2
+	0	0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>											
	1	0	0	0	0	0	1	1	b		

Representação de Sinal

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
	1	0	0	0	0	0	1	0	b - 2
+	0	0	0	0	0	0	0	1	b + 1
<hr/>									
	1	0	0	0	0	0	1	1	b - 3



Representação de Sinal

- Imaginemos que queremos somar dois números e obter o resultado?
- Obviamente, se os números são positivos, a soma é simplesmente a soma dos valores.

Bit

Como Resolver?

$$\begin{array}{r} 10000010 \\ + 0000001b \\ \hline 10000011b \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} + 1 \\ - 3 \end{array}$$





COMPLEMENTO DE UM

Sinal em Complemento de Um

- Para resolver o problema de soma anteriormente apresentado, foi proposto o esquema de representação de sinal em complemento de um
- **Quê?**
- Calma, é simples...
- Complemento de um, em números binários, é “quanto falta para cada bit chegar no número um?”
- Basicamente: cada 0 vira 1 e cada 1 vira 0
- Ou seja: $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$

Sinal em Complemento de Um

- Exemplo... Se esse é o número +97:

Bit	7	6	5	4	3	2	1	0
	(Sinal)							
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

- Este será o número -97:

Bit	7	6	5	4	3	2	1	0
	(Sinal)							
Dígito Binário	1	0	0	1	1	1	1	0

- Observe a inversão...
- O **bit 7** continua indicando o sinal
- Perfeito, não?

Sinal em Complemento de Um

- Exemplo... Se esse é o número +97:

Bit	7	6	5	4	3	2	1	0
	(Sinal)							
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

- Este sinal representa o número +97

Bit	7	6	5	4	3	2	1	0
	(Sinal)							
Dígito Binário	1	0	0	1	1	1	1	0

- Observe a inversão...
- O **bit 7** continua indicando o sinal
- Perfeito, não?

Sinal em Complemento de Um

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar em -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
		1	1	1	1	1	0	1	b	-	2
+		0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>											

Sinal em Complemento de Um

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar em -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0		
		1	1	1	1	1	0	1	b	- 2
+		0	0	0	0	0	0	1	b	+ 1
								0		

Sinal em Complemento de Um

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar em -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
							1					
		1	1	1	1	1	0	1	b	-	2	
	+	0	0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>												
							1	0				

Sinal em Complemento de Um


- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar em -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
							1				
		1	1	1	1	1	0	1	b	-	2
+		0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>											
		1	1	1	1	1	1	0	b		

Sinal em Complemento de Um

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... **OK!** o resultado em

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
		1	1	1	1	1	0	1	b - 2
+		0	0	0	0	0	0	1	b + 1
<hr/>									
		1	1	1	1	1	1	0	b - 1



Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: $-1 + 2$... Que deveria resultar em $+1$, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
		1	1	1	1	1	1	0	b	-	1	
+		0	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>												

Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: $-1 + 2$... Que deveria resultar em $+1$, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
		1	1	1	1	1	1	0	b	-	1
		0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
								0			

Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: $-1 + 2...$ Que deveria resultar em $+1$, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
					1	1						
		1	1	1	1	1	1	0	b	-	1	
	+	0	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>												
						0	0	0				

Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: $-1 + 2$... Que deveria resultar em $+1$, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
				1	1	1			
		1	1	1	1	1	1	0	b
									-
									1
	+	0	0	0	0	0	1	0	b
									+
									2
<hr/>									
					0	0	0	0	

Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: $-1 + 2$... Que deveria resultar em $+1$, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
			1	1	1	1					
		1	1	1	1	1	1	0	b	-	1
+		0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
				0	0	0	0	0			

Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: -1 + 2... Que deveria resultar em +1, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
		1	1	1	1	1			
		1	1	1	1	1	1	0	b - 1
+		0	0	0	0	0	1	0	b + 2
<hr/>									
			0	0	0	0	0	0	

Sinal em Complemento de Um

- O que está errado, então?
- Vamos fazer outra conta: $-1 + 2$... Que deveria resultar em $+1$, correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
1	1	1	1	1	1	1			
		1	1	1	1	1	1	0	b - 1
+		0	0	0	0	0	1	0	b + 2
<hr/>									
		0	0	0	0	0	0	0	b + 0



Sinal em Complemento de Um

- O que
- Vamo
- deve

Por que ocorre?

Bit											
1											
	1										1
+	0	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
	0	0	0	0	0	0	0	0	b	+	0



Sinal em Complemento de Um

- Ocorre porque há duas representações para o zero: -0 e $+0$
- $11111110b = -1$
- $11111110b + 1b = 11111111b = -0$
- $11111111b + 1b = 00000000b = +0$
- $00000000b + 1b = 00000001b = +1$

- Como resolver isso?



COMPLEMENTO DE DOIS

Sinal em Complemento de Dois

- Para resolver o problema ambos os problemas apresentados, foi proposto o esquema de representação de sinal em complemento de dois
- **Quê!?!?**
- Calma, é simples... complemento de dois, em números binários, é feito com base no complemento de um
- Basicamente: cada 0 vira 1 e cada 1 vira 0
- Ou seja: $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$
- E depois soma-se 1 ao resultado final

Sinal em Complemento de Dois

- Exemplo... Se esse é o número +97:

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

- E este é o -97 em complemento de 1:

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	0	0	1	1	1	1	0

+1

Então este é o -97 em complemento de 2:

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	0	0	1	1	1	1	1

Sinal em Complemento de Dois

- Para transformar de negativo para positivo, o processo é o contrário
- Primeiro subtrai-se 1
- E depois aplica-se o complemento... cada 0 vira 1 e cada 1 vira 0
- Ou seja: $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$

Sinal em Complemento de Dois

- Se esse é o -97 em complemento de 2:

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	0	0	1	1	1	1	1

-1

- Então este é o -97 em complemento de 1:

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	1	0	0	1	1	1	1	0

- E este é o +97:

Bit	7 (Sinal)	6	5	4	3	2	1	0
Dígito Binário	0	1	1	0	0	0	0	1

Sinal em Complemento de Dois

- Como saber se é positivo ou negativo?
 - O bit 7 continua indicando o sinal!
- Mas... qual a vantagem de fazer essa acrobacia?
- Simples: isso resolve os dois problemas ao mesmo tempo...
- Vamos verificar!

Sinal em Complemento de Dois

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar em -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
		1	1	1	1	1	1	0	b - 2
+		0	0	0	0	0	0	1	b + 1
<hr/>									

Sinal em Complemento de Dois

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... Deve resultar em -1

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
		1	1	1	1	1	1	0	b	-	2	
+		0	0	0	0	0	0	0	1	b	+	1
<hr/>												
		1	1	1	1	1	1	1	1	b		

Sinal em Complemento de Dois

Verifique!

- Imaginemos que temos o número -2 e somemos com 1. Qual deve ser o resultado?
- Obviamente... o resultado em

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
		1	1	1	1	1	1	0	b - 2
+		0	0	0	0	0	0	1	b + 1
<hr/>									
		1	1	1	1	1	1	1	b - 1

OK!



Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0				
		1	1	1	1	1	1	1	b	-	1	
	+	0	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>												

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
						1					
		1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
	+	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
							0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
					1	1					
		1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
	+	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
						0	0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
				1	1	1					
		1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
+		0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
					0	0	0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
			1	1	1	1					
		1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
+		0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
				0	0	0	0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
		1	1	1	1	1					
		1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
+		0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
			0	0	0	0	0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
	1	1	1	1	1	1					
	1	1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
+	0	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
		0	0	0	0	0	0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o correto?

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0			
1	1	1	1	1	1	1					
	1	1	1	1	1	1	1	1	b	-	1
+	0	0	0	0	0	0	1	0	b	+	2
<hr/>											
	0	0	0	0	0	0	0	1			

Sinal em Complemento de Dois

- Vamos verificar a outra conta, então?
- Vejamos se o $-1 + 2$ resulta em $+1$, como seria o caso?

OK!

Bit	+/-	6	5	4	3	2	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	b	-
	1	1	1	1	1	1	1	b	-
	+	0	0	0	0	0	1	0	b
<hr/>									
		0	0	0	0	0	0	1	b
									+
									1



Sinal em Complemento de Dois

- Esta representação só não serve se:
 - O resultado da conta é superior a 127
 - O resultado da conta é inferior a -128
- Mas isso é esperado...
- Com número inteiros positivos, a representação também não serve nos extremos:
 - O resultado da conta é superior a 255
 - O resultado da conta é inferior a 0



CONCLUSÕES

Resumo

- Números inteiros, positivos e negativos, são representados na forma de ponto fixo
- A grande vantagem dos números de ponto fixo é a possibilidade de realizar somas e subtrações diretamente
- Para que as somas de números positivos e negativos tenham resultados corretos em sua faixa de validade, os números negativos devem ser representados em complemento de dois
- **TAREFA**
 - Lista 1!

Próxima Aula



- Só é possível representar inteiros e ponto fixo?
 - Como representar números com vírgula, com números de casas variáveis?



PERGUNTAS?



**BOM DESCANSO
A TODOS!**