Unidade 3: Sistemas de Numeração

Conversões Entre Quaisquer Bases e Aritmética em Bases Alternativas

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar métodos genéricos de conversão entre bases, bem como operações sem a necessidade de realizar conversões.

Bibliografia STALLINGS, 2003; MURDOCCA e HEURING, 2000.

INTRODUÇÃO

Na aula anterior foram apresentados os métodos para conversão entre as bases decimal e binária. Nesta aula veremos que o método aplicado serve para converter entre quaisquer bases, usando a decimal como intermediária.

Adicionalmente, veremos como lidar com números fracionários em potências de dois, em especial com binários, e como realizar as operações básicas com números representados em bases diferentes de 2.

1. RECORDANDO CONVERSÕES DECIMAL/BINÁRIO

1.1. Conversão de Números Binários para Decimais

Multiplica-se cada dígito pela correspondente potência de **dois**. Exemplo: converter o número 1101b para decimal:

Dígito	3	2	1	0
Número	1	1	0	1

1101b = $1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$

1.2. Conversão de Números Decimais para Binários

A conversão é feita com divisões sucessivas por **dois**, anotando os restos da divisão, que formam o número binário da direita para a esquerda. Exemplo: converter o valor 13 em sua representação binária:

13 / 2 = 6 e sobra... 1
6 / 2 = 3 e sobra... 0
3 / 2 = 1 e sobra 1
1 / 2 = 0 e sobra 1

Assim, o valor 13 = 1101b.

Outro exemplo: converter 118 para binário:

118 / 2 = 59 e sobra... 0
59 / 2 = 29 e sobra... 1
29 / 2 = 14 e sobra... 1
14 / 2 = 7 e sobra... 0
7 / 2 = 3 e sobra... 1
3 / 2 = 1 e sobra... 1
1 / 2 = 0 e sobra... 1

Assim, o valor 118 = 1110110b

2. CONVERTENDO DECIMAL/OCTAL

2.1. Conversão de Números Octais para Decimais

Multiplica-se cada dígito pela correspondente potência de **oito**. Exemplo: converter o número 03721 para decimal:

Dígito	3	2	1	0
Número	3	7	2	1

$03721 = 3*8^3 + 7*8^2 + 2*8^1 + 1*8^0 = 3*512 + 7*64 + 2*8 + 1*1 = 2001$

2.2. Conversão de Números Decimais para Octais

A conversão é feita com divisões sucessivas por **oito**, anotando os restos da divisão, que formam o número octal da direita para a esquerda. Exemplo: converter o valor 2001 em sua representação octal:

2001 / 8 = 250 e sobra... 1
250 / 8 = 31 e sobra... 2
31 / 8 = 3 e sobra... 7
3 / 8 = 0 e sobra... 3

Logo, 2001 = 03721.

3. CONVERTENDO DECIMAL/HEXADECIMAL

3.1. Conversão de Números Hexadecimal para Decimais

Multiplica-se cada dígito pela correspondente potência de **dezesseis**. Exemplo: converter o número 0x2F3C para decimal:

Dígito	3	2	1	0
Número	2	F	3	C

0x2F3C=$2*16^3 + 15*16^2 + 3*16^1 + 12*16^0 = 2*4096 + 15*16 + 3*16 + 12*1 = 12092$

3.2. Conversão de Números Decimais para Hexadecimais

A conversão é feita com divisões sucessivas por **dezesseis**, anotando os restos da divisão, que formam o número hexadecimal da direita para a esquerda. Exemplo: converter o valor 12092 em sua representação hexadecimal:

12092 / 16 = 755 e sobra...	12 (C)
755 / 16 = 47 e sobra...	3
47 / 16 = 2 e sobra...	15 (F)
2 / 16 = 0 e sobra...	2

Logo, 12092 = 0x2F3C

4. CONVERTENDO DECIMAL/QUALQUER BASE

4.1. Conversão de Números de Qualquer Base para Decimais

Multiplica-se cada dígito pela correspondente potência do **número da base**. Exemplo: converter o número **abcd**, na base **n**, para decimal:

Dígito	3	2	1	0
Número	a	b	c	d

abcd = $a*n^3 + b*n^2 + c*n^1 + d*n^0$

4.2. Conversão de Números Decimais para Qualquer Base

A conversão é feita com divisões sucessivas pelo **número da base**, anotando os restos da divisão, que formam o número na base em questão, da direita para a esquerda. Exemplo: converter o valor **x1** em sua representação na base **n**:

x1 / n = x2 e sobra...	d
x2 / n = x3 e sobra...	c
x3 / n = x4 e sobra...	b
x4 / n = 0 e sobra...	a

Logo, **x1** na base 10 = **abcd** na base n

5. CONVERTENDO NÚMEROS ENTRE QUAISQUER BASES

Sempre que for necessário converter números entre quaisquer bases, de maneira genérica, pode-se realizar a conversão usando a base 10 como intermediária. Por exemplo:

Converta o número **x1** na base **a** para a base **b**.

Esse problema pode ser decomposto em:

1) Converta **x1** na base **a** para a base **10**, obtendo **x2** na base 10.
2) Converta **x2** na base **10** para a base **b**, obtendo **x3** na base b.

As conversões envolvendo binários e octais e binários e hexadecimais podem ser feitas de forma direta, bastando decorar uma tabelinha básica de conversão.

A tabela abaixo, para conversões Binário<=>Octal, deve ser usada lembrando-se de que cada dígito octal viram 3 dígitos em binário... e que cada 3 dígitos em binário se torna um único em octal.

Binária	Octal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Por exemplo, para converter o número 1011101101b em um número octal, separamos este número em grupos de 3 bits, da direita para a esquerda:

1	011	101	101

Como um bit ficou sozinho na esquerda, complementamos com mais dois bits zero:

001	011	101	101

Agora basta usar a tabela para converter:

001	011	101	101
1	3	5	5

Assim, 1011101101b = 01355.

A conversão contrária é idêntica: converter 01355 para binário:

1	3	5	5
001	011	101	101

Portanto 01355 = 1011101101b

A conversão entre binário e hexadecimal se faz da mesma forma, mas usa-se a tabela abaixo e deve-se lembrar que cada dígito hexadecimal corresponde a QUATRO dígitos binários.

Binária	Hexadecimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Por exemplo, para converter o número 1011101101b em um número hexadecimal, separamos este número em grupos de 4 bits, da direita para a esquerda:

10	1110	1101

Como dois bits ficaram sozinhos na esquerda, complementamos com mais dois bits zero:

0010	1110	1101

Agora basta usar a tabela para converter:

0010	1110	1101
2	E	D

Assim, 1011101101b = 0x2ED.

A conversão contrária é idêntica: converter 0x2ED para binário:

2	E	D
0010	1110	1101

Portanto 0x2ED = 1011101101b

6. NÚMEROS FRACIONÁRIOS EM OUTRAS BASES

Até agora só, lidamos com números inteiros. É possível lidar com conversões de números fracionários? SIM! É possível. Será apresentada a regra para números binários, sendo que a regra é análoga para as outras bases!

6.1. Conversão de Números Binários Fracionários para Decimais

Multiplica-se cada dígito pela correspondente potência de **dois**, lembrando que números depois da vírgula possuem expoente negativo! Exemplo: converter o número 1101,1001b para decimal:

Dígito	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
Número	1	1	0	1	1	0	0	1

1101,1001b $= 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 0*2^{-3} + 1*2^{-4}$
$= 8 + 4 + 0 + 1 + 0{,}5 + 0 + 0 + 0{,}0625$
$= 13{,}5625$

6.2. Conversão de Números Decimais Fracionários para Binários

A parte inteira é convertida com divisões sucessivas por **dois**, anotando os restos da divisão, que formam o número binário da direita para a esquerda - como já foi feito antes. A parte fracionária é convertida com multiplicações sucessivas por **dois**, "retirando" a parte inteira do número para compor a parte fracionária binária, da esquerda para a direita Exemplo: converter o valor 13,5625 em sua representação binária:

Parte Inteira:
13 / 2 = 6 e sobra... 1
6 / 2 = 3 e sobra... 0
3 / 2 = 1 e sobra 1
1 / 2 = 0 e sobra 1

Assim 13 = 1101b

Parte Fracionária:
0,5625 * 2 = **1**,125 => 1
0,125 * 2 = **0**,250 => 0
0,25 * 2 = **0**,5 => 0
0,5 * 2 = **1**,0 => 1
0,0 * 2 = **0**,0 => 0
0,0 * 2 = **0**,0 => 0
0,0 * 2 = **0**,0 => 0
0,0 * 2 = **0**,0 => 0
...
Assim, 0,5625 = 0,10010000b

Componto ambos:

13,5625 = 1101,10010000b = 1101,1001b

Lembrando que zeros à direita do número após a vírgula não modificam o valor do número. Em alguns casos, não é possível se chegar ao valor ZERO como nesse caso (por exemplo, se tentarmos converter PI (3,141592...) para binário. Neste caso, procede-se até obter a precisão desejada.

O processo para outras bases é análogo, substituindo o "2" pelo número da base.

7. ARITMÉTICA EM OUTRAS BASES

Quando trabalhamos com números decimais, fazemos operações diretas. Por exemplo:

```
1
15
+7
22
```

No fundo, alinhamos as casas (unidade com unidade, dezena com dezena, centena com centena...) e depois somamos uma a uma, começando com a unidade e, em seguida, partindo para a dezena e centena. Quando o resultado de uma das casas é maior do que o valor da base (no exemplo, 5 + 7 = 12), subtraímos deste resultado o valor da base (12 - 10 = 2) e, fazemos o "vai um" (representado no exemplo como o pequeno algarismo 1 sobre o 15).

Realizar a soma em outras bases é exatamente a mesma coisa. Veja em binário:

```
 1 1
 1101b        =     13
+0101b        =     +5
10010b        =     18
```

Começando da direita para a esquerda:

Primeira Casa: 1 + 1 = 2; como 2 não pode ser representado em binário, subtraímos 2 (2-2 = 0) e fazemos o vai um.

Segunda Casa: 0 + 0 = 0, somando com o "1" que veio da casa anterior 0+1 = 1.

Terceira Casa: 1 + 1 = 2. Mais uma vez não é possível representar, deixamos zero (2-2) no lugar e vai um.

Quarta Casa: A soma é 1 + 0 = 1, mas ao somar com o "1" que veio da casa anterior, 1+1 = 2, deixando zero no lugar e, mais uma vez, "vai um".

Quinta Casa: Como ela não existe nos números originais, permanece apenas o "1" que veio da casa anterior.

O processo é análogo para outras bases:

```
    1
 0x25      =     37
+0x3C      =    +60
 0x61      =     97
```

Começando da direita para a esquerda:

Primeira Casa: 5 + C(12) = 17. 17 não pode ser representado... então indicamos 17-16 = 1 e vai um

Segunda Casa: 2 + 3 = 5. Somando com o "1" que veio da casa anterior: 5 + 1 = 6.

Será que podemos aplicar a mesma lógica para a subtração? É claro que sim! Vejamos primeiro com decimais:

```
1
25
-7
18
```

Primeira Casa: temos 5 - 7; não é possível fazer, então "emprestamos um" da próxima casa, que aqui na unidade vale 10 e a nova conta é (10+5) - 7 = 8.

Segunda Casa: temos 2, mas que deve subtrair o "1" que foi emprestado pela primeira casa, então 2-1 = 1.

Vejamos agora em binário

```
  1 1 1
 1100b      =     12
-0101b      =     -5
 0111b      =      7
```

Primeira Casa: 0 - 1; não é possível. Então "emprestamos 1" da próxima casa, que aqui na primeira casa vale 2. A nova conta é, então (2+0) -1 = 1

Segunda Casa: 0-0 = 0; entretanto, precisamos descontar o 1 que foi emprestado para a primeira casa; como 0-1 não é possível, somos obrigados a emprestar 1 da terceira casa, que aqui vale 2. A nova conta é: (2+0)-1 = 1.

Terceira Casa: 1-1 = 0... mas mais uma vez é preciso descontar o 1 que foi emprestado para a casa anterior... e, para isso, é preciso emprestar 1 da quarta casa! Daí (2+0)-1 = 1.

Quarta Casa: 1-0 = 1, que descontado o 1 que foi emprestado... 0.

O mesmo pode ser aplicado para a multiplicação. Façamos direto em binário:

```
  11b     =     3
 x10b     =    x2
  00b           6
 11b+
 110b
```

A divisão fica como exercício!

8. BIBLIOGRAFIA

STALLINGS, W. **Arquitetura e organização de computadores**. 5ed. São Paulo: Ed. Pearson Prentice Hall, 2003.

MURDOCCA, M. J; HEURING, V.P. **Introdução à Arquitetura de Computadores**. S.I.: Ed. Campus, 2000.