



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

FLEXÃO PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

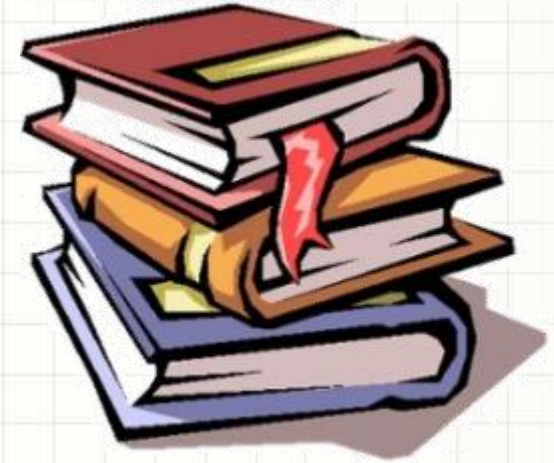
2013 - 1

Objetivos

- Conceituar forças cortantes e momentos fletores
- Capacitar para o traçado de diagramas de cortantes e momento fletor em barras
- Explicitar a relação entre carga e cortante e entre cortante e momento



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>

(Aula 9)

Biblioteca Virtual

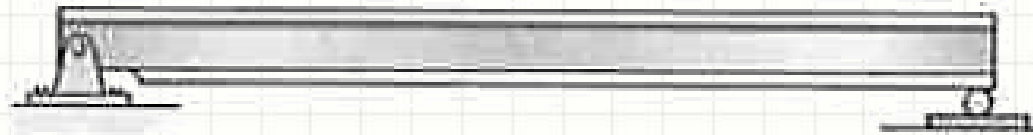
Resistência dos Materiais (Hibbeler) – 5ª Edição
Páginas 199 a 221.



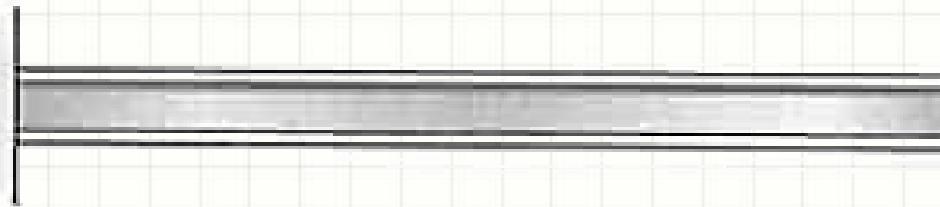
**O QUE SÃO FORÇA CORTANTE E
MOMENTO FLETOR?**

Objeto de Estudo

- Vigas – Cargas perpendiculares ao eixo



Viga simplesmente apoiada



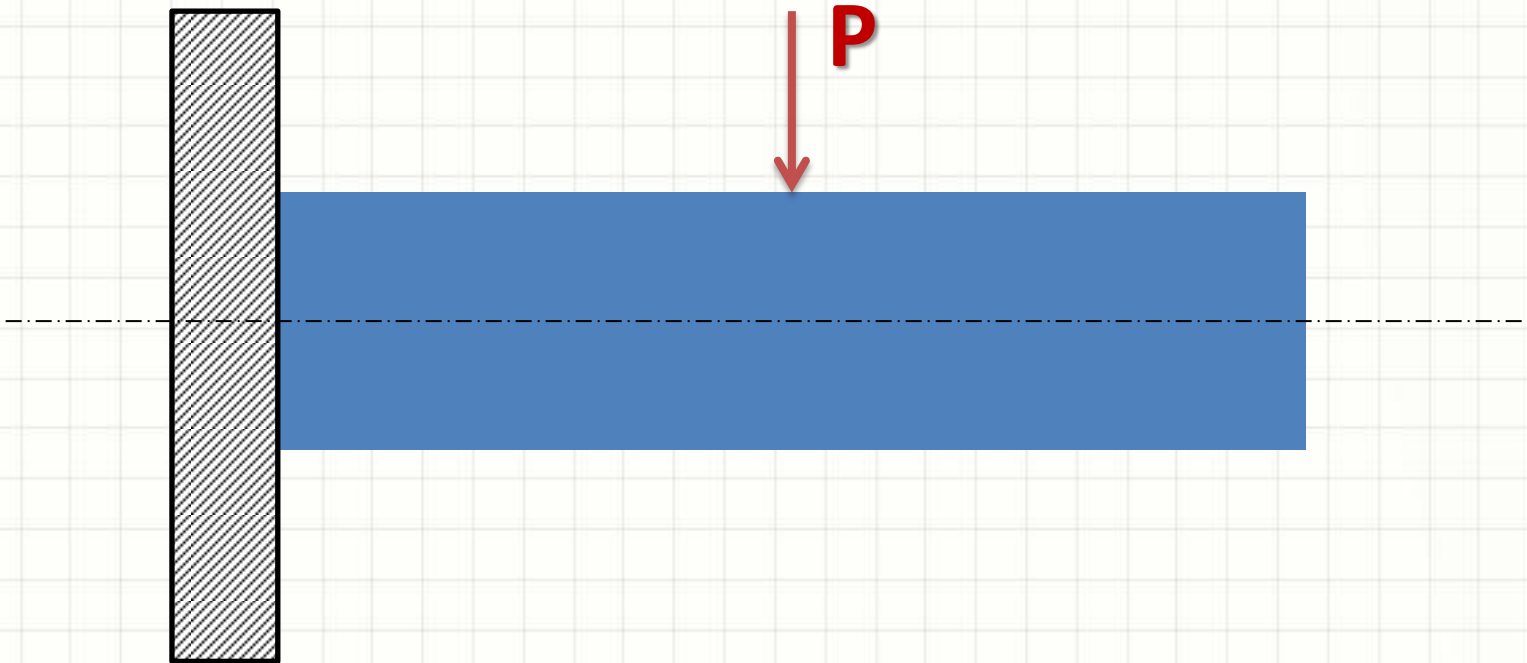
Viga em balanço



Viga apoiada com extremidade em balanço

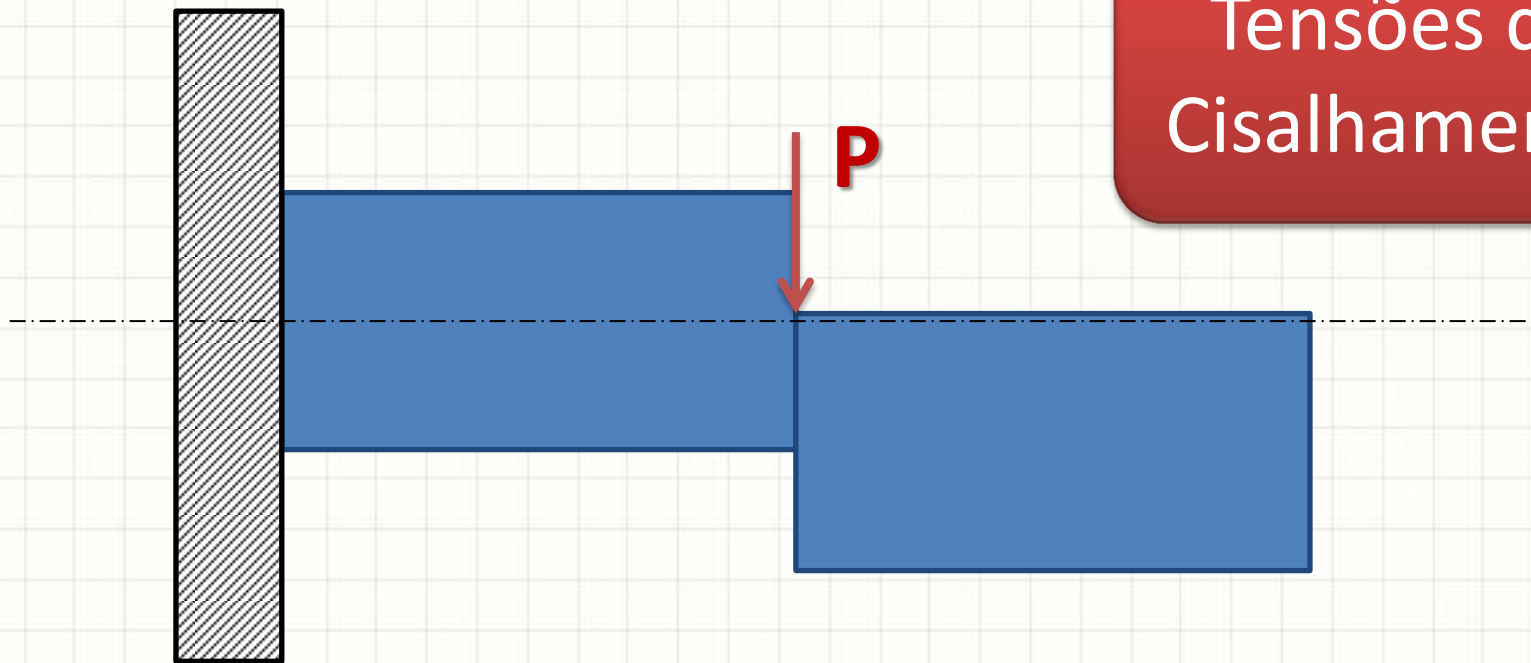
Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Perpendicular ao eixo da barra



Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Perpendicular ao eixo da barra



Tensões de
Cisalhamento

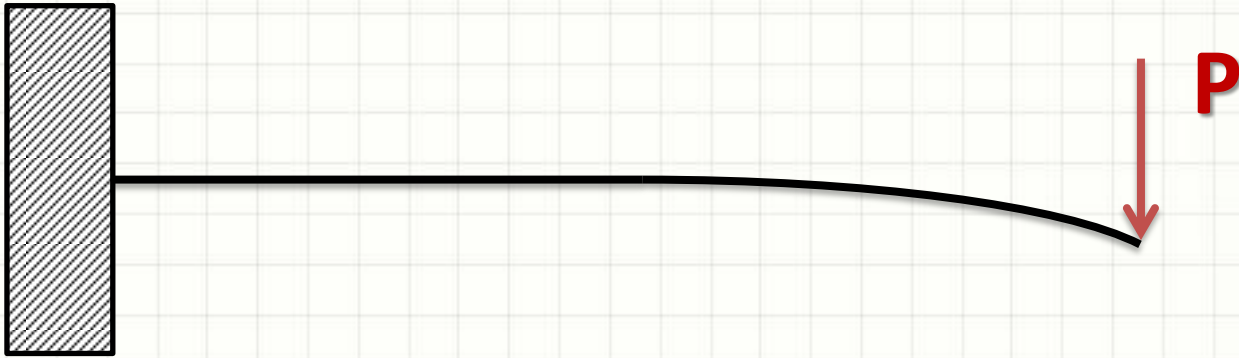
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



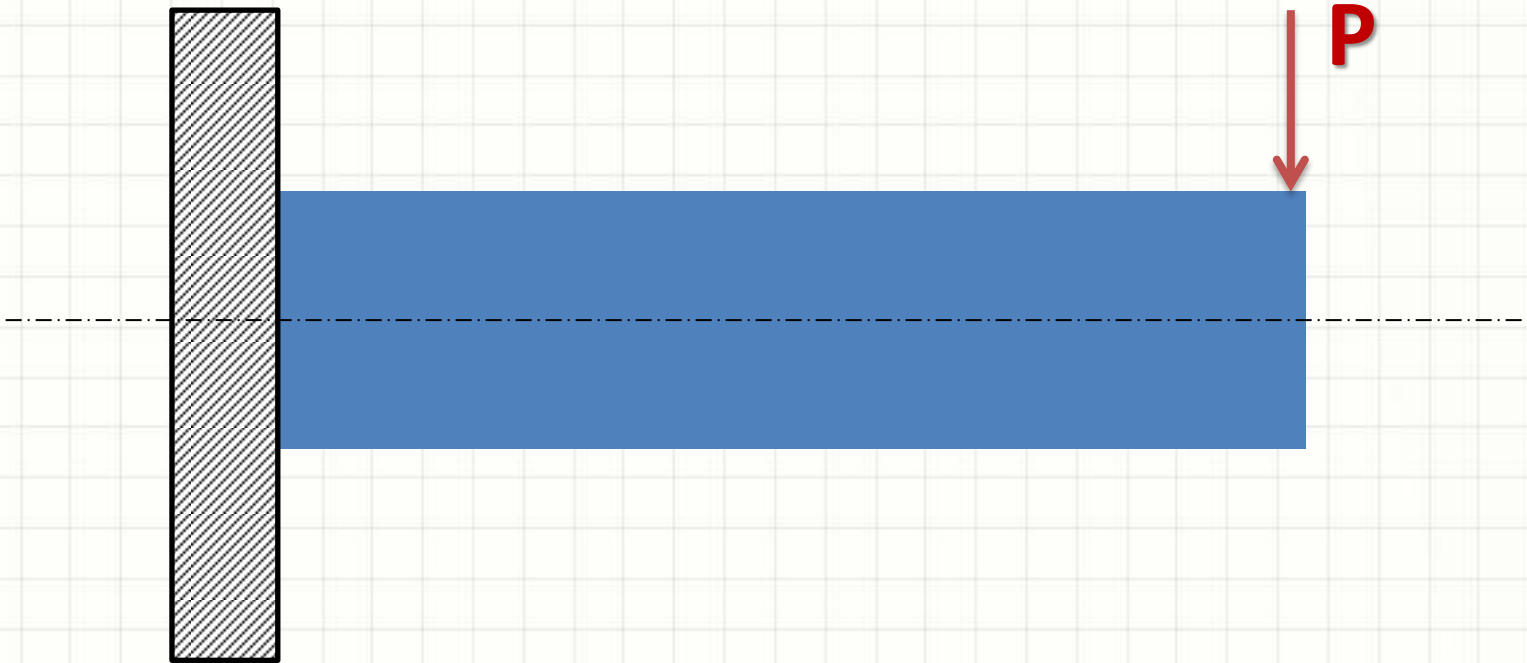
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



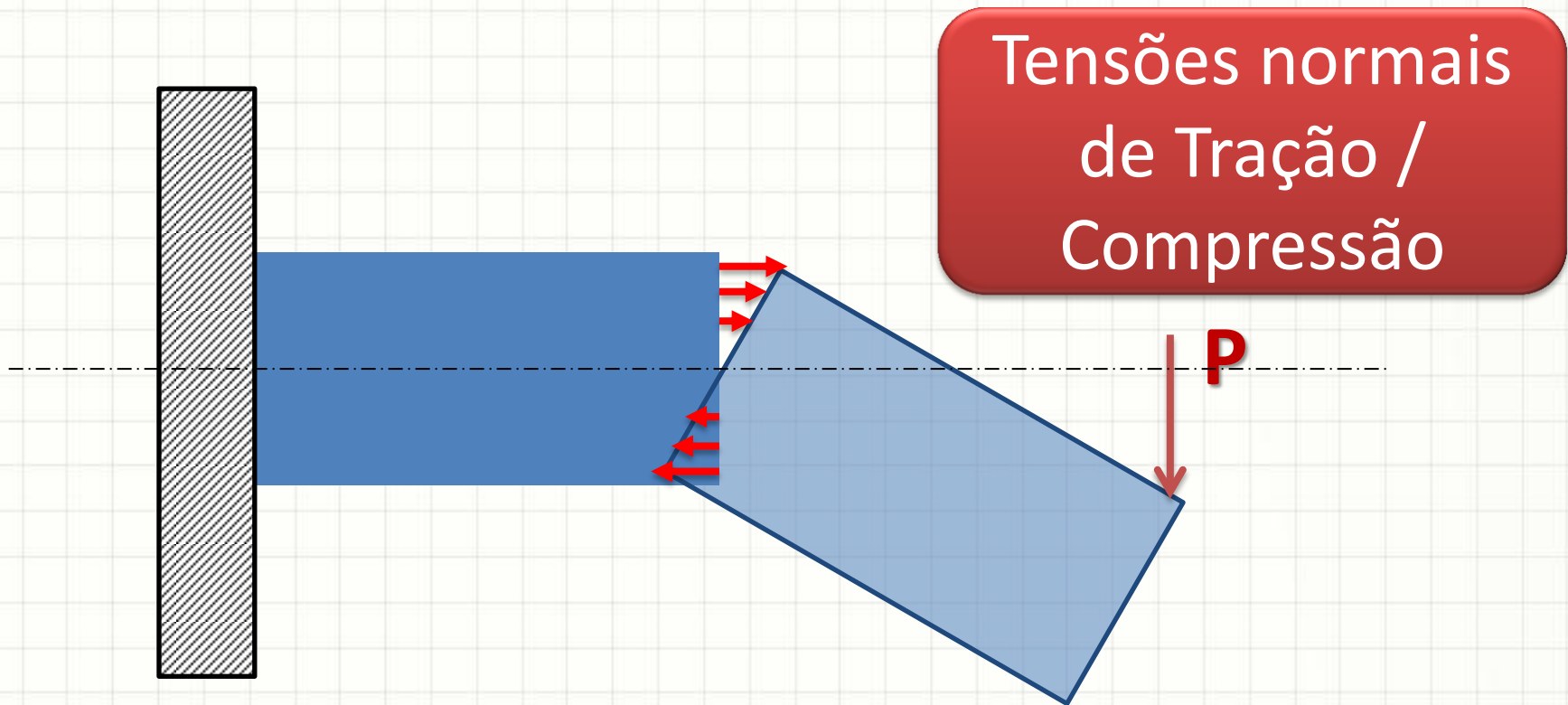
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



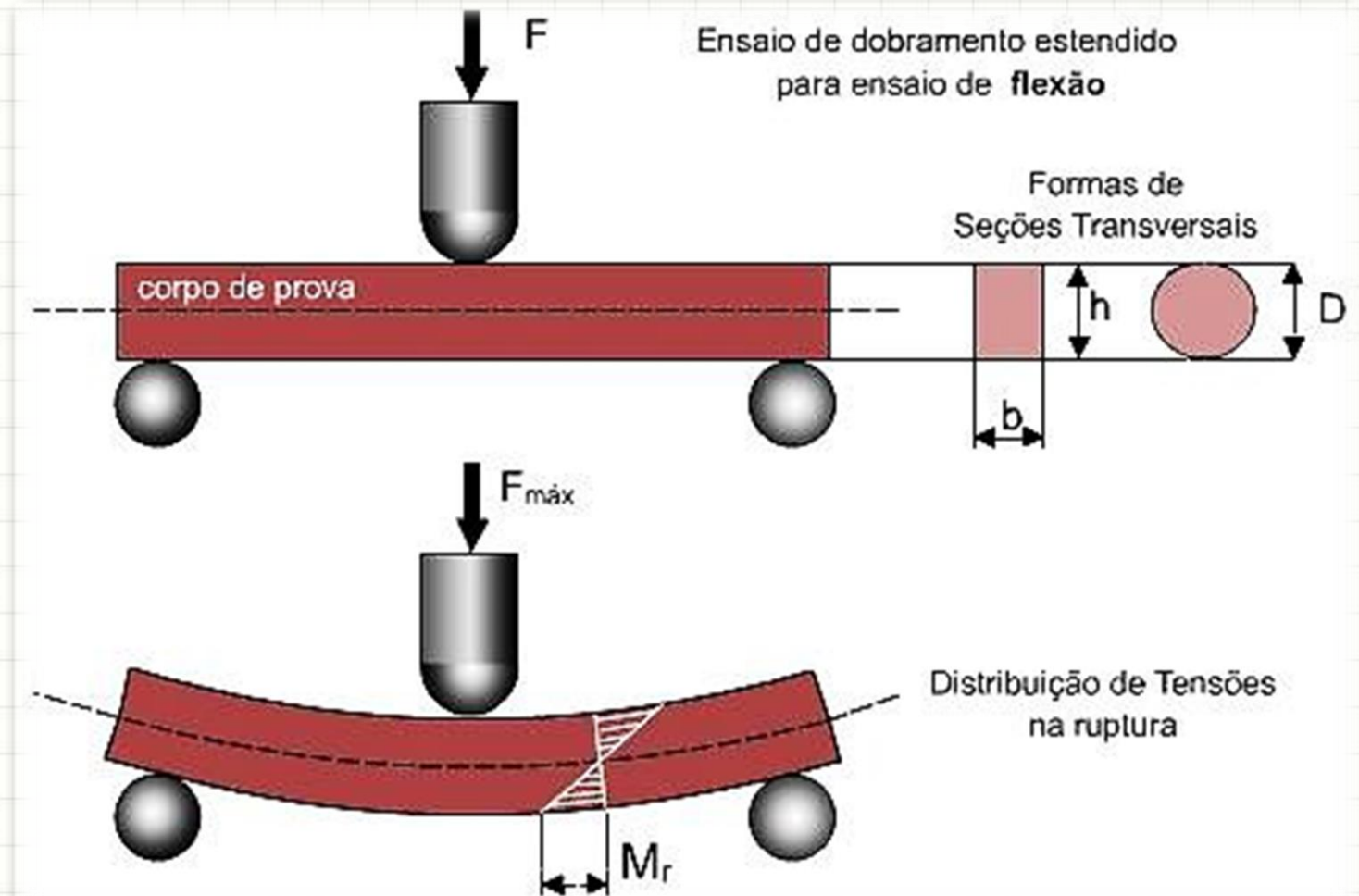
Momento Fletor

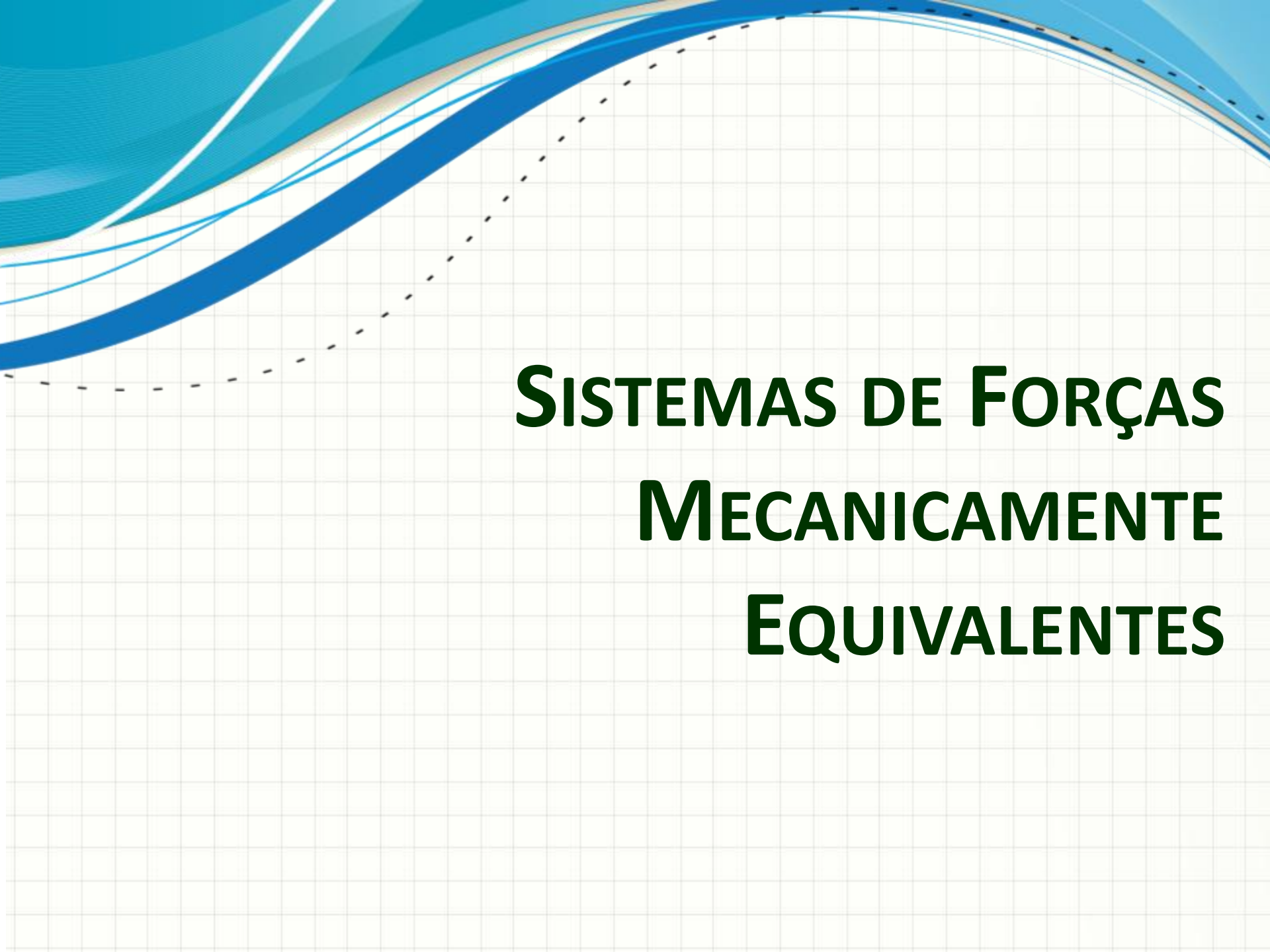
- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



Momento Fletor

- Tensões Normais em viga Bi-Apoiada





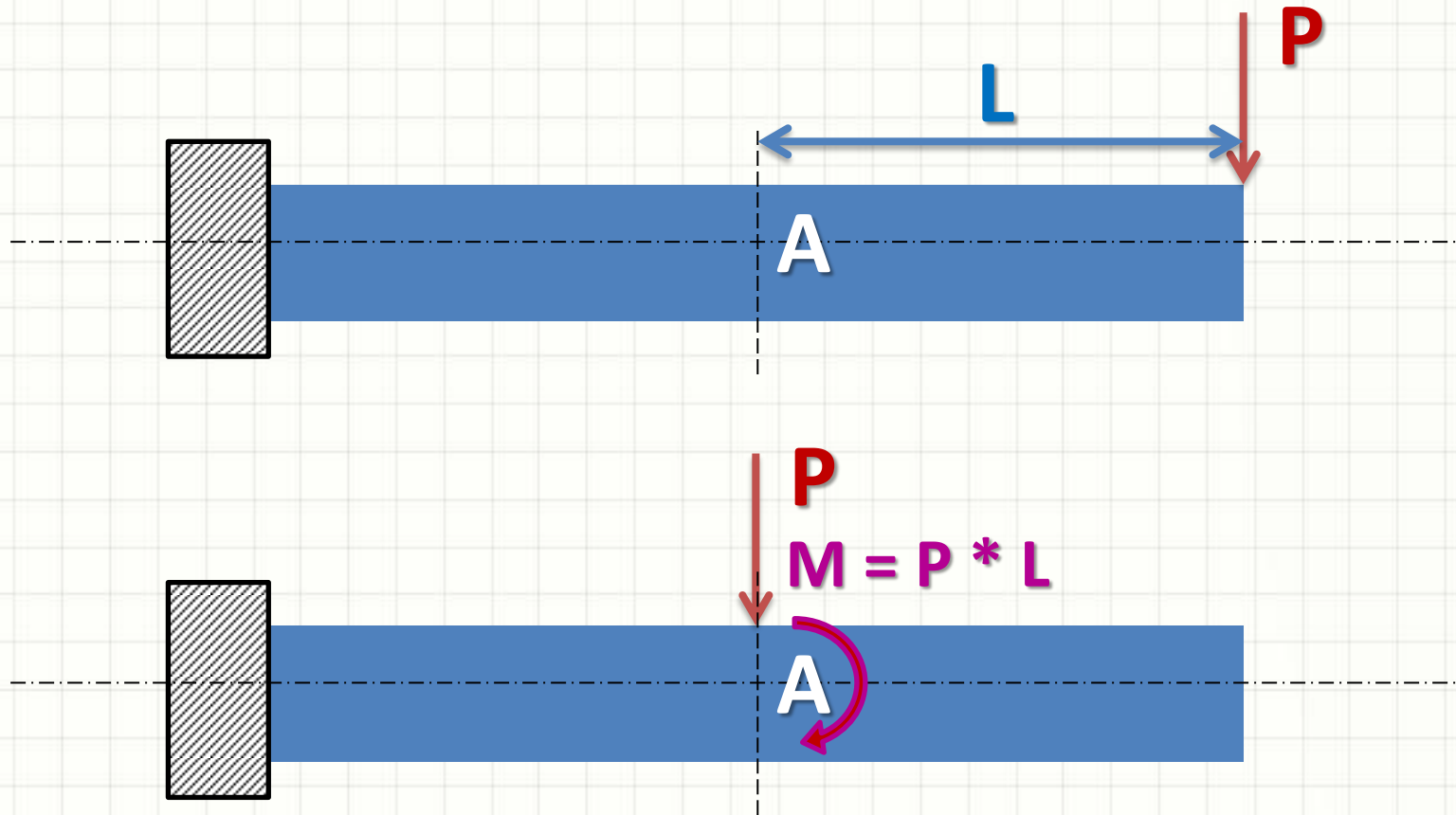
SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES

Sistemas de Forças ME

- Alguns cálculos: muito complexos
 - **Alguns** podem ser simplificados com “truques”
- Em algumas situações, para um dado ponto:
 - Vários sistemas de forças diferentes
 - Mesmos esforços
- Vamos escolher os que simplificam a vida!
 - Apenas para o cálculo!

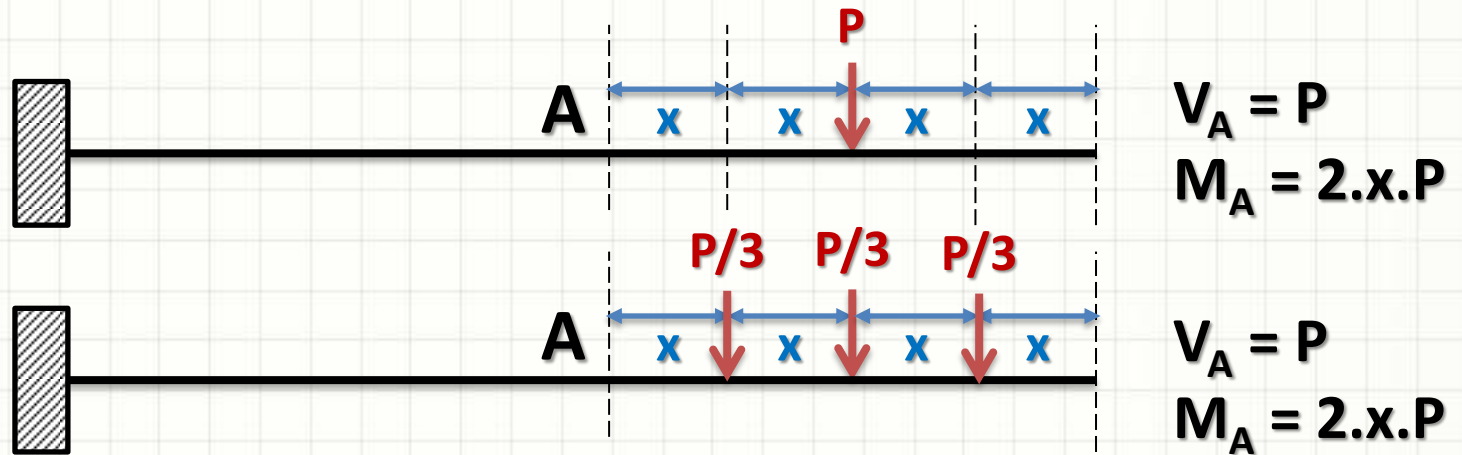
Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



$$V = 3.P/3$$

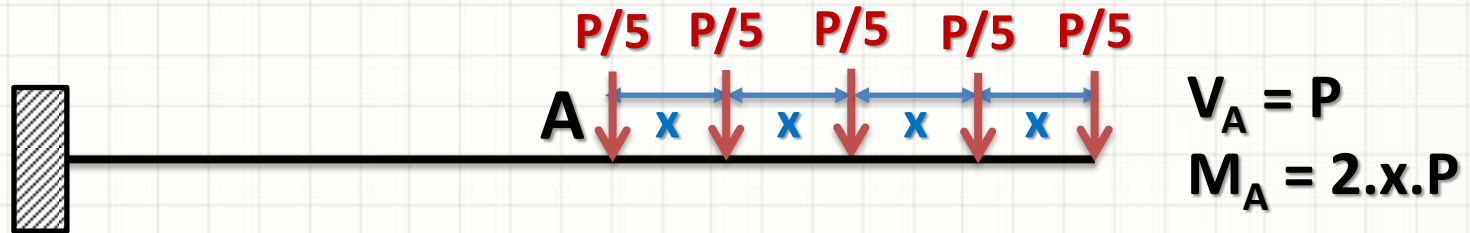
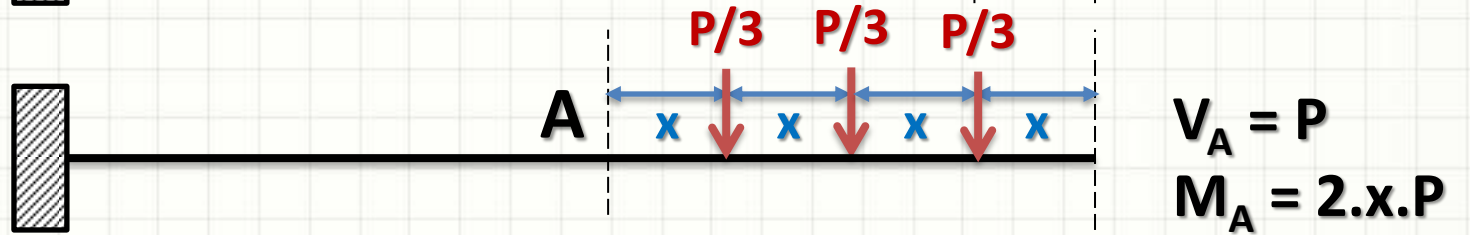
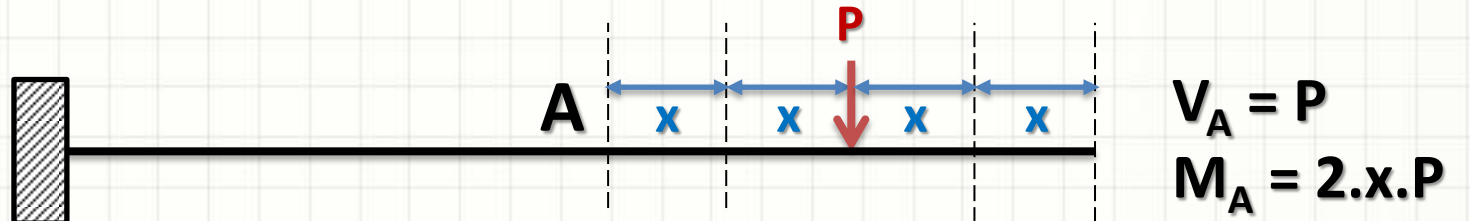
$$M = (P/3).x + (P/3).2.x + (P/3).3.x$$

$$M = 6.x.(P/3)$$

$$M = 2.x.P$$

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



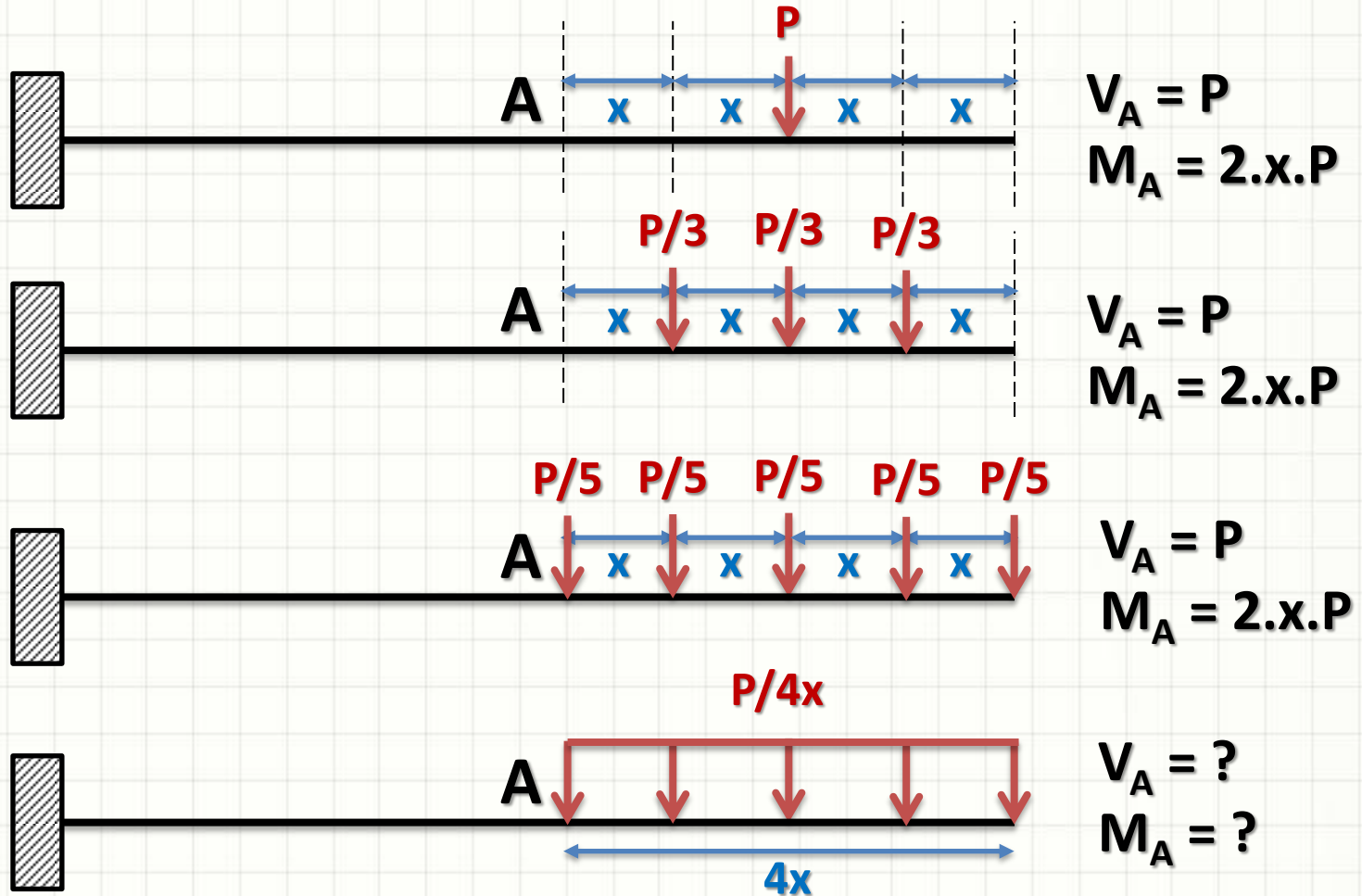
$$V = 5.P/5$$

$$M = (P/5).0 + (P/5).x + (P/5).2.x + (P/5).3.x + (P/5).4.x$$

$$M = 10.x.(P/5)$$

Sistemas de Forças ME

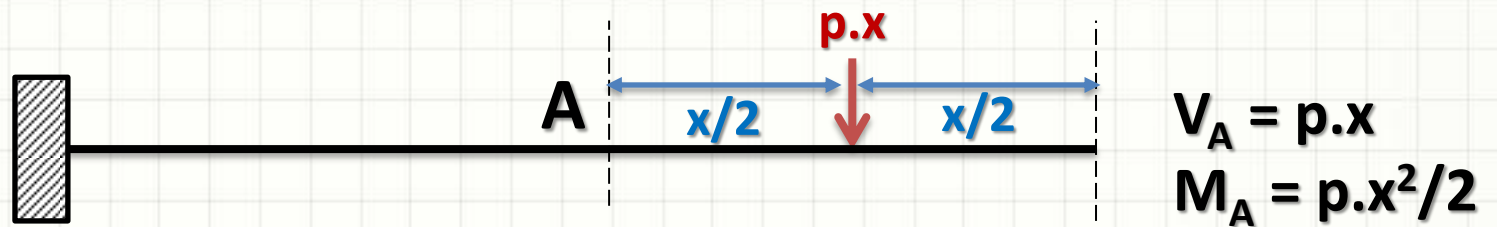
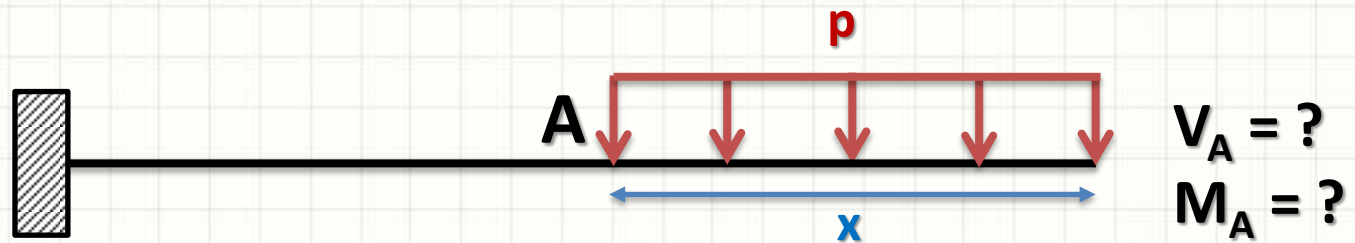
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



$V_A = ?$
 $M_A = ?$

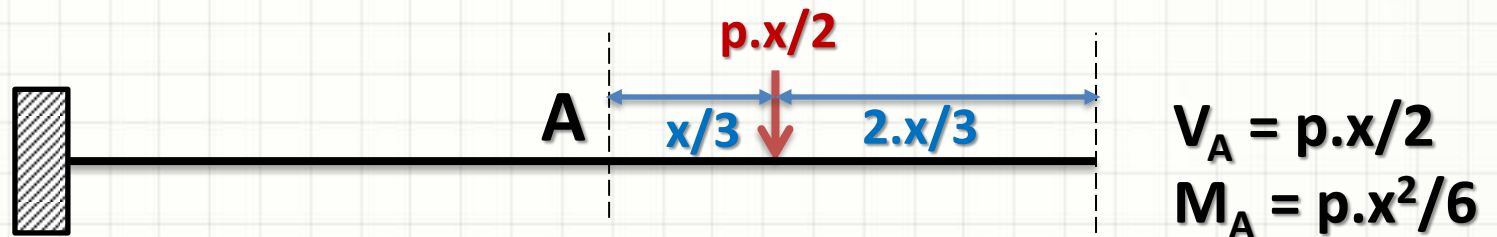
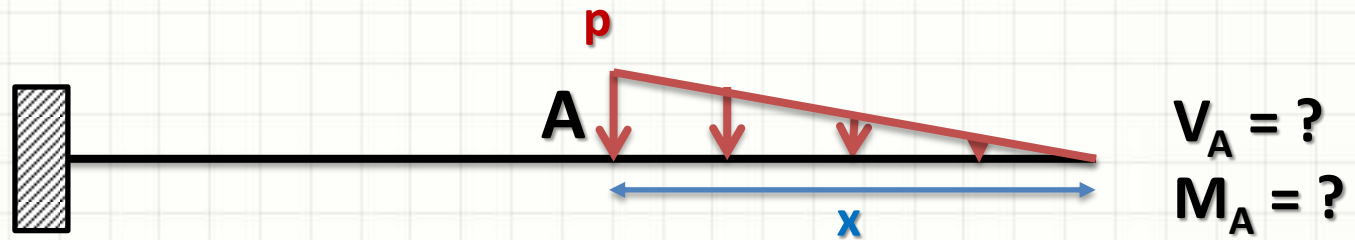
Sistemas de Forças ME

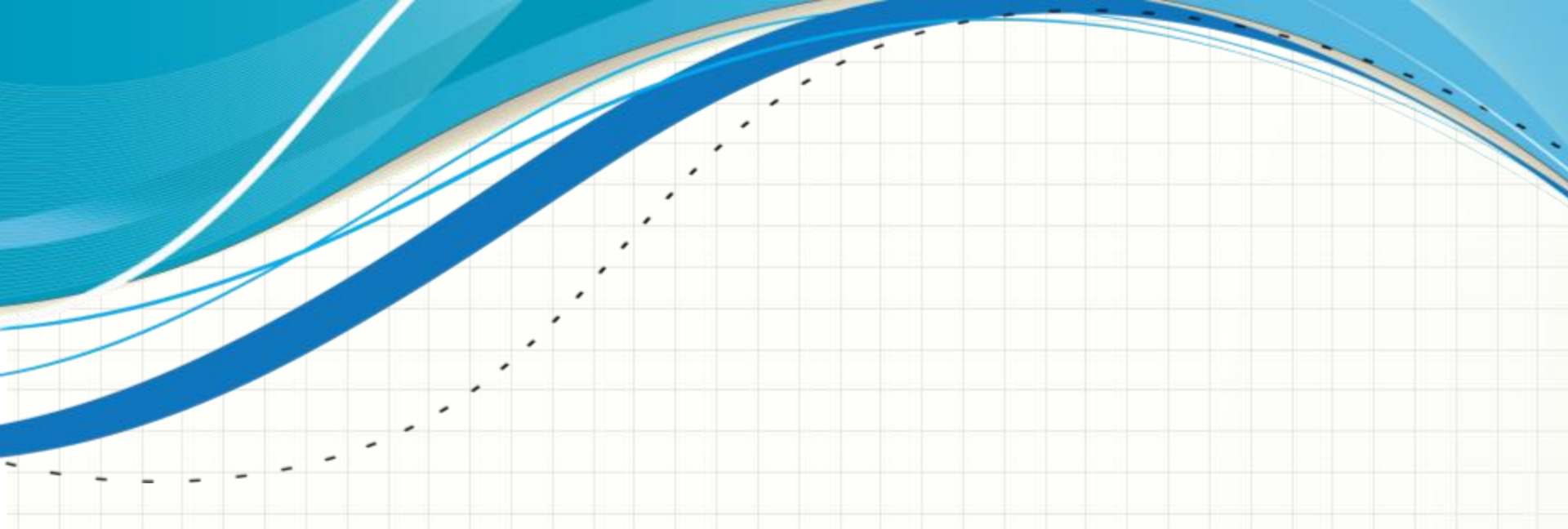
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Sempre no meio?
 - Não, no centro de gravidade!





DIAGRAMAS DE FORÇA CORTANTE

Diagramas de Forças Cortantes

- O que é um diagrama de esforços?
- Diagrama que mostra o valor de cada esforço em cada posição de uma barra
- Usualmente temos 4 diagramas:
 - Esforços Normais (N)
 - Momentos Torçores (T)
 - Esforços Cortantes (V)
 - Momentos Fletores (M)
- N e T são mais simples (já vimos T!)
- Vamos ver V e M agora!

Diagramas de Forças Cortantes

- Mas... por que traçar diagramas de cortante?
 - Cortante pode variar ao longo do comprimento
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação
- Convenção de Sinais
 - Carregamento
 - De cima para baixo: +
 - De baixo para cima: -
 - Cortante
 - Gira sent. Horário: +
 - Gira sent. Anti-Horário: -



Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto "x"?

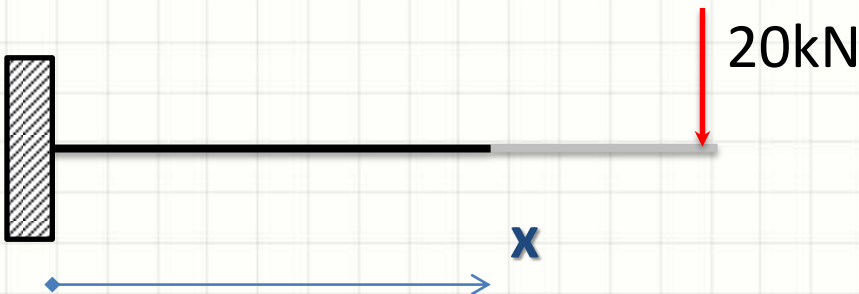


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



Sentido
Horário!

- $V(x) = \text{cte.} = 20\text{kN!}$

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- $V(x) = \text{cte.} = 20\text{kN}$... Sentido horário
- Logo... O diagrama de cortante é

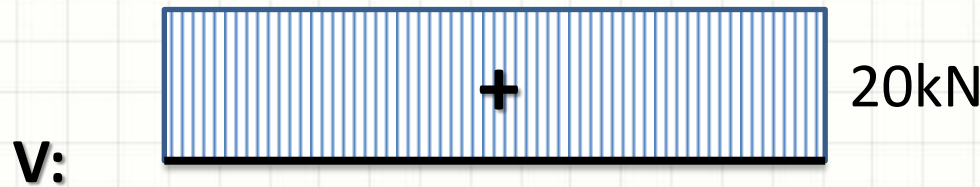
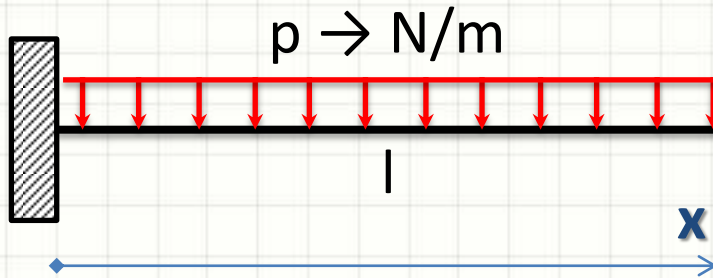
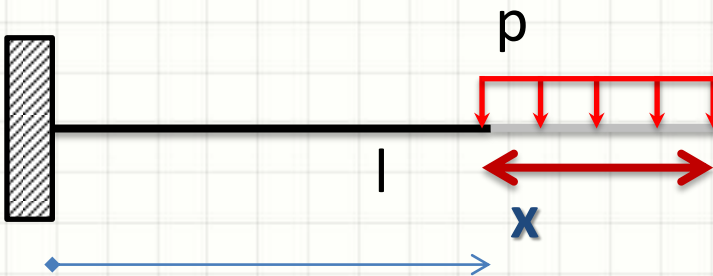


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



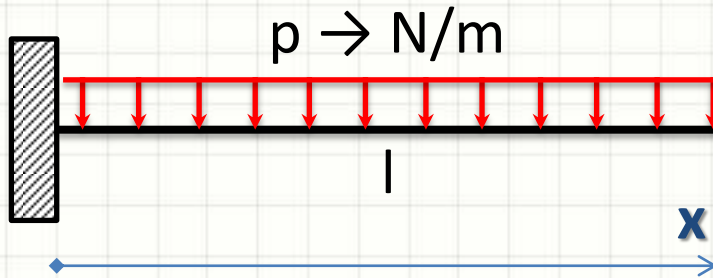
- Qual a força cortante em um ponto “ x ”?



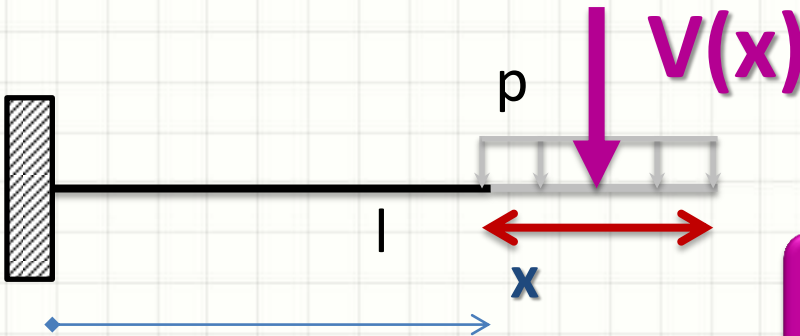
$$l - x$$

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “ x ”?



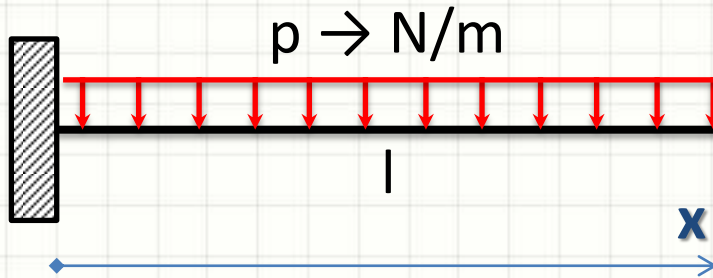
$$l - x$$

$$V(x) = p \cdot (l - x)$$

- $V(x) = p \cdot (l - x) \rightarrow$ sentido horário!

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



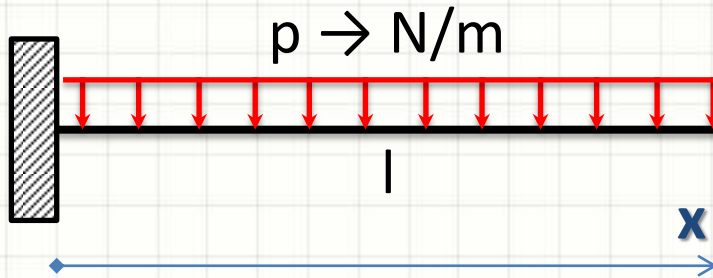
- $V(x) = p \cdot (l - x) \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

V: _____
|

??

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída

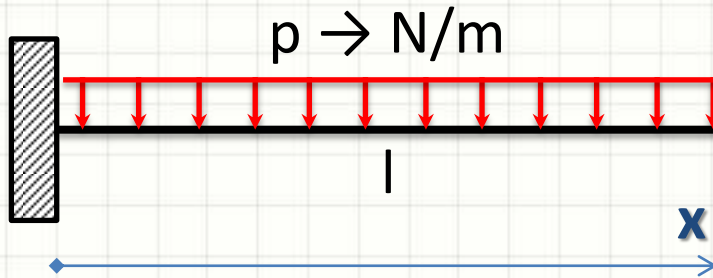


- $V(x) = p \cdot (l - x) \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...



Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- $V(x) = p \cdot (l - x) \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

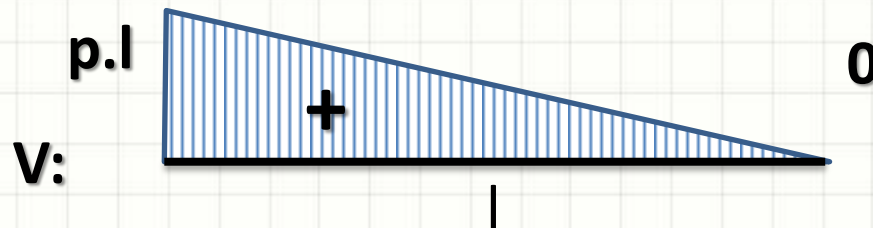
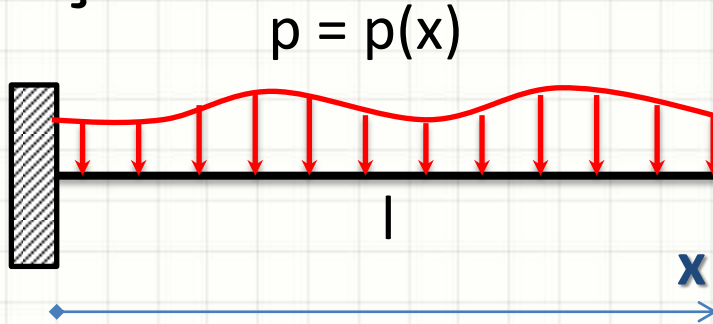


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual a força cortante de a até b ?

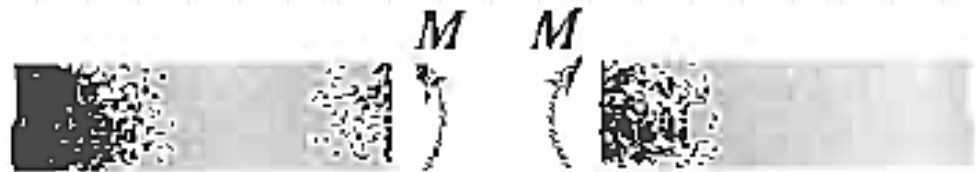
$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$



DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR

Diagramas de Momentos Fletores

- Por que traçar diagramas de momento?
 - Momento usualmente varia ao longo da viga
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação
- Convenção de Sinais
 - Momento Positivo
 - Traciona parte inferior
 - Momento Negativo
 - Traciona parte superior



Momento interno positivo

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?

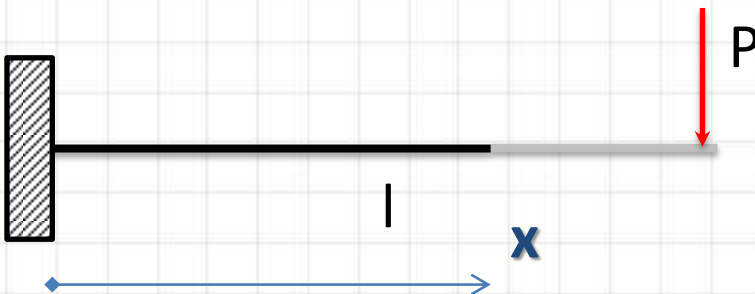
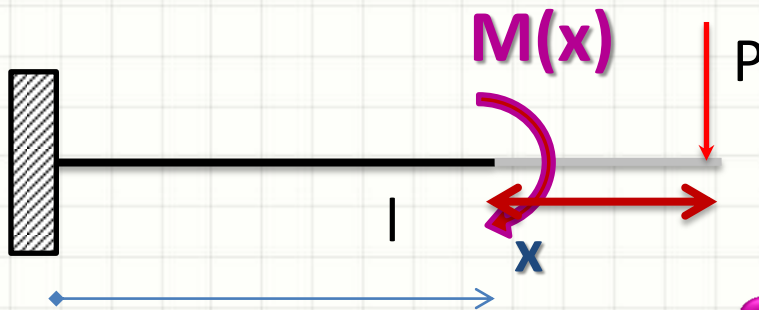


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?



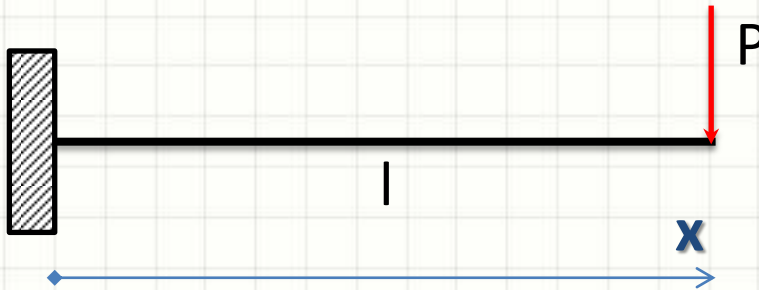
$$l - x$$

O sinal vem do fato que traciona em cima!

$$M(x) = -P \cdot (l - x)$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot (l - x) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

M: _____
|

??

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot (l - x) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

??

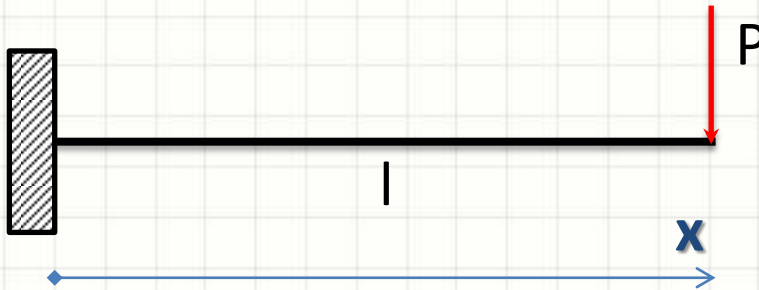
0

M:



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot (l - x) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

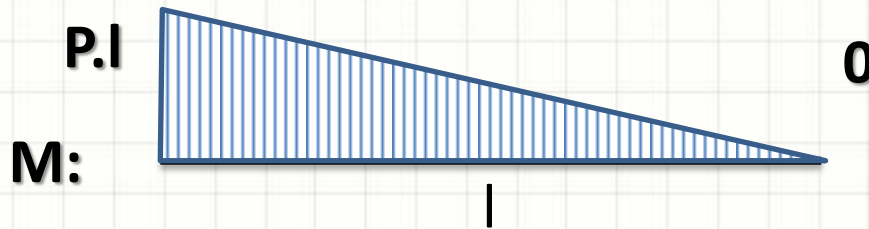
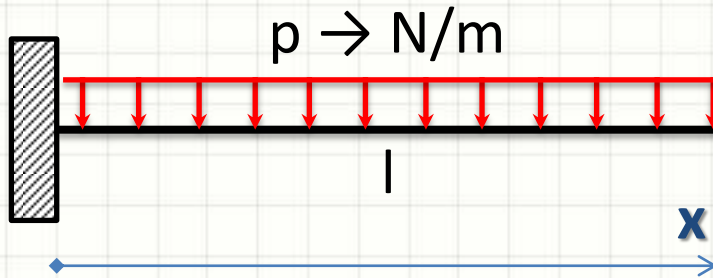
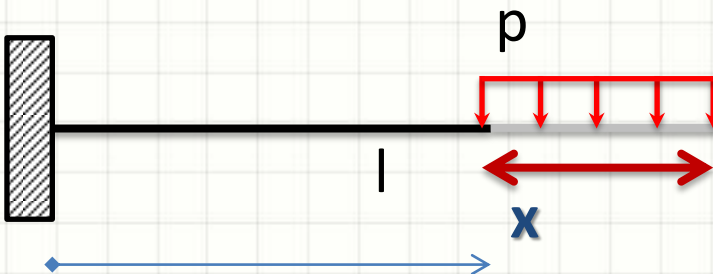


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



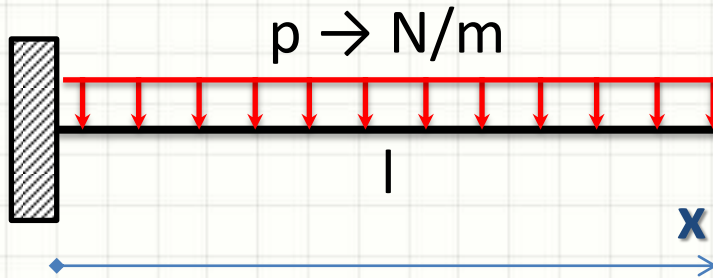
- Qual a força cortante total em “ x ”?



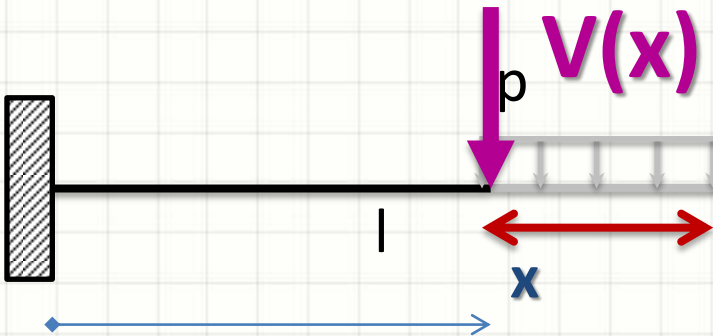
$$l - x$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “ x ”?



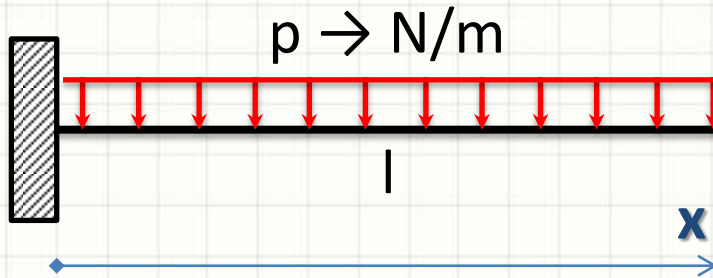
$$l - x$$

$$V(x) = p \cdot (l - x)$$

- Mas e o momento em “ x ”?

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “x”?

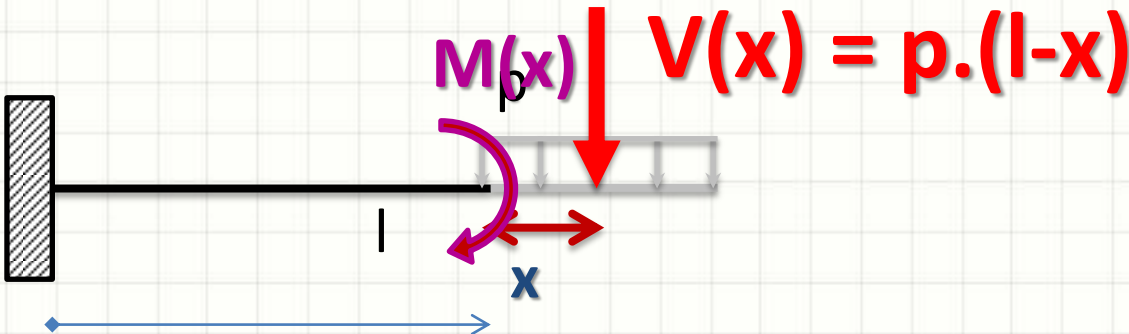
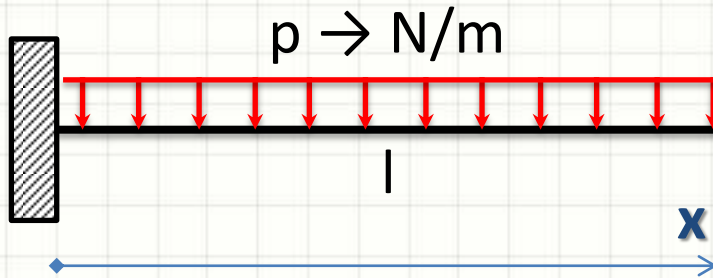
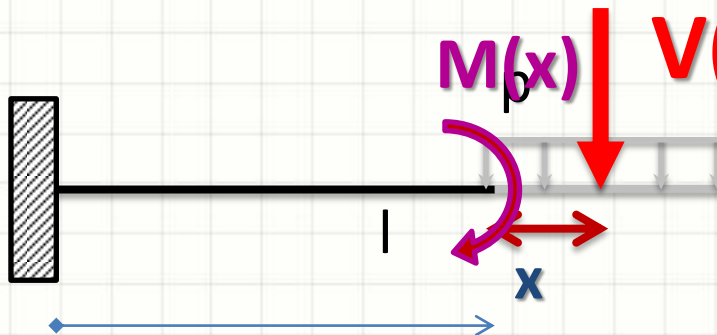


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “ x ”?



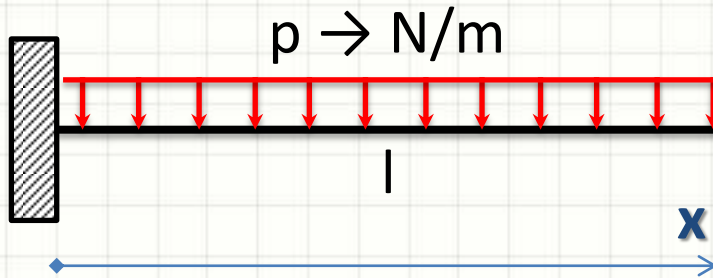
$$V(x) = p \cdot (l - x)$$

$$(l - x)/2$$

$$M(x) = -p \cdot (l - x) \cdot (l - x)/2$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



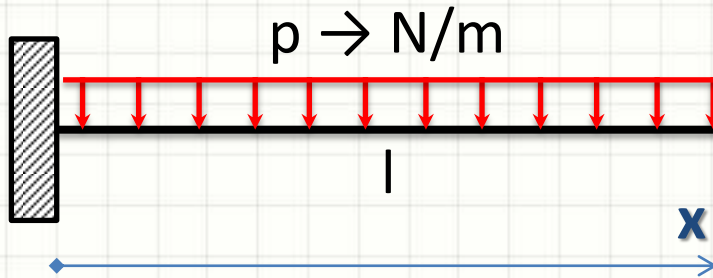
- $M(x) = - p \cdot (l - x)^2 / 2 \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

M: _____
|

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - p \cdot (l - x)^2 / 2 \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

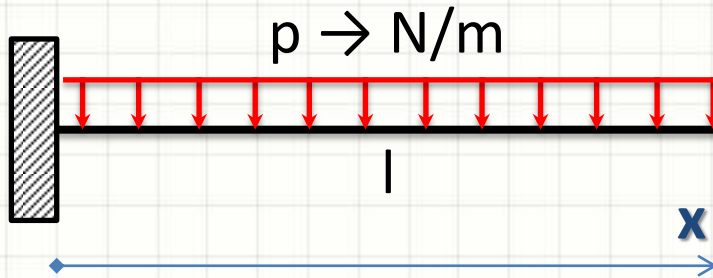
??

0

M: _____
|

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



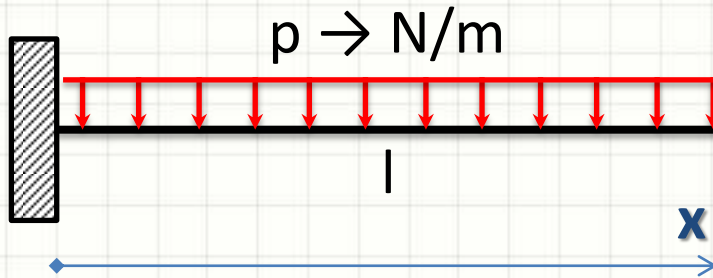
- $M(x) = -p \cdot (l - x)^2 / 2 \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



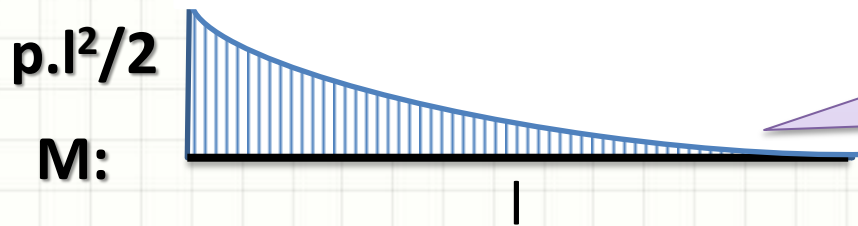
???

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



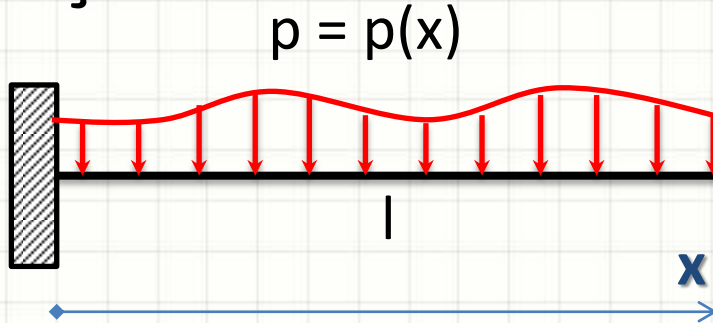
- $M(x) = -p \cdot (l - x)^2 / 2 \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



“Boca para cima”
porque o sinal
de x^2 é positivo!

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual o momento de a até b ?

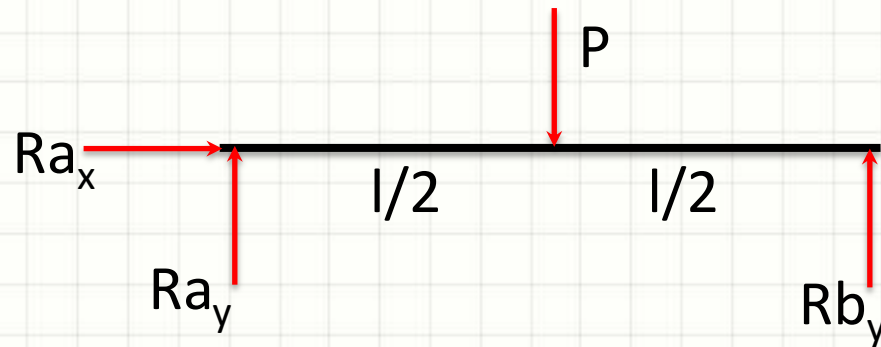
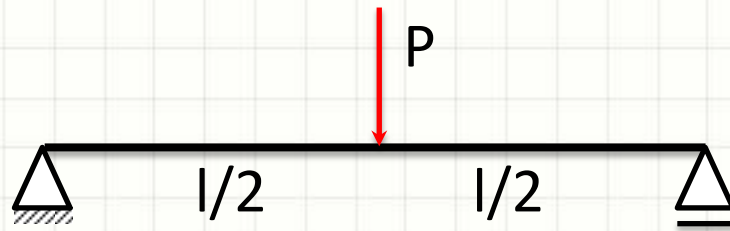
$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$

- Cuidado com o sinal!



DIAGRAMAS EM VIGAS BIAPOIADAS

Diagramas em Vigas – 1) Reações



$$Ra_y = Rb_y = \frac{P}{2}$$

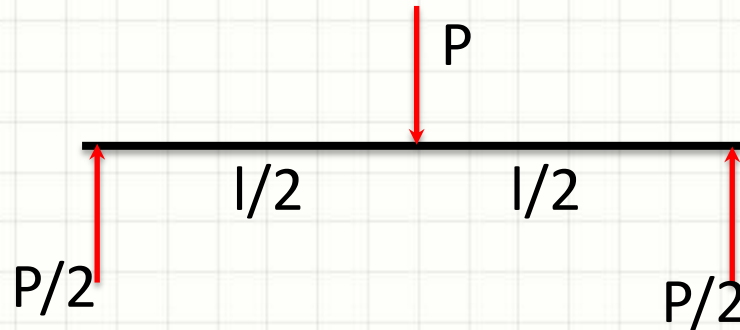
- $\sum F_x = 0$
- $\sum F_y = 0$
- $\sum M_a = 0$

$$\mathbf{Ra_x = 0}$$

$$P - Ra_y - Rb_y = 0$$

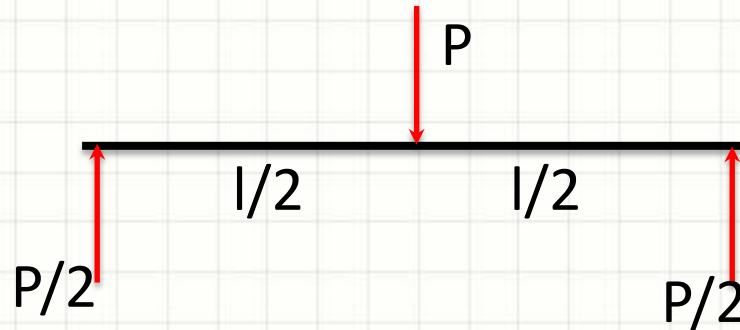
$$Rb_y \cdot l - P \cdot l/2 = 0$$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $V(x) = -P/2$
- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $V(x) = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x) - P \cdot (\frac{l}{2} - x)$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$V(x) = -P/2$$

- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$V(x) = \frac{P}{2}$$

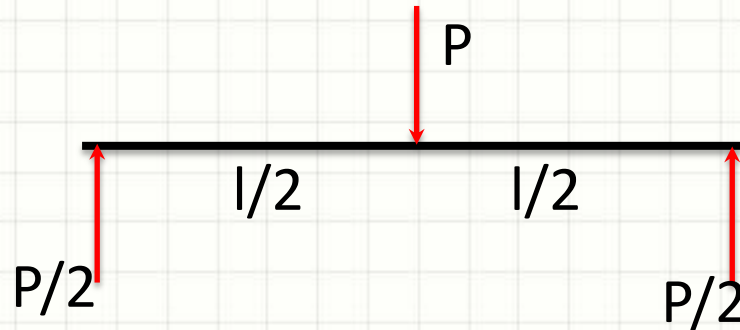
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$

- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

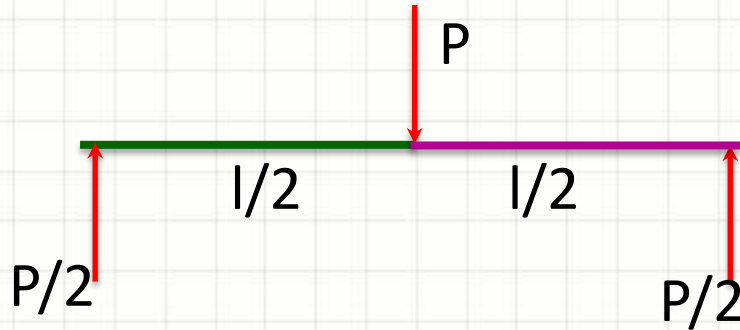
$$M(x) = \frac{P \cdot l}{2} - \frac{P \cdot x}{2} - \frac{P \cdot l}{2} + P \cdot x$$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $V(x) = -P/2$
- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $V(x) = \frac{P}{2}$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$

Diagramas em Vigas – 3) Diagramas

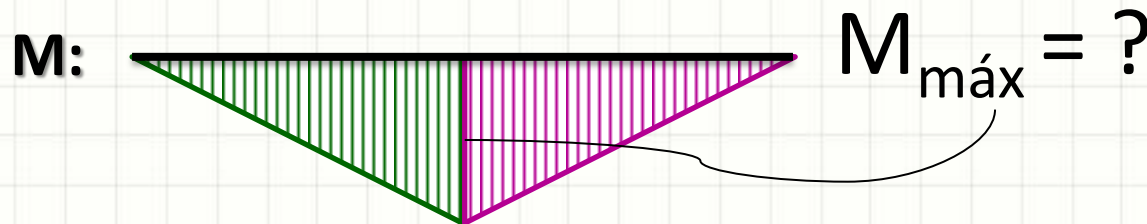
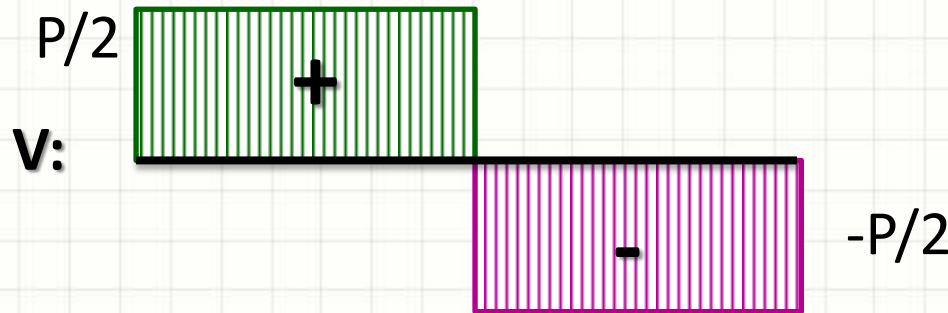


$$V(x) = -P/2$$

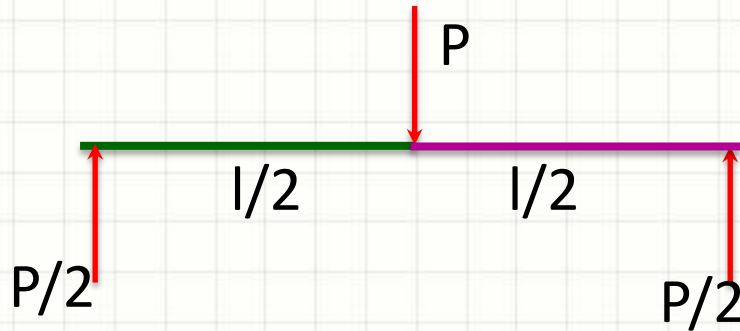
$$V(x) = \frac{P}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$

$$M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$$



Diagramas em Vigas – 3) Diagramas

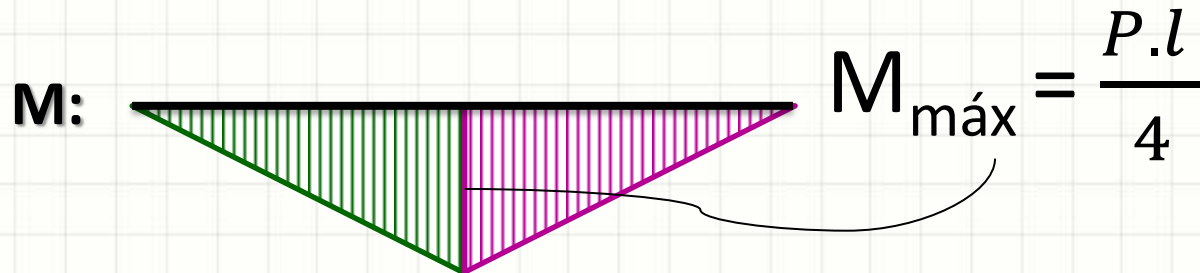
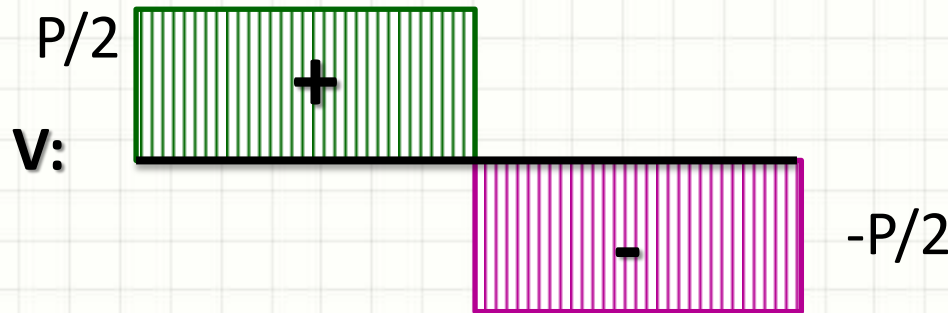


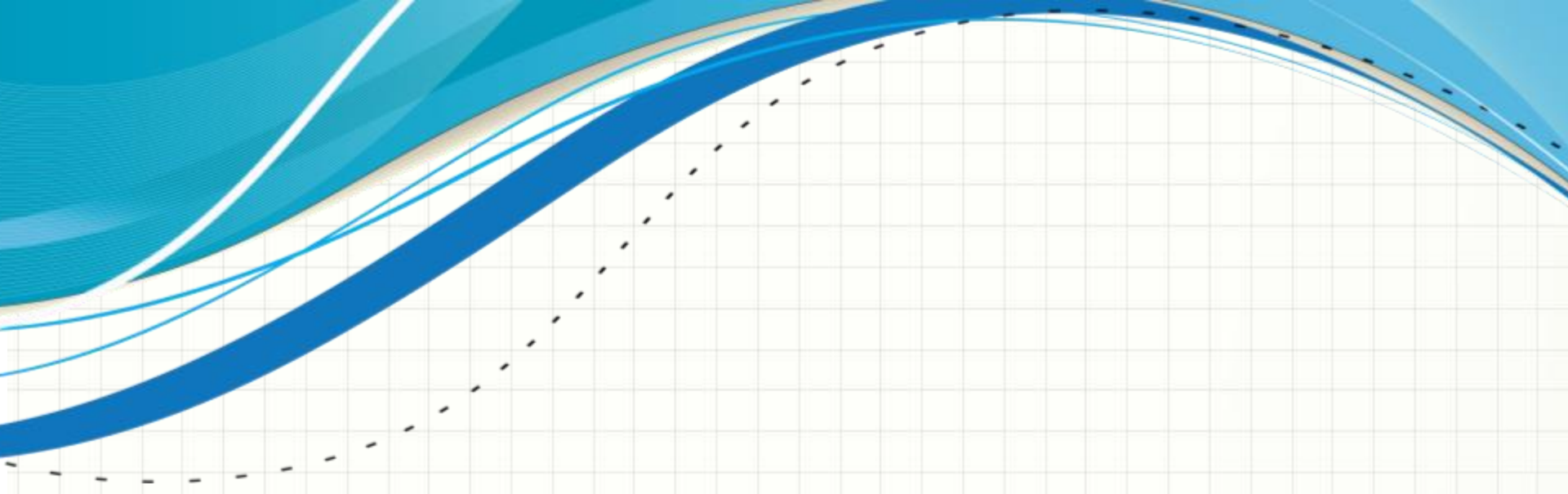
$$V(x) = -P/2$$

$$V(x) = \frac{P}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$

$$M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$$

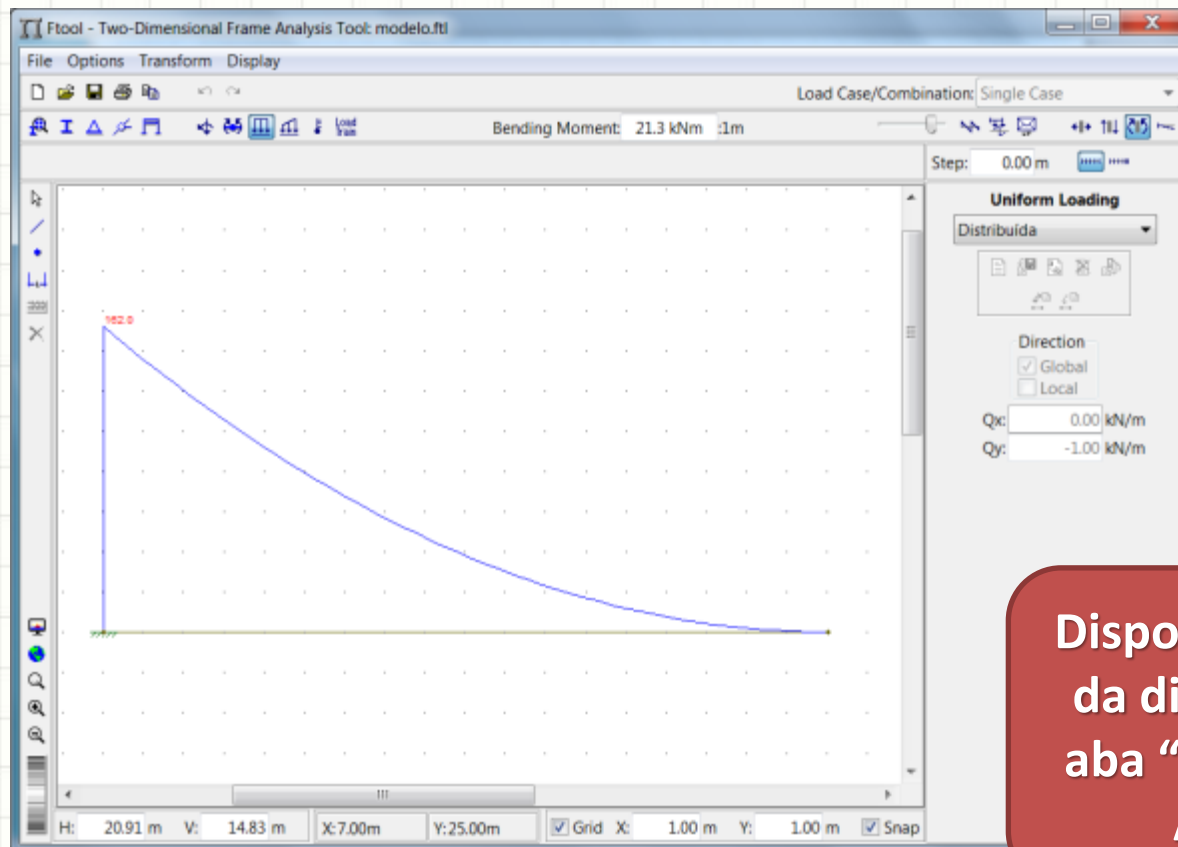





FTOOL

FTool

- Programa de auxílio no aprendizado
 - Construir estruturas simples e verificar diagramas

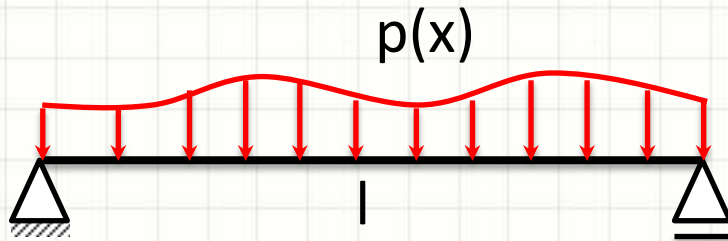


Disponível no site da disciplina, na aba "Material de Apoio"



**RELAÇÃO ENTRE CARGA
DISTRIBUÍDA, CORTANTE E
MOMENTO EM VIGAS
BIAPOIADAS**

Equações: Carregamento Qualquer



Área sob a curva da carga distribuída

$$p(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = \int -p(x) \cdot dx$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$

$$M = \int V(x) \cdot dx$$

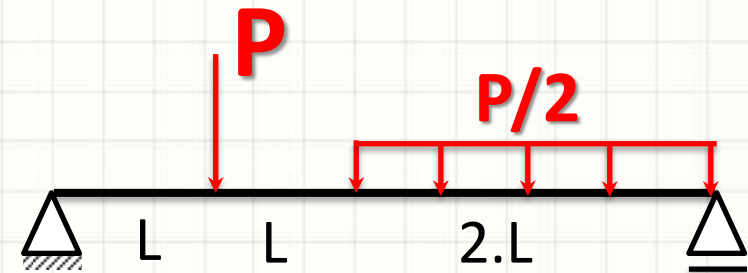
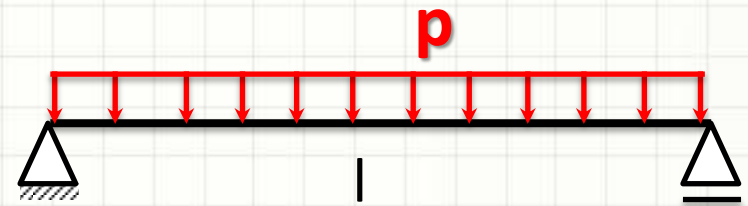
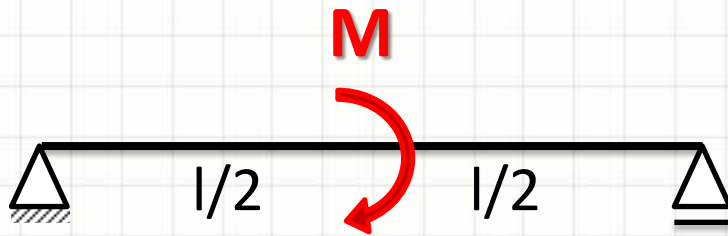
Área sob a curva do diagrama de cortante



EXEMPLOS

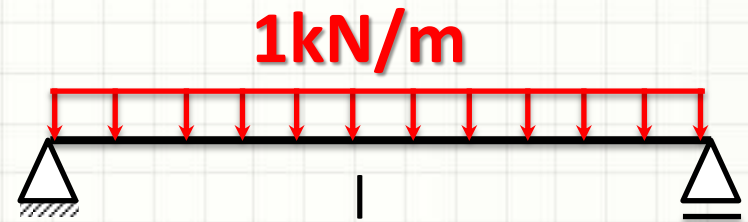
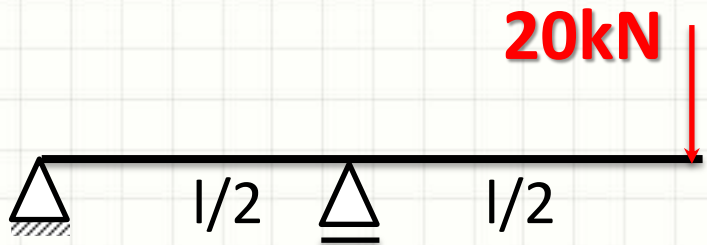
Exemplo

- Discutir intuitivamente diagramas de momento e cortante das vigas abaixo:



Exemplo

- Calcular, para $l = 2\text{m}$:

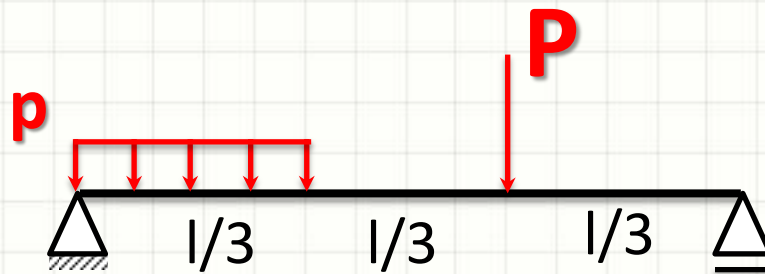




EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- Trace, intuitivamente os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo, sabendo que P é muito maior que p (P é da ordem de **10x** maior que a p total aplicada):





PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 216 a 221
- Mínimos:
 - Exercícios 6.1, 6.3, 6.14, 6.24
- Extras:
 - Exercícios 6.5, 6.17, 6.21, 6.27
- Adote essas conversões:
 - 1 ksi = 7MPa
 - 1 pol = 25mm
 - 1 lb = 4,5N
 - 1hp = 1000W
 - 1lb/pé = 15 N/m

Para Treinar em Casa

Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.



CONCLUSÕES

Resumo

- A partir das cargas podemos determinar:
 - Cortante em qualquer ponto da viga
 - Momento em qualquer ponto da viga
- Os diagramas permitem encontrar facilmente
 - Pontos de maior solicitação

- **Exercitar**
 - **Exercícios Hibbeler**

Próxima Aula



- Como é a deformação por momento fletor?
- Como é a distribuição de tensões dentro da viga?



PERGUNTAS?



**BOM DESCANSO
A TODOS!**