



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

TORÇÃO PARTE II

Prof. Dr. Daniel Caetano

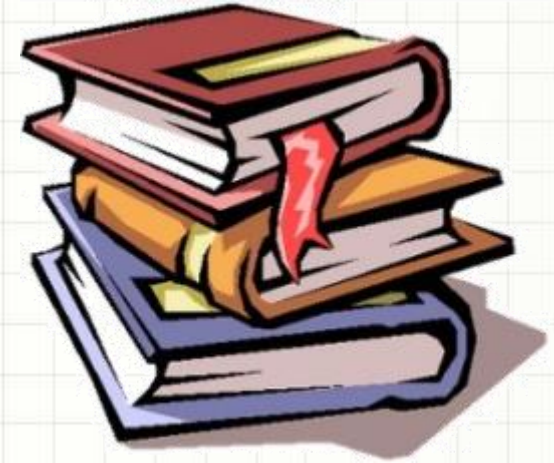
2013 - 1

Objetivos

- Calcular deformações (rotações) por torção
- Capacitar para o traçado de diagramas de momento torçor em barras



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

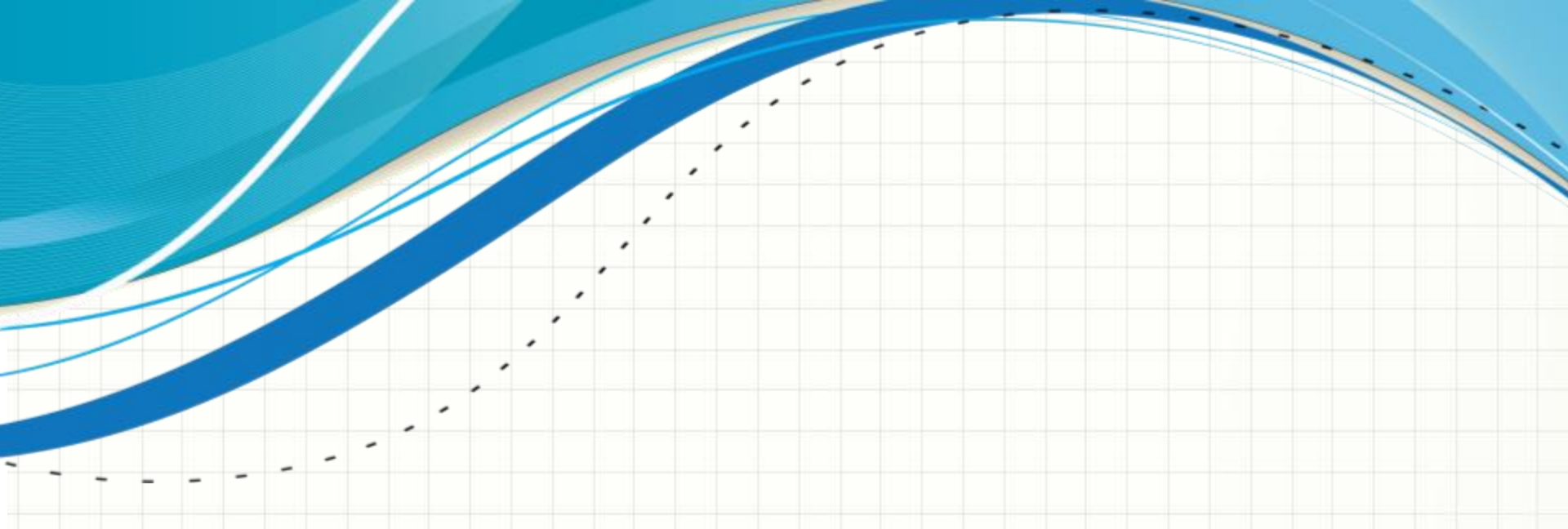
Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>

(Aula 6)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler) – Parte 1 / 2
Páginas 153 a 166.

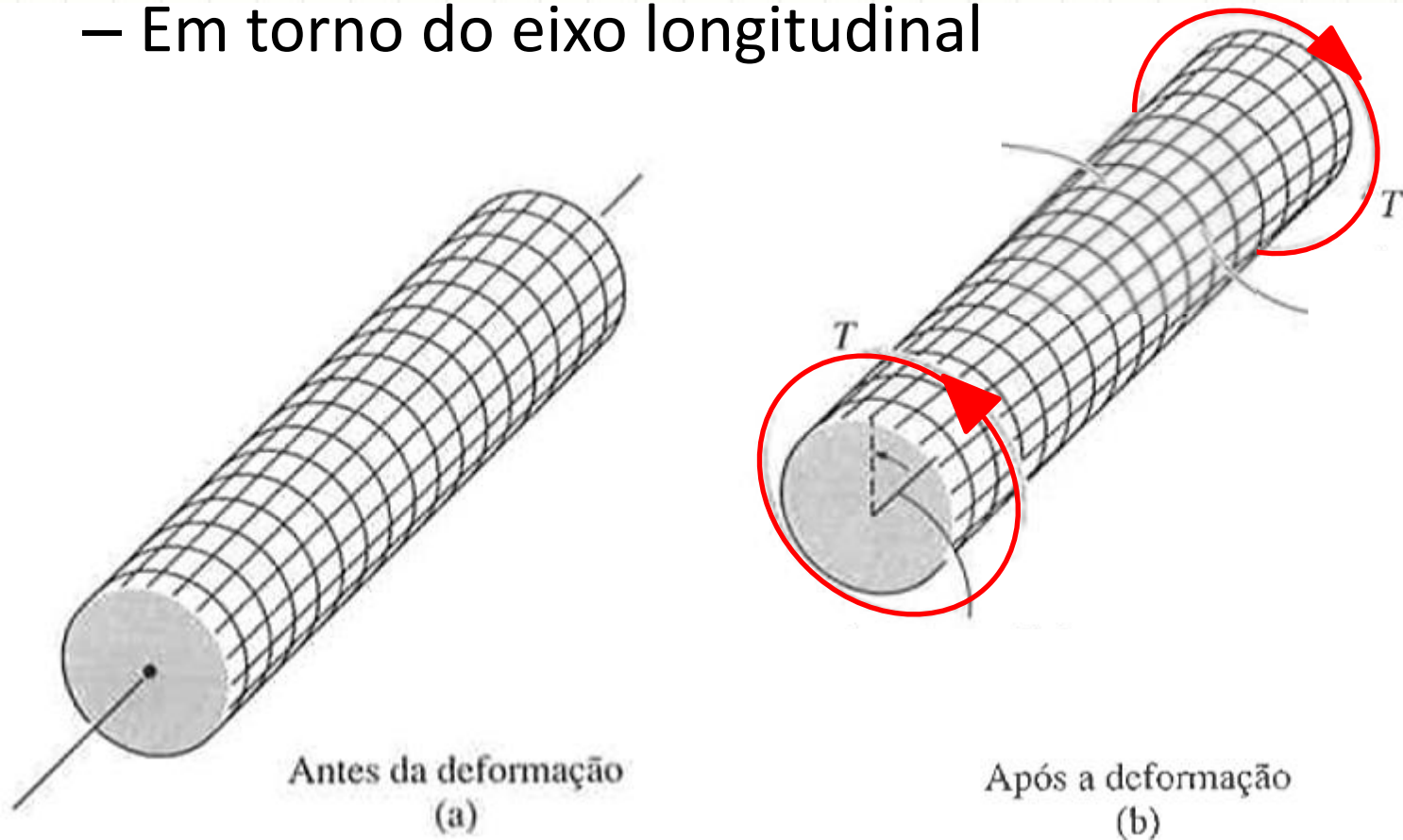


RELEMBRANDO:

CISALHAMENTO E A TORÇÃO

Deformação por Torção

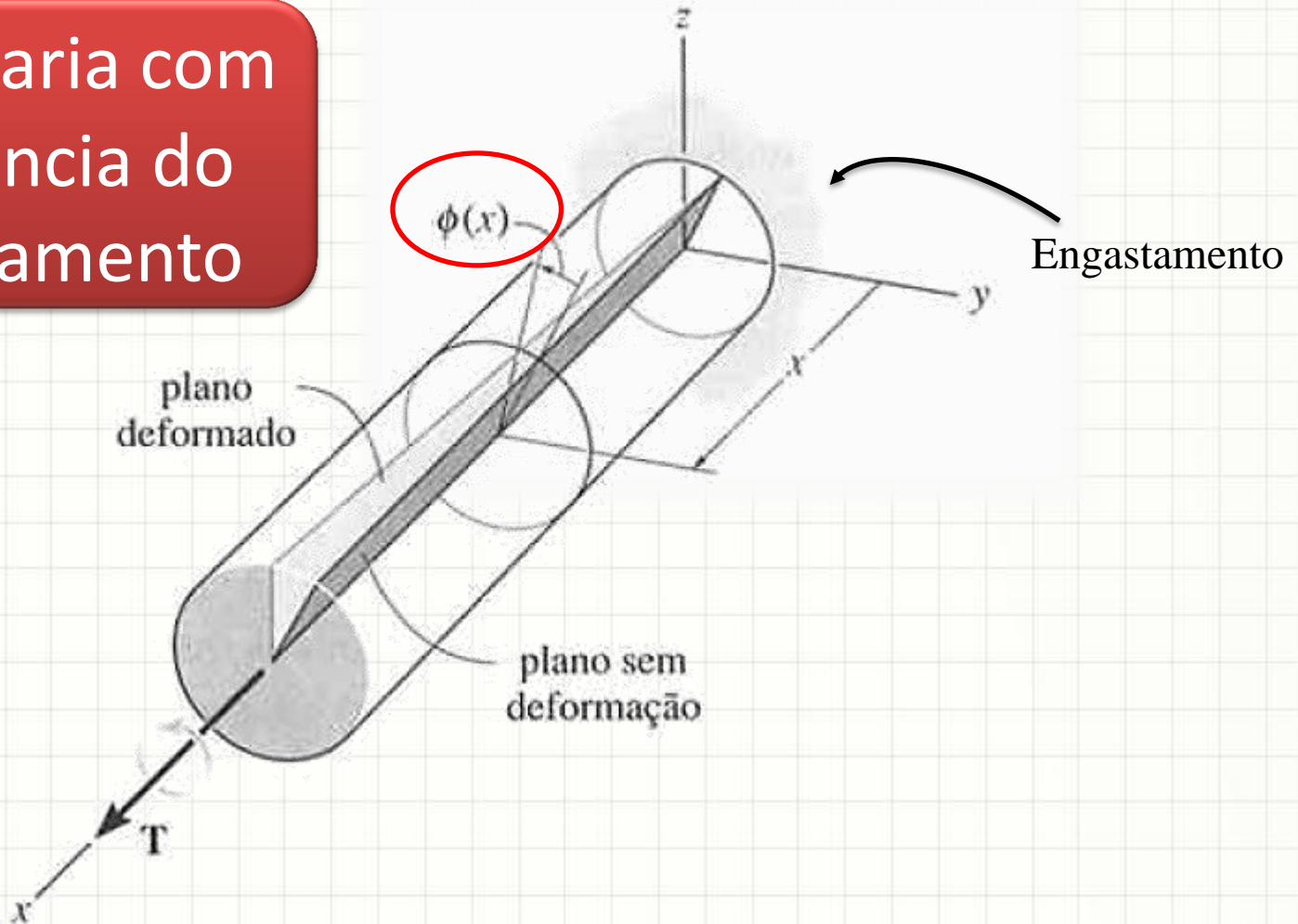
- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
 - Em torno do eixo longitudinal



Deformação por Torção

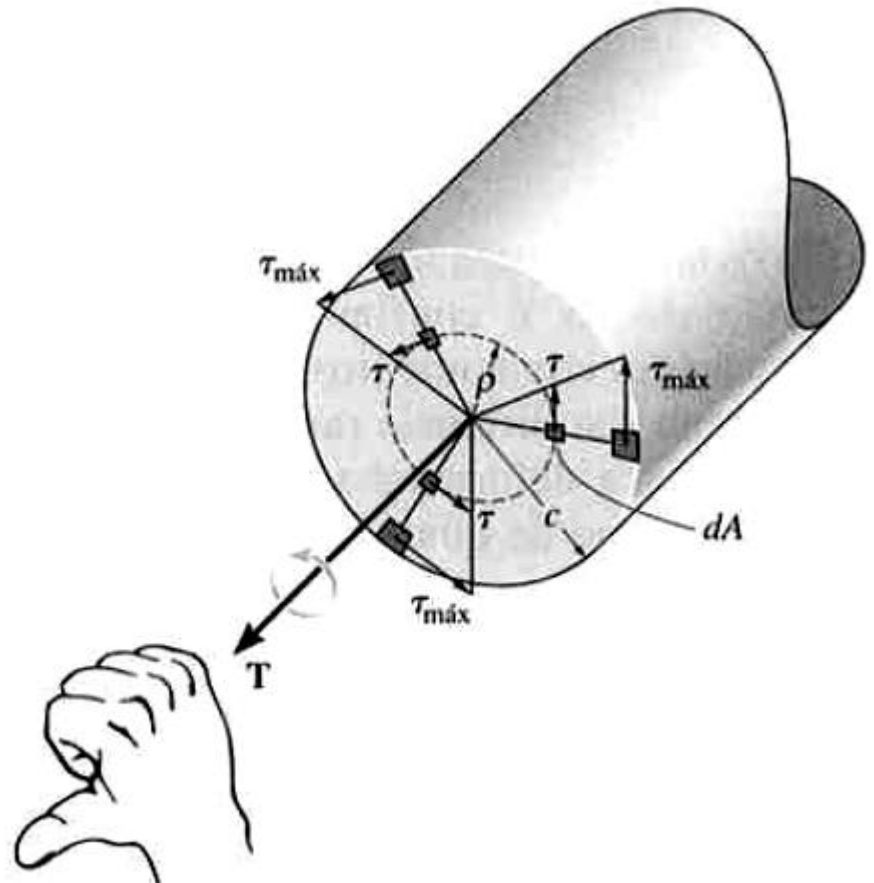
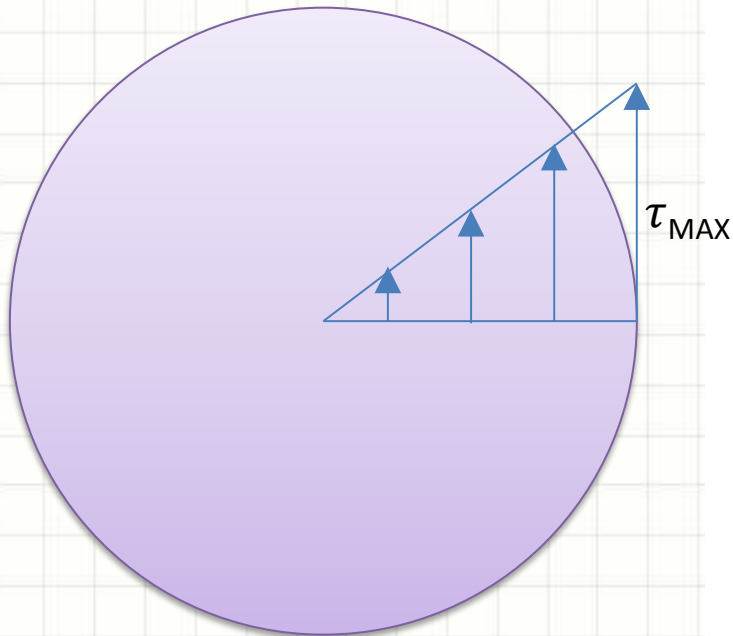
- Pode-se definir a deformação por ângulo $\phi(x)$

$\phi(x)$: varia com a distância do engastamento



Deformação por Torção

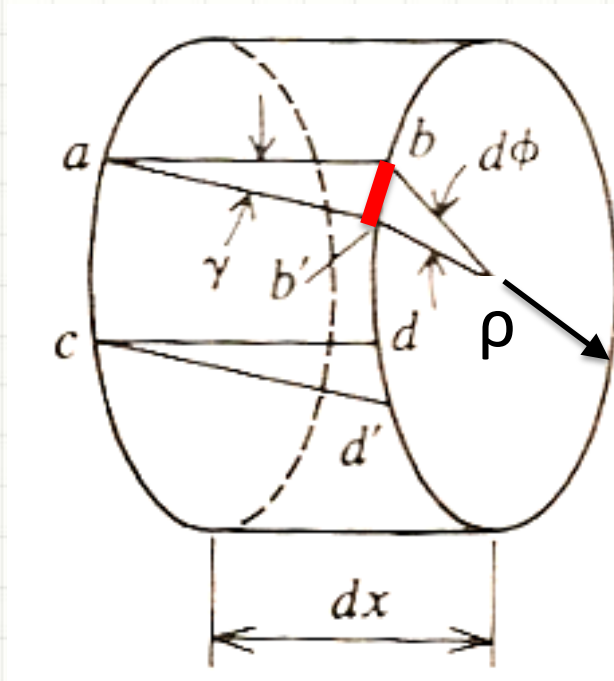
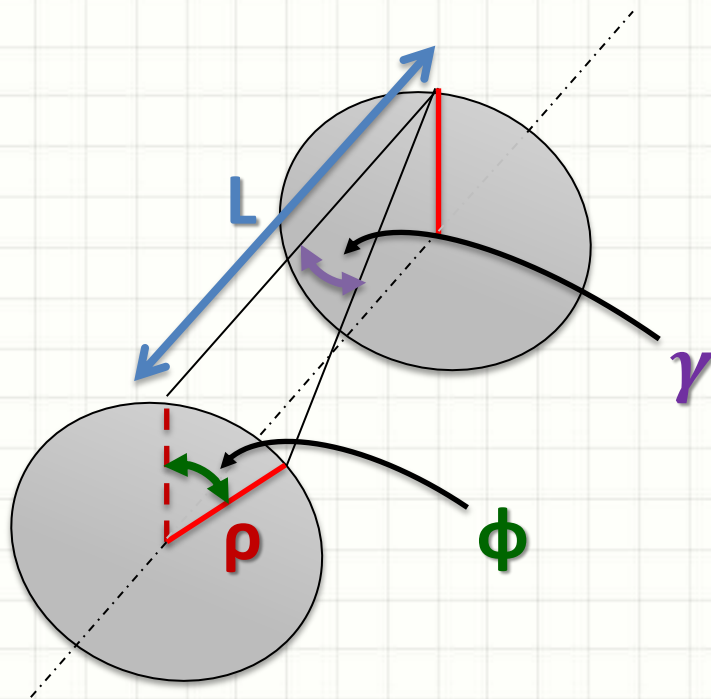
- Deformação causada pelo cisalhamento



Deformação por Torção

$$\gamma \cdot dx = \rho \cdot d\phi$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$



Como
calcular ϕ ?



CÁLCULO DO ÂNGULO DE TORÇÃO

Ângulo de Torção

- De maneira geral, podemos considerar:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

- Isolando $d\phi$:

$$d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

Ângulo de Torção

- De maneira geral, podemos considerar:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

- Isolando $d\phi$:

$$d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

- Pela lei de Hooke...

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \gamma \cdot \frac{dx}{\rho}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

- Resulta em:

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

- Pela fórmula do cisalhamento na torção...

$$\tau = \frac{T(x) \cdot \rho}{J(x)}$$

- Então...

$$d\phi = \frac{T(x) \cdot \rho}{J(x) \cdot G} \cdot \frac{dx}{\rho}$$

Ângulo de Torção

- Continuando...

$$d\phi = \frac{T(x) \cdot \cancel{\rho}}{J(x) \cdot G} \cdot \frac{dx}{\cancel{\rho}}$$

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x) \cdot G} \cdot dx$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x) \cdot G} \cdot dx$$

Ângulo de Torção

- Considerando T e J constantes...

$$\phi = \int_0^L \frac{T}{J \cdot G} \cdot dx$$

$$\phi = \frac{T}{J \cdot G} \cdot \int_0^L dx$$

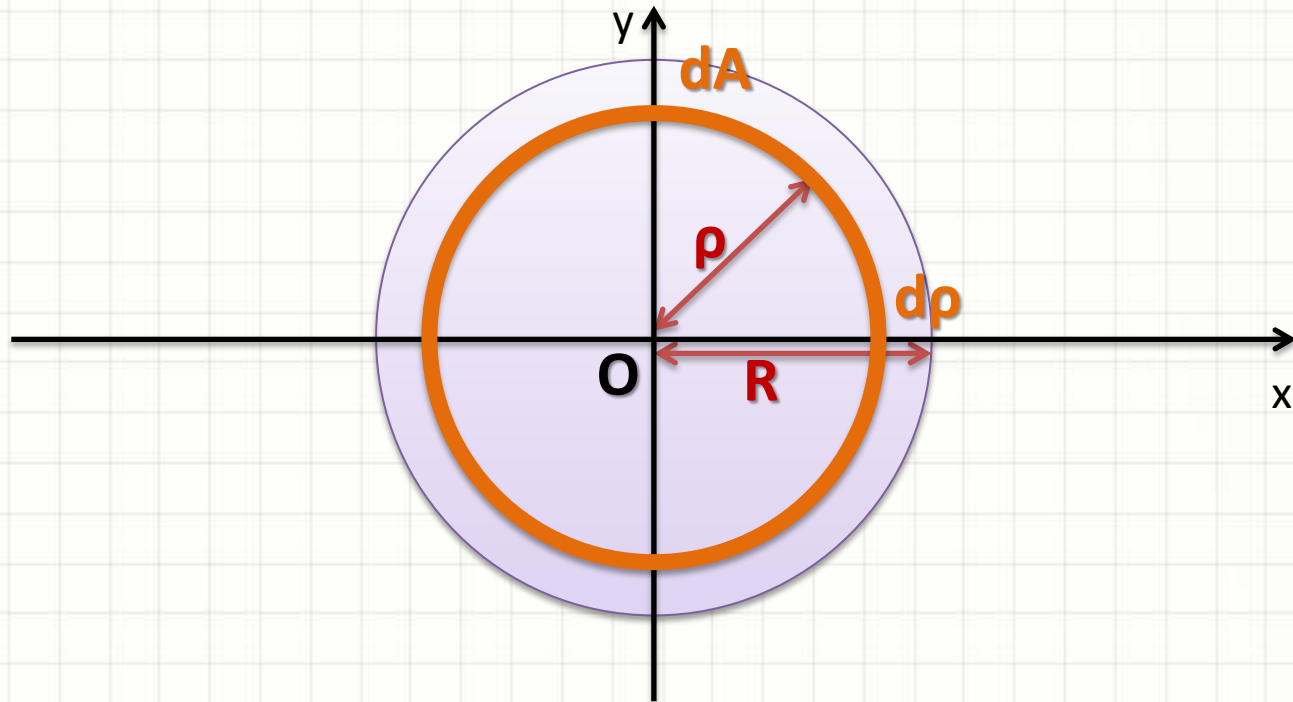
$$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G} \text{ [rad]}$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Exemplo: Eixo Maciço

- Lembrando que J , para um eixo maciço:

$$J = \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$



Exemplo: Eixo Maciço

- Lembrando que para um eixo maciço

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

- Como...

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

- Então...

$$\phi = \frac{2 \cdot T \cdot L}{\pi \cdot R^4 \cdot G} \left[\frac{rad}{m} \right]$$

Exemplo: Eixo Maciço

- Um momento torçor de 1MN.m age sobre um eixo de aço, $G=50\text{GPa}$, com raio 10cm (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?

Passo 1:
Calcular J

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{2} = 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}$$

Exemplo para Eixo Maciço

- Um momento torçor de 1MN.m age sobre um eixo de aço, $G=50\text{GPa}$, com raio 10cm (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?

$$J = 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}$$

Passo 2:
Calcular ϕ

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\phi = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}}$$

Exemplo para Eixo Maciço

- Um momento torçor de 1MN.m age sobre um eixo de aço, $G=50\text{GPa}$, com raio 10cm (seção circular). Qual é a rotação entre os dois extremos do eixo, distantes 10m entre si?
- Logo...

$$\phi = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot \pi \cdot 10^{-5}}$$

$$\phi = \frac{100}{25 \cdot \pi} = \frac{4}{\pi} \text{ rad}$$



RESUMO DE FÓRMULAS

Fórmulas para Torção

- Pelo que vimos até agora...

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T}{J} \cdot R$$

$$P = T \cdot \omega$$

Então... A partir do momento torçor T calculamos tudo?

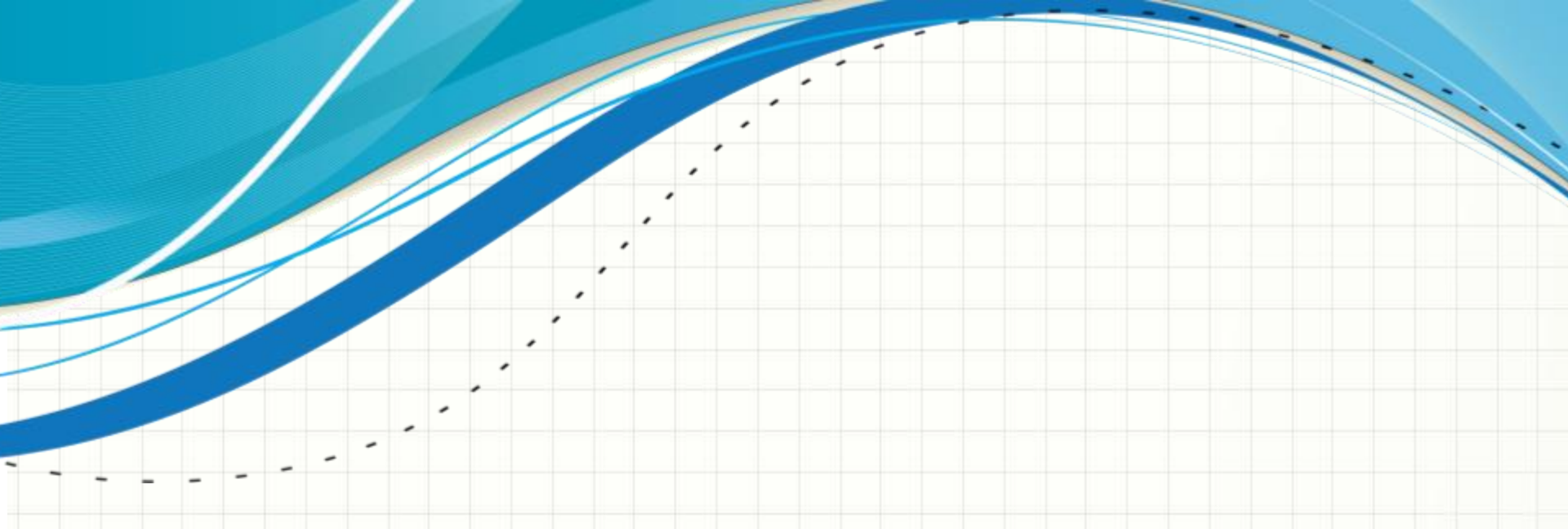
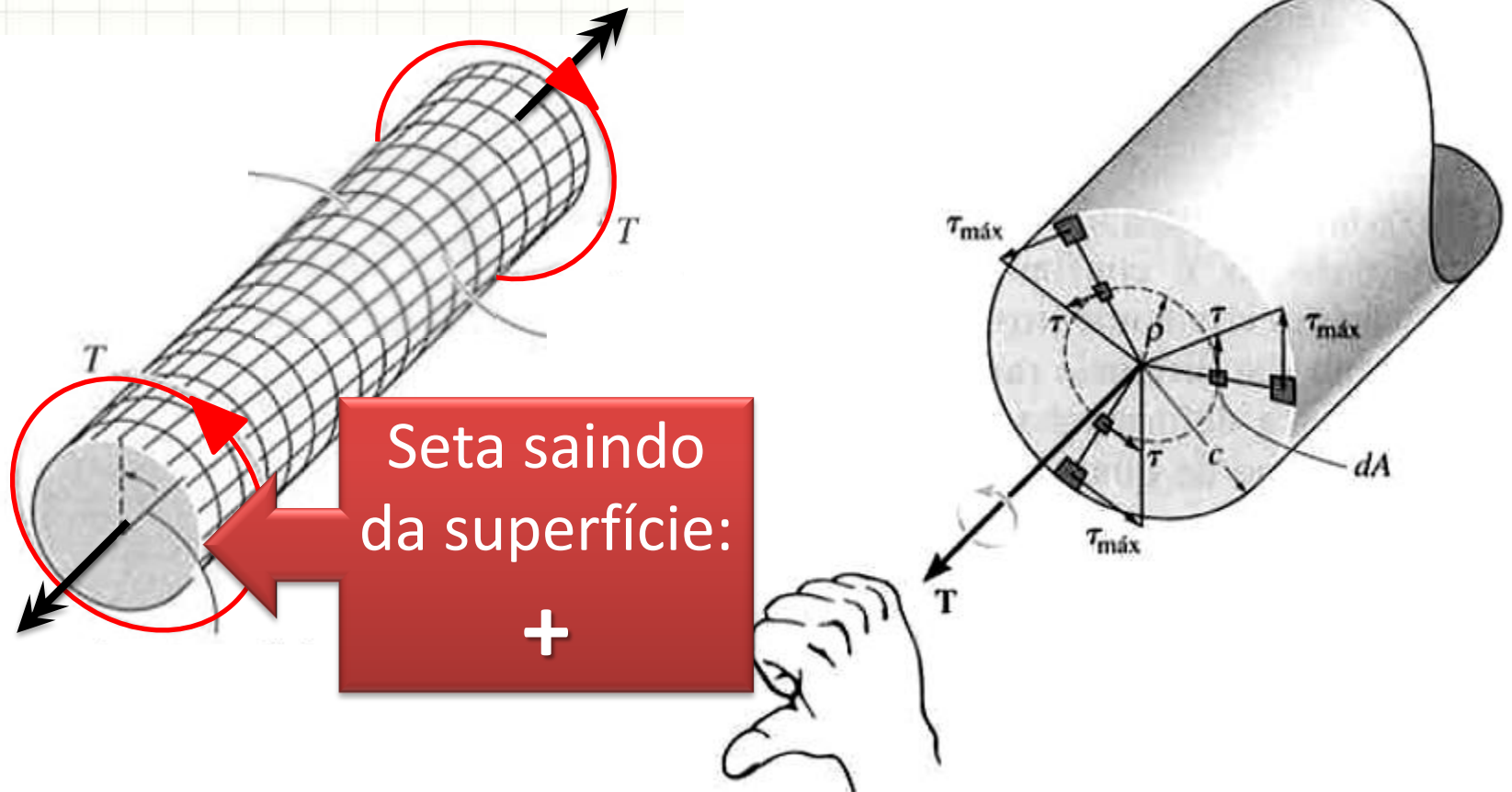


DIAGRAMA DE MOMENTO TORÇOR

Convenção de Sinais

- Sinal é dado pela regra da mão direita



Diagramas Planos

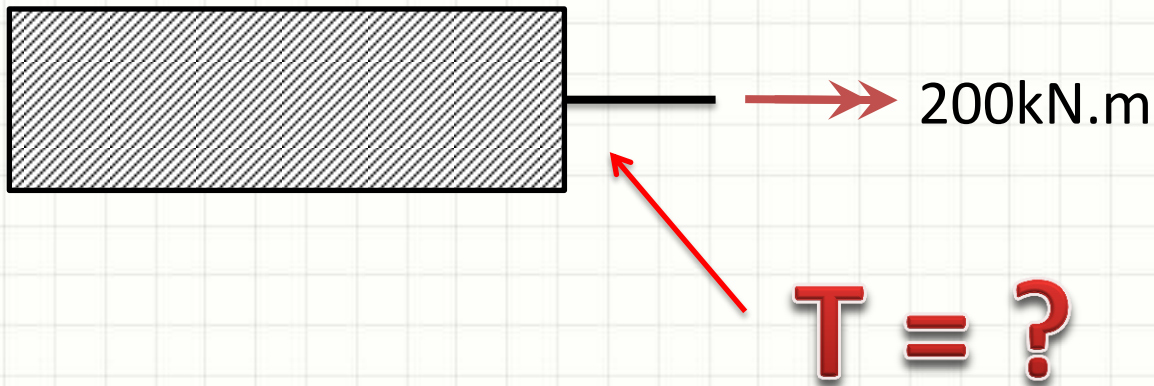
- Momentos Torçores Concentrados



T: _____

Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



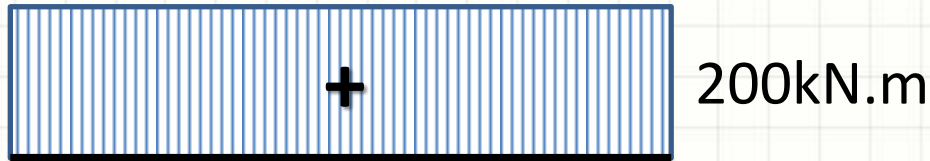
T: _____

Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



T:



Diagramas Planos

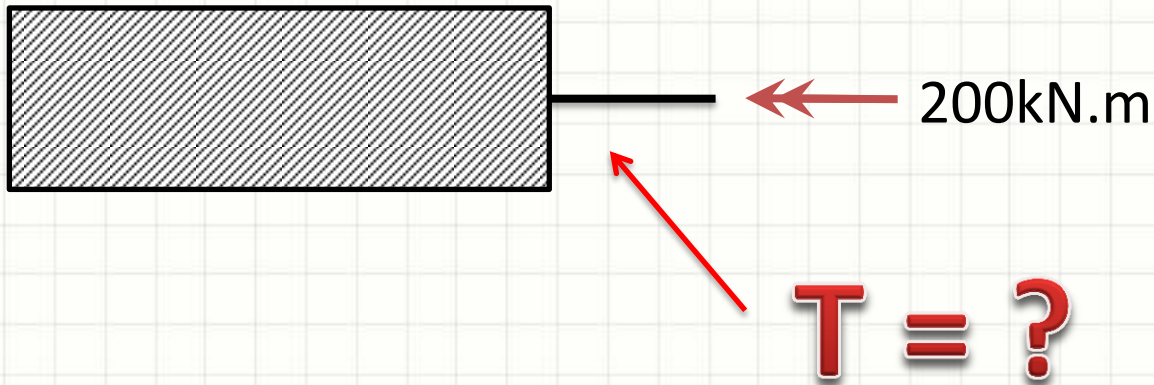
- Momentos Torçores Concentrados



T: _____

Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



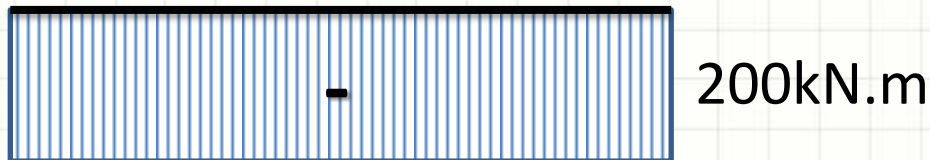
T: _____

Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados

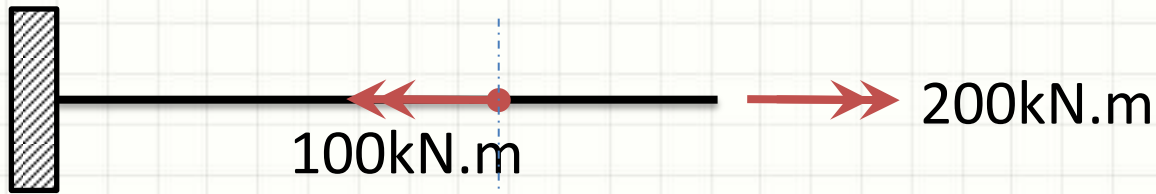


T:



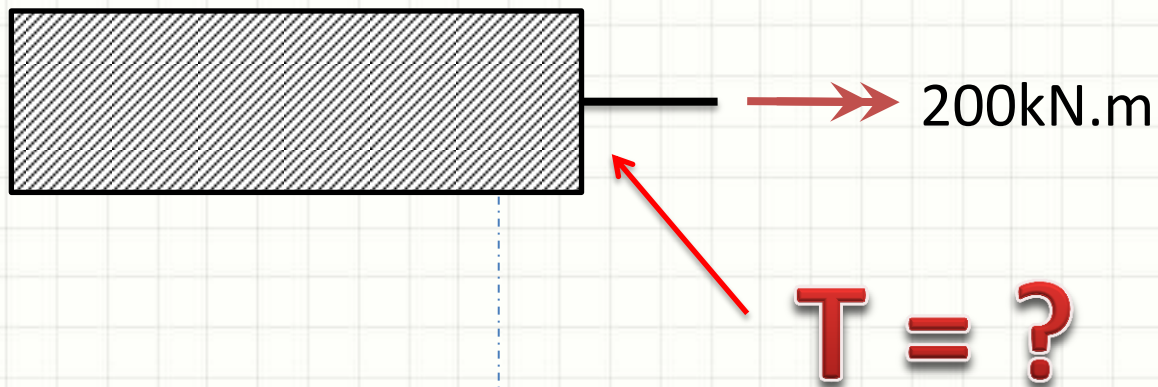
Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados

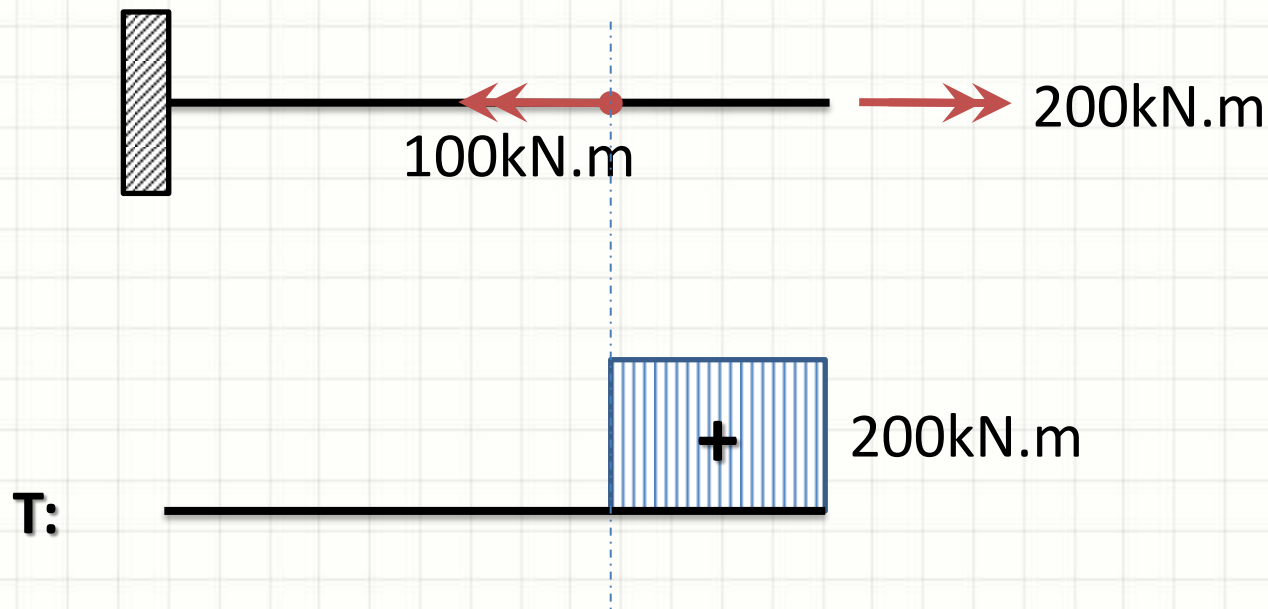


T:



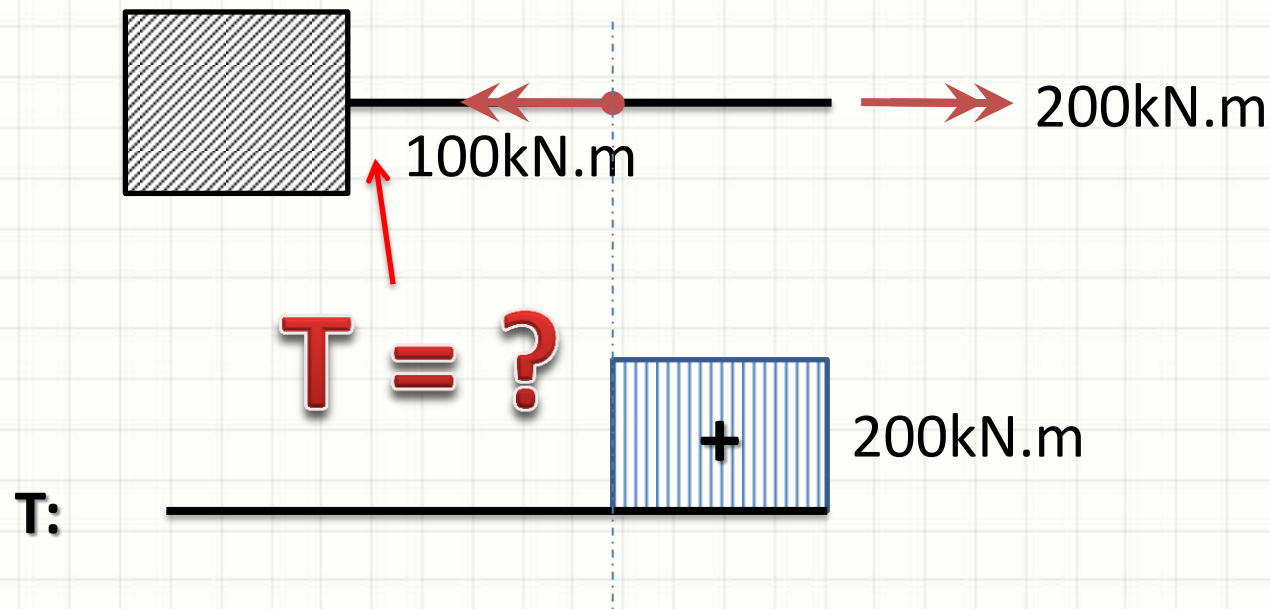
Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



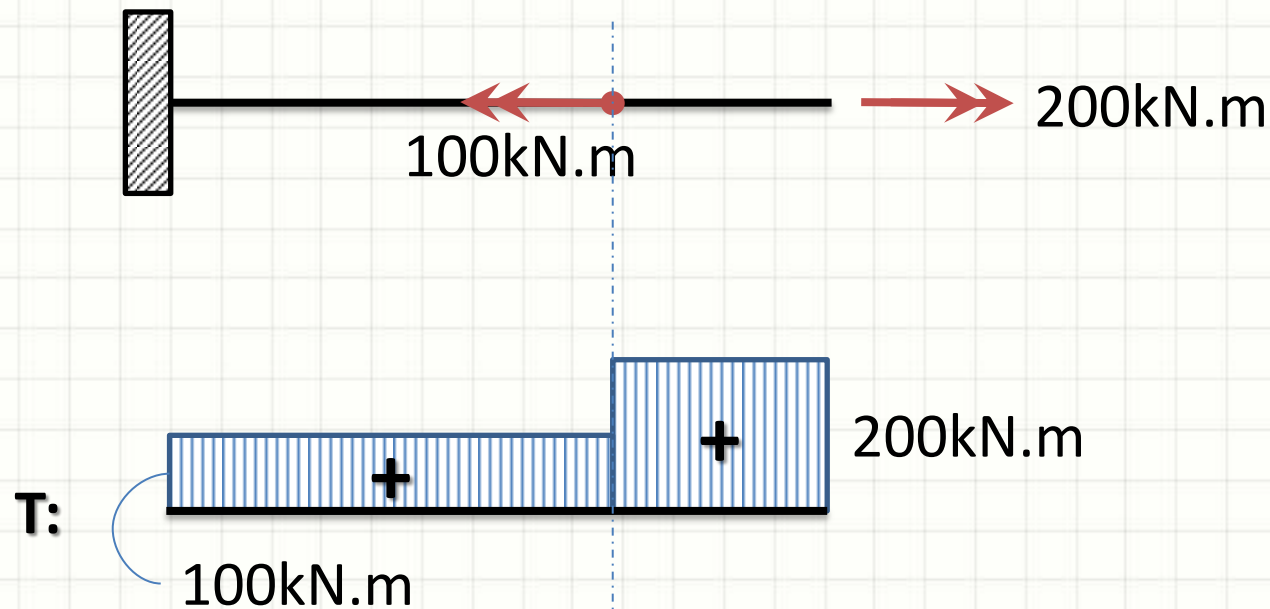
Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



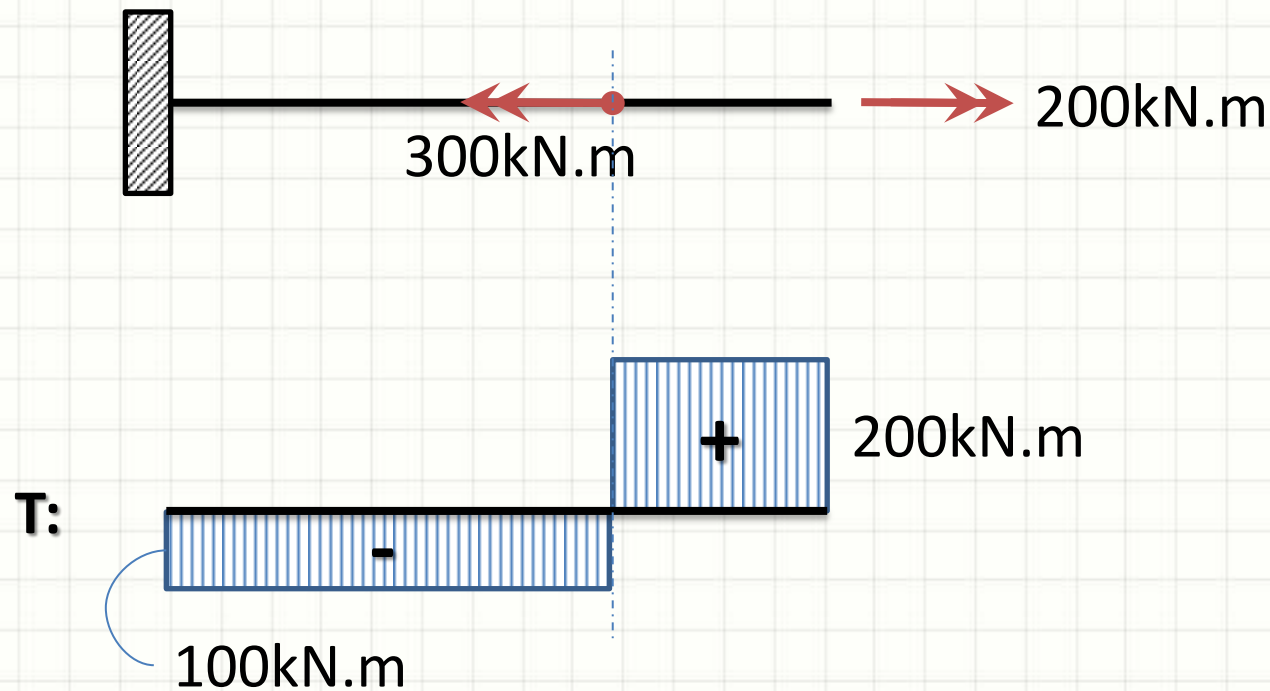
Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



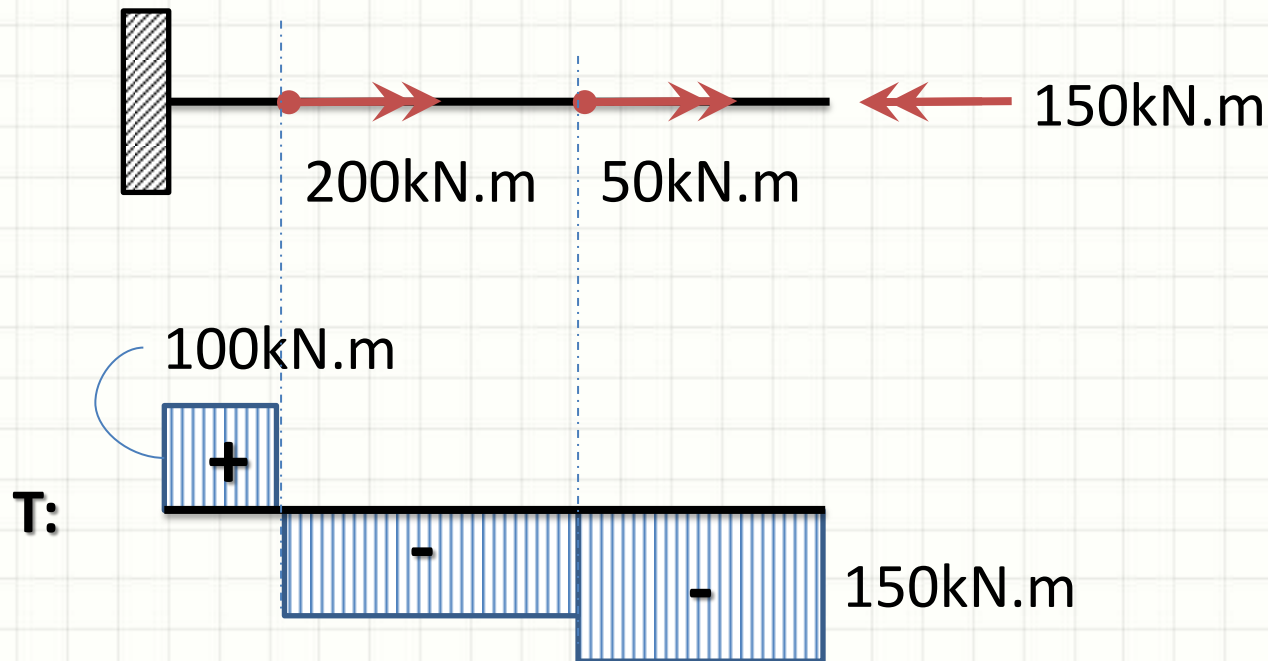
Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



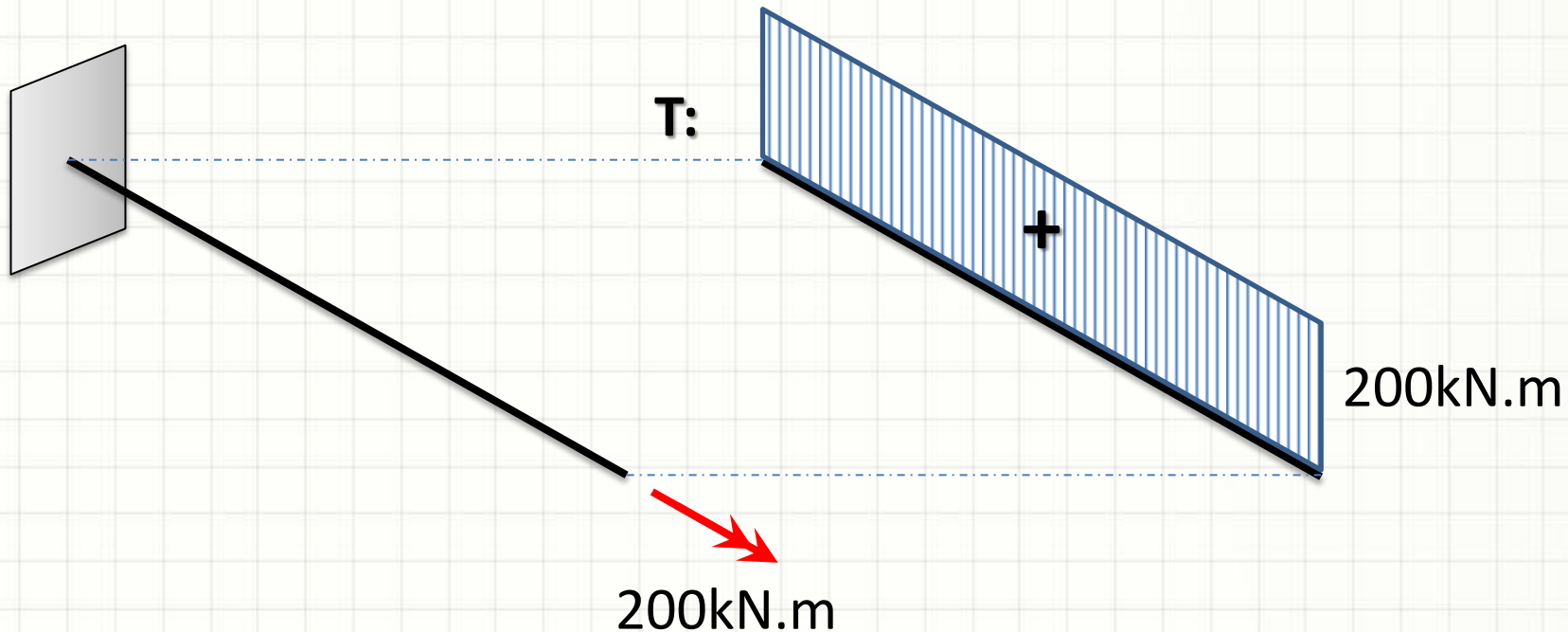
Diagramas Planos

- Momentos Torçores Concentrados



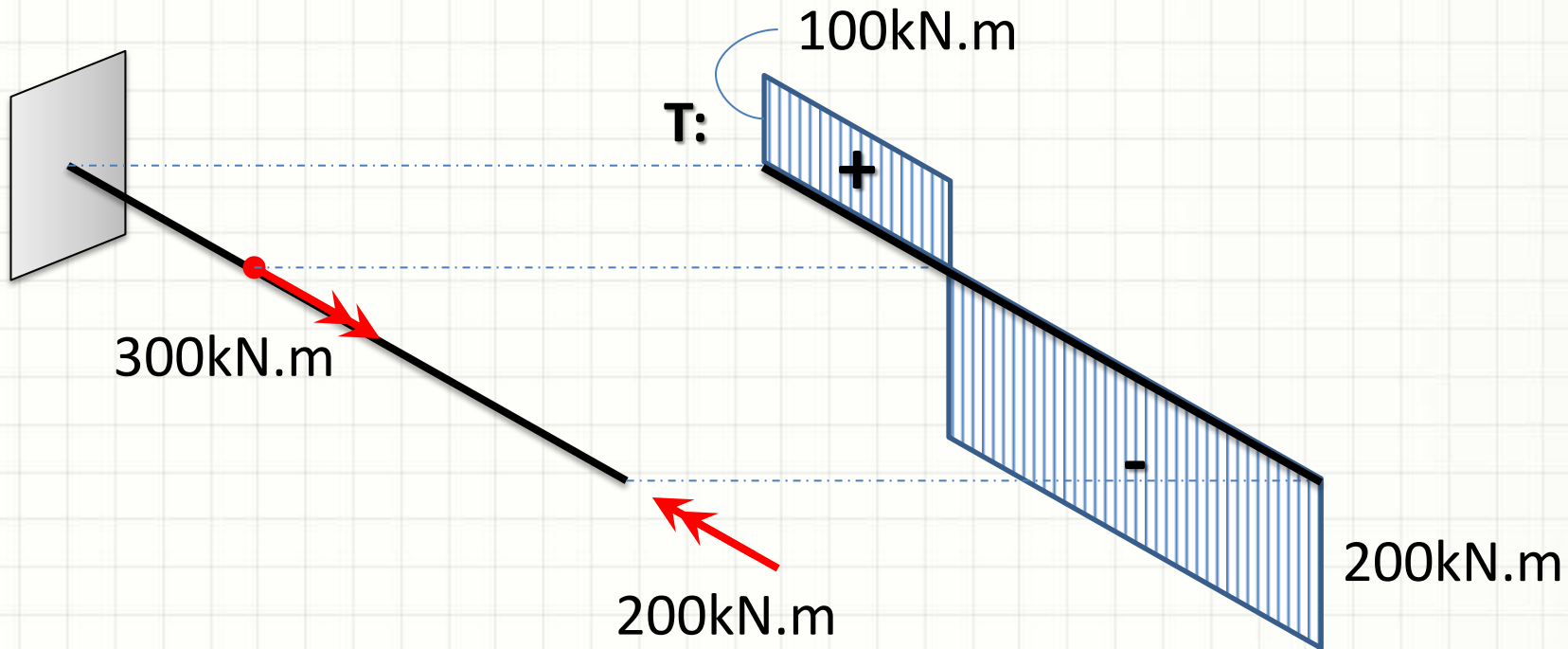
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



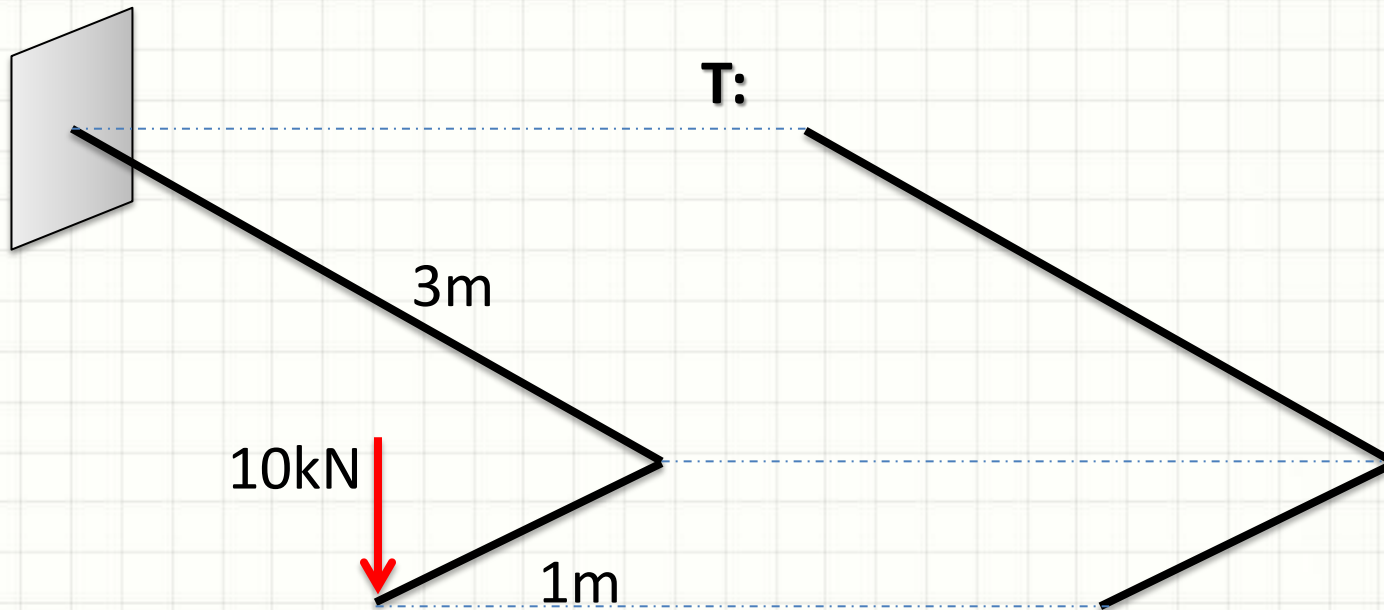
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



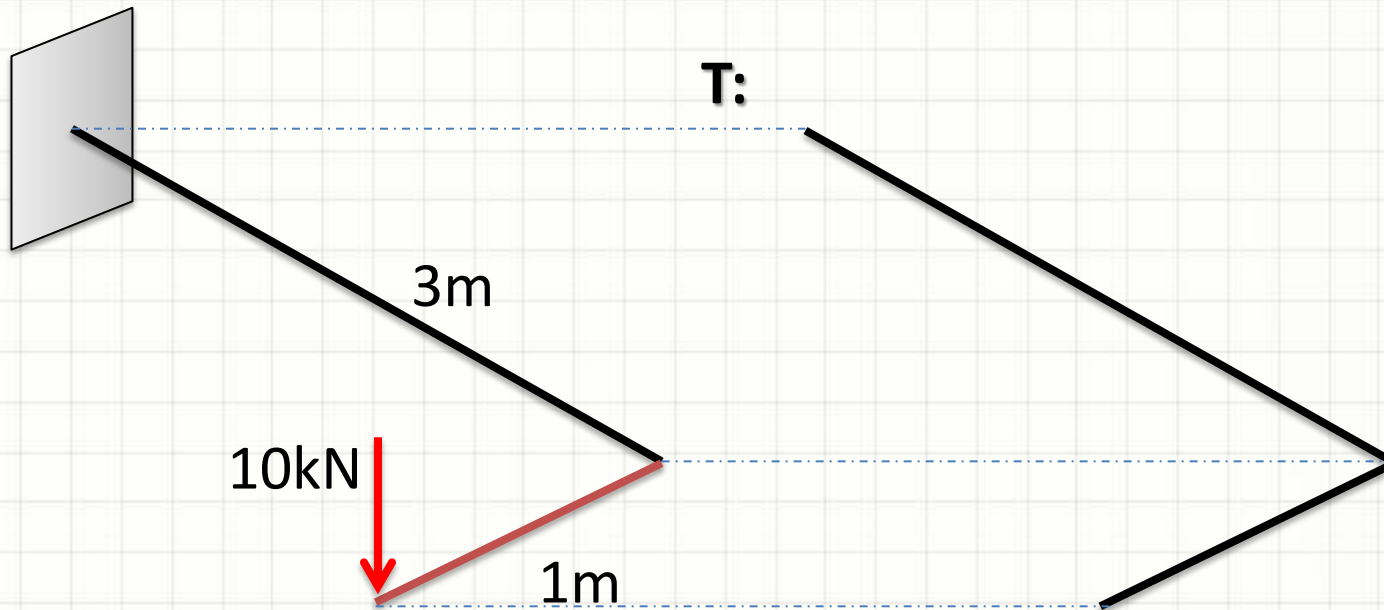
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



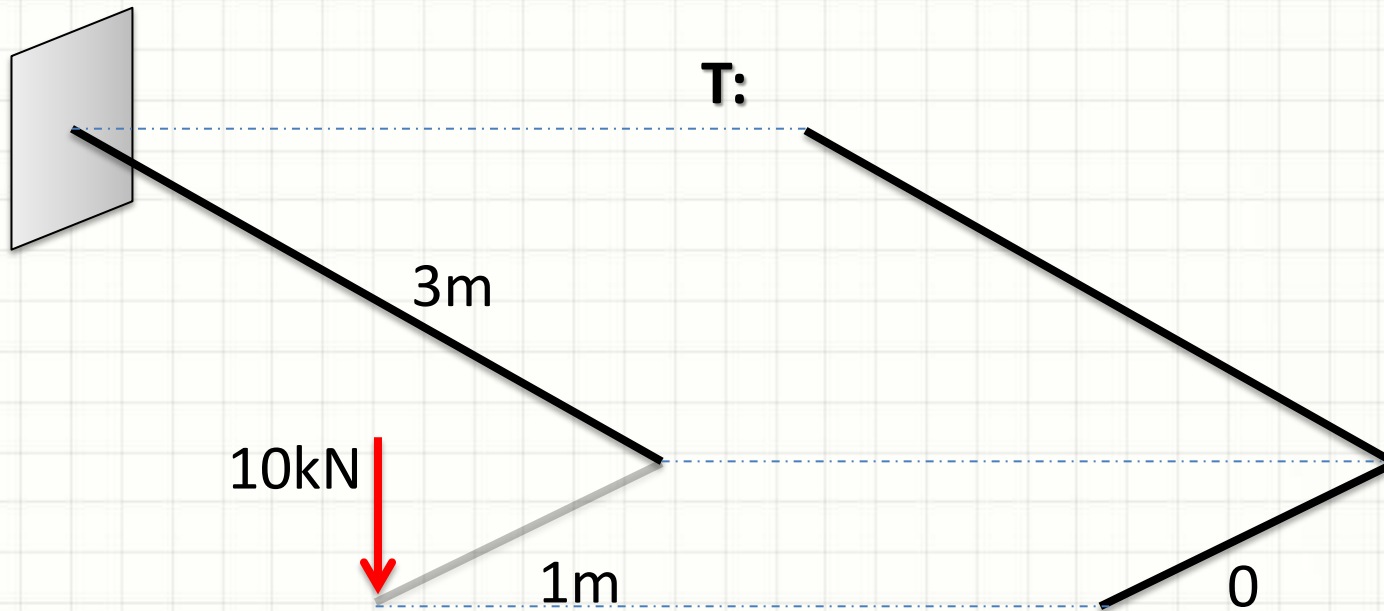
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



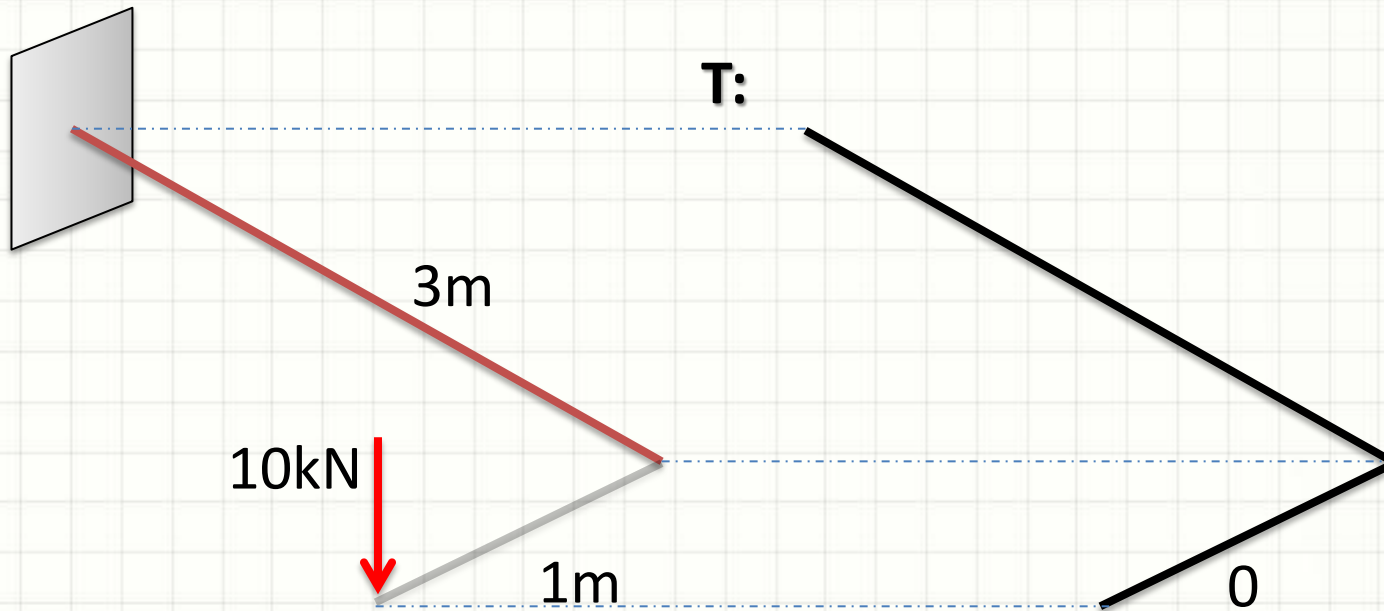
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



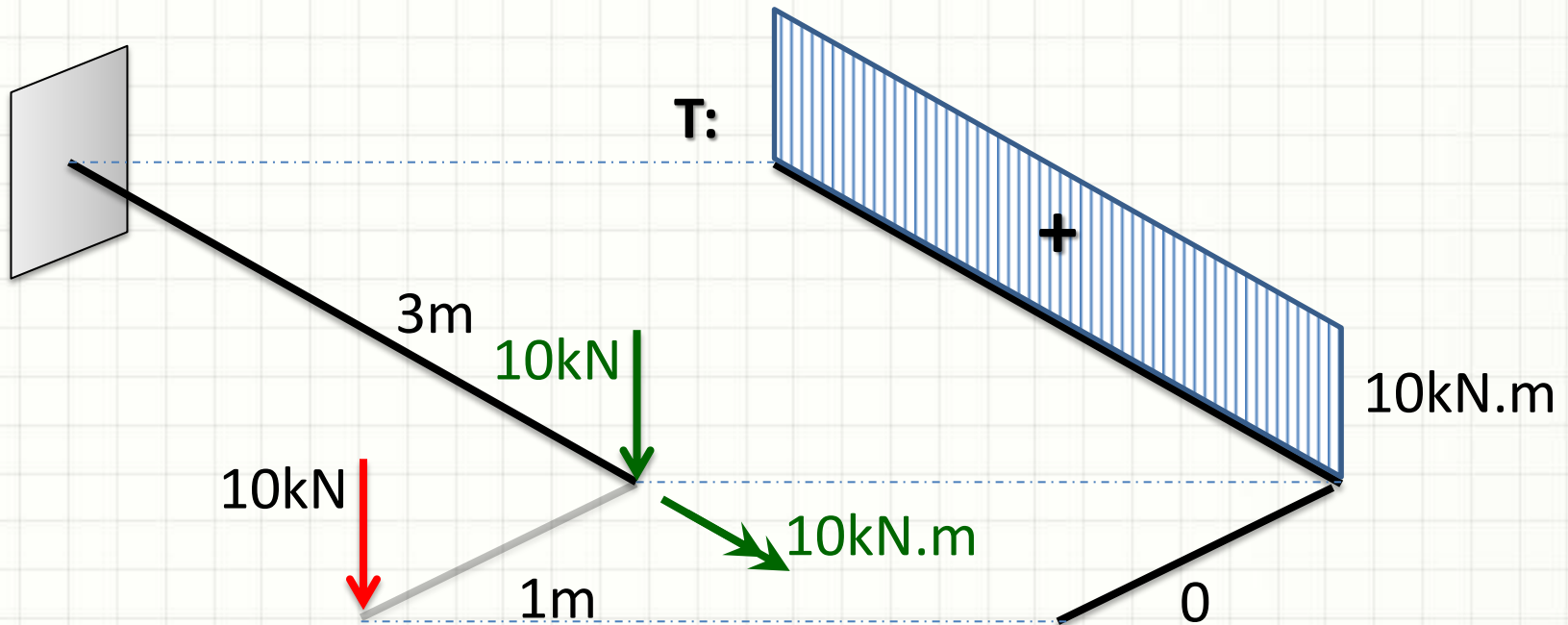
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



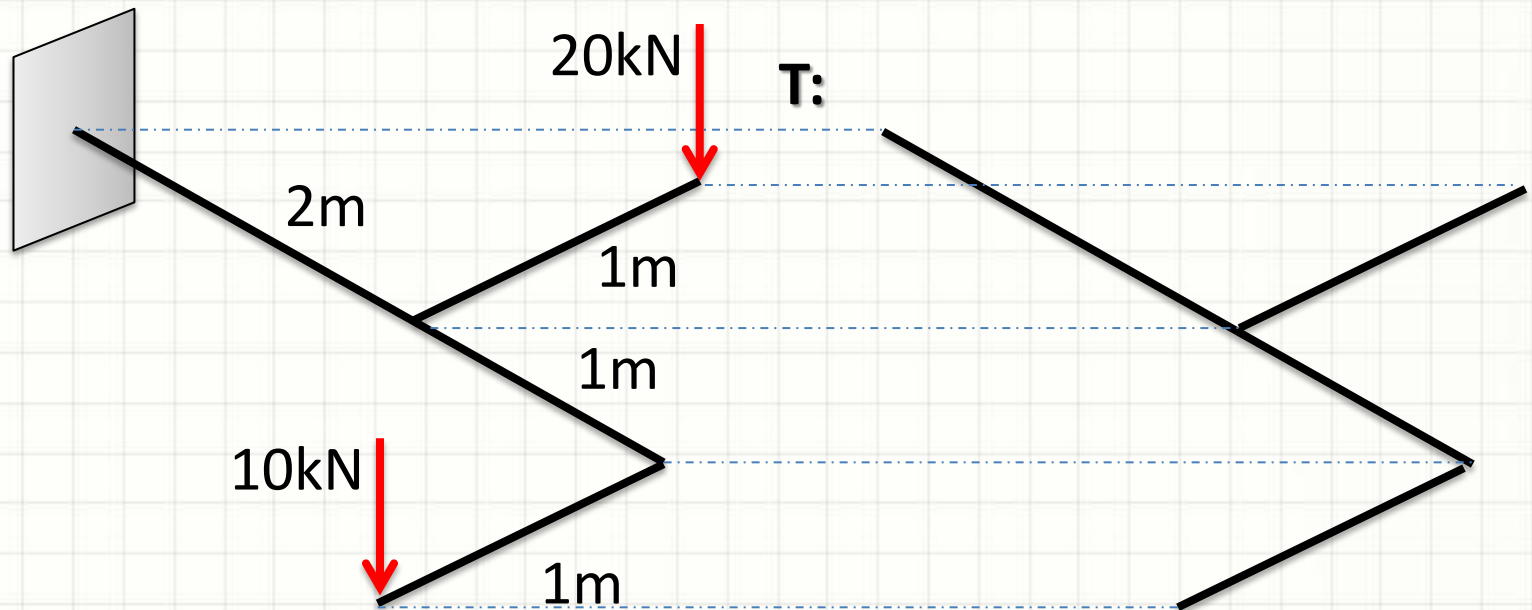
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



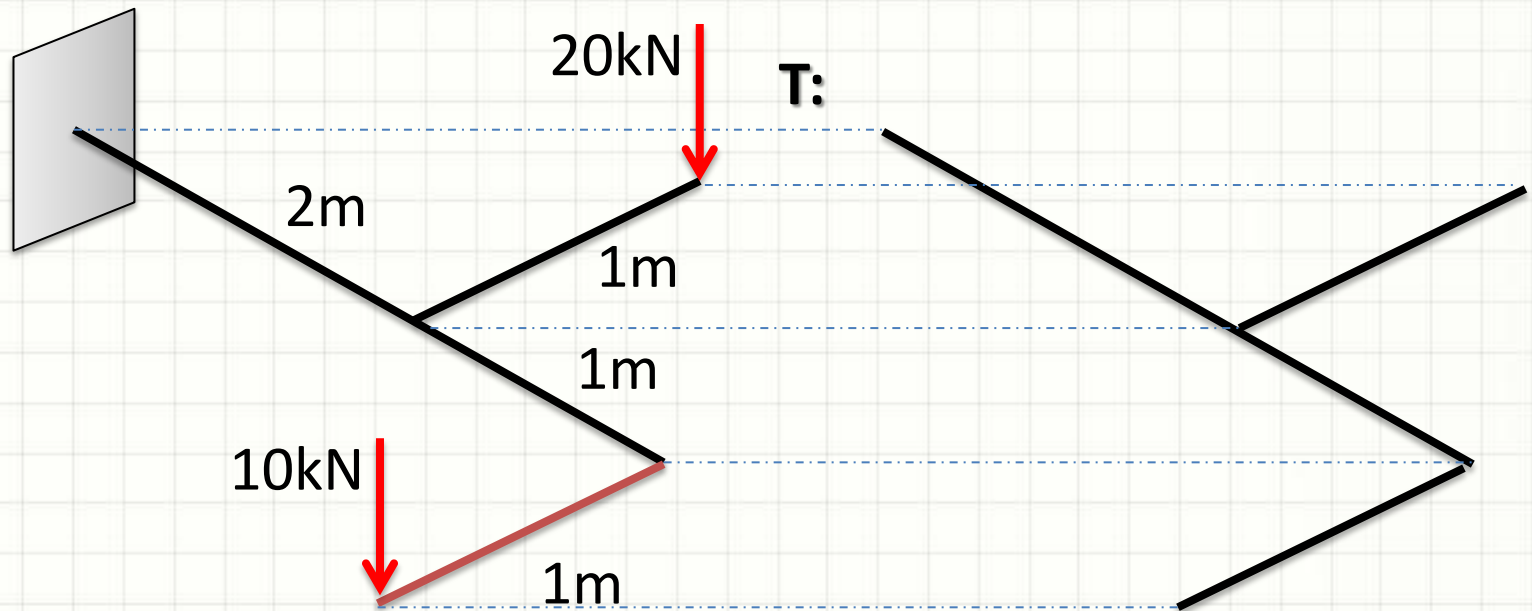
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



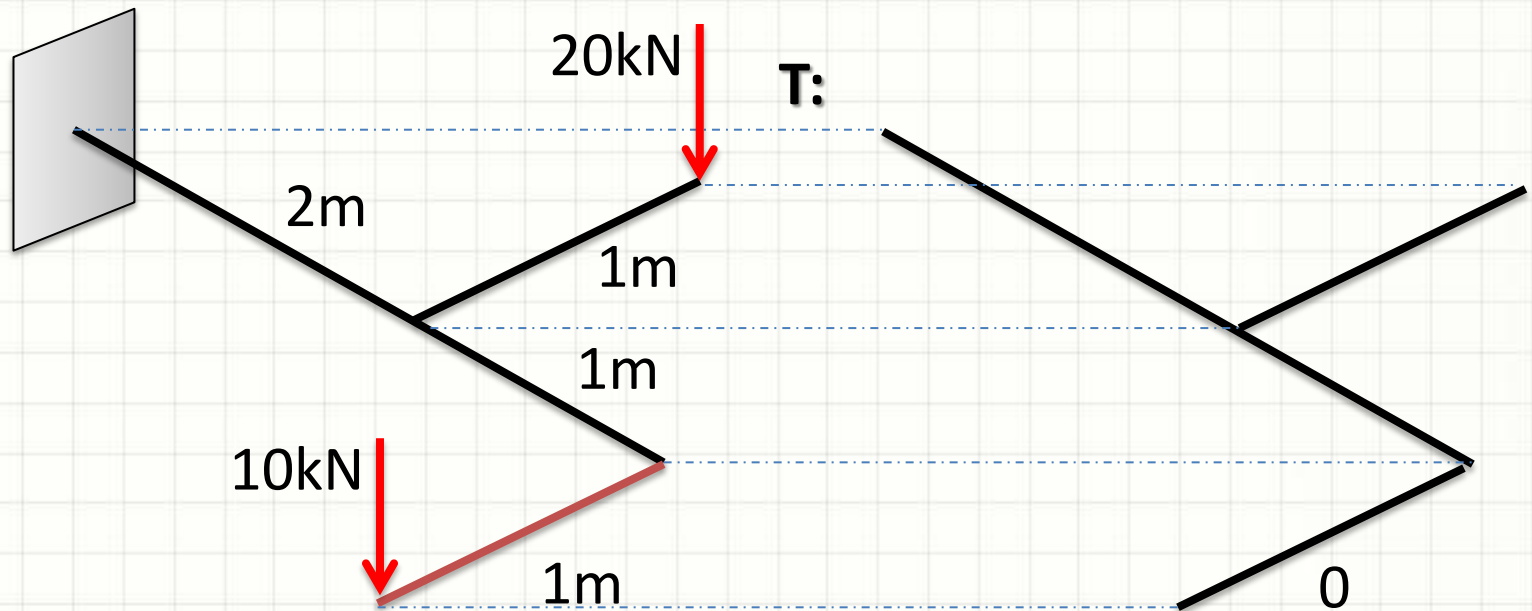
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



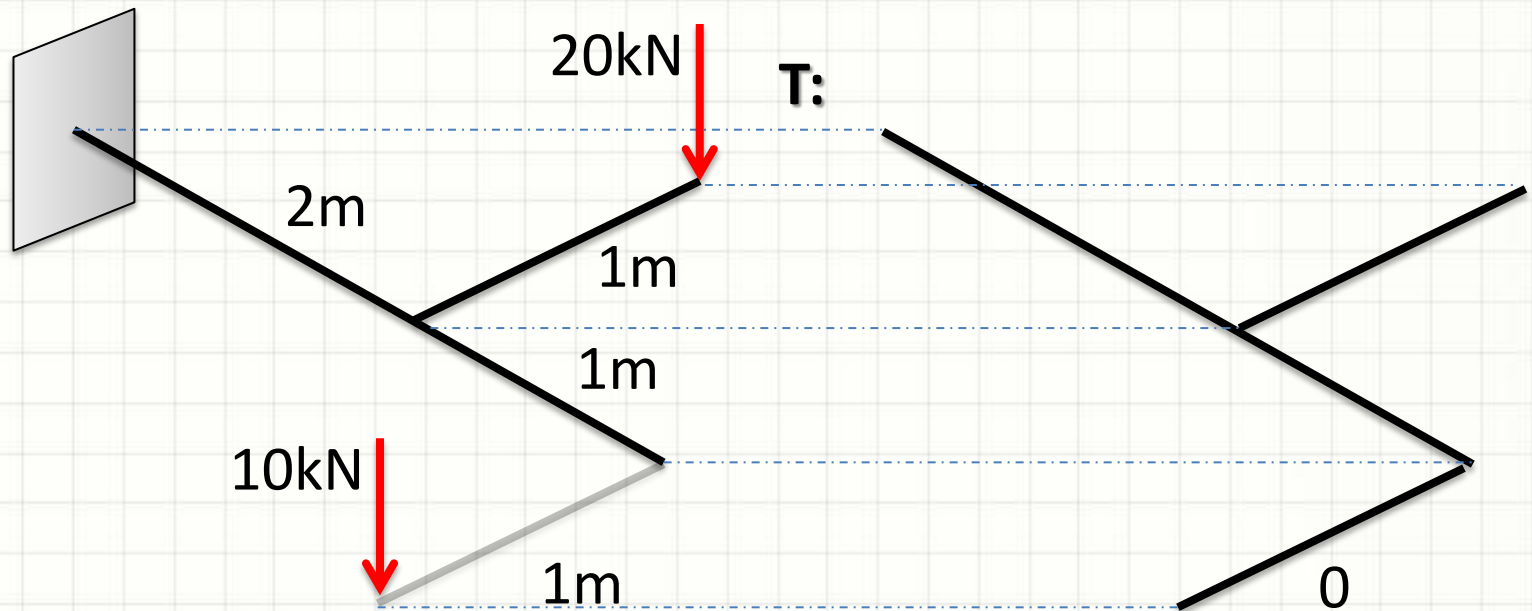
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



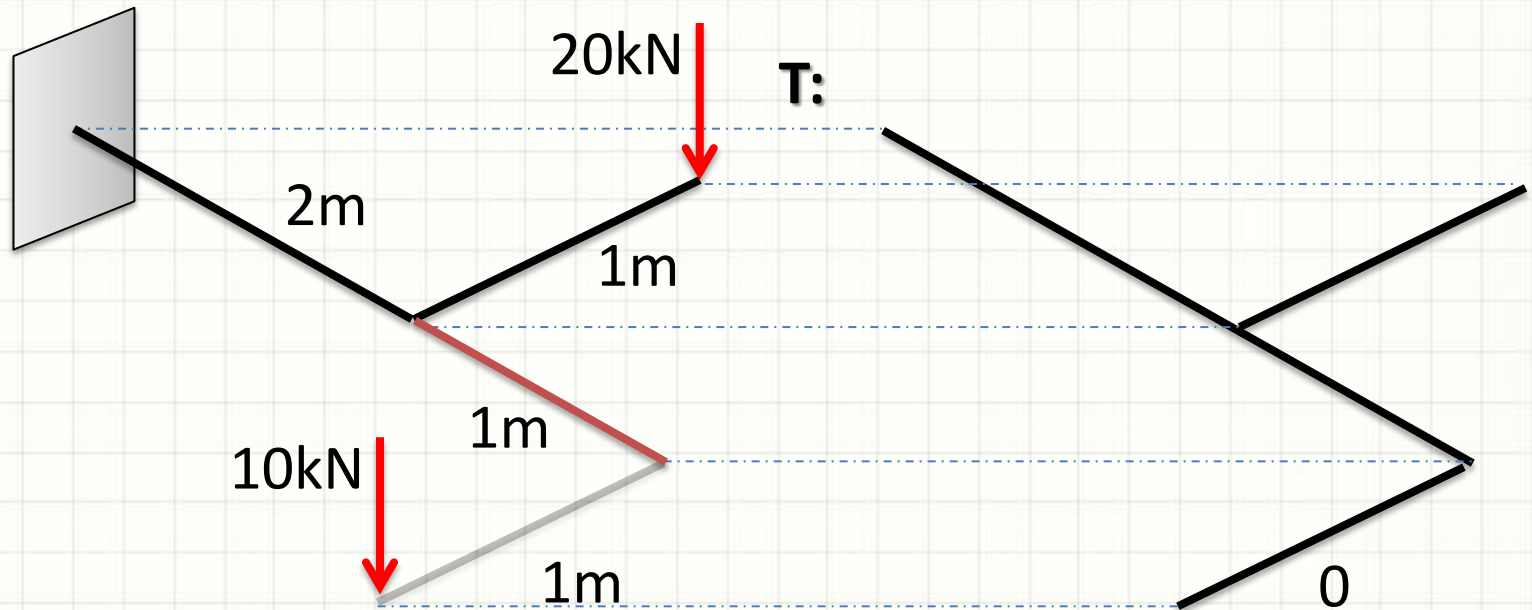
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



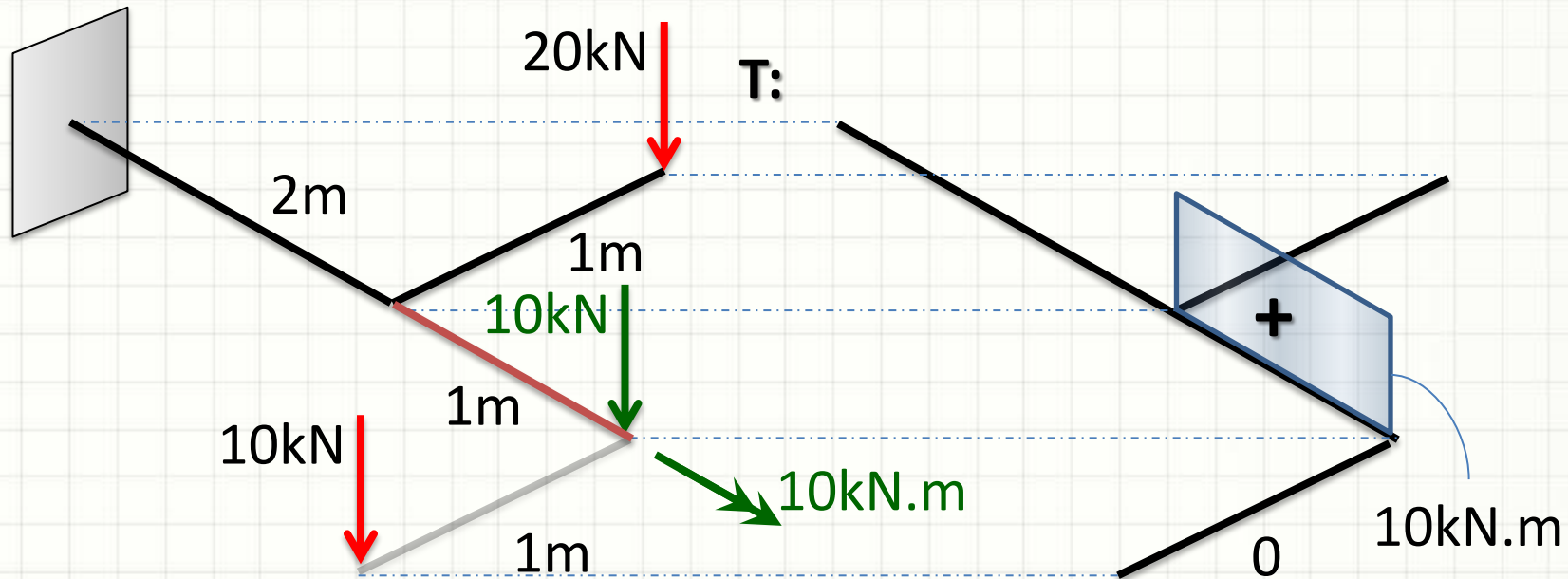
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



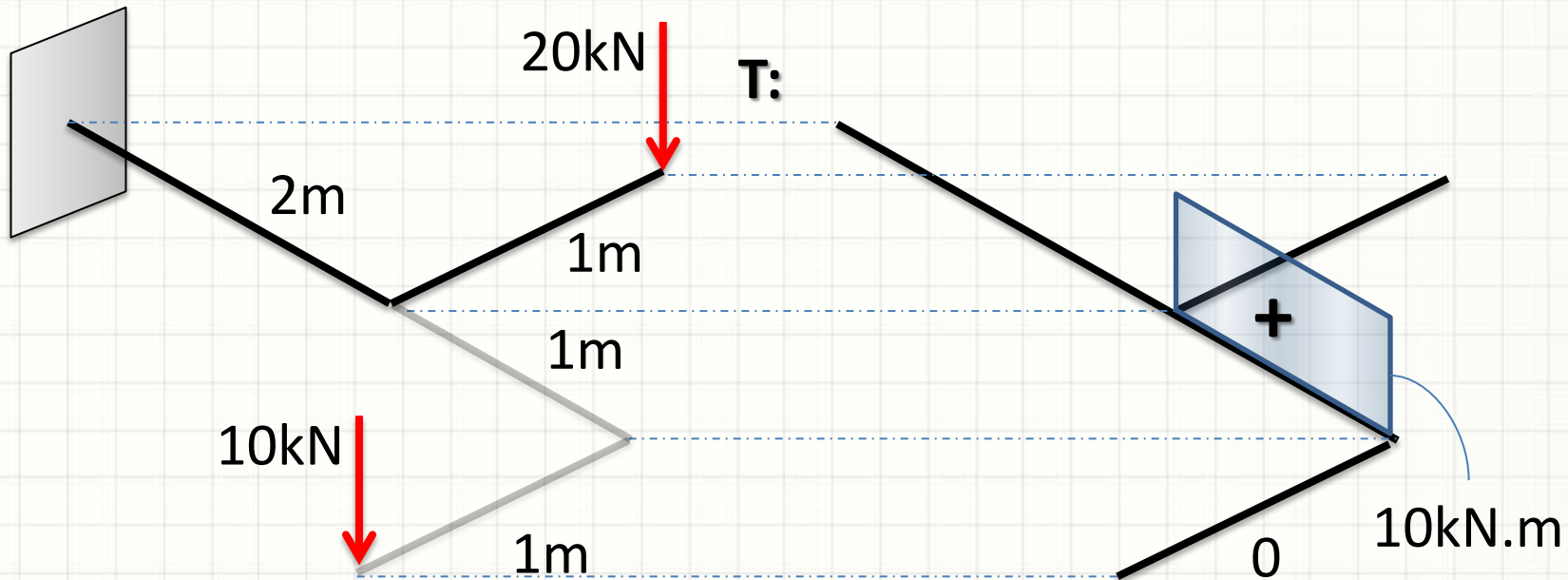
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



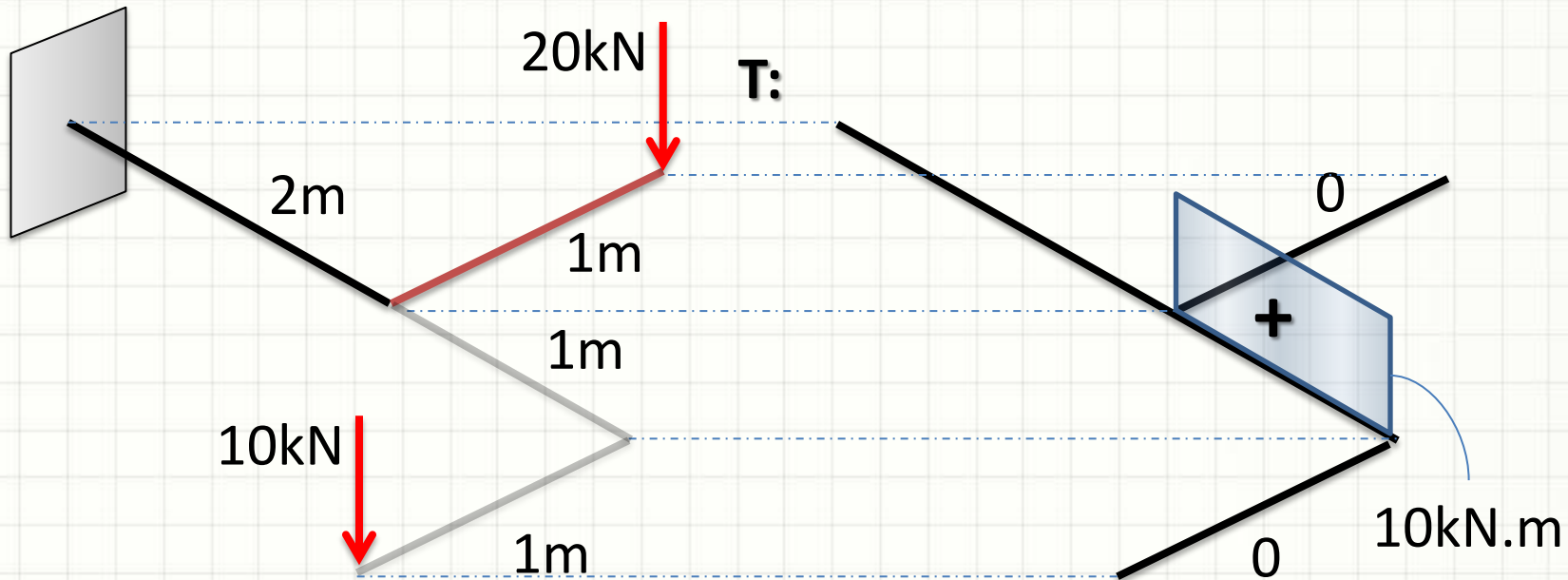
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



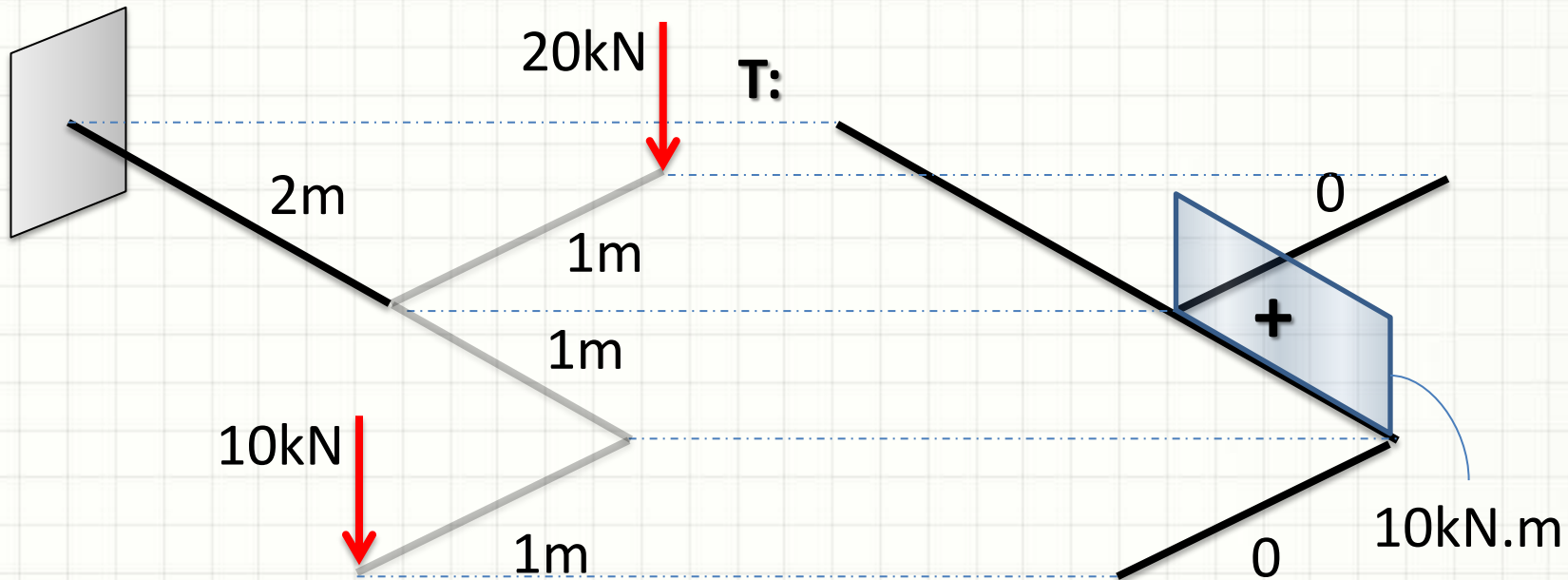
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



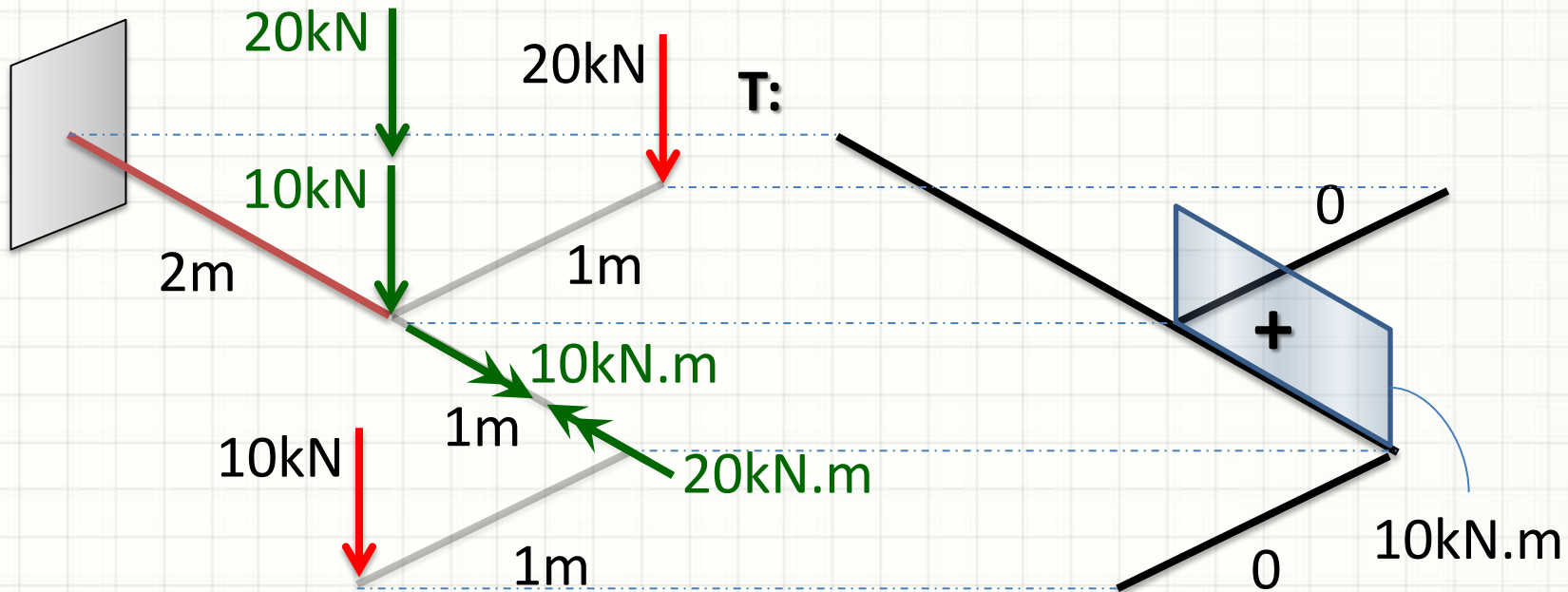
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



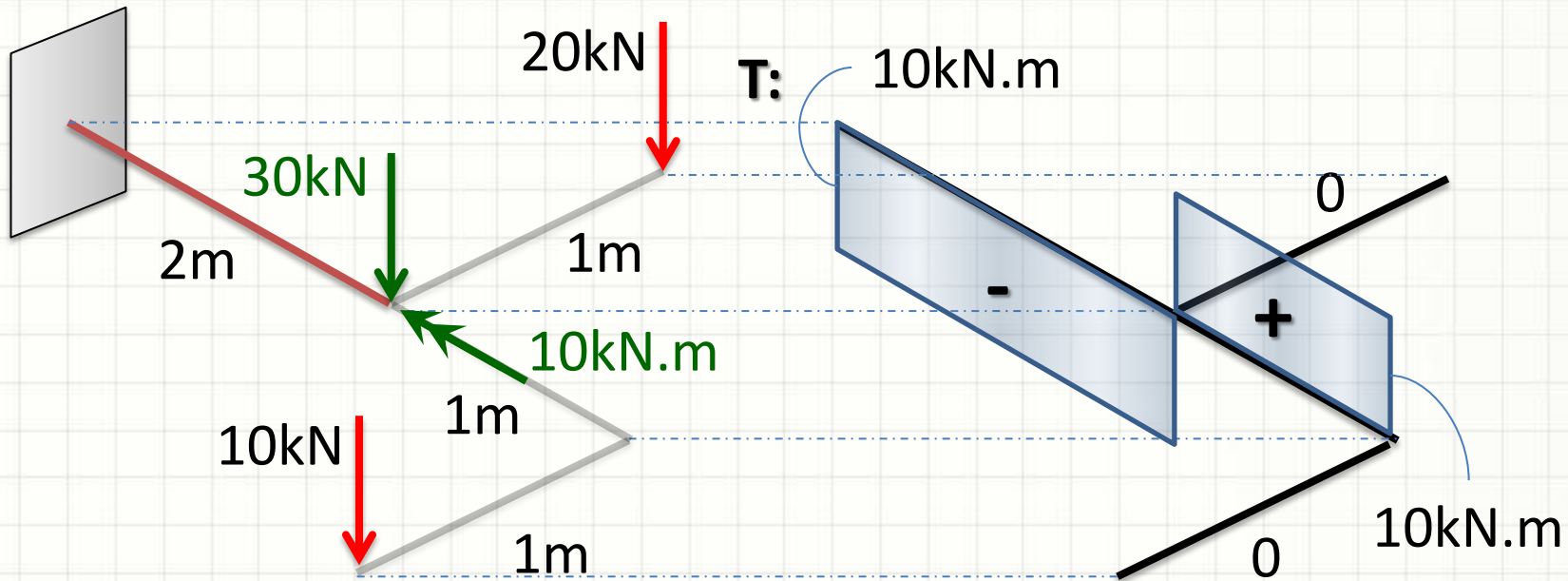
Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados



Diagramas Tridimensionais

- Momentos Torçores Concentrados

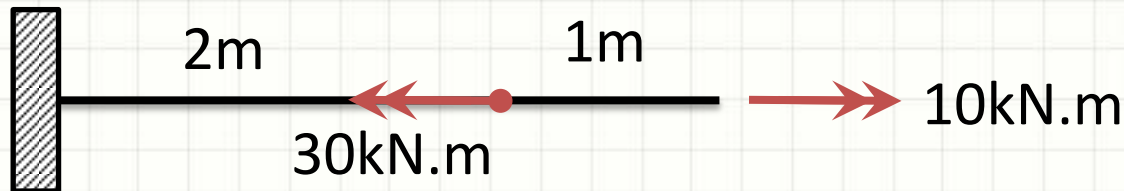




EXEMPLO COMPLETO

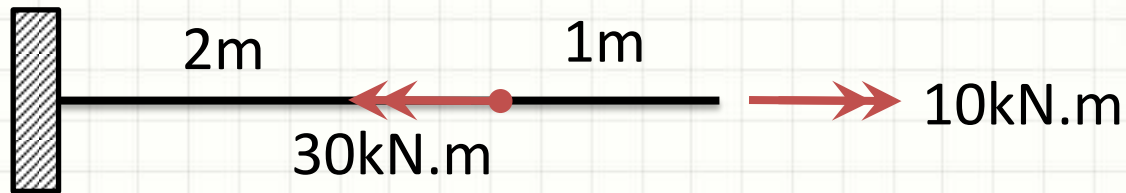
Exemplo

- A barra abaixo, que possui $G = 20\text{GPa}$, tem $R = 10\text{ cm}$. Calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o τ_{MAX} .



Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$

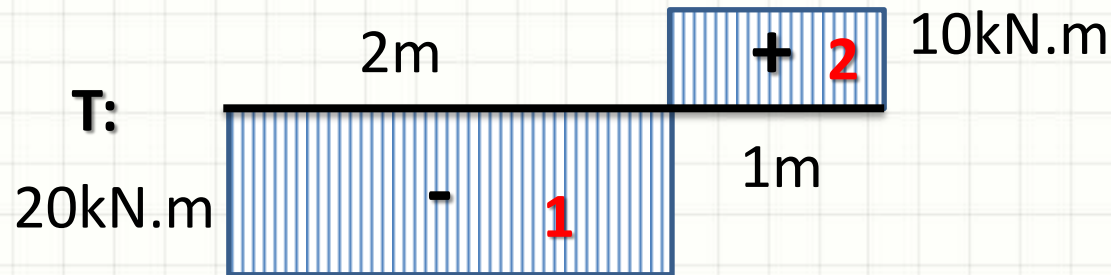


- Passo 1: Diagrama de Torção



Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



- Passo 2: Cálculo de J...

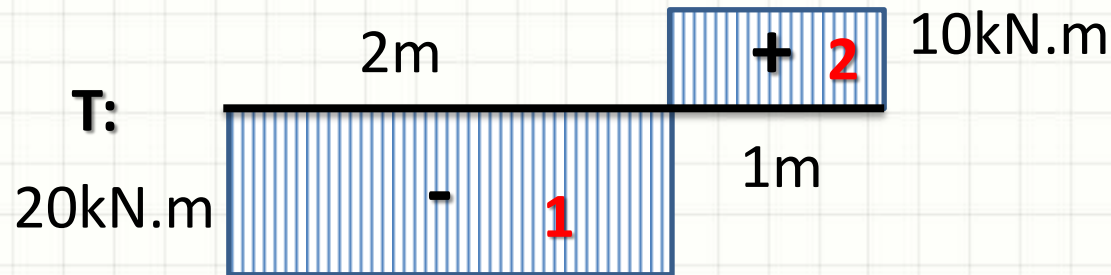
$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

- E ϕ ...

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



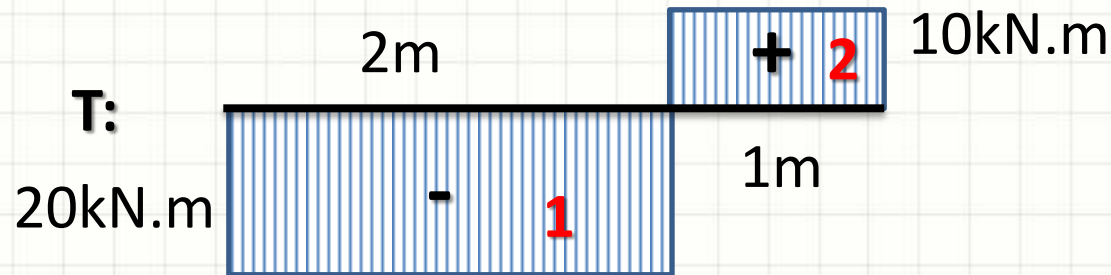
- Passo 3: Cálculo de ϕ_1

$$\phi_1 = \frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

$$\phi_1 = \frac{2 \cdot (-2) \cdot 10^4 \cdot 2}{2 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^4} = \frac{-4}{100 \cdot \pi}$$

Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



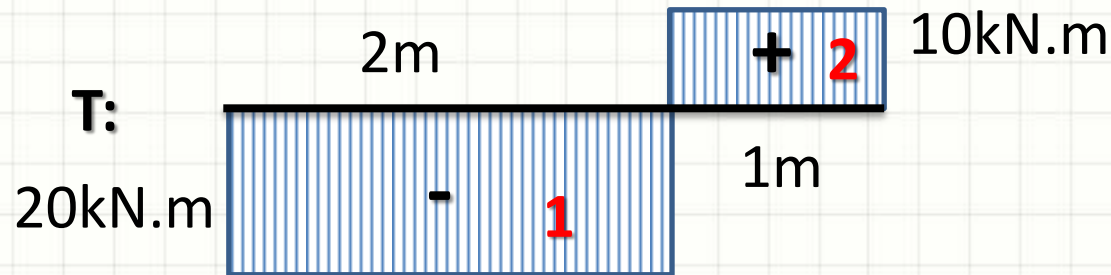
- Passo 4: Cálculo de ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{2.T.L}{G.\pi.R^4}$$

$$\phi_2 = \frac{2.1.10^4.1}{2.10^{10}.\pi.(1.10^{-1})^4} = \frac{1}{100.\pi}$$

Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = ?$ $\tau_{MAX} = ?$



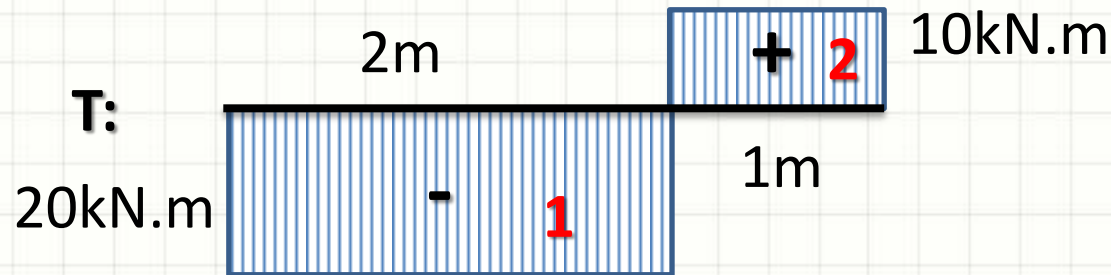
- Passo 5: Cálculo de $\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\phi = \frac{-4}{100.\pi} + \frac{1}{100.\pi}$$

$$\phi = \frac{-3}{100.\pi} \text{ rad} \cong -0,0095493 \text{ rad} \cong -0,55^\circ$$

Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = -0,55^\circ$ $\tau_{MAX} = ?$



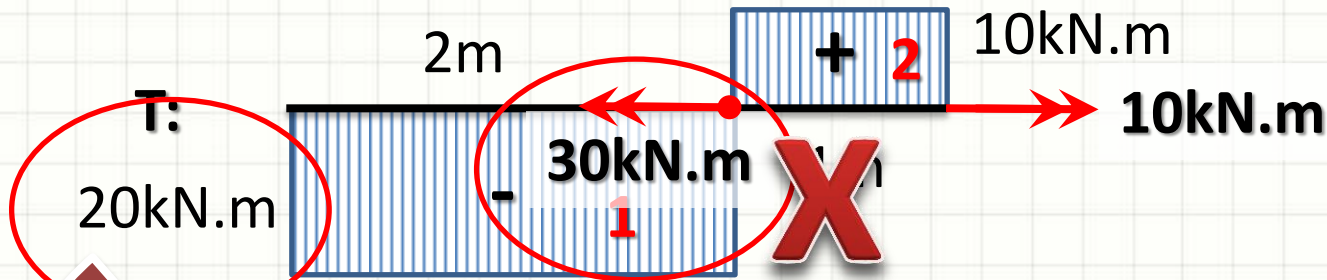
- Passo 6: Cálculo de τ_{MAX}

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} = \frac{2 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot R^4} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^4}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^3} = \frac{4 \cdot 10^7}{\pi} \cong 12,7\text{MPa}$$

Exemplo

- $G = 20\text{GPa}$ $R = 10\text{ cm}$ $\phi = -0,55^\circ$ $\tau_{MAX} = ?$



Passo 6: Cálculo de τ_{MAX}

$$\tau_{MAX} = \frac{T \cdot R}{J} = \frac{2 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot R^4} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

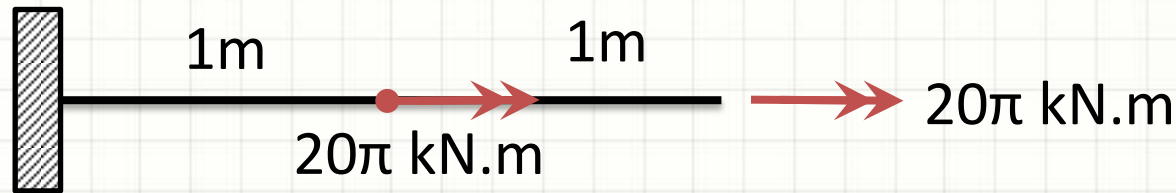
$$\tau_{MAX} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^4}{\pi \cdot (10^{-1})^3} = \frac{4 \cdot 10^7}{\pi} \cong 12,7\text{MPa}$$



EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- A barra abaixo, que possui $G = 20\text{GPa}$, tem $R = 10\text{ cm}$. Trace os diagramas de torção e calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o τ_{MAX} .



- Calcule qual seria a diferença de rotação e cisalhamento máximo se a barra fosse oca, com o raio interno igual a 5cm?



PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 161 a 166
- Mínimos:
 - Exercícios 5.42, 5.45, 5.46, 5.49
- Extras:
 - Exercícios 5.43, 5.44, 5.47, 5.52
- Adote essas conversões:
 - 1 ksi = 7MPa
 - 1 pol = 25mm
 - 1hp = 1000W

Para Treinar em Casa

Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**



CONCLUSÕES

Resumo

- É possível determinar o ângulo de torção
- A partir do momento torçor é possível calcular a maioria das grandezas de interesse
- Os diagramas de torção permitem determinar o ponto de máximo momento de torção
- **Exercitar**
 - Exercícios Hibbeler

Próxima Aula



- E se a torção ocorrer em eixo bi-engastado?
- E se o eixo não possuir seção transversal circular?



PERGUNTAS?



**BOM DESCANSO
A TODOS!**