Resistência dos Materiais II

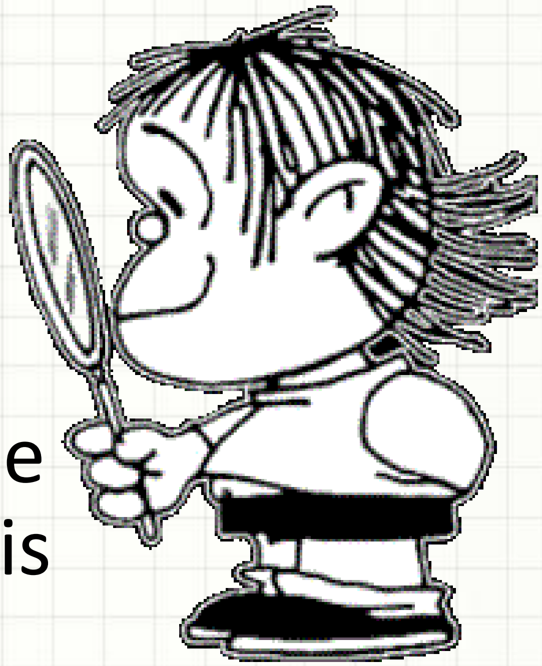
Momento de Inércia

Prof. Dr. Daniel Caetano

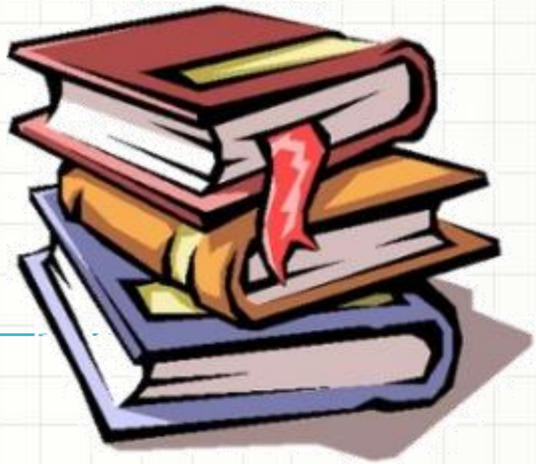
2013 - 2

Objetivos

- Apresentar os conceitos:
  - Momento de inércia
  - Momento polar de inércia
  - Produto de Inércia
  - Eixos Principais de Inércia
- Calcular propriedades geométricas com relação a quaisquer eixos
- Determinar os eixos principais e calcular os momentos principais de inércia



Material de Estudo



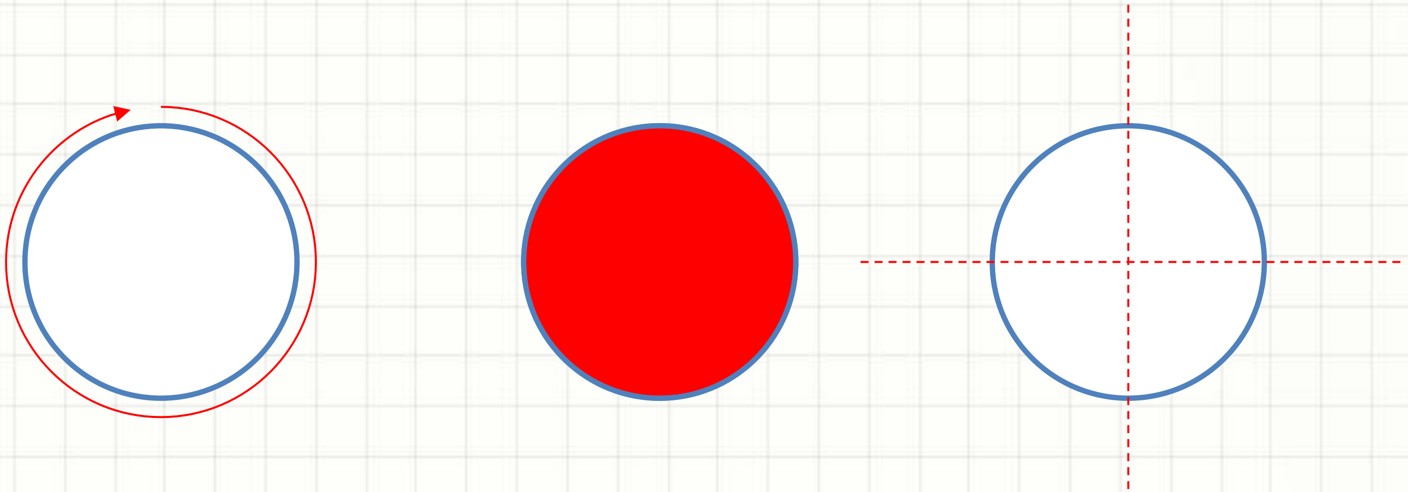
Material	Acesso ao Material
Notas de Aula	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II - Aula 2)
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II - Aula 2)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Beer, Johnston, Dewolf), páginas 728 a 732
Resistência dos Materiais (Hibbeler)	Biblioteca Virtual, 5ª edição: páginas 613 a 620, 7ª edição: páginas páginas 570 a 576.

Relembrando:

A Forma dá o Tom

Características das Figuras Planas

- Perímetro
- Área
- Momento Estático → cálculo do centroide
- Momento de Inércia...
  - Mas antes, vamos relembrar um pouco!



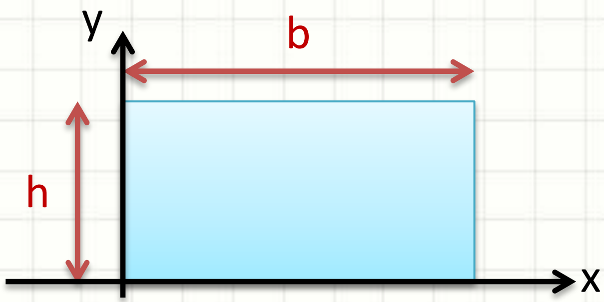
Momento Estático

- Cálculo do Momento Estático

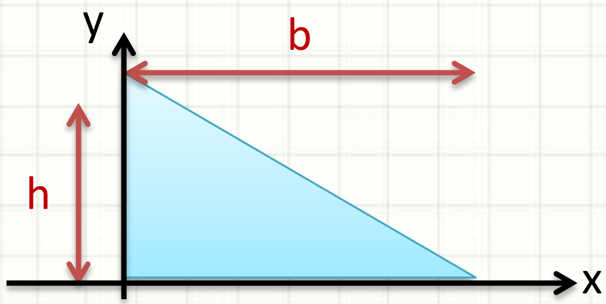
$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

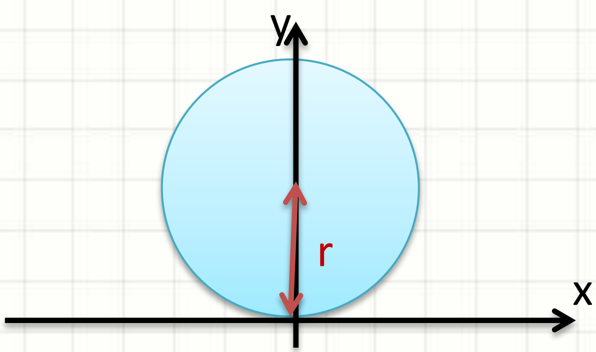
Momentos Estáticos



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2} \qquad S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$

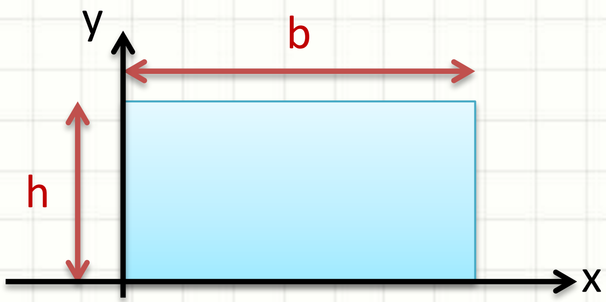


$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

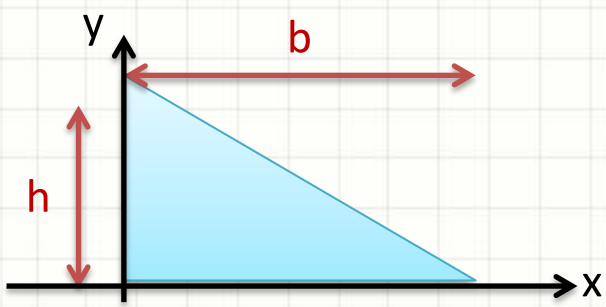


$$S_x = \pi \cdot r^3 \qquad S_y = 0$$

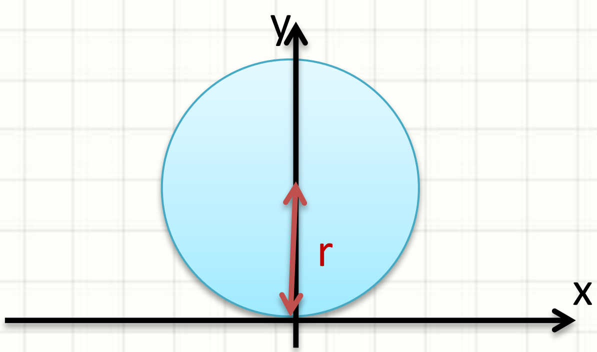
Distância ao Centro de Gravidade



$$\bar{y} = y_g = \frac{h}{2} \qquad \bar{x} = x_g = \frac{b}{2}$$

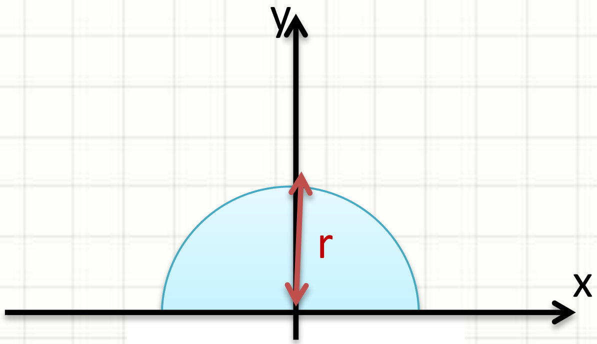


$$\bar{y} = y_g = \frac{h}{3} \qquad \bar{x} = x_g = \frac{b}{3}$$

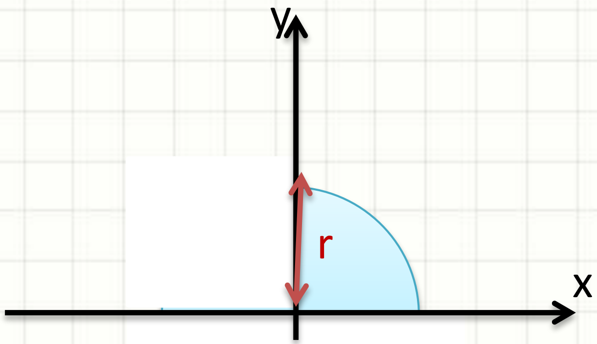


$$\bar{y} = y_g = r \qquad \bar{x} = x_g = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



$$\bar{y} = y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \qquad \bar{x} = x_g = 0$$



$$\bar{y} = y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \qquad \bar{x} = x_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

Resolução do Exercício

Momento de Inércia

Momento de Inércia

- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)
  - $S = A \cdot d$
  - Mede ação da distribuição de massa de um corpo

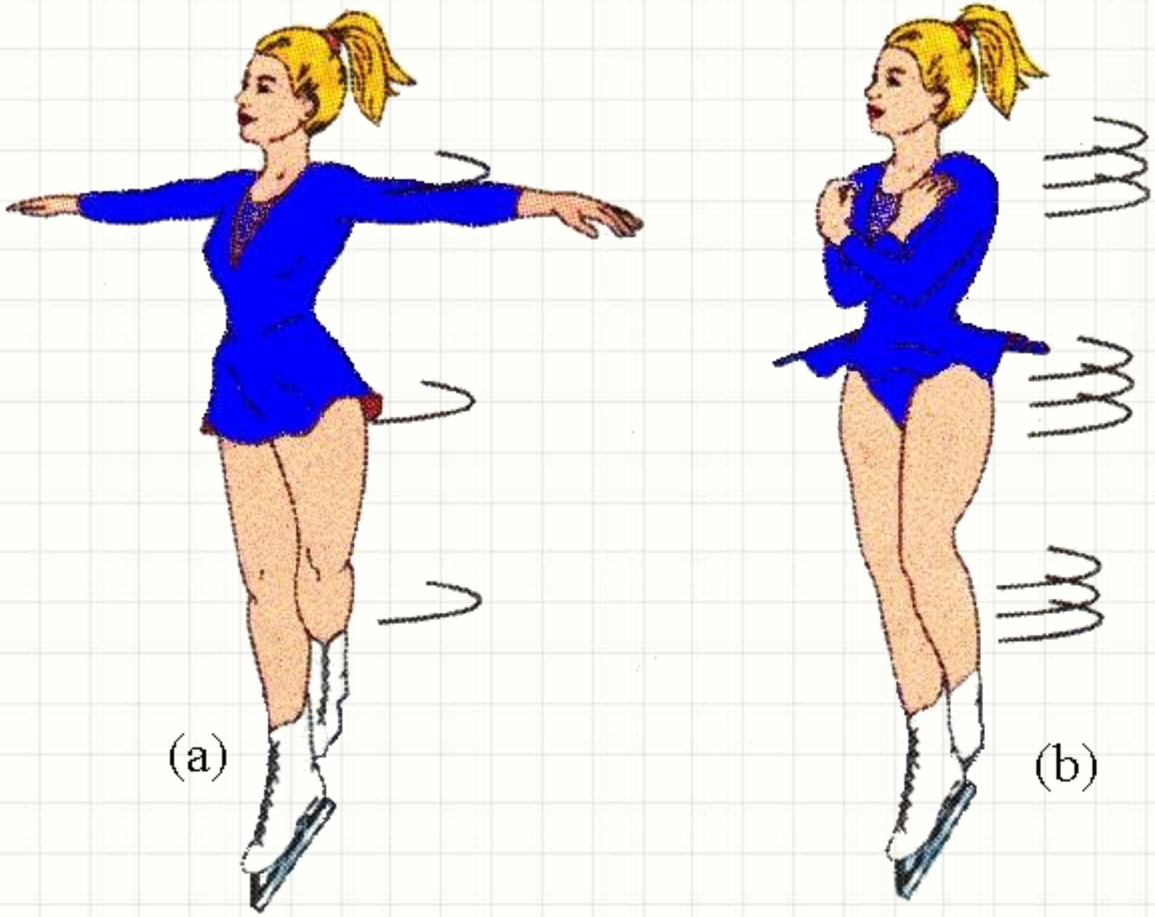
- Momento de Inércia (ou de 2ª Ordem)
  - Mede a inércia de um corpo ao giro
  - Resistência a ser colocado em movimento de giro
  - Massa x Momento de Inércia
  - $I = A \cdot d^2$

Momento de Inércia

- Difícil mover por causa da inércia...

Momento de Inércia

- Diferença no giro pelo Momento de Inércia



(a) (b)

Momento de Inércia

- Cálculo do Momento *Retangular* de Inércia

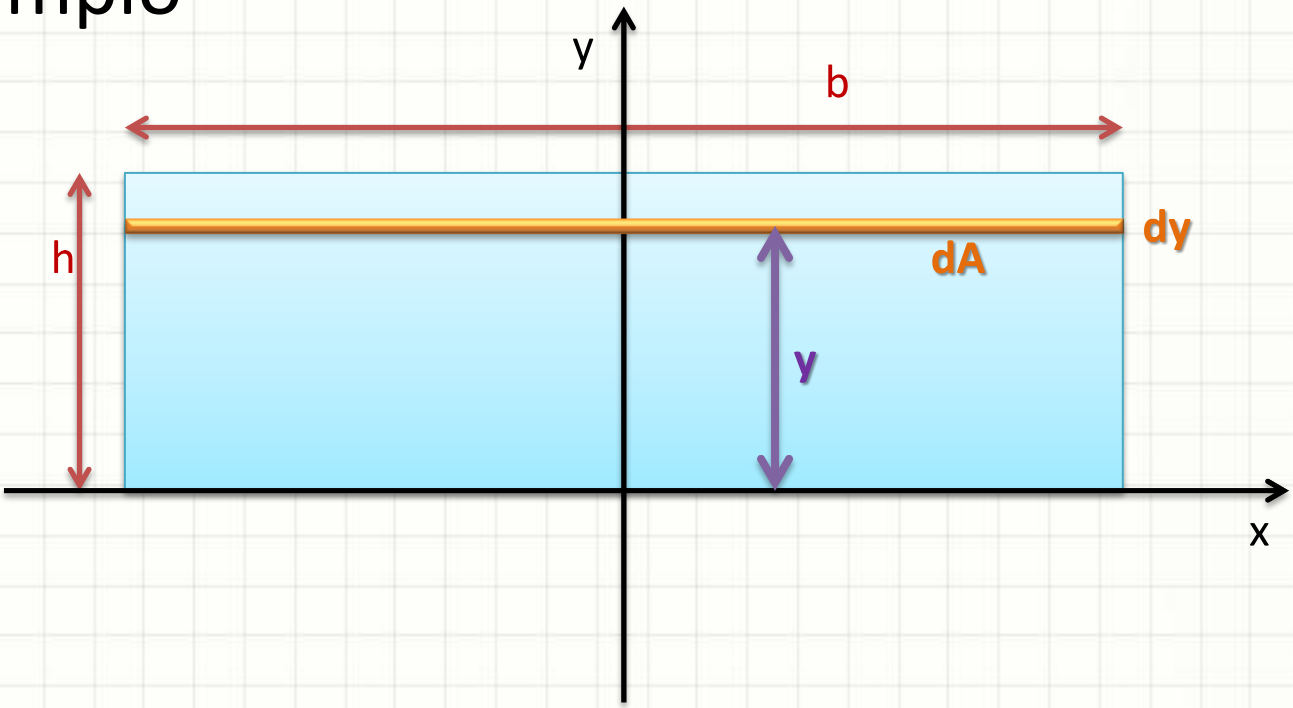
$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

- Sempre positivos! → Unidade I = [L^4]

Momento de Inércia

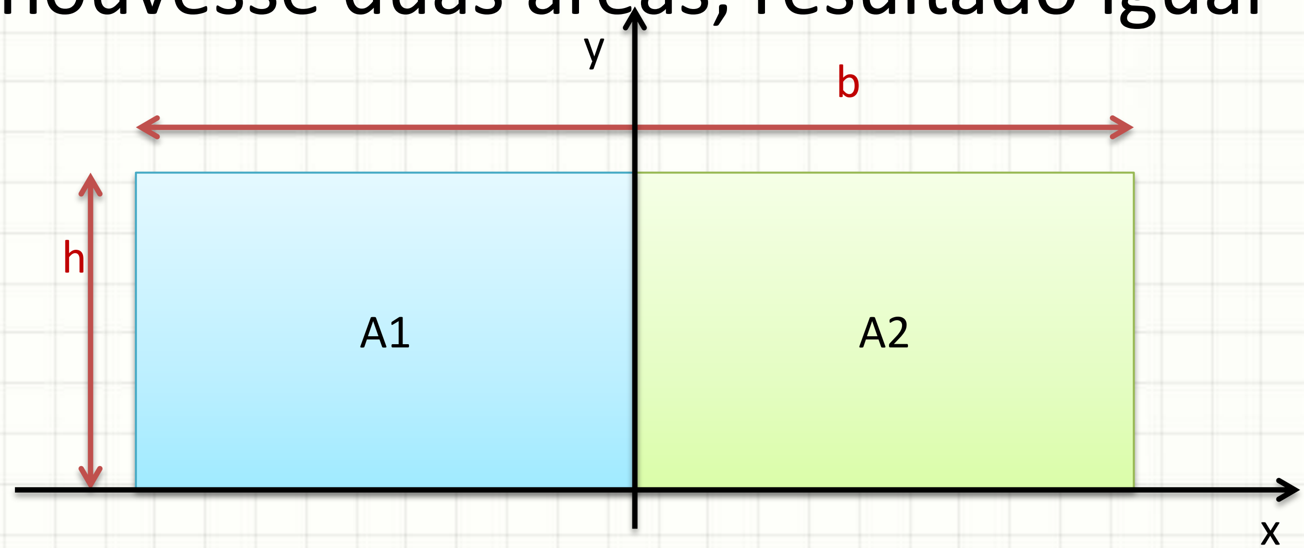
- Exemplo



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Momento de Inércia

- Se houvesse duas áreas, resultado igual

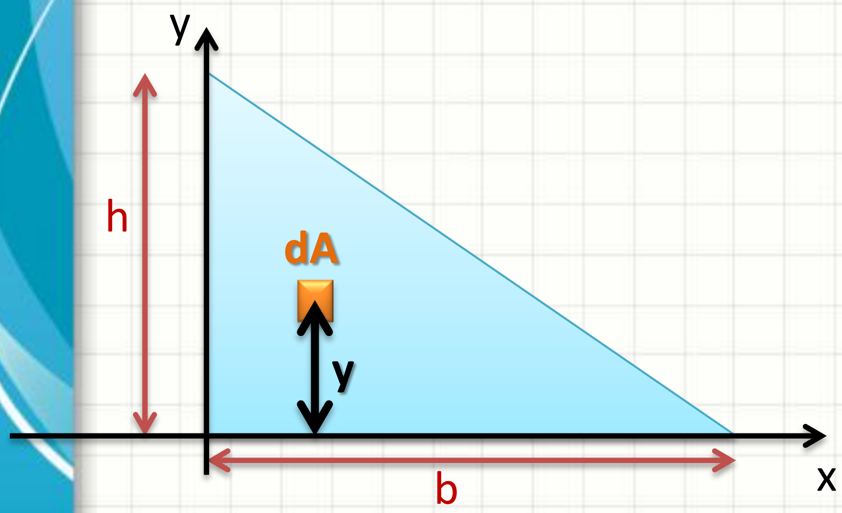


$$I_x = \int_{A1} y^2 \cdot dA + \int_{A2} y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot dy + \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{2} \cdot dy =$$

$$= \frac{b \cdot h^3}{6} + \frac{b \cdot h^3}{6} = \boldsymbol{\frac{b \cdot h^3}{3}}$$

Momento de Inércia

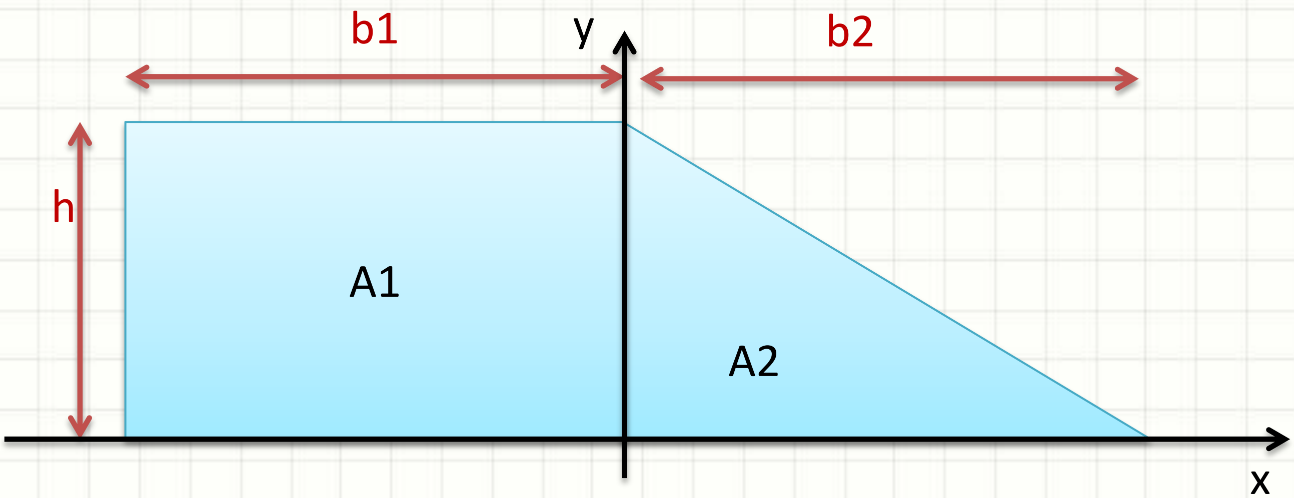
- Outro Exemplo



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Momento de Inércia

- E nesse outro caso?

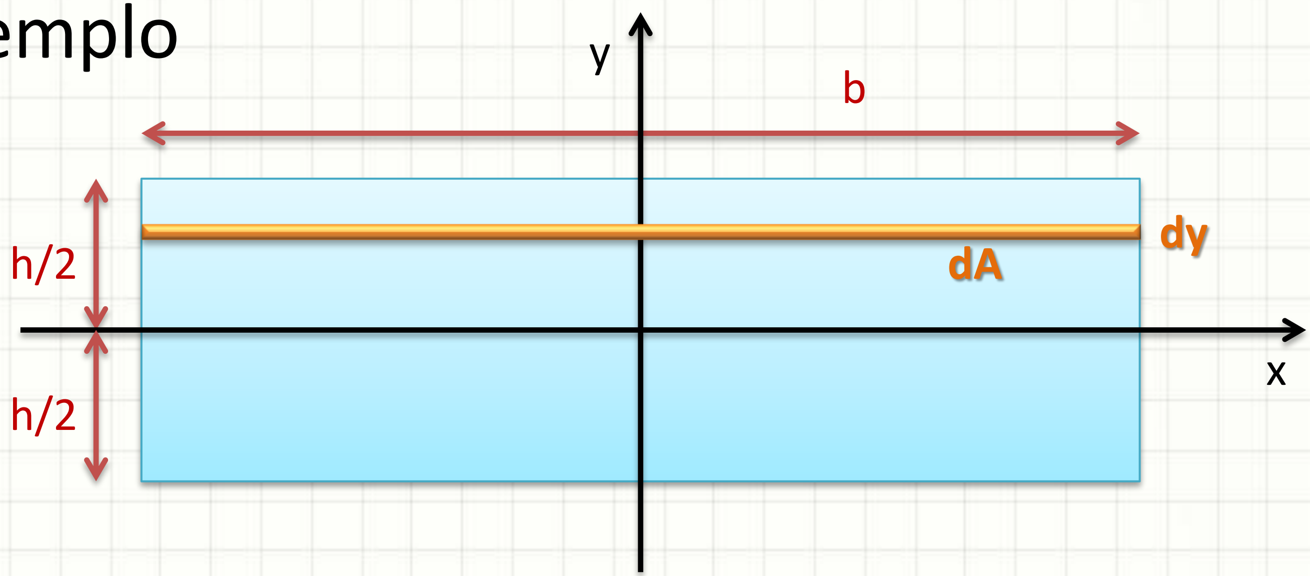


$$I_x = \int_{A1} y^2 \cdot dA + \int_{A2} y^2 \cdot dA = \frac{\boldsymbol{b1 \cdot h^3}}{\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{b2 \cdot h^3}}{\mathbf{12}}$$

Eixo Central de Inércia

Eixo Central de Inércia

- Eixo Central de Inércia
  - Passa pelo centroide do corpo
- Exemplo

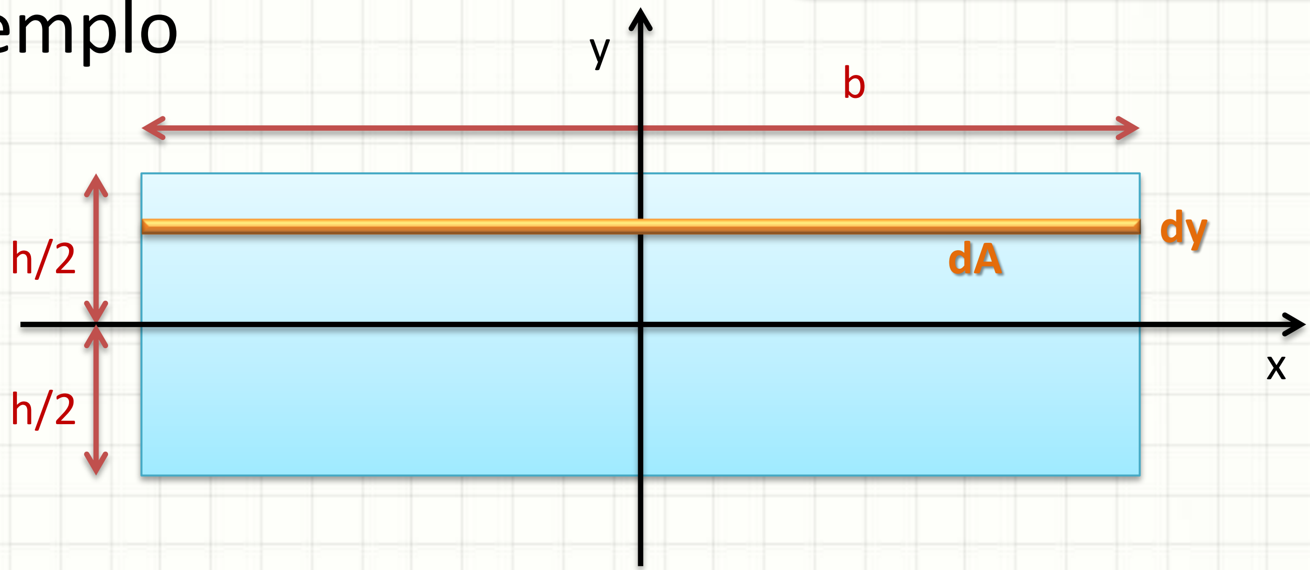


$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Eixo Central de Inér

- Eixo Central de Inércia
  - Passa pelo centroide do cor
- Exemplo

O eixo central, dentre os paralelos a ele, é o eixo de menor inércia



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Momento Polar de Inércia

Momento Polar de Inércia

- Cálculo do Momento *Polar* de Inércia

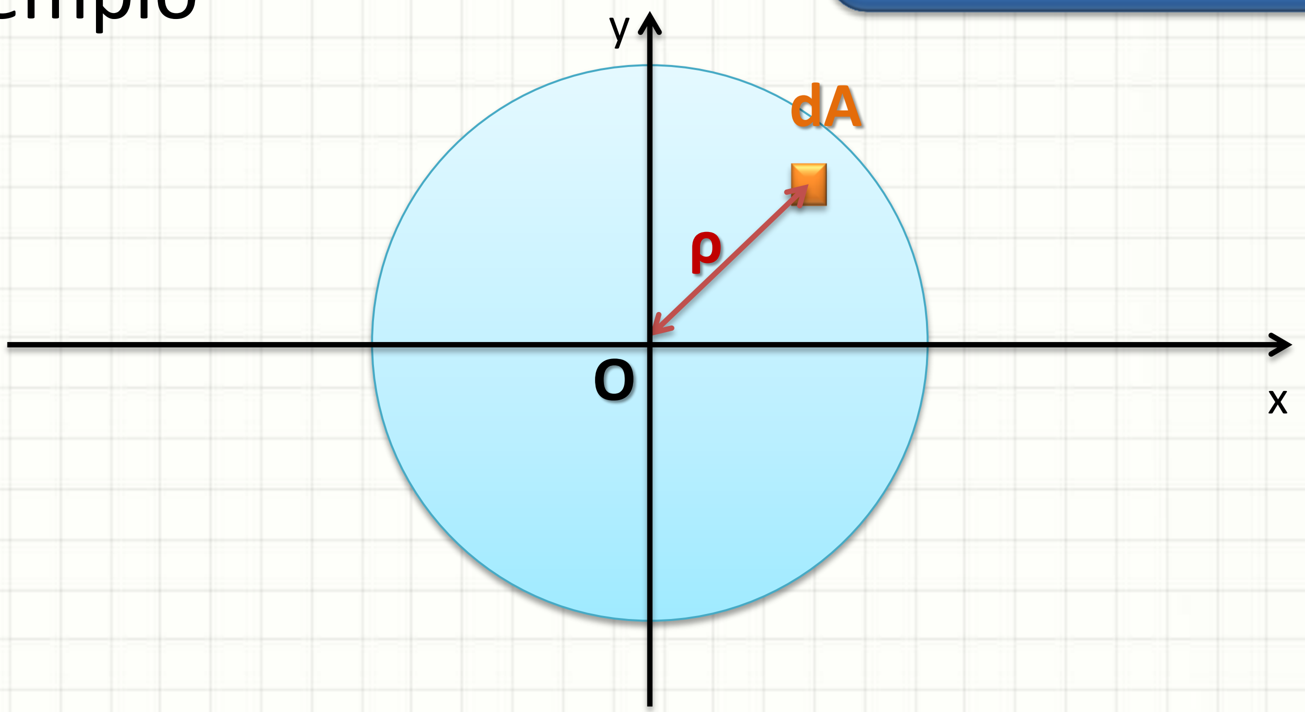
$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

- Inércia relativa a um ponto
- Importante nas torções
- Sempre positivo! → Unidade J = [L^4]

Momento de Inércia

Vamos mudar o ponto de vista...

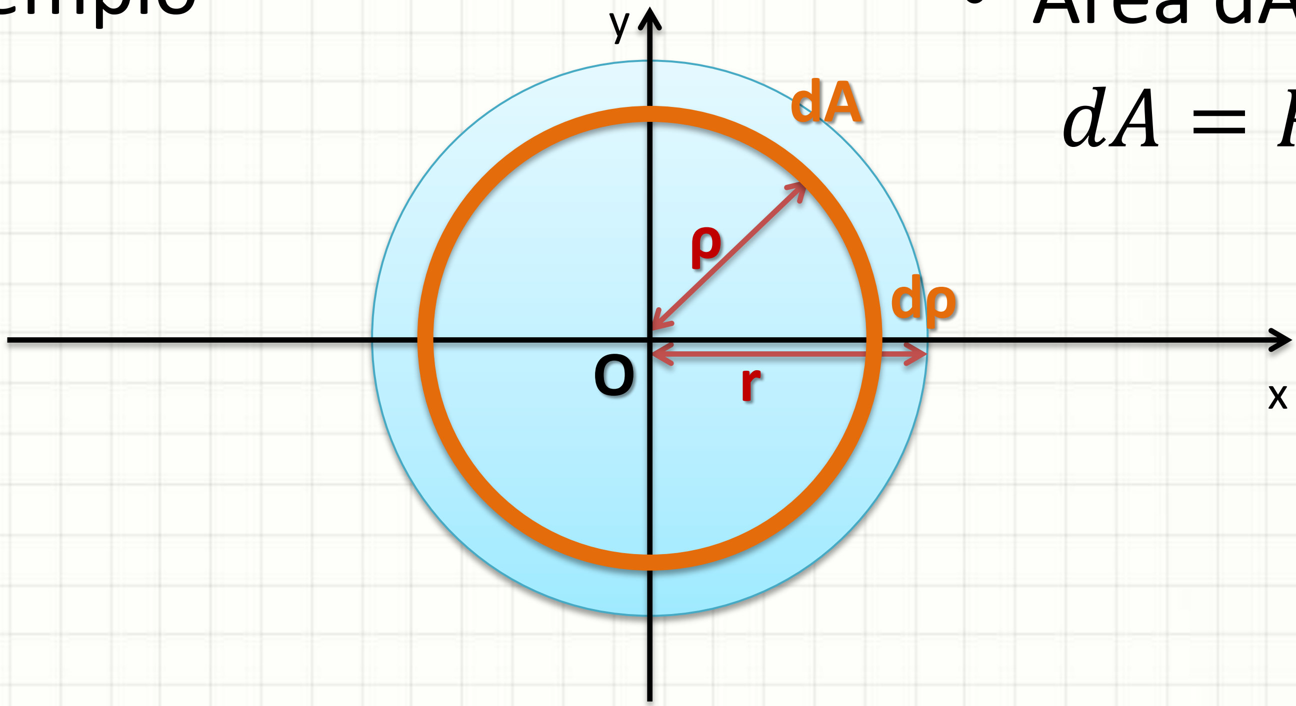
- Exemplo



$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Momento de Inércia

- Exemplo



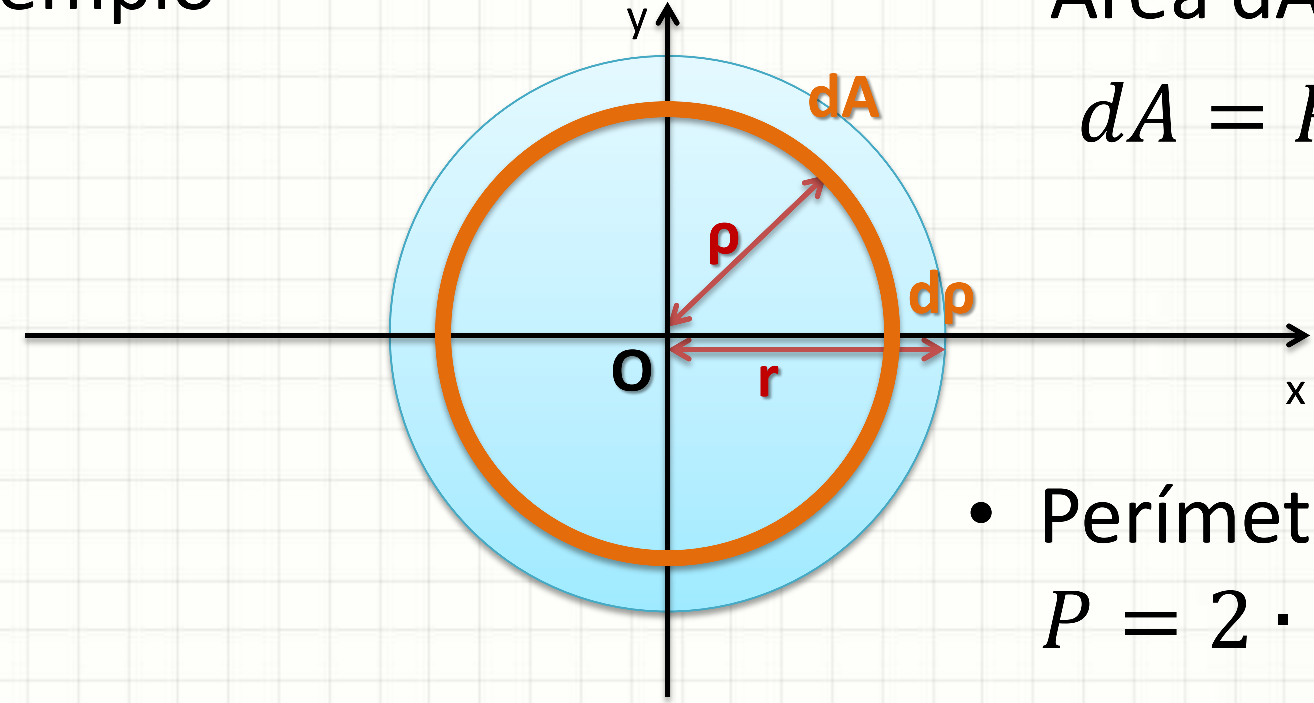
- Área dA

$$dA = P.d\rho$$

$$J_O = \int_0^r \rho^2 \cdot dA$$

Momento de Inércia

- Exemplo



- Área dA

$$dA = P.d\rho$$

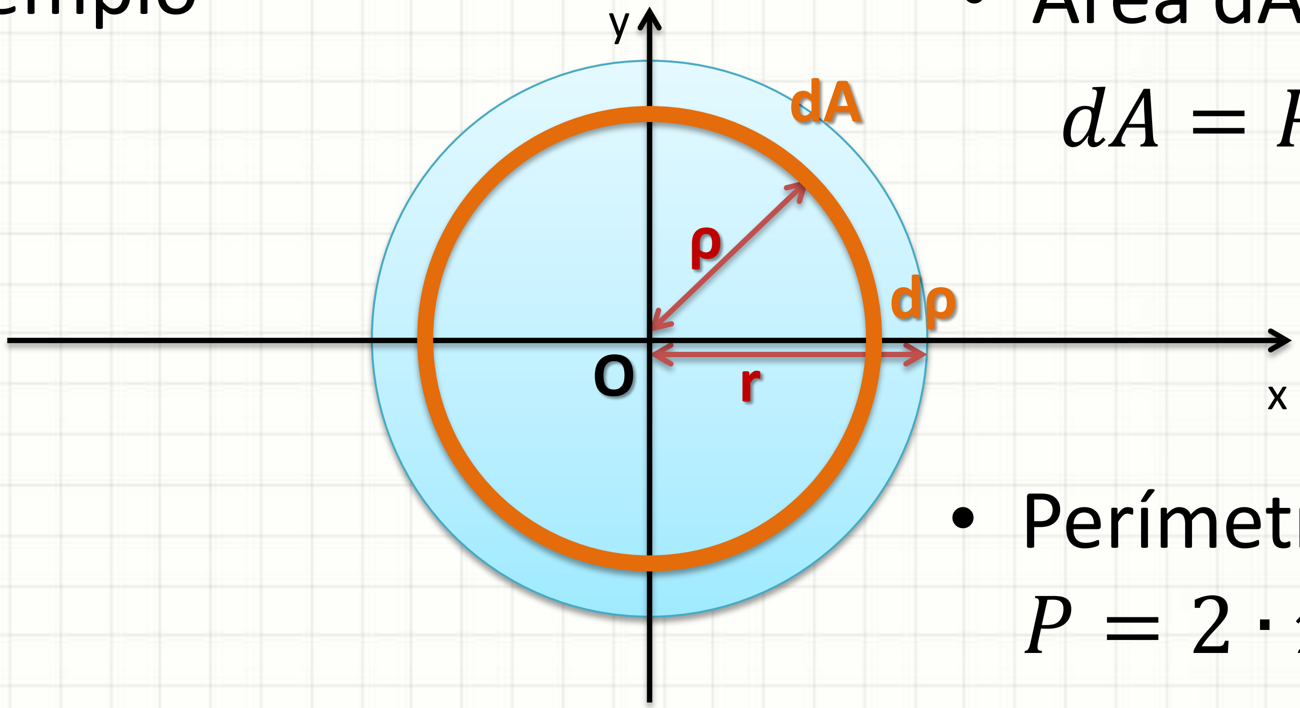
- Perímetro

$$P = 2 \cdot \pi \cdot \rho$$

$$J_O = \int_0^r \rho^2 \cdot dA = \int_0^r \rho^2 \cdot P.d\rho$$

Momento de Inércia

- Exemplo



- Área dA

$$dA = P.d\rho$$

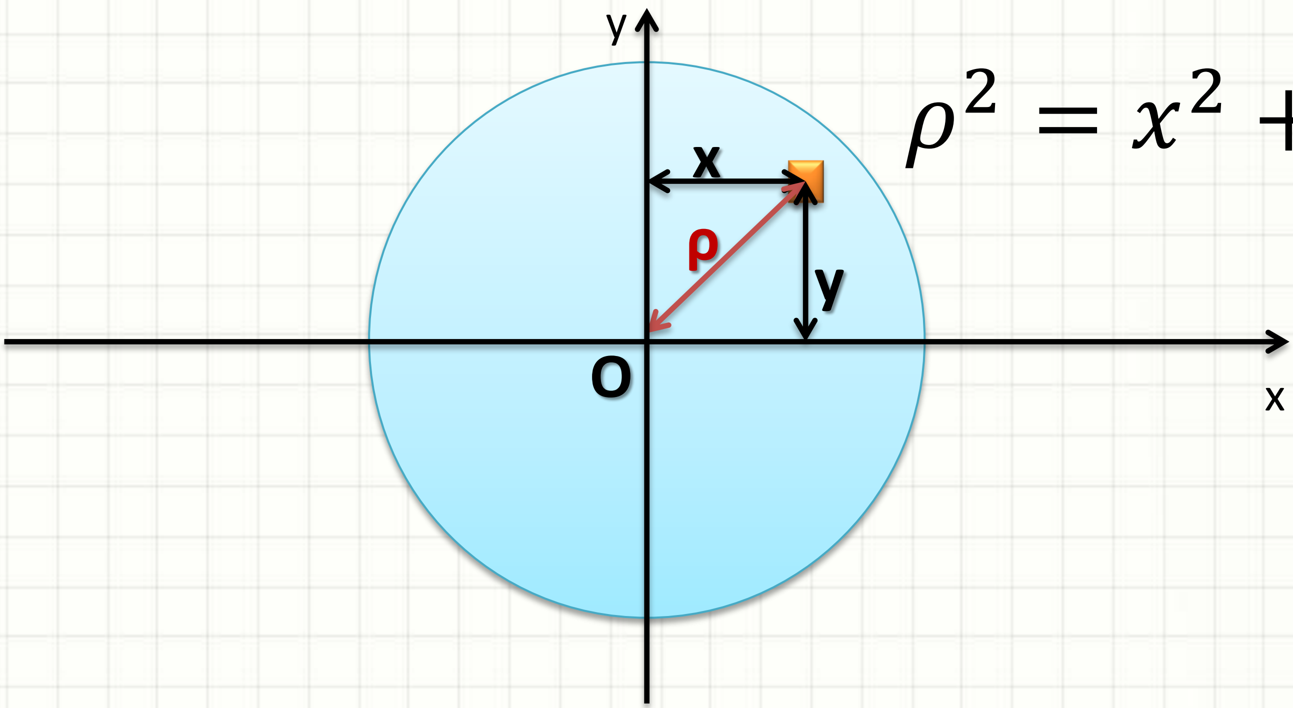
- Perímetro

$$P = 2 \cdot \pi \cdot \rho$$

$$J_O = \int_0^r \rho^2 \cdot dA = \int_0^r \rho^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

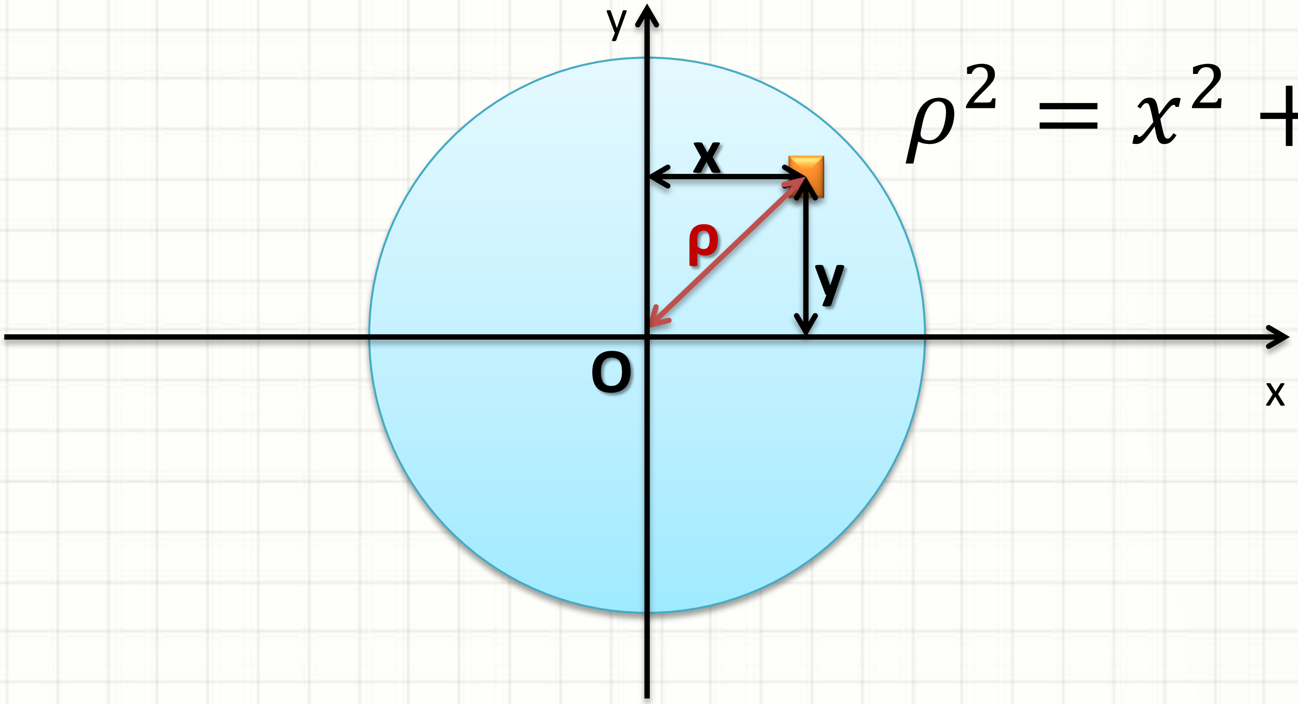


$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA \Rightarrow J_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

$$J_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

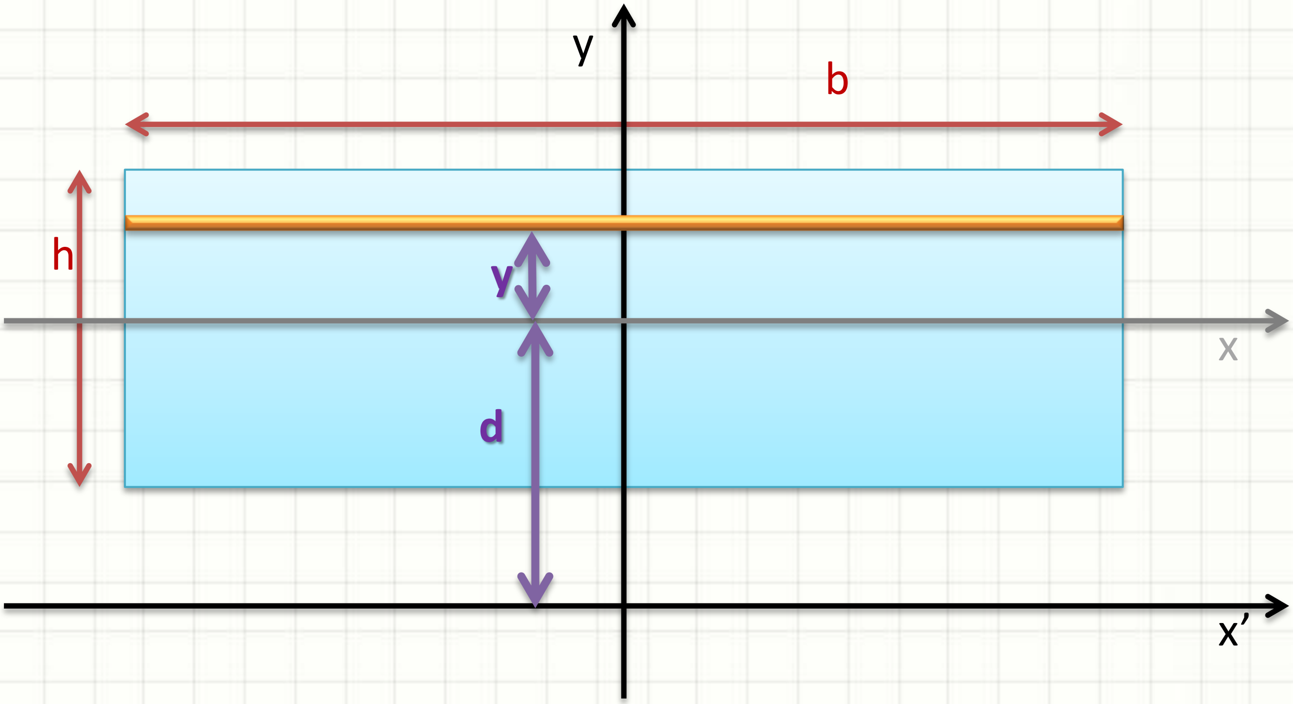
$$J_O = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA$$

$$\boldsymbol{J_O = I_x + I_y}$$

Translação de Eixo no Momento de Inércia

Translação de Eixos

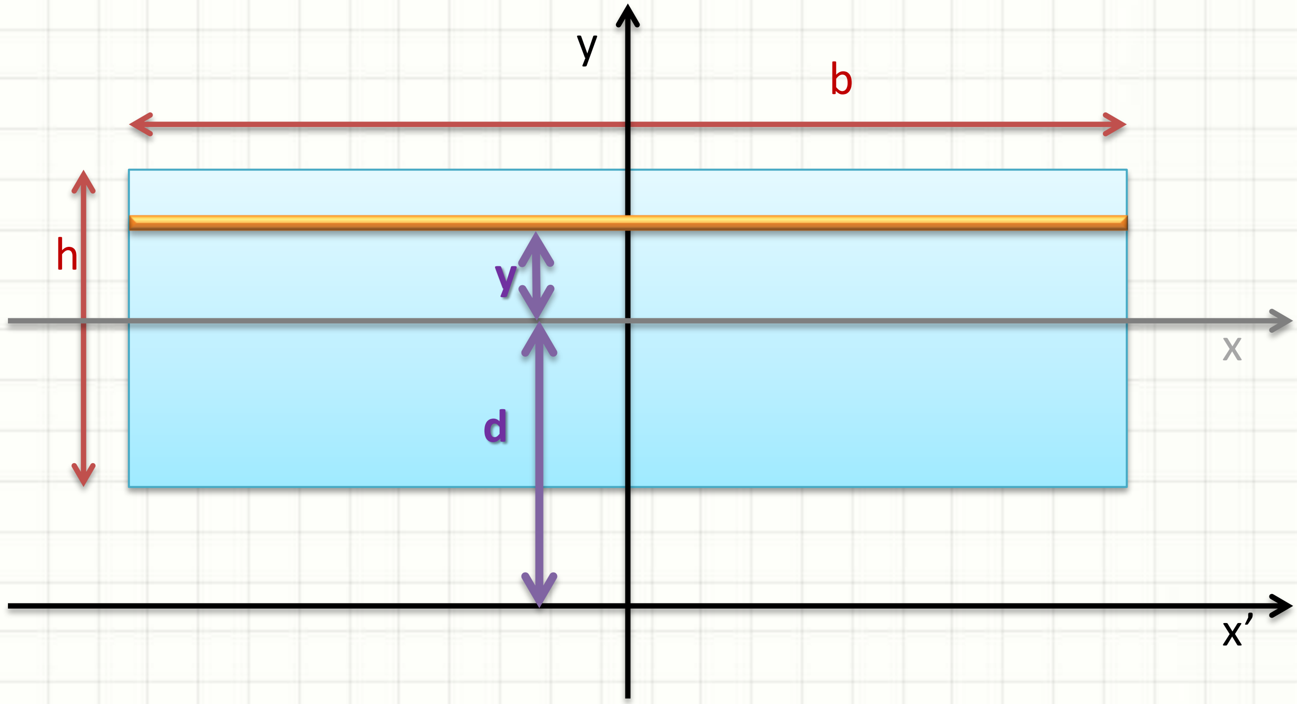
- Momento de Inércia (I$_x$ conhecido)



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)



$$I_{x'} = \int_A (y+d)^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)

$$I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot d \cdot y \cdot dA + \int_A d^2 \cdot dA$$

$$\boldsymbol{I_{x'} = I_x + \cancel{2 \cdot d \cdot S_x} + d^2 \cdot A}$$

- **Se x era o eixo que passa pelo centróide...**

$$\boldsymbol{I_{x'} = I_x + A \cdot d^2}$$

Translação de Eixos

- Analogamente, para x e y passando pelo centroide

$$\boldsymbol{I_{x'} = I_x + A \cdot d^2}$$
$$\boldsymbol{I_{y'} = I_y + A \cdot d^2}$$

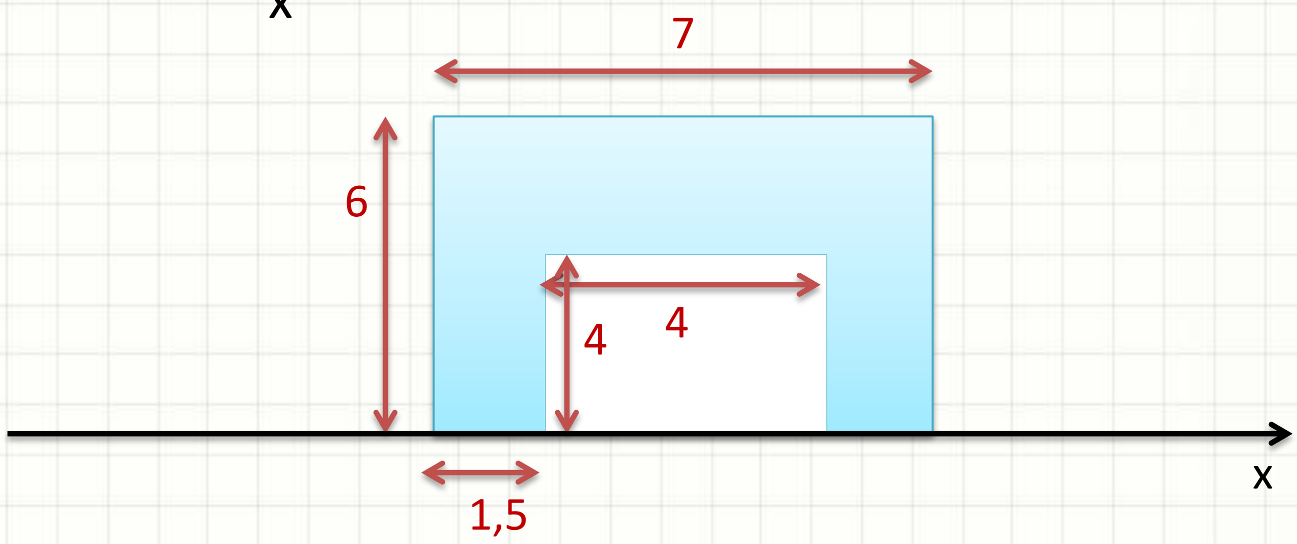
- Como I_x e I_y → eixos centrais, **d** → positivo
- E também... se O é o centroide...

$$\boldsymbol{J_{O'} = J_O + A \cdot d^2}$$

Exercício

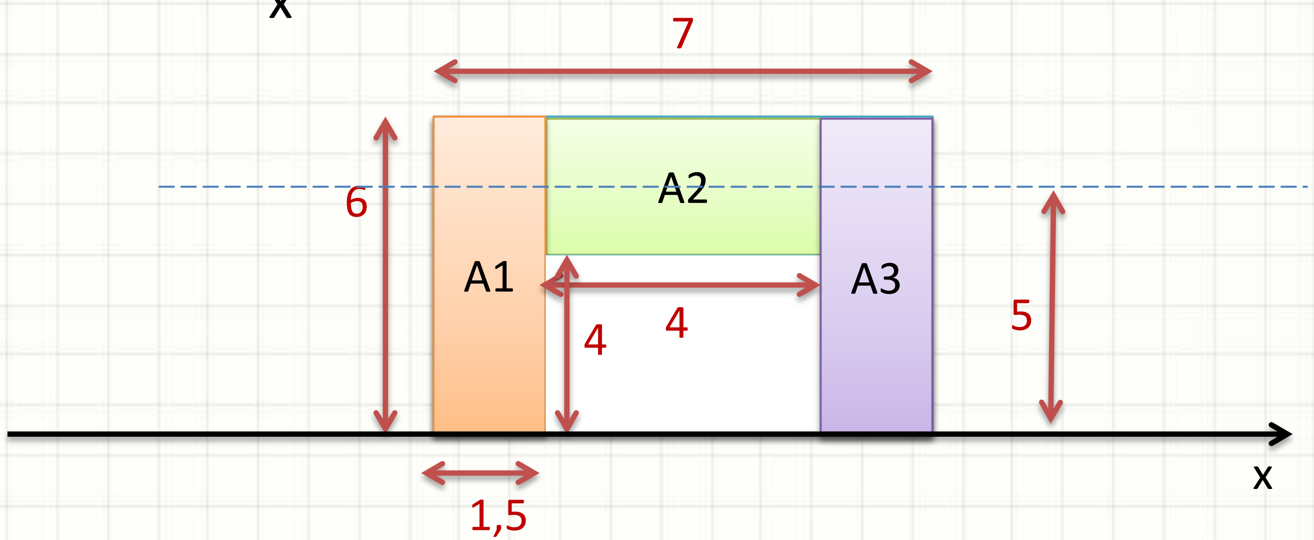
Exercício

- Calcular I_x



Exercício

- Calcular I_x - medidas em metros



- $I_x = I_{A1x} + I_{A2x} + I_{A3x}$
- $I_x = \frac{b1 \cdot h1^3}{3} + \left(\frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d^2\right) + \frac{b3 \cdot h3^3}{3}$
- $I_x = \frac{1{,}5 \cdot 6^3}{3} + \left(\frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5^2\right) + \frac{1{,}5 \cdot 6^3}{3}$ $= 418.666...\ m^4$

Pausa para o Café!

PRODUTO DE INÉRCIA

Produto de Inércia

- Se esses são momentos de inércia...

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

- O que seria isso?

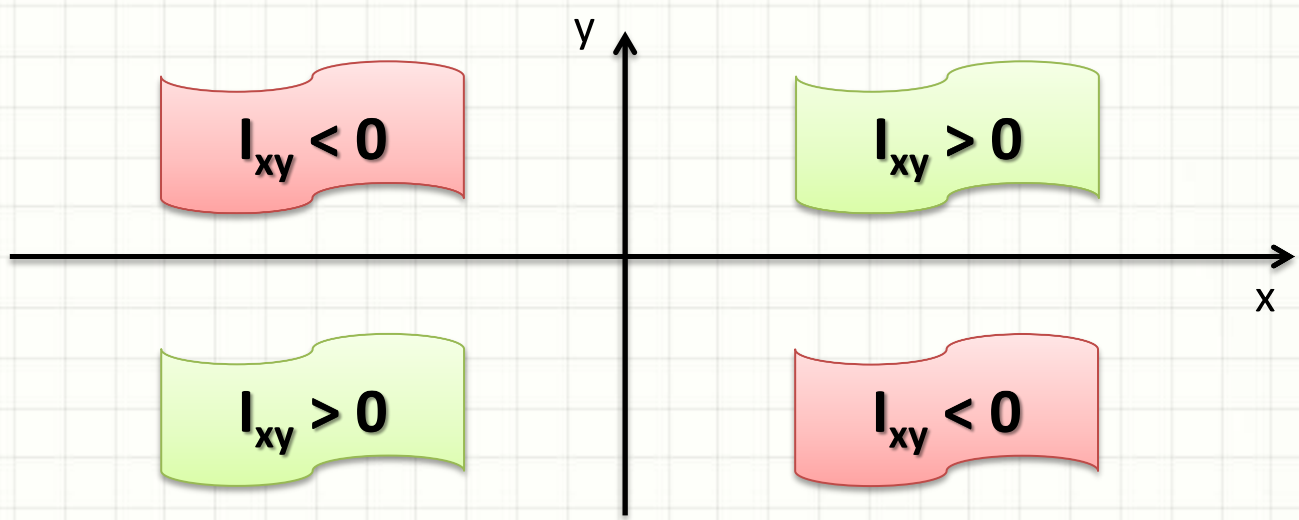
$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

Produto de Inércia

- Produto de Inércia: será usado depois

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo → $[I_{xy}] = m^4$



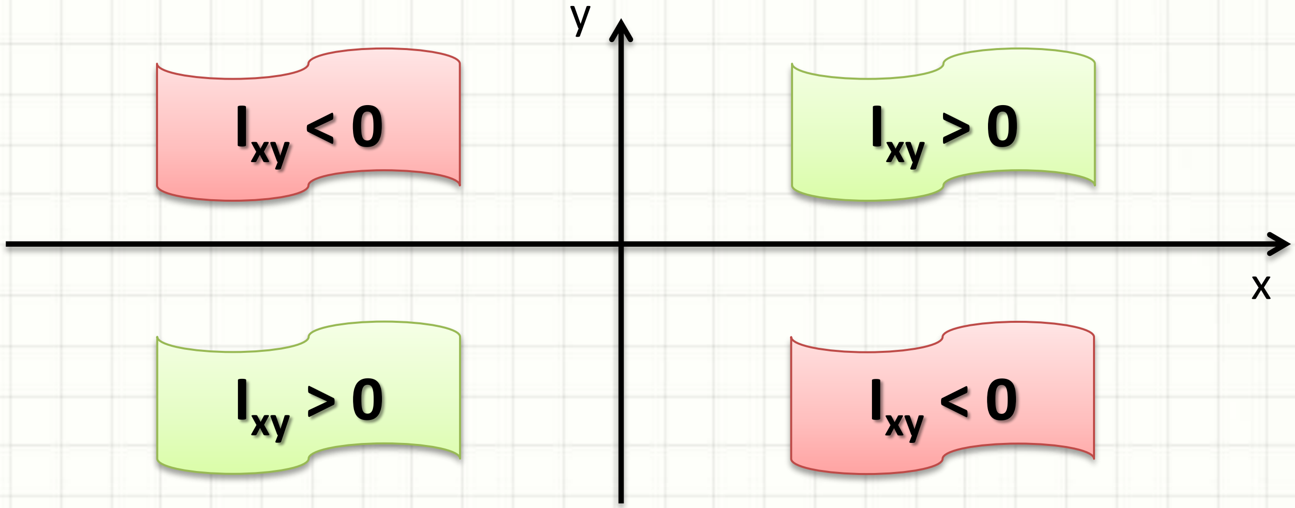
Produto de Inércia

Quando um dos **eixos é de simetria**, o produto de inércia será sempre **ZERO**!

- Produto de Inércia: será

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo → $[I_{xy}] = m^4$



Translação de Eixo no Produto de Inércia

Translação de Eixos

- Pode-se demonstrar que se os eixos passam pelo centroide, isso é válido...

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$
$$I_{y'} = I_y + A \cdot d^2$$

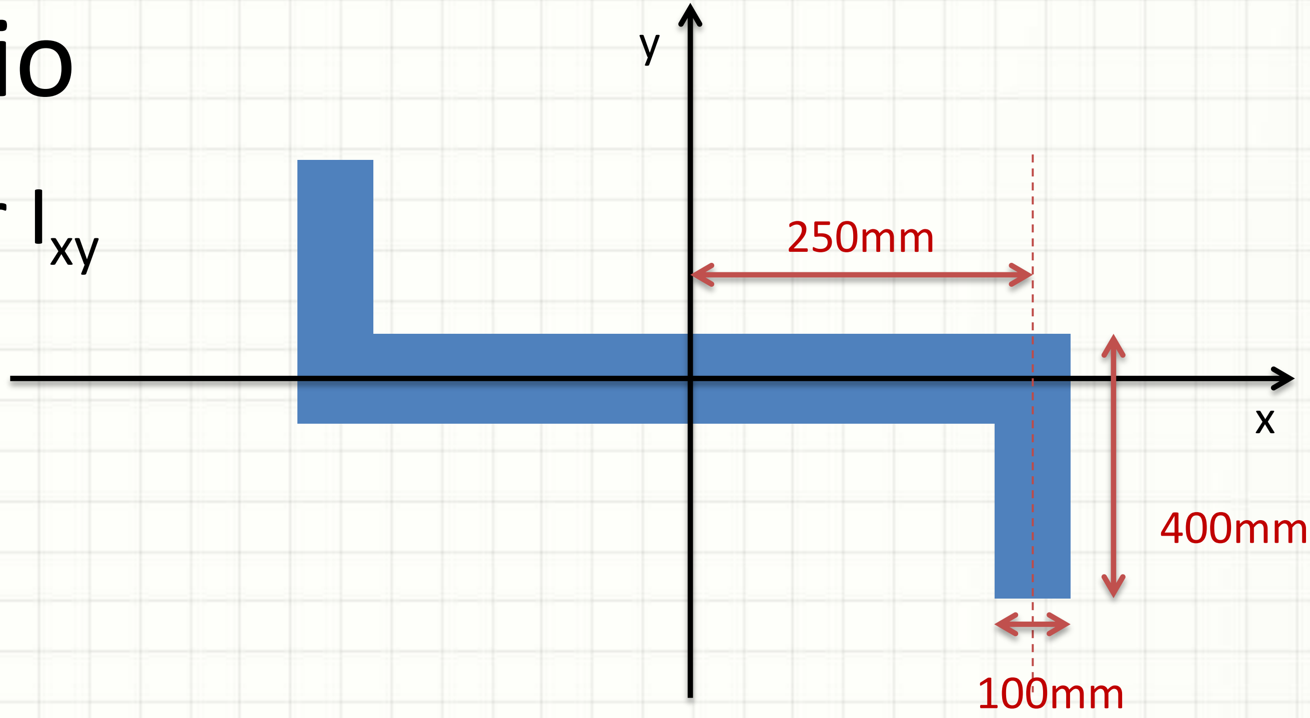
- Da mesma forma deduz-se que...

$$I_{xy'} = I_{xy} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

- Referência xy: (dx,dy) – coordenada de xy’
  – Sinal!

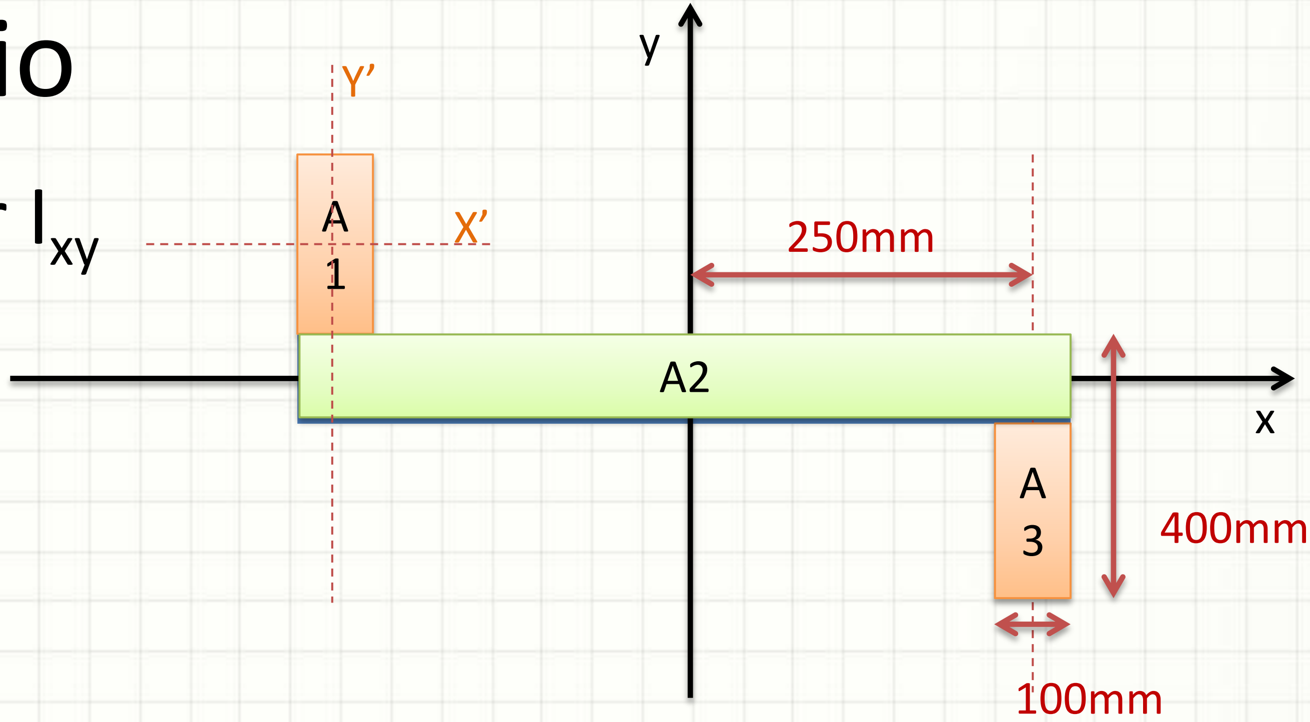
Exercício

- Calcular I_{xy}



Exercício

- Calcular I_{xy}



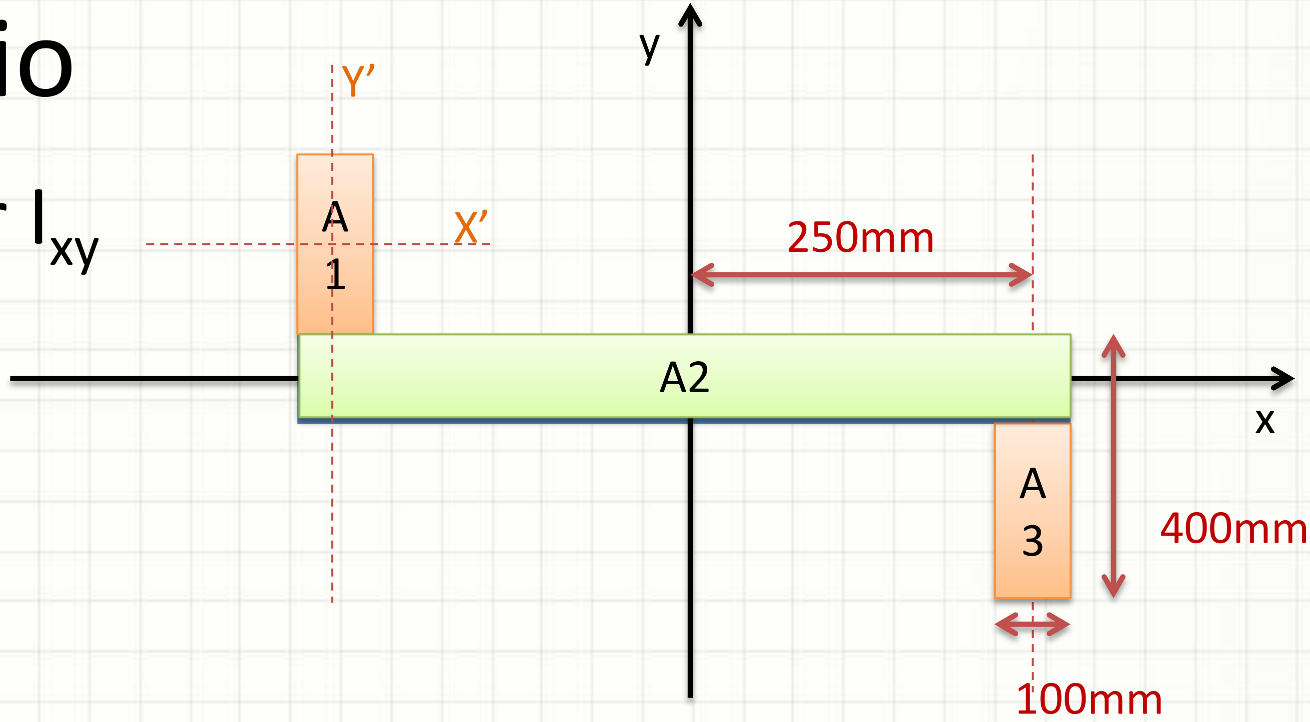
- $I_{A2xy} = 0$
- $I_{A1xy} = I_{A1x'y'} + A1 \cdot dx \cdot dy$

  $= 0 + 300 \cdot 100 \cdot (-250) \cdot 200 = -1{,}5 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$
- $I_{A3xy} = I_{A3x''y''} + A3 \cdot dx \cdot dy$

  $= 0 + 300 \cdot 100 \cdot 250 \cdot (-200) = -1{,}5 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

Exercício

- Calcular I_{xy}



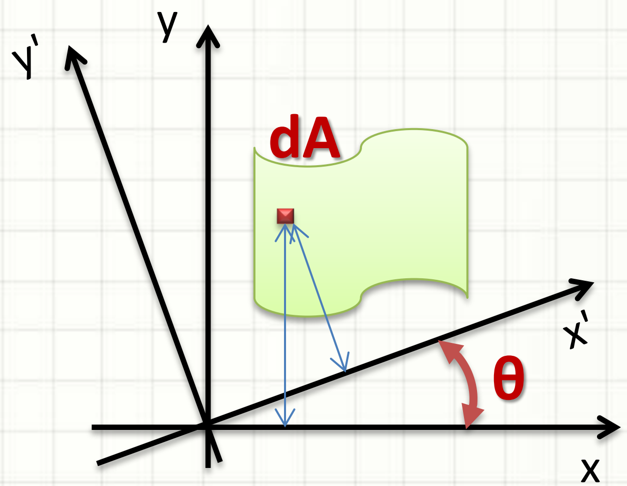
- $I_{xy} = I_{A1xy} + I_{A2xy} + I_{A3xy} =$

$$= 0 - 1{,}5 \cdot 10^9 - 1{,}5 \cdot 10^9 = -3{,}0 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Rotação de Eixos de Inércia

Rotação de Eixos

- Conhecidos I_x, I_y e I_{xy}
- Como calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$?



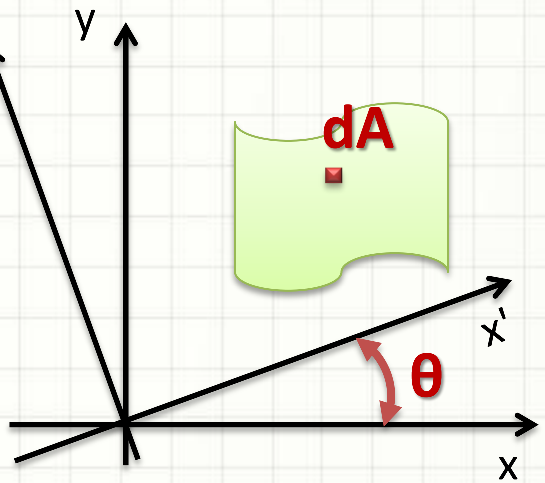
$$I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 \cdot dA$$

- x' = x.cos θ + y.sen θ
- y' = y.cos θ - x.sen θ
- Realizando a integral de $I_{x'}$ e $I_{y'}$...

Rotação de Eixos

- Relações:



$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

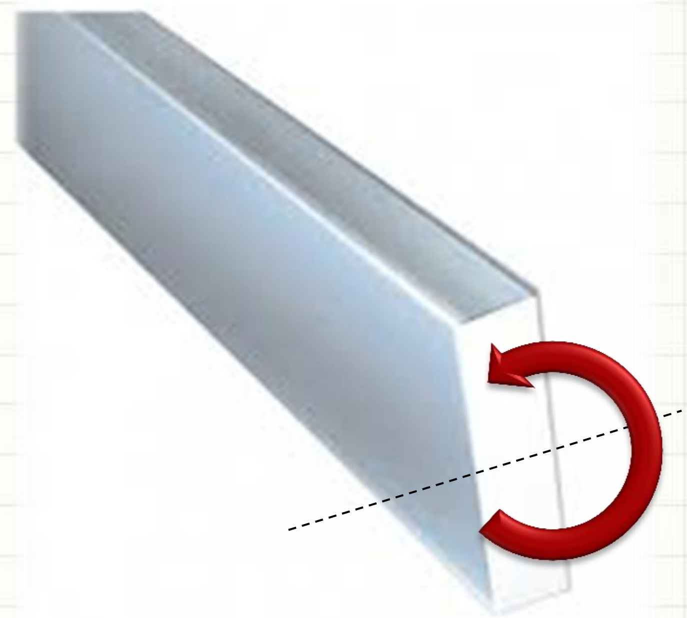
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta + I_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

J_o permanece o mesmo! ← **Por quê?**

Encontrando Eixos de Maior e Menor Inércia

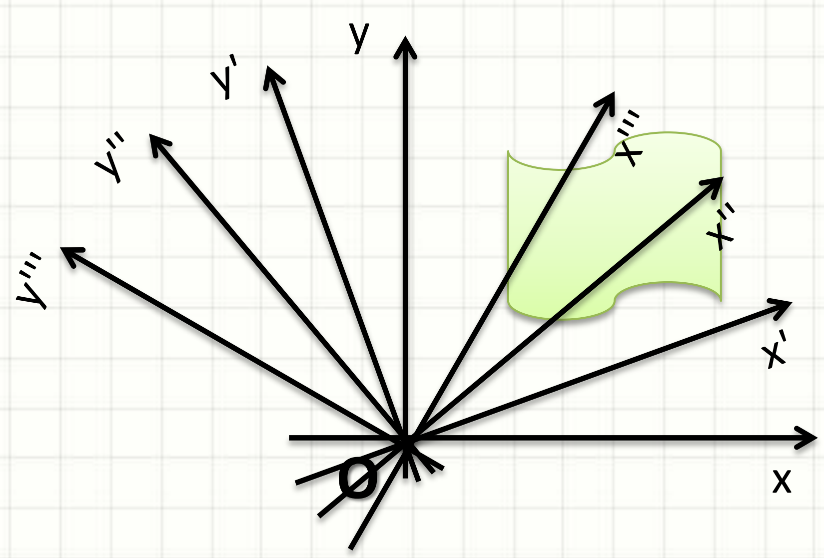
Eixos de Maior e Menor Inércia

- Maior momento de inércia: maior resistência
  - Máximo I, máxima resistência à flexão



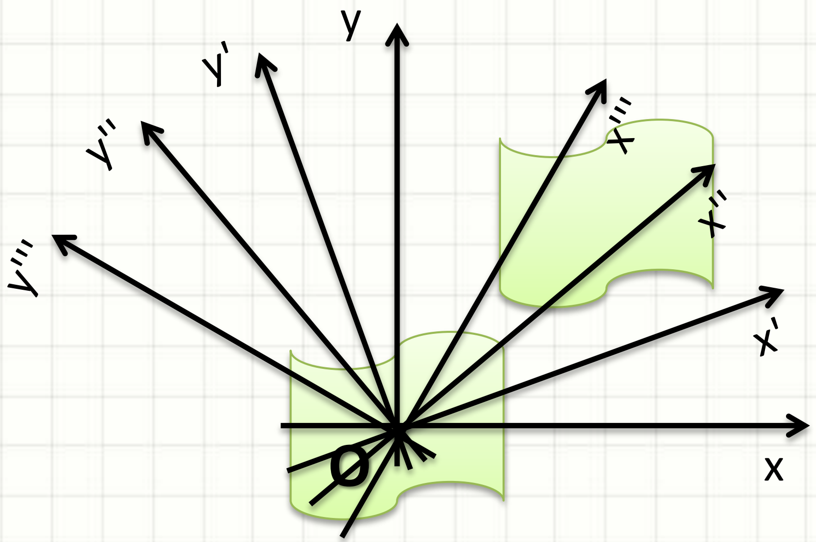
Eixos de Maior e Menor Inércia

- Para um dado centro de inércia O...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y



Eixos de Maior e Menor Inércia

- Para um dado centro de inércia O...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_x
- ***Em geral***: considera-se o O no centróide



Eixos de Maior e Menor Inércia

- Um desses pares: momento máximo x mínimo
  – Como encontrá-los?
- Pelo ângulo de rotação!
  – Qual ângulo que leva ao momento máximo?
- Temos uma função que leva θ em $I_{x'}$:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

- Basta derivar e igualar a zero: $dI_{x'}/d\theta = 0$

Eixos de Maior e Menor Inércia

- Resolvendo a derivada $dI_{x'}/d\theta = 0$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

- Chega-se à seguinte equação:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Eixos de Maior e Menor Inércia

- Essa equação:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$$

- Tem duas raizes:

$$I_{max/min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}$$

- **Momentos Principais... Eixos Principais**

Eixos Principais e Momentos Principais

- E o ângulo pode ser calculado por:

$$\theta_p = \frac{atan\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

- Figura simétrica? Eixos no centroide? → $I_{xy} = 0$!
  - O que acontece com o θ_p?
- Nesse caso, eixos principais ≡ eixos centrais...

Eixos Principais e Momentos Principais

- E o ângulo pode ser calculado por:

$$\theta_p = \frac{atan\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

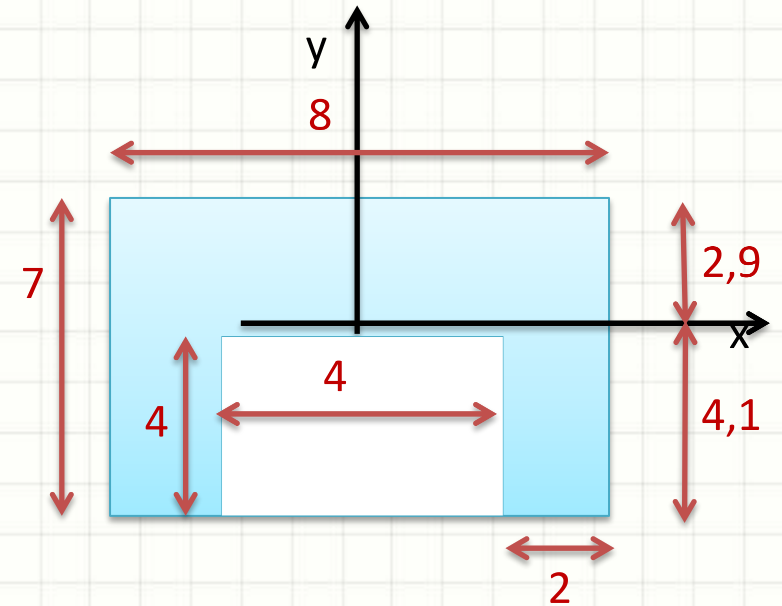
- Figur = 0!
  - O c
- Ness is...

- Se figura é simétrica e eixos cruzam no centroide → $\mathbf{I_{xy} = 0}$!
- Nesse caso,
- **eixos principais ≡ eixos centrais**!

Exercício

Exercício – Entrega Individual

- Calcule o I_x, o I_y e o I_{xy} no centróide
- Verifique se esses já são os eixos principais
- Se não forem, calcule-os



Para Treinar

Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual)
  - 5ª Pág. 622-623
  - 7ª Pág. 578 e 579
- Mínimos:
  - Exercícios A.2 a A.6 (5ª A.3 a A.6)
  - Exercício A.11 (5ª A.10)

CONCLUSÕES

Resumo

- Momento de Inércia e Momento Polar de Inércia
- Produto de Inércia
- Eixos Centrais de Inércia
- Translação e Rotação de Eixos
- Eixos Principais de Inércia
- **<u>Exercitar</u>: Exercícios Hibbeler / Mat. Didático**

- Onde entra a resistência?
  - Vamos começar pelos **esforços axiais**
  - Tração e Compressão

PERGUNTAS?