



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

CARREGAMENTO AXIAL PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

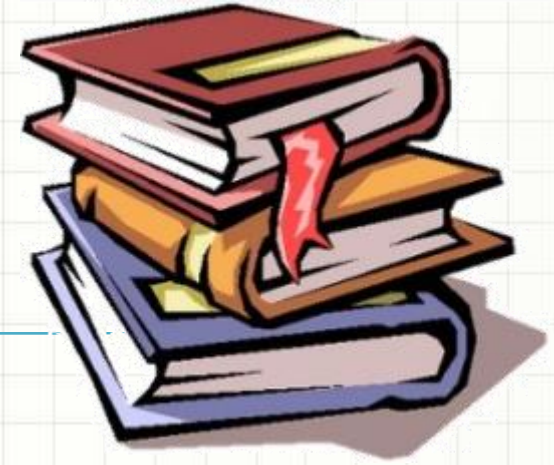
2013 - 1

Objetivos

- Conhecer o princípio de Saint-Venant
- Conhecer o princípio da superposição
- Calcular deformações em elementos submetidos a esforço normal
- Calcular reações em problemas estaticamente indeterminados simples



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Notas de Aula

-

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Aula 3)

Material Didático

-

Resistência dos
Materiais (Hibbeler)

Biblioteca Virtual, páginas 85 a 106.



RELEMBRANDO:

FORMA X DEFORMAÇÃO

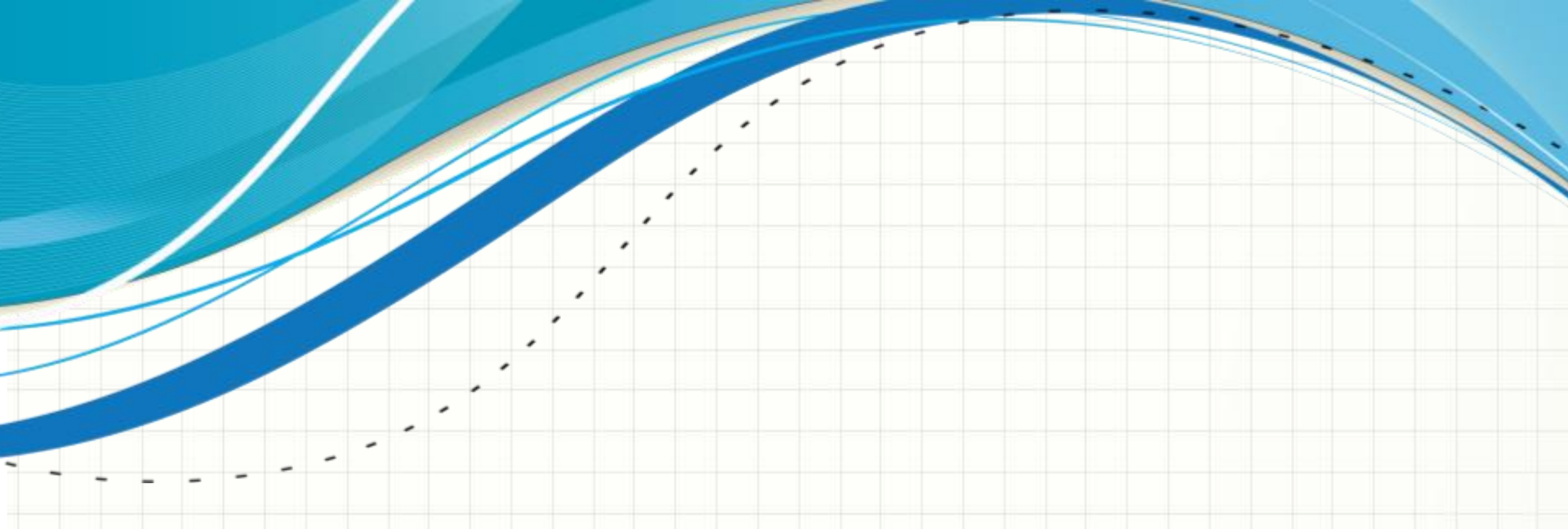
Características das Figuras Planas

- Perímetro, Área...
- Momento Estático → cálculo do centróide
- Momento de Inércia → resiste à variação ω
- Mas o que tem a ver isso com resistência?
- Módulo de Rigidez...
 - Tem a ver com o Módulo de Elasticidade

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$F = k \cdot x$$

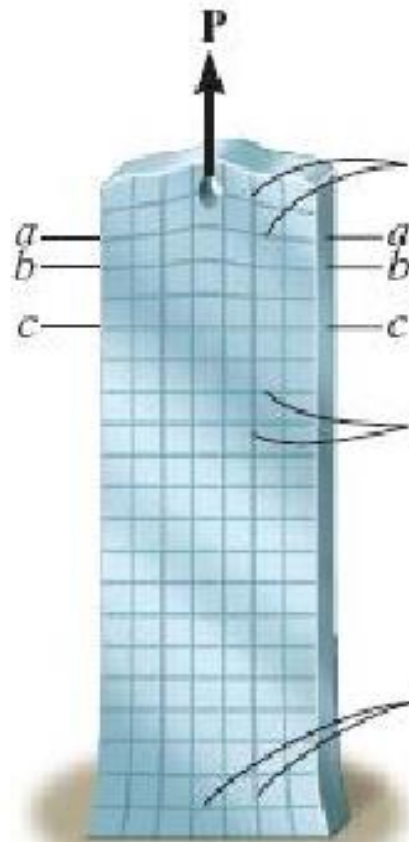
Lei de Hooke



O PRINCÍPIO DE SAINT-VENANT

Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga



Distorção próxima à carga

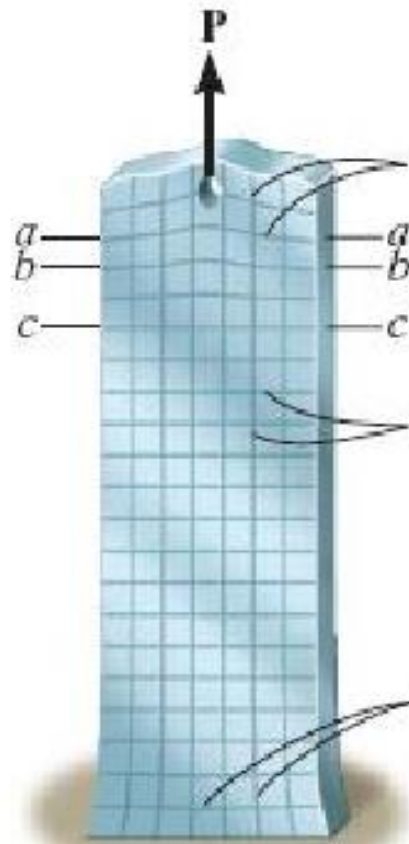


**Distorção próxima ao apoio
(reação!)**



Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga



Distorção próxima à carga

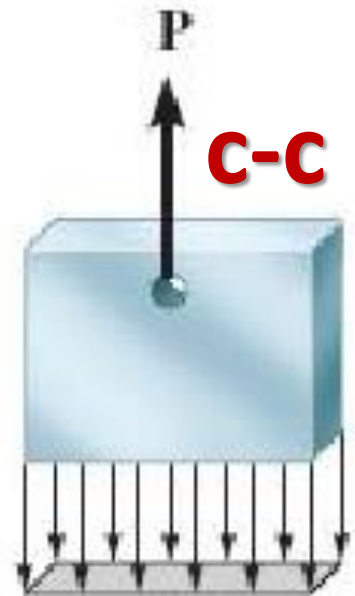
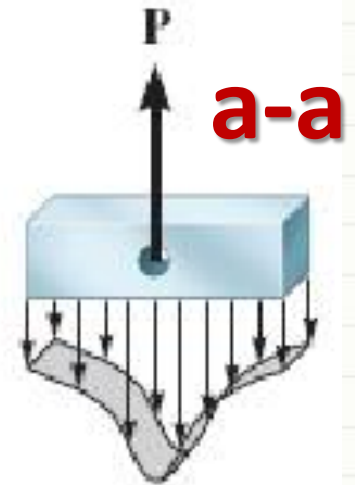
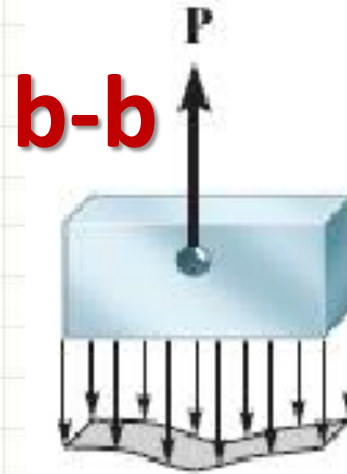
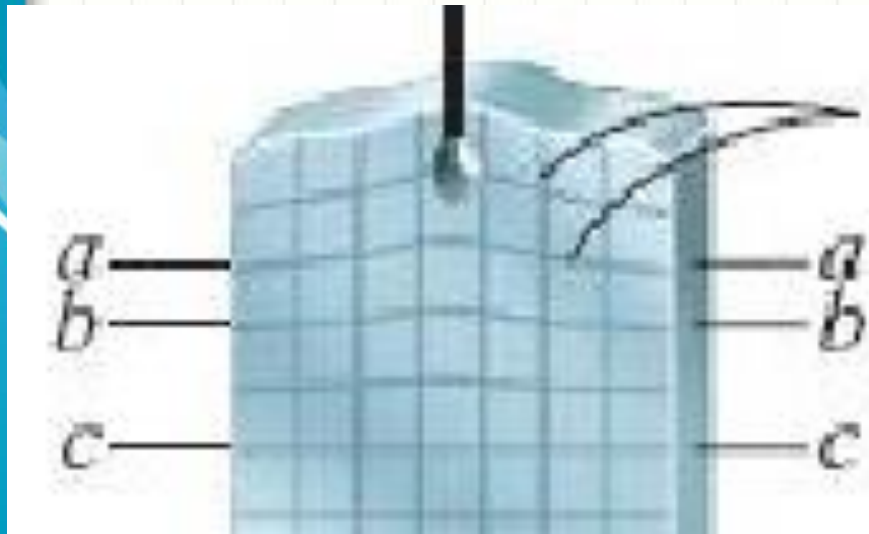
**Longe das cargas e apoio...
Permanecem paralelas**

**Distorção próxima ao apoio
(reação!)**



Princípio de Saint-Venant

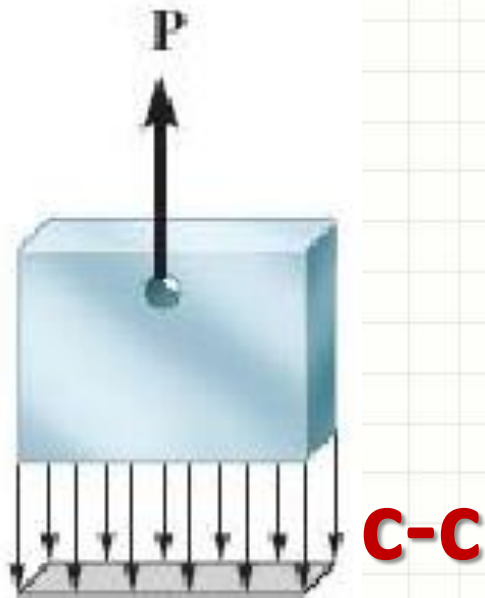
- Com o distanciamento da carga...
 - A tensão se uniformiza...



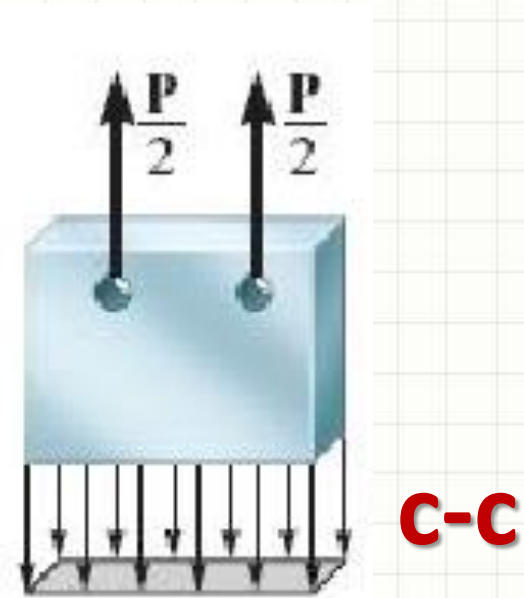
$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

Princípio de Saint-Venant

- Uniformização independe da distribuição da carga!
 - Depende da resultante!



$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$



$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

Princípio de Saint-Venant

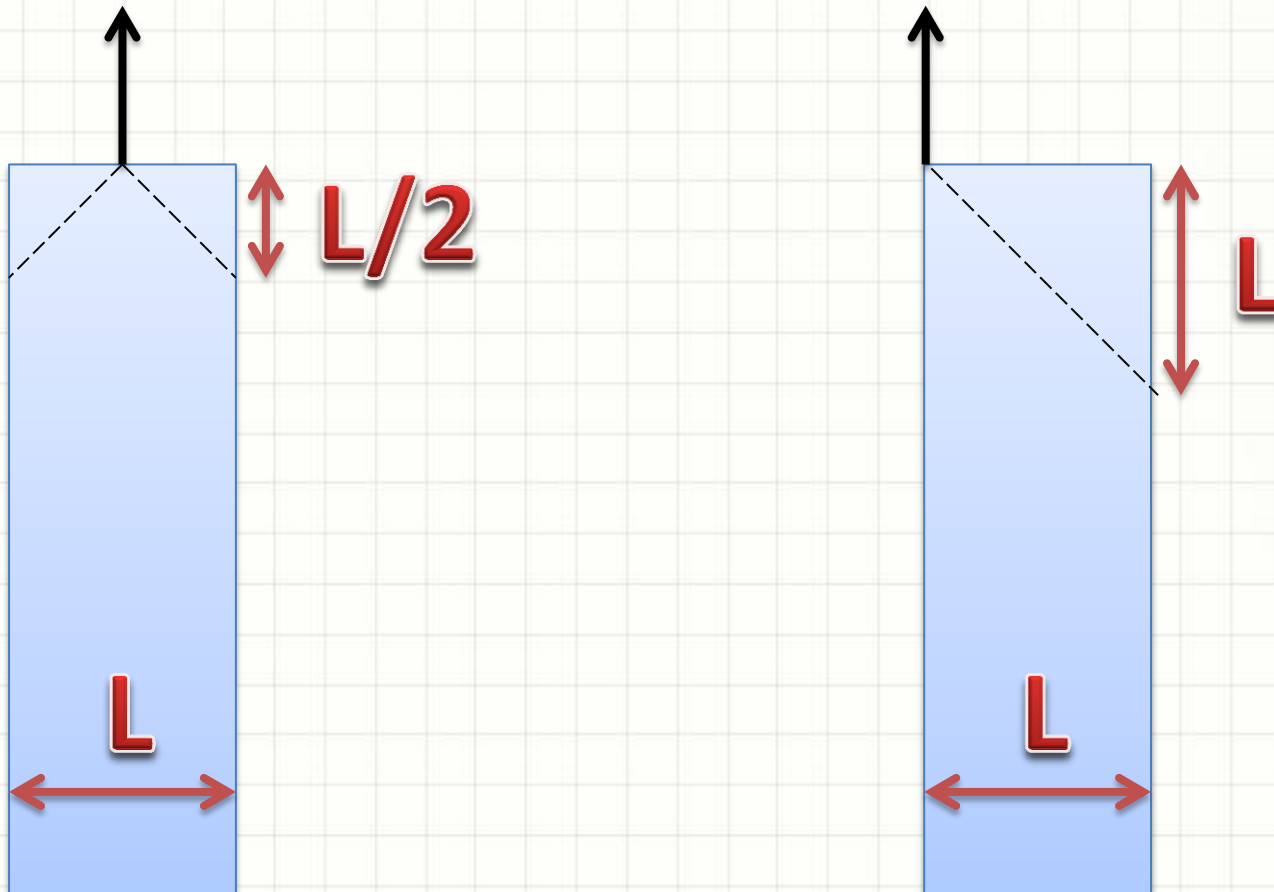
- Quanto longe da aplicação deve estar a medida?



L por quê?

Princípio de Saint-Venant

- O espraçamento é em 45°
- Mas não há pressuposição de posição!

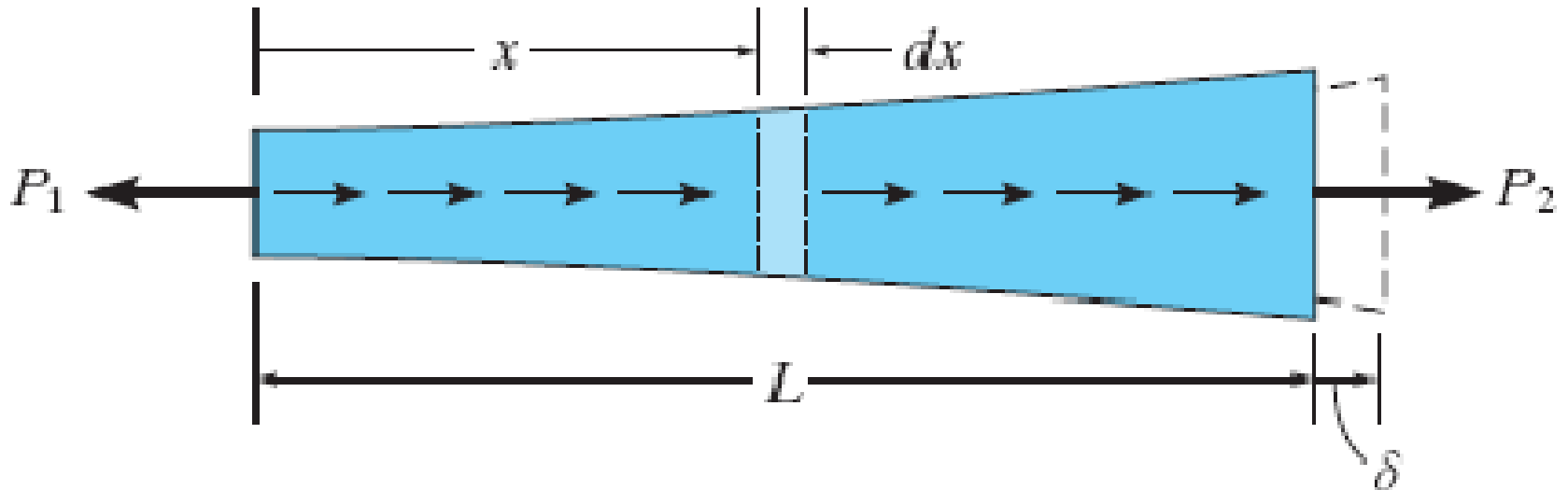




DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DE CORPO EM CARGA AXIAL

Deformação por Carga Axial

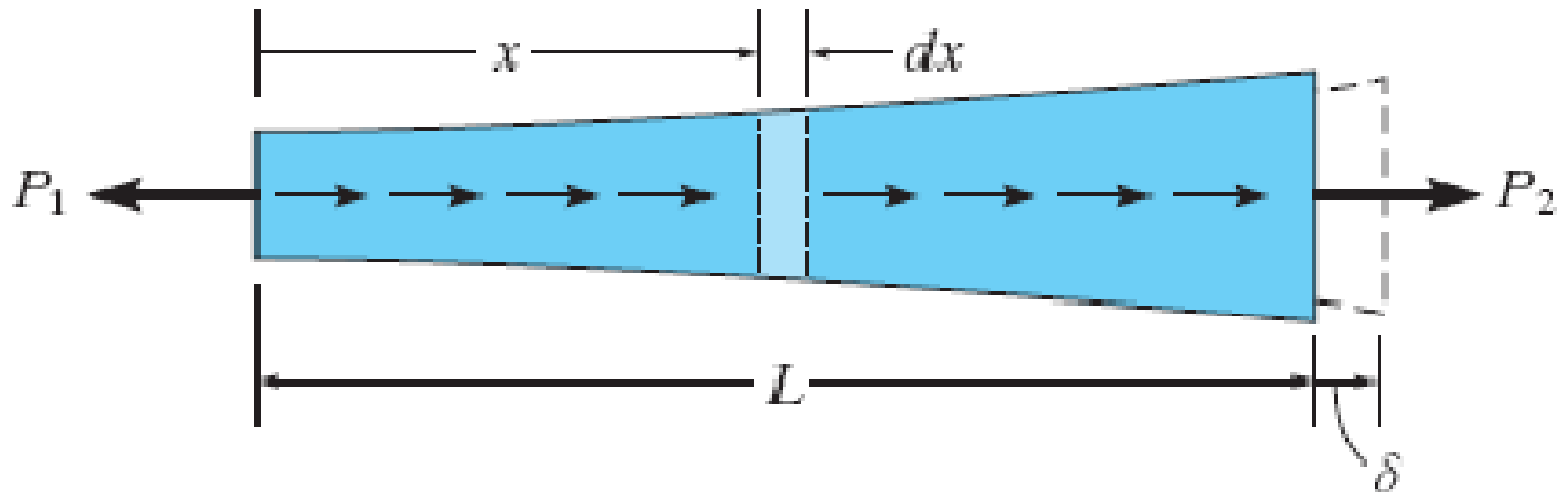
- Consideremos a viga genérica sob carga axial



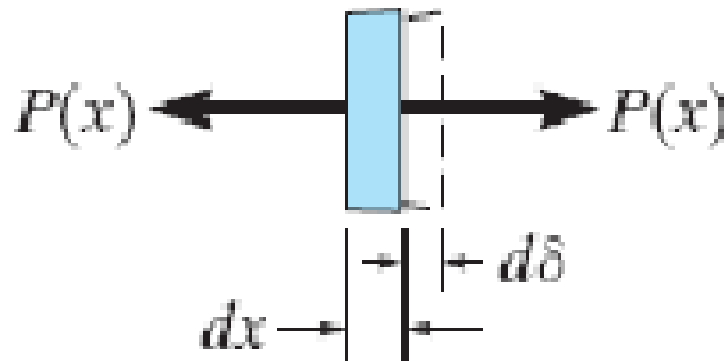
- Carga varia ao longo de $x \rightarrow P(x)$
- Área varia ao longo de $x \rightarrow A(x)$
- Considerar tensão uniforme (Saint-Venant)

Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial



- Vamos calcular a deformação no elemento dx



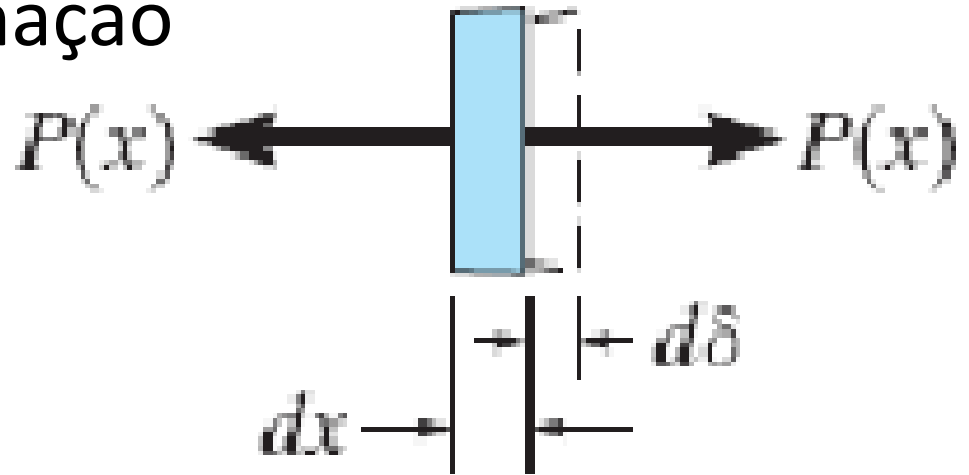
Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação

- $\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$

- $\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$

- $\sigma = E \cdot \epsilon$

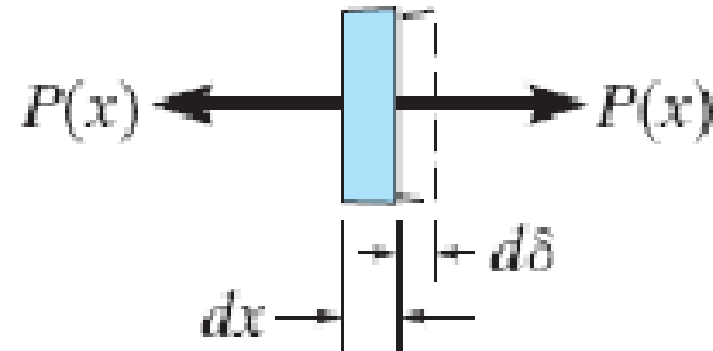
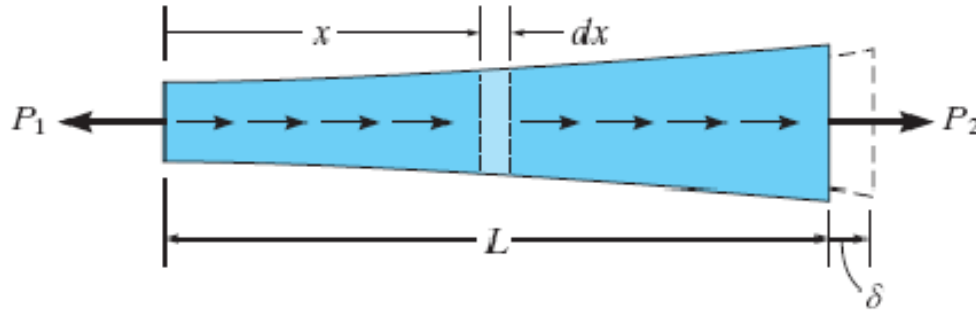


$$\frac{P(x)}{A(x)} = E \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação



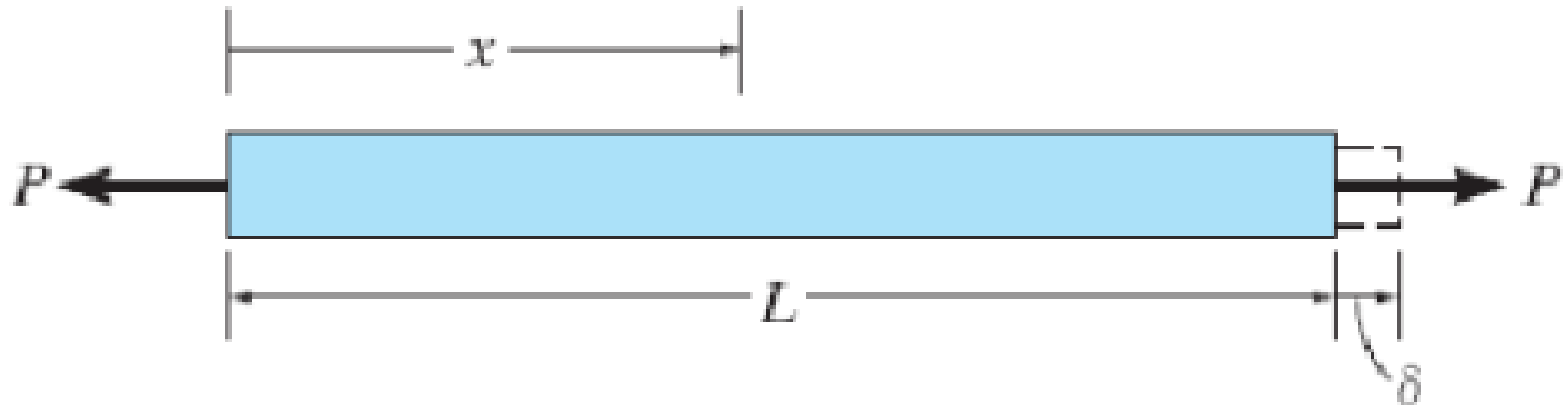
$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

Deformação
Total na Barra?

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

Deformação por Carga Axial

- Deform. em Viga de Seção/Carga Constante



$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot A(x)} = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A}$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

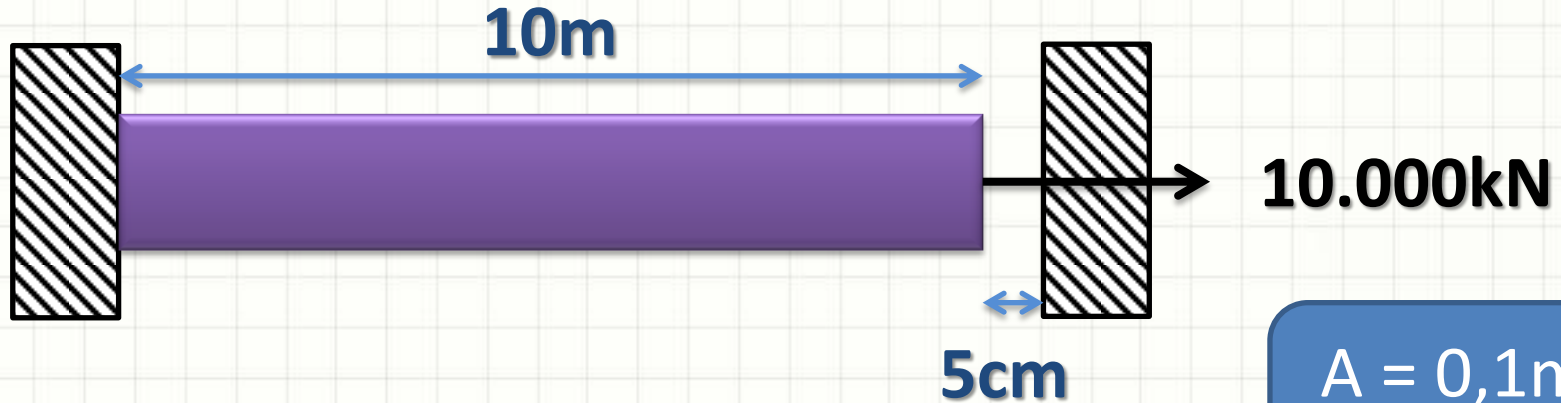
Deformação por Carga Axial

- Convenção de Sinais



- Trações \rightarrow Alongamentos $\rightarrow +$
- Compressões \rightarrow Contrações $\rightarrow -$

Exemplo – O vão é suficiente?



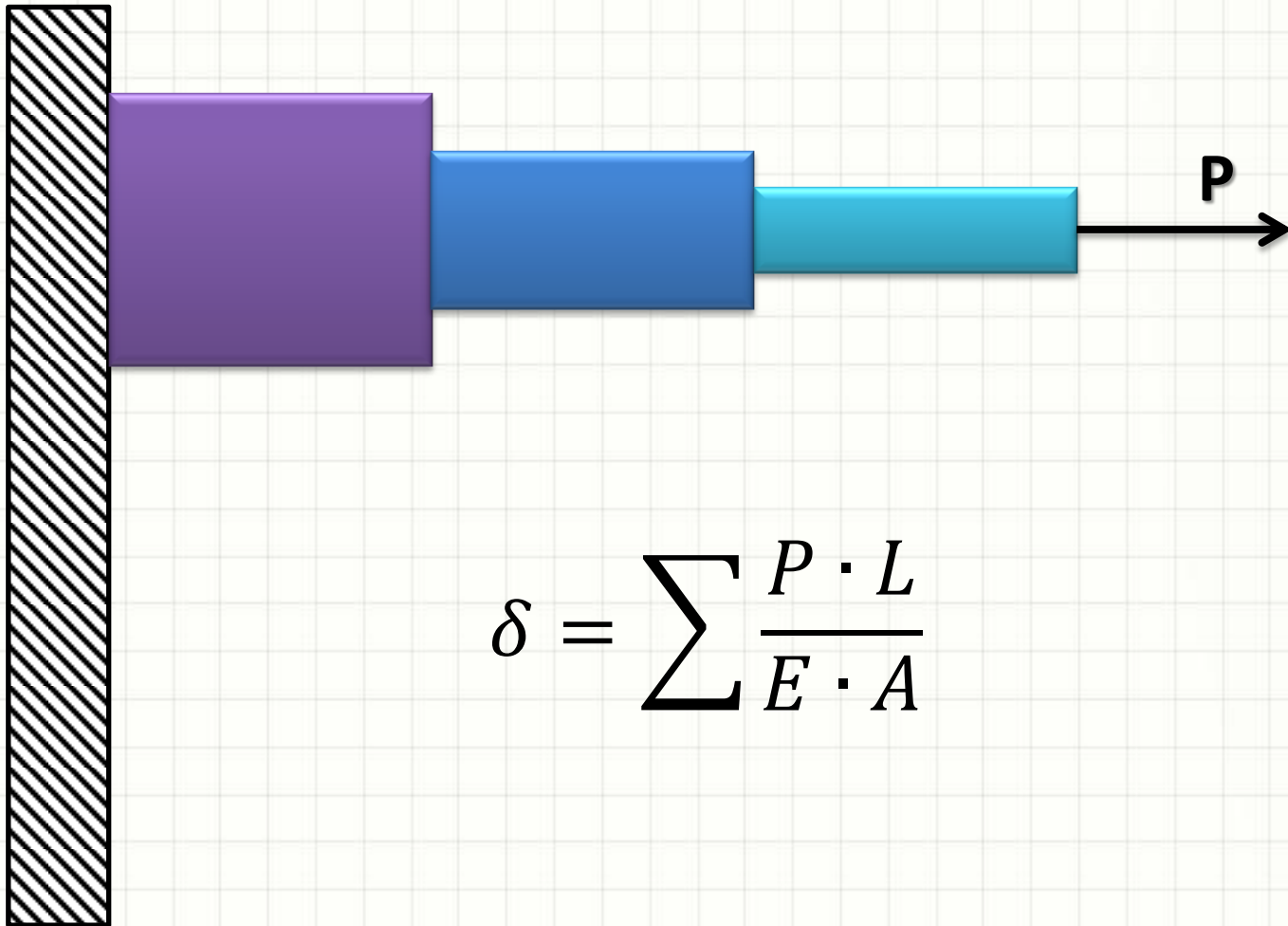
- Se o espaço fosse suficiente...

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{10^7 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-1}} = \frac{10^8}{5 \cdot 10^9}$$

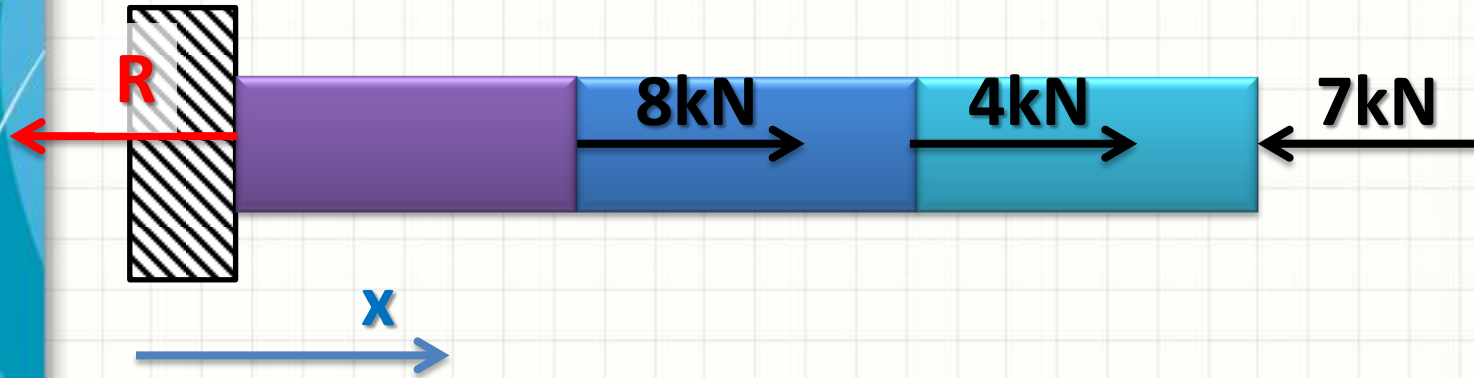
$$\delta = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Deformação por Carga Axial

- Barras compostas de várias seções constantes



Deformação por Carga Axial



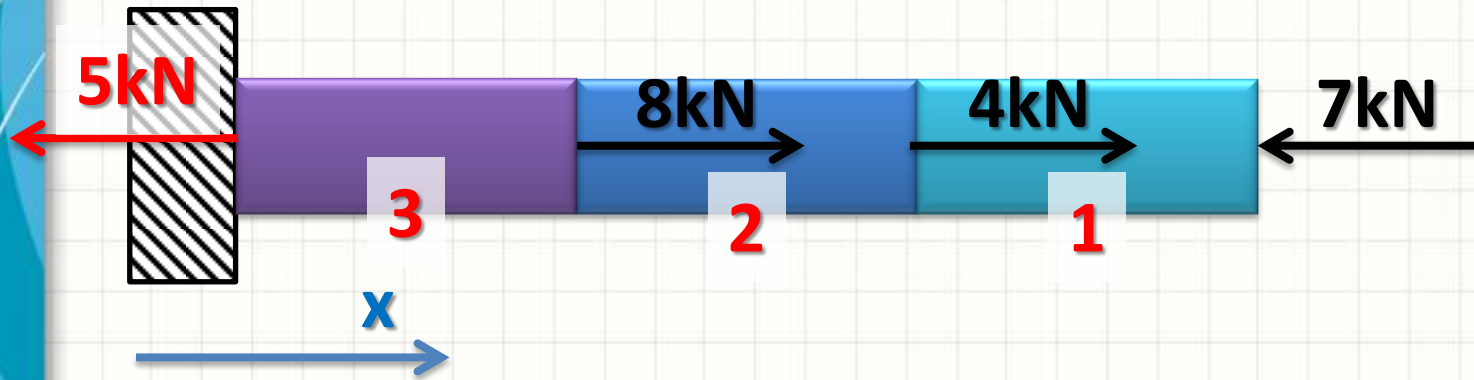
- A reação de apoio é...

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R + 8 + 4 - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{R = 5\text{kN}}$$

Deformação por Carga Axial

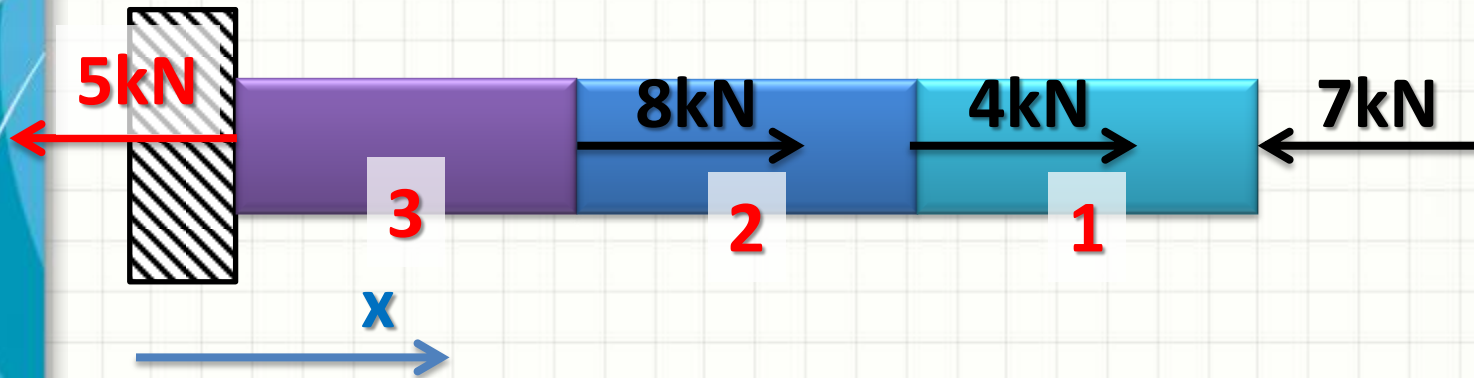


- O alongamento é...

$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

Deformação por Carga Axial



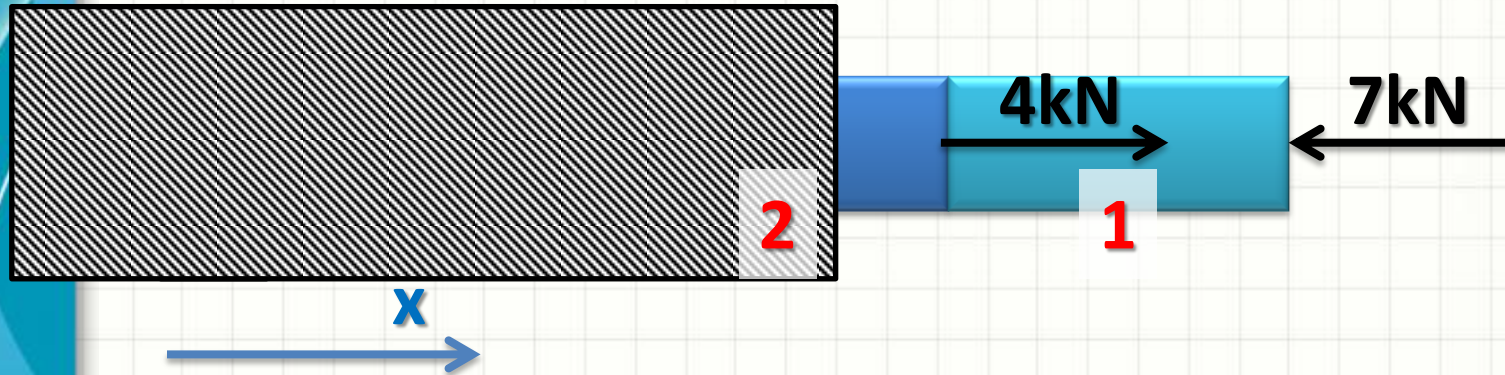
- Mas quanto valem P_1 , P_2 e P_3 ?

Deformação por Carga Axial



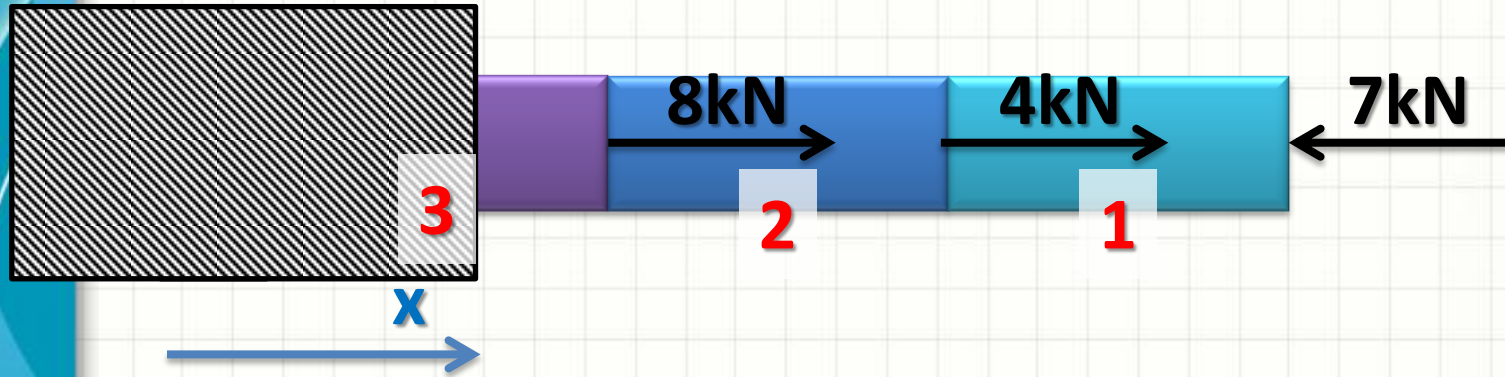
- Mas quanto valem P_1 , P_2 e P_3 ?
- Qual a única força atuando em 1?
- $P_1 = -7\text{kN}$

Deformação por Carga Axial



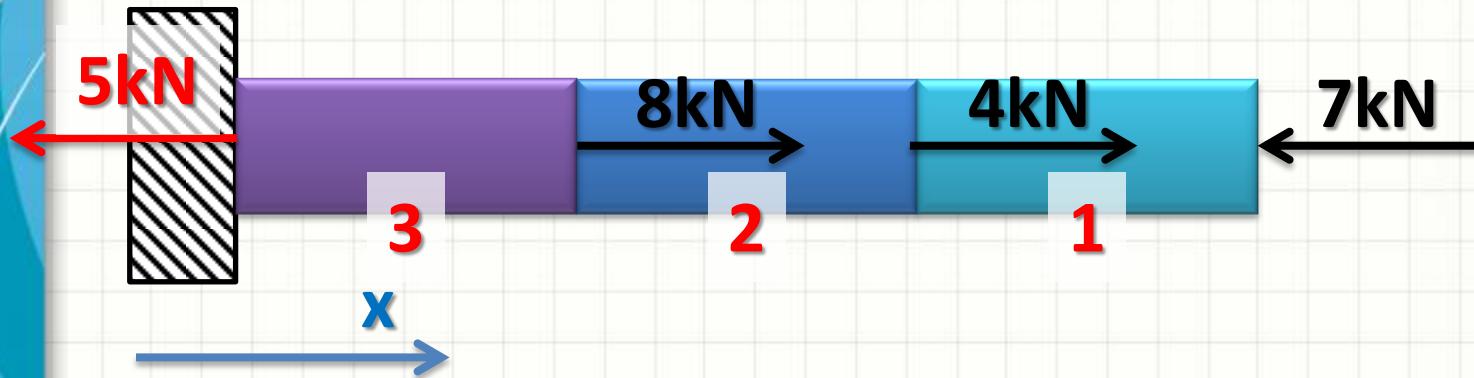
- Mas quanto valem P_1 , P_2 e P_3 ?
- Quais são as forças atuando em 2?
- $P_2 = -7\text{kN} + 4\text{kN} = -3\text{kN}$

Deformação por Carga Axial



- Mas quanto valem P_1 , P_2 e P_3 ?
- Quais são as forças atuando em 3?
- $P_3 = -7\text{kN} + 4\text{kN} + 8\text{kN} = 5\text{kN}$

Deformação por Carga Axial



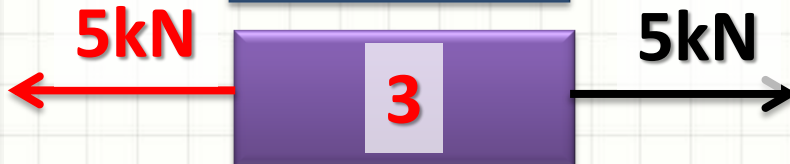
$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$



$$P_1 = -7 \text{ kN}$$

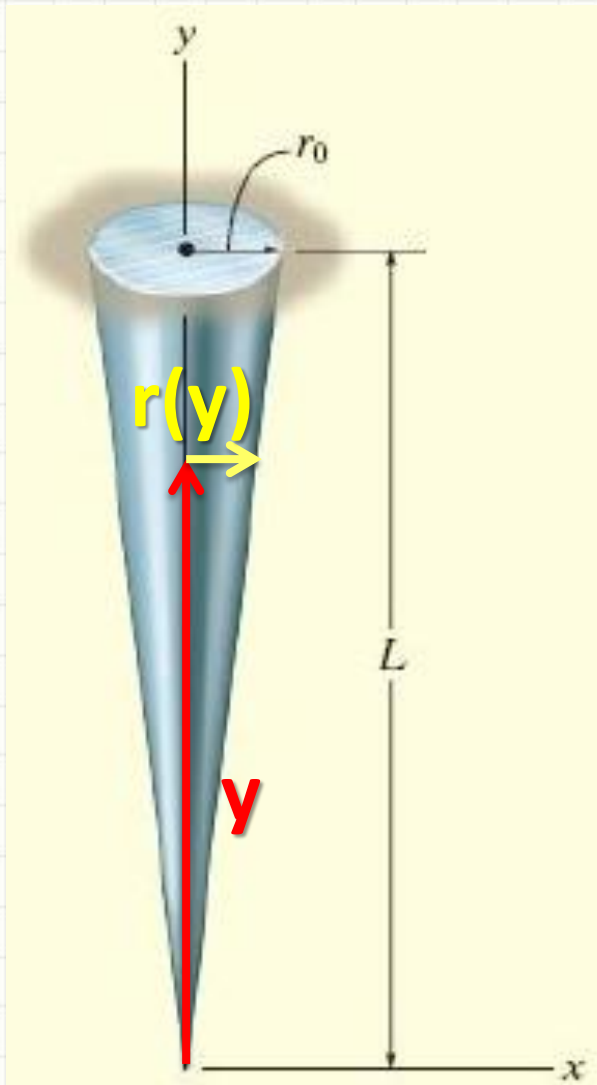


$$P_2 = -3 \text{ kN}$$



$$P_3 = 5 \text{ kN}$$

Exemplo – Def. por Carga Axial

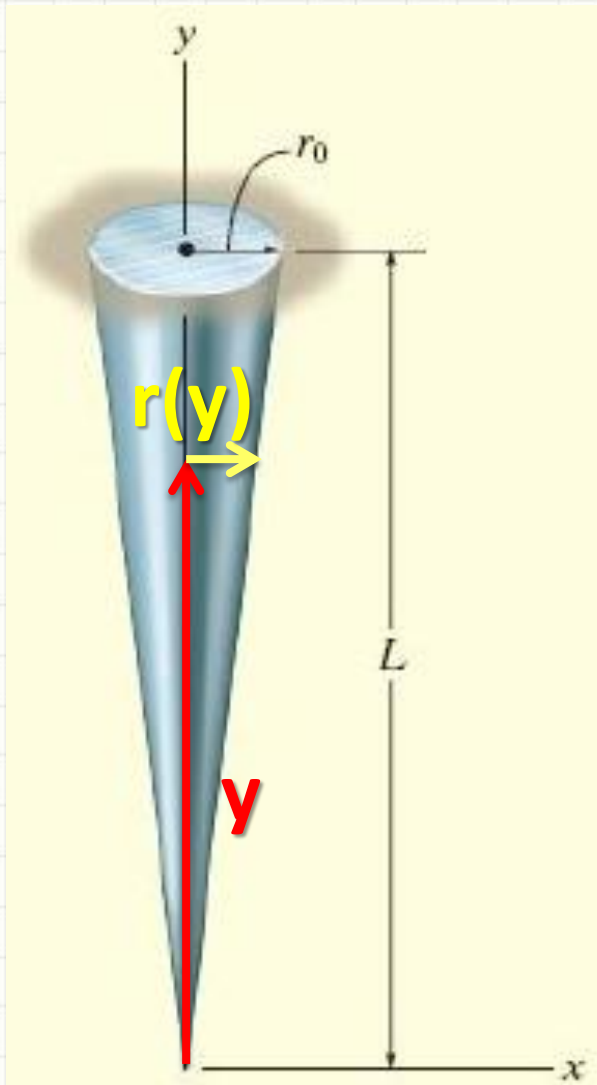


- Peso específico: γ
- Mód. Elasticidade: E
- Along. pelo peso próprio?

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y) \cdot dy}{E \cdot A(y)}$$

$$r(y) = ?$$

Exemplo – Def. por Carga Axial



- Peso específico: γ
- Mód. Elasticidade: E
- Along. pelo peso próprio?

$$\frac{r(y)}{y} = \frac{r_0}{L}$$

$$r(y) = \frac{r_0 \cdot y}{L}$$

Exemplo – Def. por Carga Axial

- $F_{\text{peso}} = W(y) = P(y) = V \cdot \gamma$

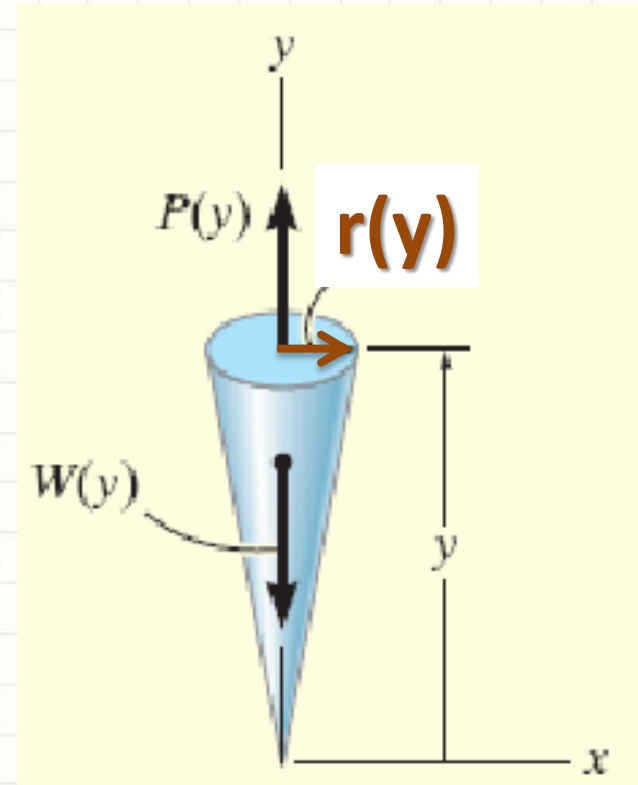
$$P(y) = \frac{y}{3} \cdot \pi \cdot r(y)^2 \cdot \gamma$$

- Mas...

$$r(y) = \frac{r_0 \cdot y}{L}$$

- Logo...

$$P(y) = \frac{y^3 \cdot \pi \cdot r_0^2}{3 \cdot L^2} \cdot \gamma$$



$$\delta = \int_0^L \frac{P(y) \cdot dy}{E \cdot A(y)}$$

Exemplo – Def. por Carga Axial

- Além disso...

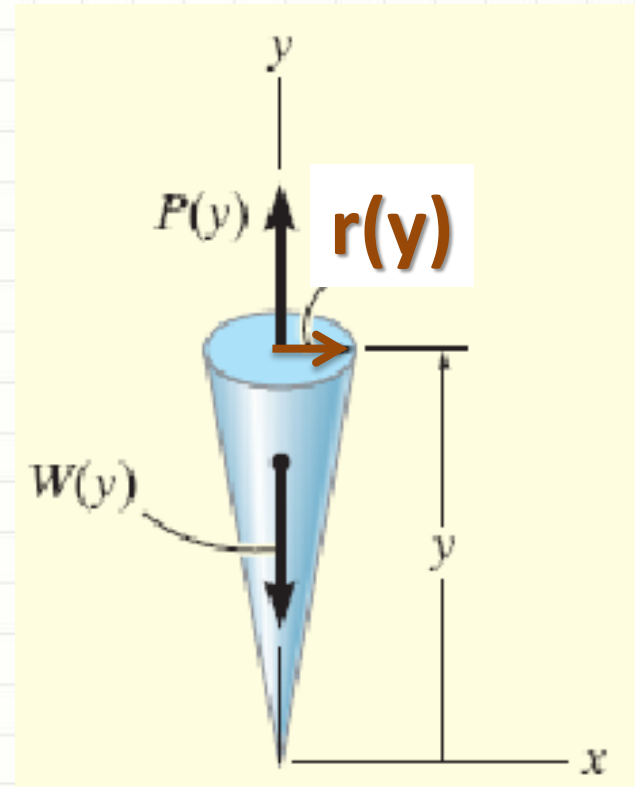
$$A(y) = \pi \cdot r(y)^2$$

- Mas...

$$r(y) = \frac{r_0 \cdot y}{L}$$

- Logo...

$$A(y) = \frac{\pi \cdot r_0^2 \cdot y^2}{L^2}$$



$$\delta = \int_0^L \frac{P(y) \cdot dy}{E \cdot A(y)}$$

Exemplo – Def. por Carga Axial

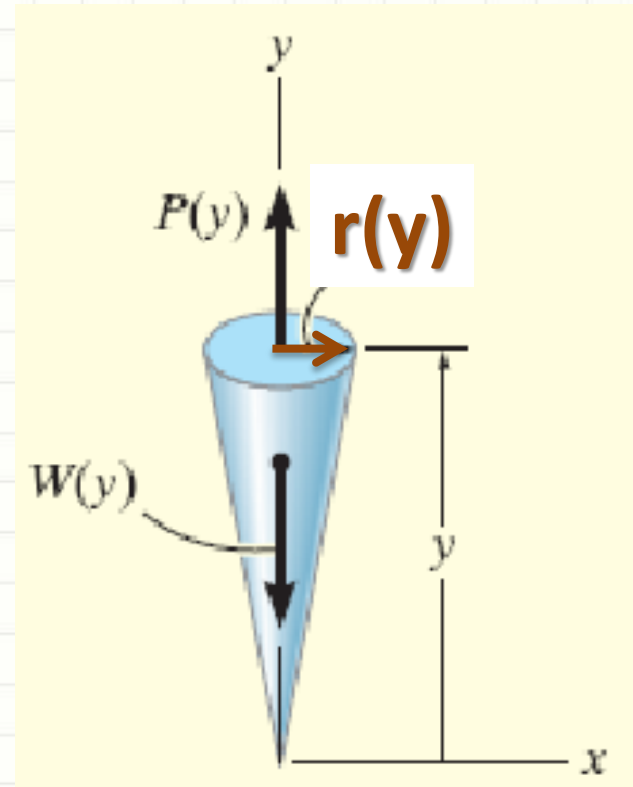
- Juntando...

$$P(y) = \frac{y^3 \cdot \pi \cdot r_0^2}{3 \cdot L^2} \cdot \gamma$$

$$A(y) = \frac{\pi \cdot r_0^2 \cdot y^2}{L^2}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y) \cdot dy}{E \cdot A(y)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{y^3 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot \gamma}{3 \cdot L^2 \cdot E} \cdot \frac{L^2 \cdot dy}{\pi \cdot r_0^2 \cdot y^2}$$



Exemplo – Def. por Carga Axial

- Juntando...

$$\delta = \int_0^L \frac{y^3 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot \gamma}{3 \cdot L^2 \cdot E} \cdot \frac{L^2 \cdot dy}{\pi \cdot r_0^2 \cdot y^2}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{y \cdot \gamma}{3 \cdot E} \cdot dy$$

$$\delta = \frac{\gamma}{3 \cdot E} \cdot \int_0^L y \cdot dy$$

$$\delta = \frac{\gamma \cdot L^2}{6 \cdot E}$$

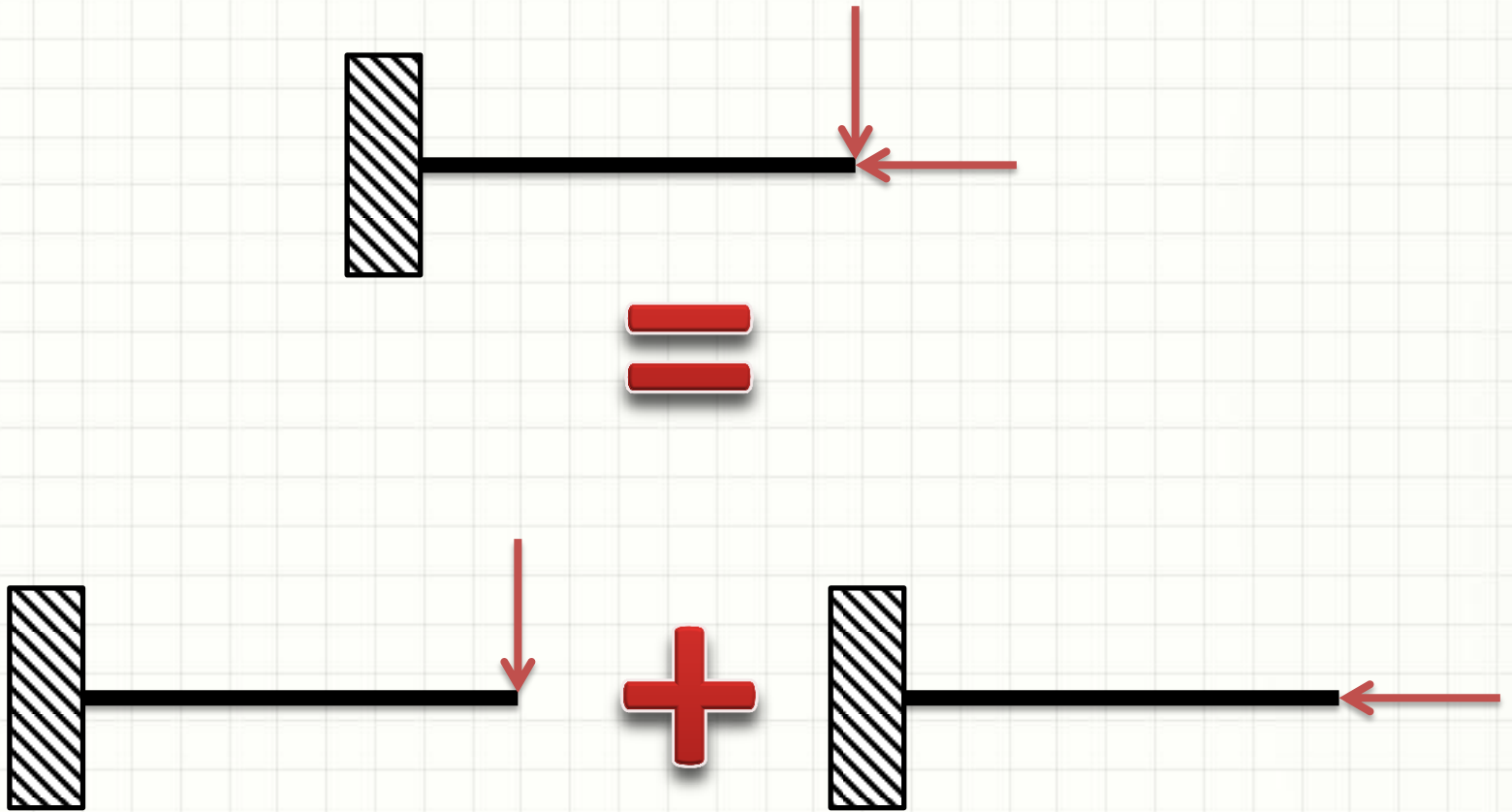


SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

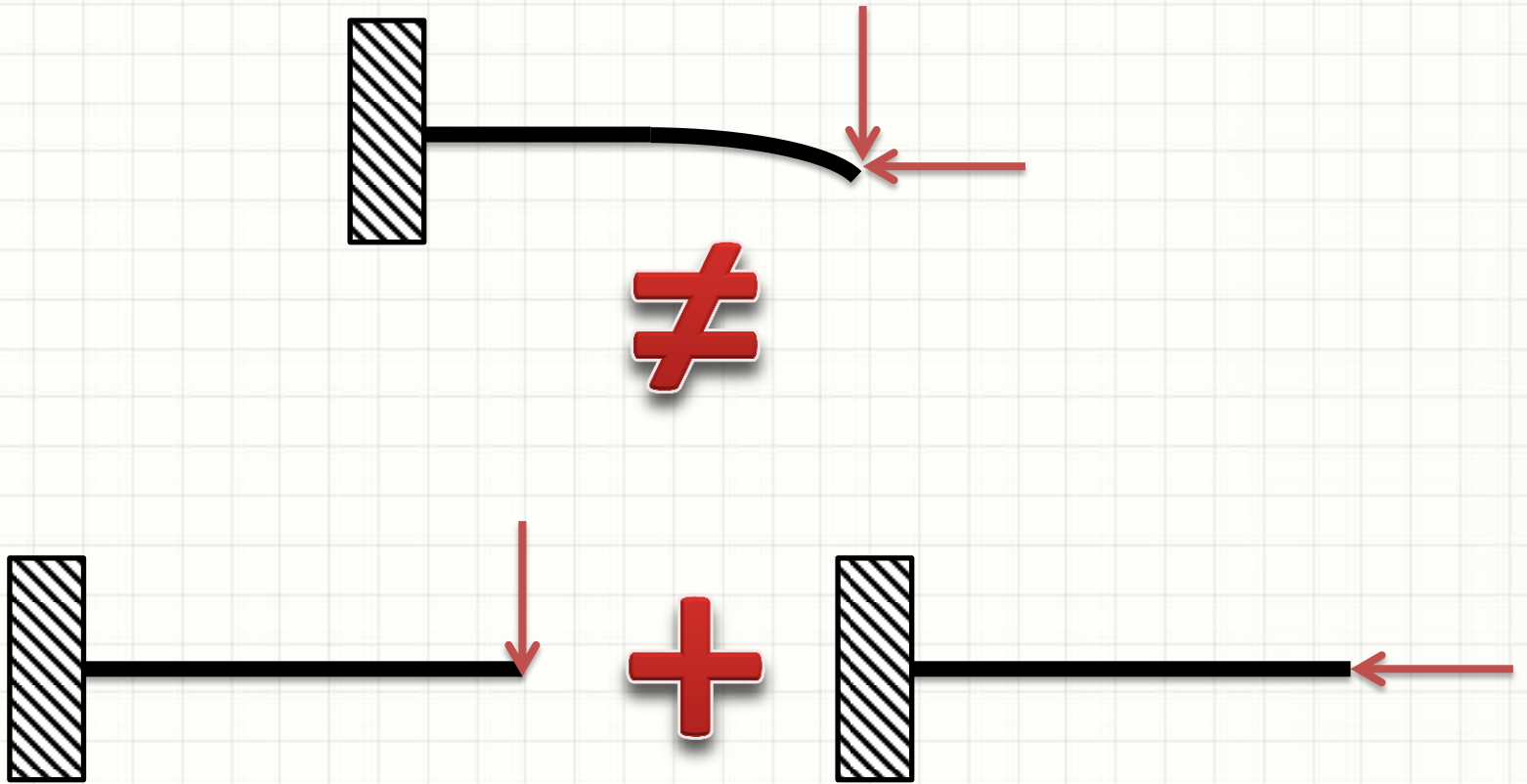
Superposição de Efeitos

- Princípio da Superposição de Efeitos
 - Subdividir o carregamento em componentes
 - Calcular os efeitos em separado
 - Somar os resultados
- Carga relacionada linearmente com σ ou δ
 - Ex.: $\sigma = P/A$ ou $\delta = PL/EA$
- Carga não deve provocar grande mudança na geometria do elemento

Superposição de Efeitos



Superposição de Efeitos



Superposição de Efeitos

- Neste curso...
 - Pouca deformação
 - Cargas proporcionais a σ ou δ
- A menos que especificado diferentemente!
- Em geral, valerá a superposição!



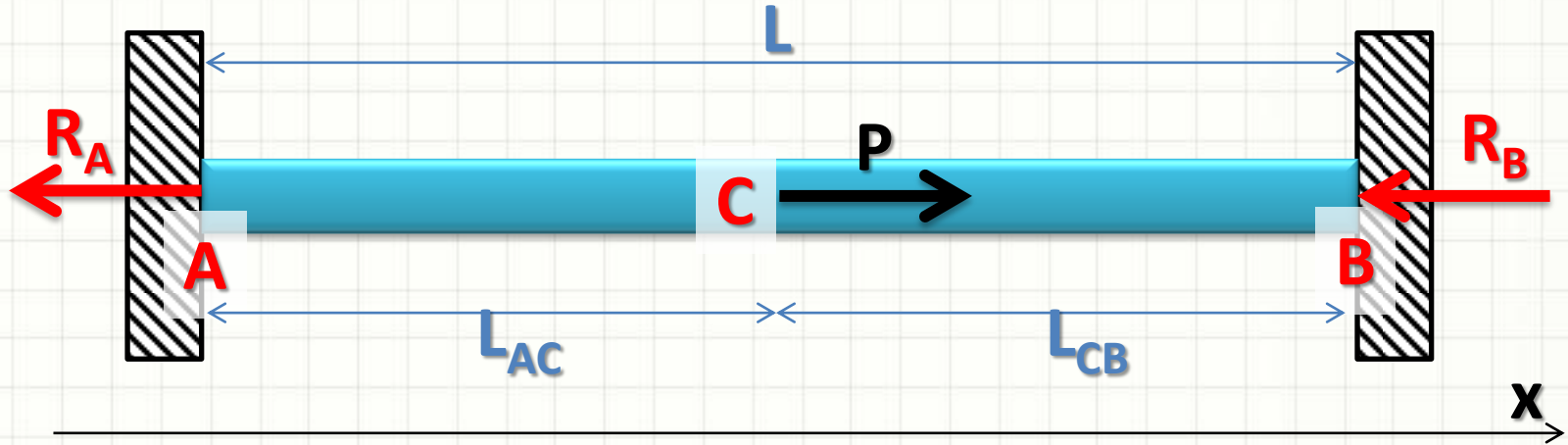
PAUSA PARA O CAFÉ!



**ELEMENTOS ESTATICAMENTE
INDETERMINADOS SOB
CARGA AXIAL**

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



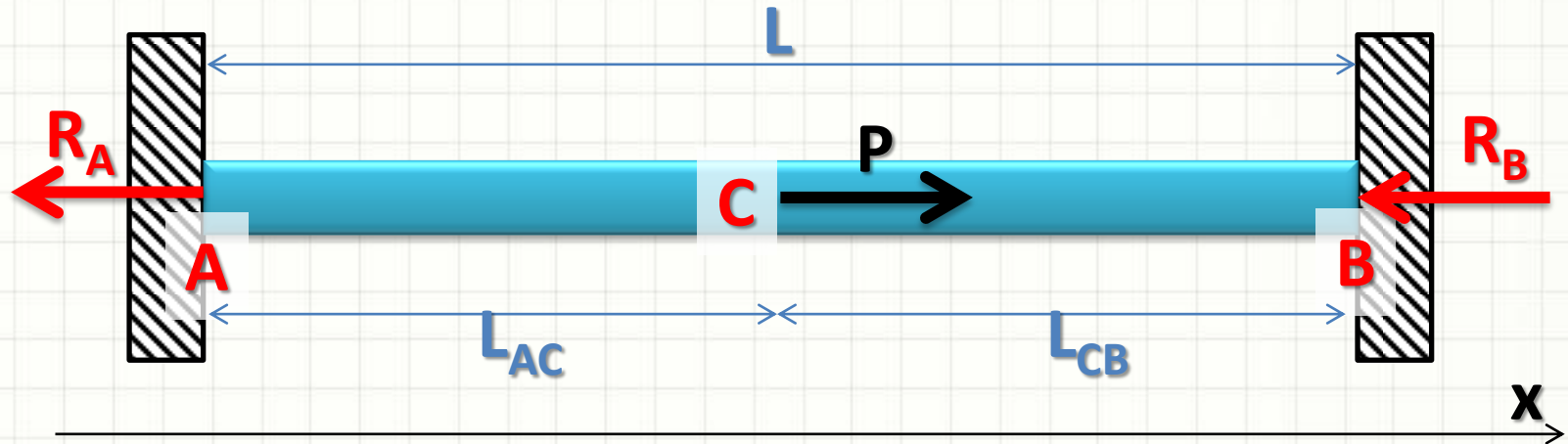
- Reações R_A e R_B ... ?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



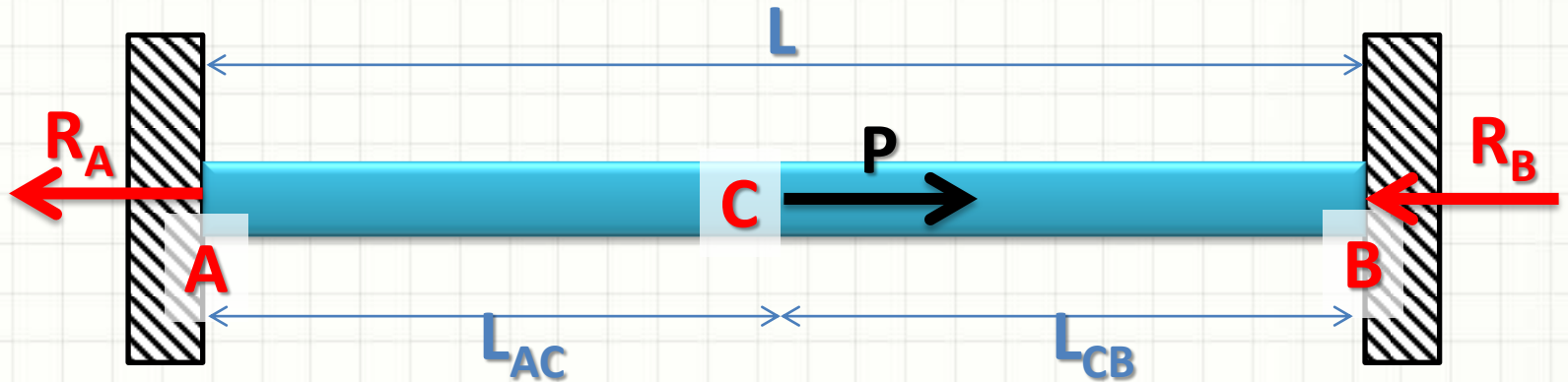
- Reações R

**Viga
Estaticamente
Indeterminada**

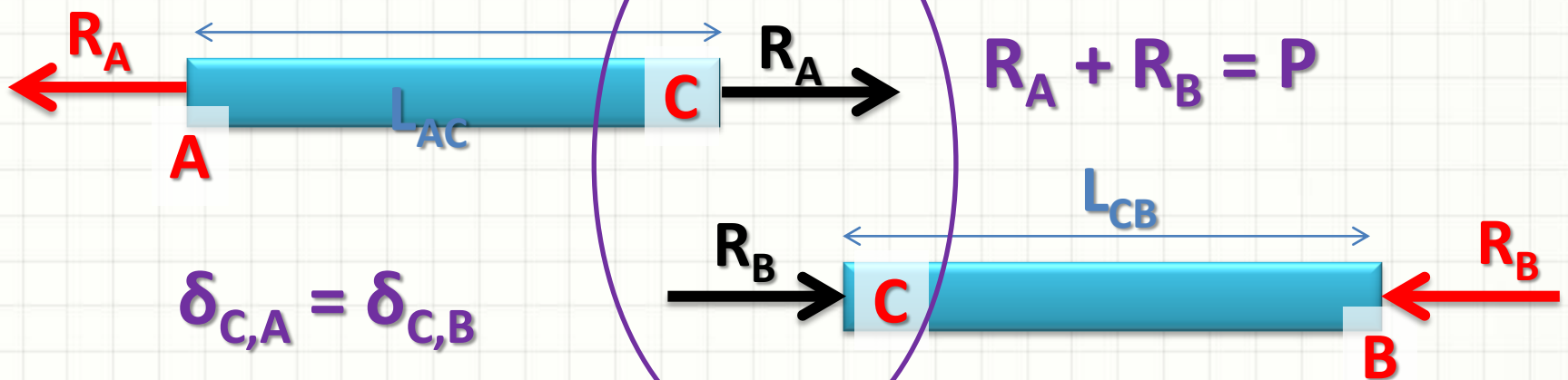
$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo

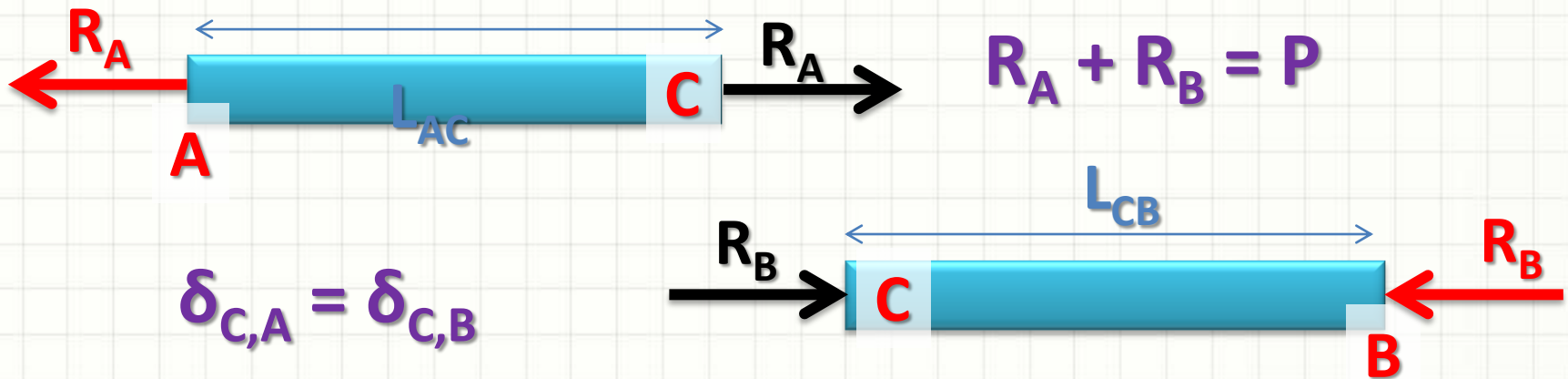


- Podemos enxergar essa viga de outro modo...



Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...

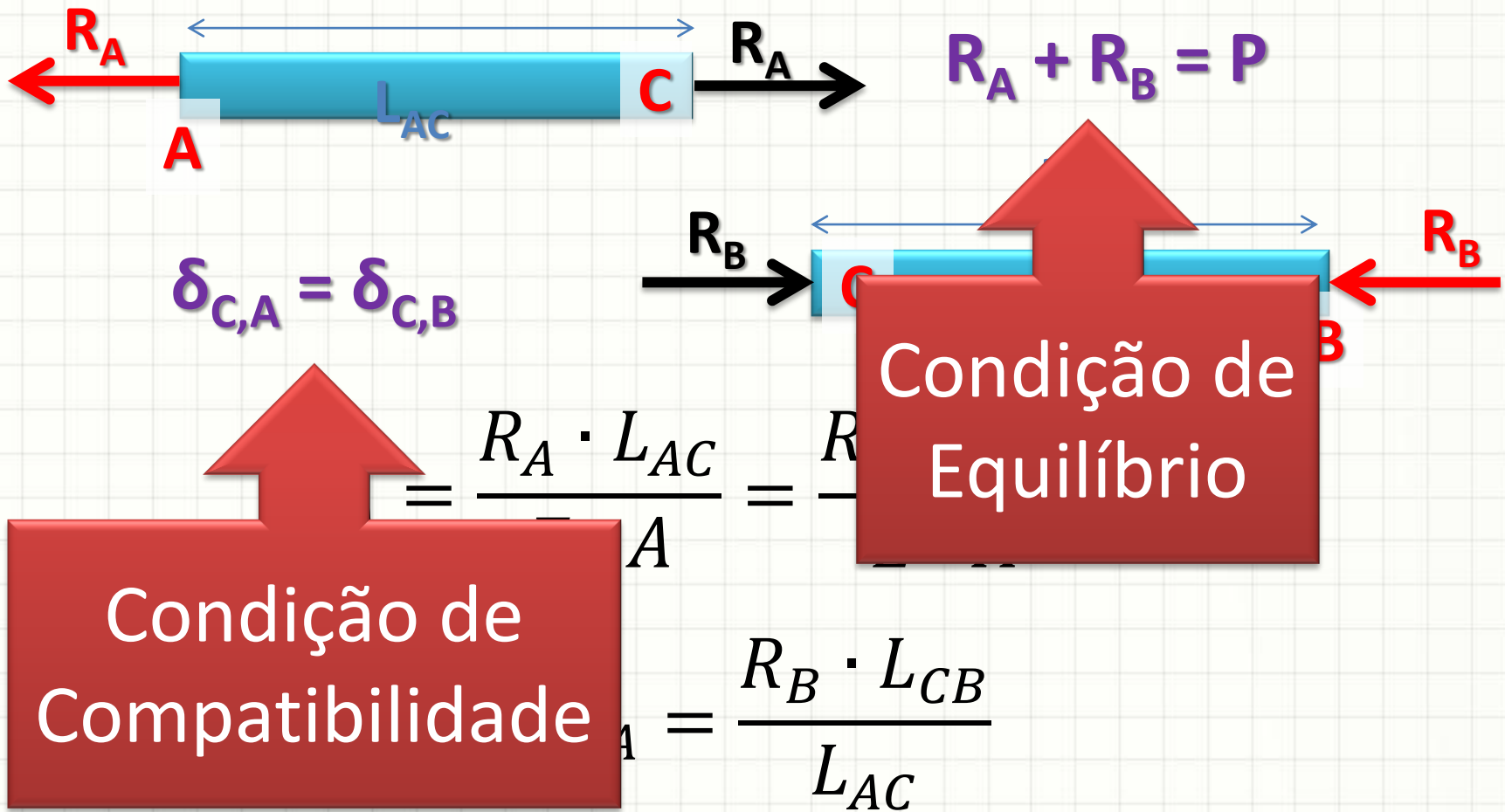


$$\delta_{C,A} = \frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = \delta_{C,B}$$

$$R_A = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

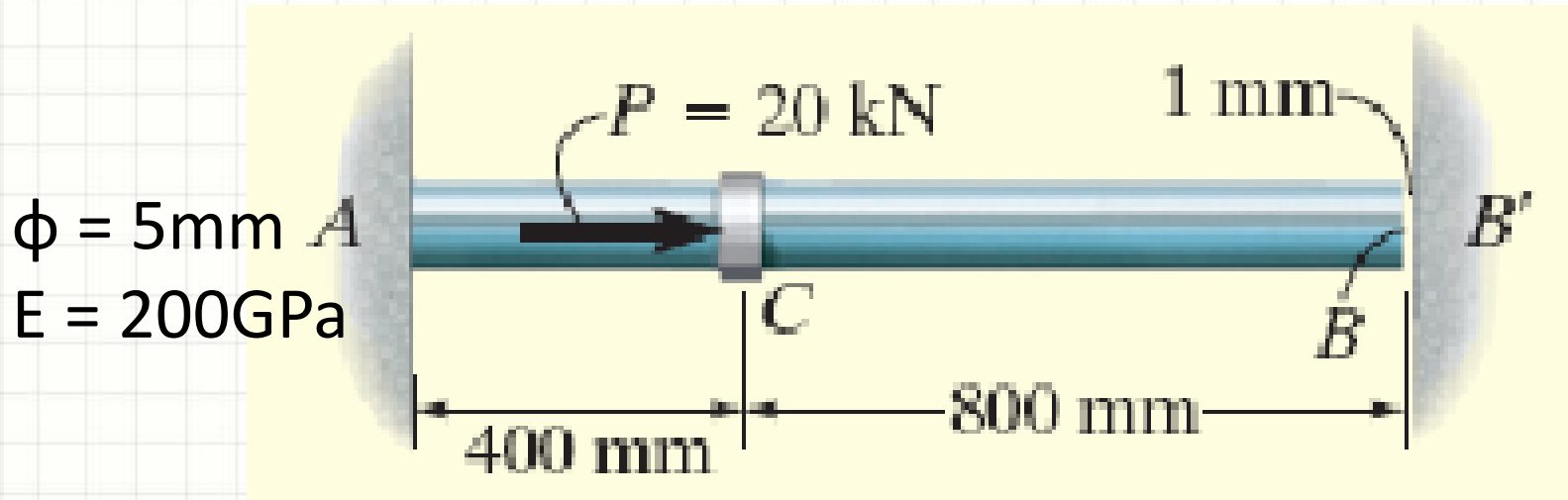
Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...



Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

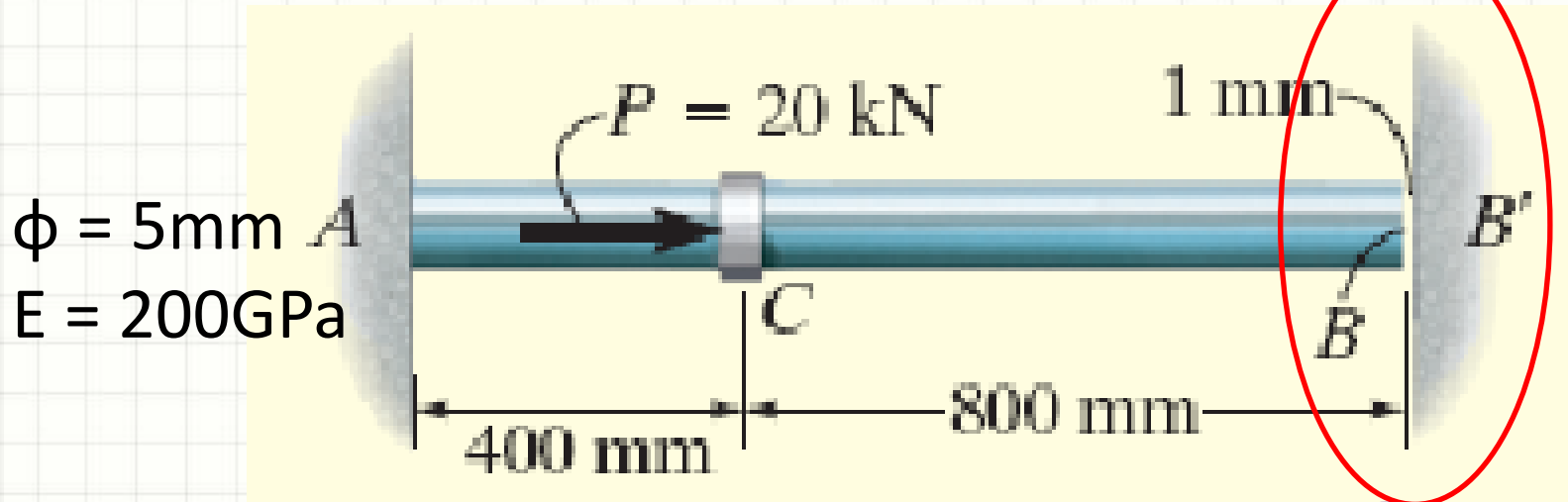


- Qual o alongamento se fosse livre em B?

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-6} \cdot \pi} = 2 \cdot 10^{-3}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo



- Reações R_A e R_B ... ?

$$\delta_{C,A} - \delta_{C,B} = 0,001$$

Encurtamento!

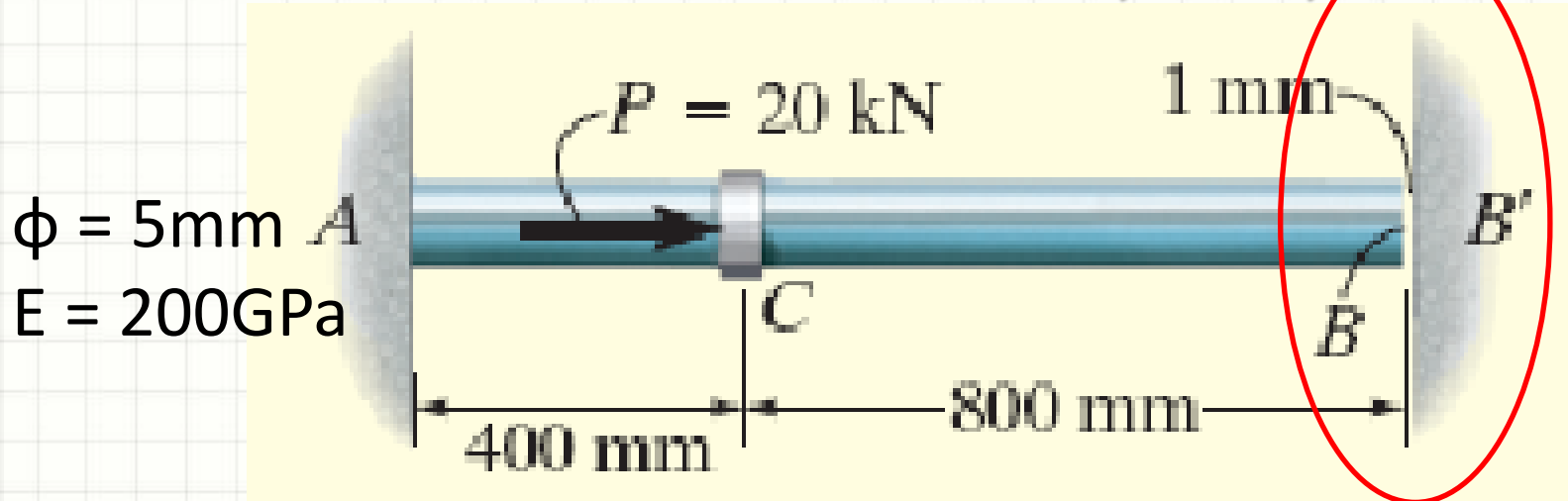
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$\delta_{C,A} - \delta_{C,B} = 0,001$$



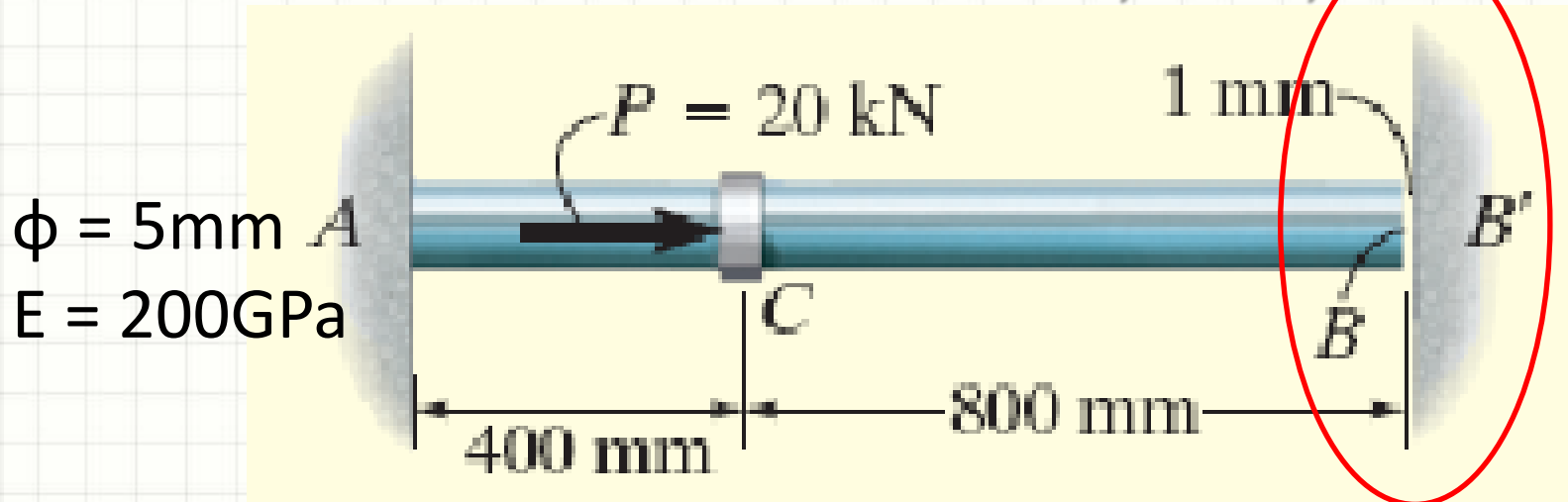
$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} - \frac{R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0,001$$

$$R_A = \frac{0,001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$\delta_{C,A} - \delta_{C,B} = 0,001$$



$$R_A = \frac{0,001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}} = \frac{0,001 \cdot E \cdot A + (P - R_A) \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

$$R_A = \frac{0,001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot (2,5 \cdot 10^{-3})^2 + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0,8}{0,4}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = \frac{0,001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 6,25 \cdot 10^{-6} + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0,8}{0,4}$$

$$R_A = \frac{3927 + (20000 - R_A) \cdot 0,8}{0,4}$$

$$R_A = 9817,5 + 40000 - 2 \cdot R_A$$

$$3 \cdot R_A = 49817,5$$

$$R_A = 16605,8N \cong 16,6kN$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = 16605,8N \cong 16,6kN$$

$$R_B = P - R_A$$

$$R_B = 20kN - 16,6kN$$

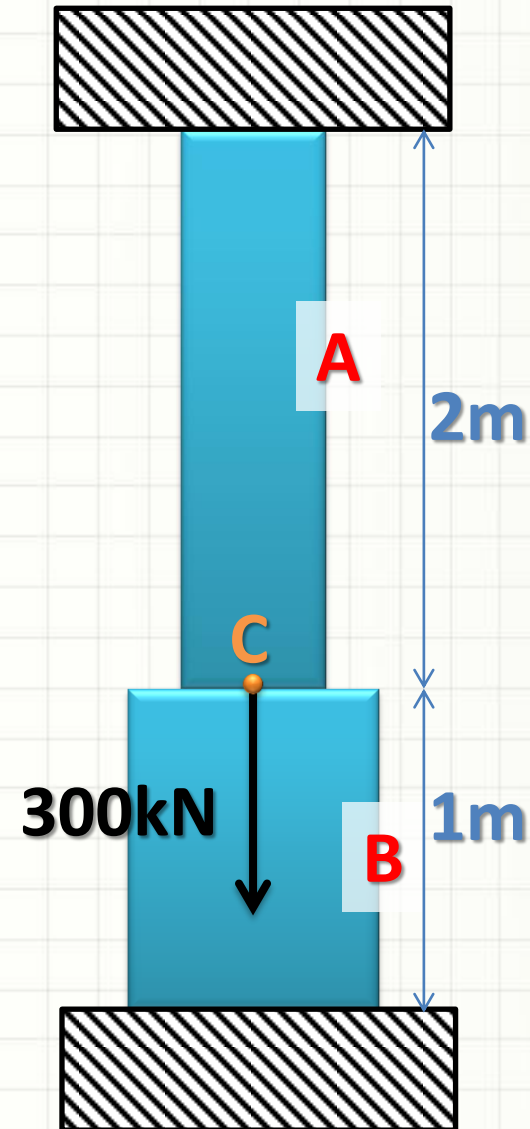
$$R_B = 3,4kN$$



EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- Calcule:
 - O deslocamento em C
 - As reações de apoio
- $\phi_A = 0,5\text{m}$ $\phi_B = 1\text{m}$
- $E_A = E_B = 50\text{GPa}$





PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Aço A-36: $E = 200\text{GPa}$
- Concreto de Alta Resistência: $E = 35\text{GPa}$
- Hibbeler (Bib. Virtual)
 - 5ª: Pág 98 a 114 7ª: Pág. 91 a 106
- Mínimos:
 - Exercícios 4.1, 4.5, 4.10, 4.29 (5ª 4.1, 4.10)
 - Exercícios 4.31, 4.33 (5ª 4.39, 4.44, 4.45)
- Extras:
 - Exercícios 4.2 a 4.4, 4.6, 4.7, 4.21, 4.30 (5ª 4.28, 4.30)
 - Exercícios: 4.34, 4.36, 4.37 (5ª 4.42, 4.53)



CONCLUSÕES

Resumo

- Existe relação entre carga e deslocamento
- Influenciam
 - Rigidez (E)
 - Área (A)
 - Comprimento (L)
- Podemos “decompor” problemas (superposição)
- Estaticamente Indeterminados?
 - Compatibilidade de deslocamentos
- **Exercitar**
 - Exercícios Hibbeler

Próxima Aula



- Únicas cargas axiais?
 - Temperatura
 - Concentração de tensão
 - Deformação Inelástica



PERGUNTAS?



**BOM DESCANSO
A TODOS!**