# Resistência dos Materiais II

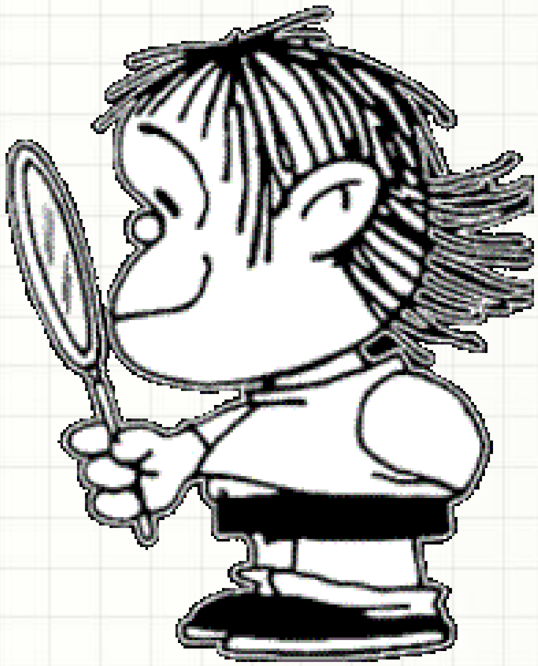
# Carregamento Axial
# Parte I

Prof. Dr. Daniel Caetano

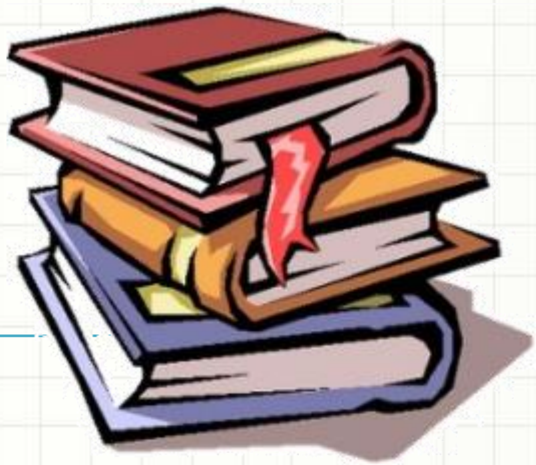
2013 - 2

# Objetivos

- Conhecer o princípio de Saint-Venant
- Conhecer o princípio da superposição
- Calcular deformações em elementos submetidos a esforço normal
- Calcular reações em problemas estaticamente indeterminados simples



# Material de Estudo



| Material | Acesso ao Material |
| --- | --- |
| Notas de Aula | - |
| Apresentação | http://www.caetano.eng.br/<br>(Resistência dos Materiais II - Aula 3) |
| Material Didático | - |
| Resistência dos Materiais (Hibbeler) | Biblioteca Virtual, páginas 85 a 106. |

## Relembrando:

# Forma x Deformação

# Características das Figuras Planas

- Perímetro, Área...
- Momento Estático → cálculo do centroide
- Momento de Inércia → resiste à variação ω

- Mas o que tem a ver isso com resistência?
- Vamos voltar um pouco...
  - Vamos começar com o Módulo de Elasticidade

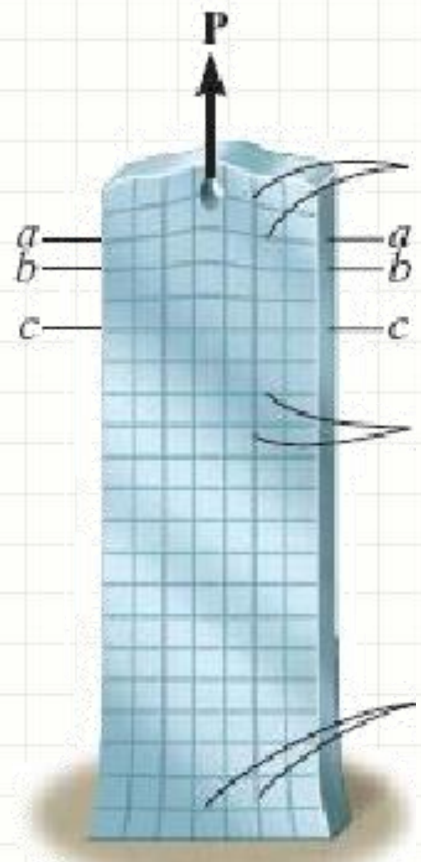
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$
$$F = k \cdot x$$

**Lei de Hooke**

# O Princípio de Saint-Venant

# Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga

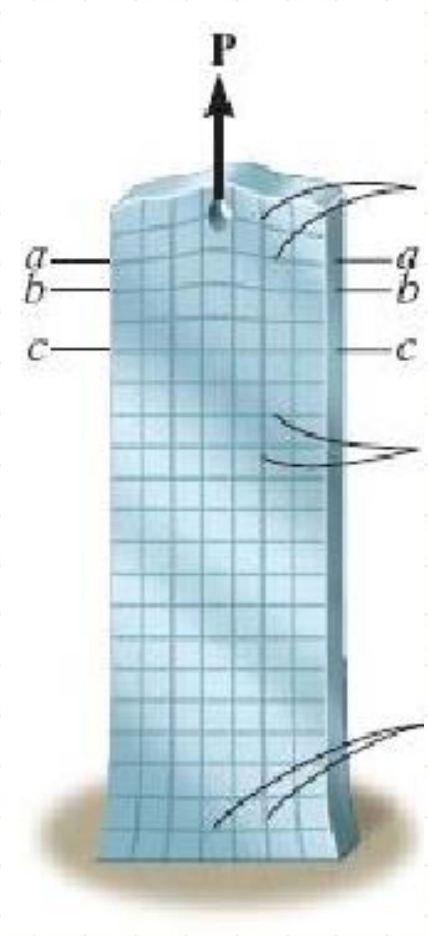



**Distorção próxima à carga**

**Distorção próxima ao apoio (reação!)**

# Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga



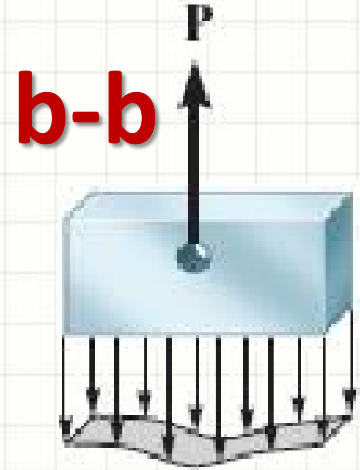

**Distorção próxima à carga**

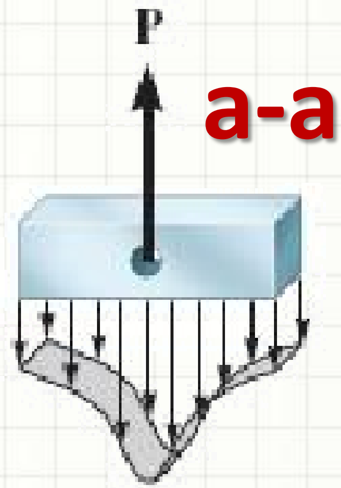
**Longe das cargas e apoio...**
**Permanecem paralelas**

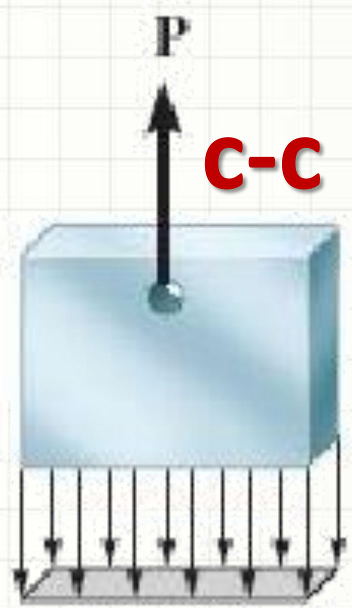
**Distorção próxima ao apoio**
**(reação!)**

# Princípio de Saint-Venant

- A tensão é igual em **a-a**, **b-b** e **c-c**?
  - A tensão se uniformiza...

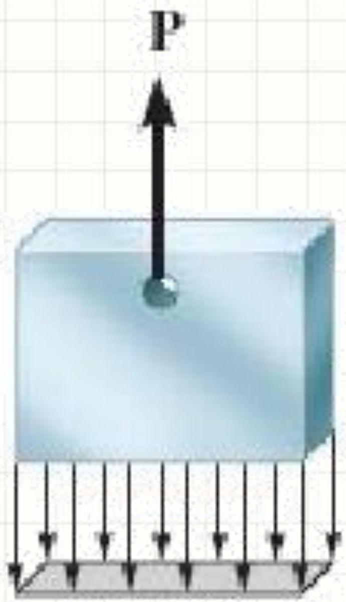




$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

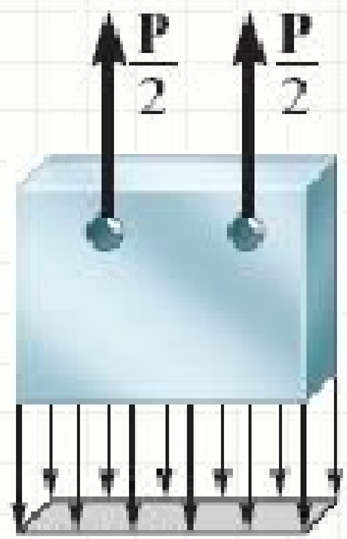
# Princípio de Saint-Venant

- Uniformização independe da distribuição da carga!
  – Depende da resultante!




**c-c**

$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$




**c-c**

$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

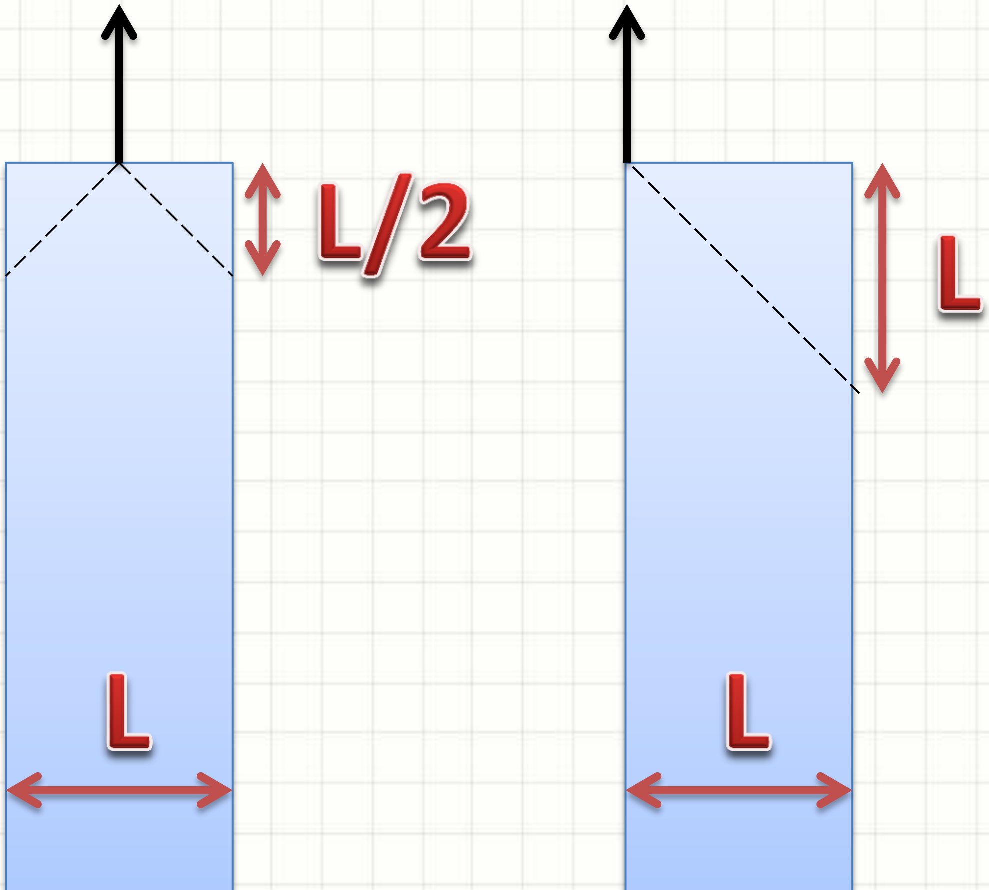
# Princípio de Saint-Venant

- Quão longe da aplicação deve estar a medida?


L por quê?

# Princípio de Saint-Venant

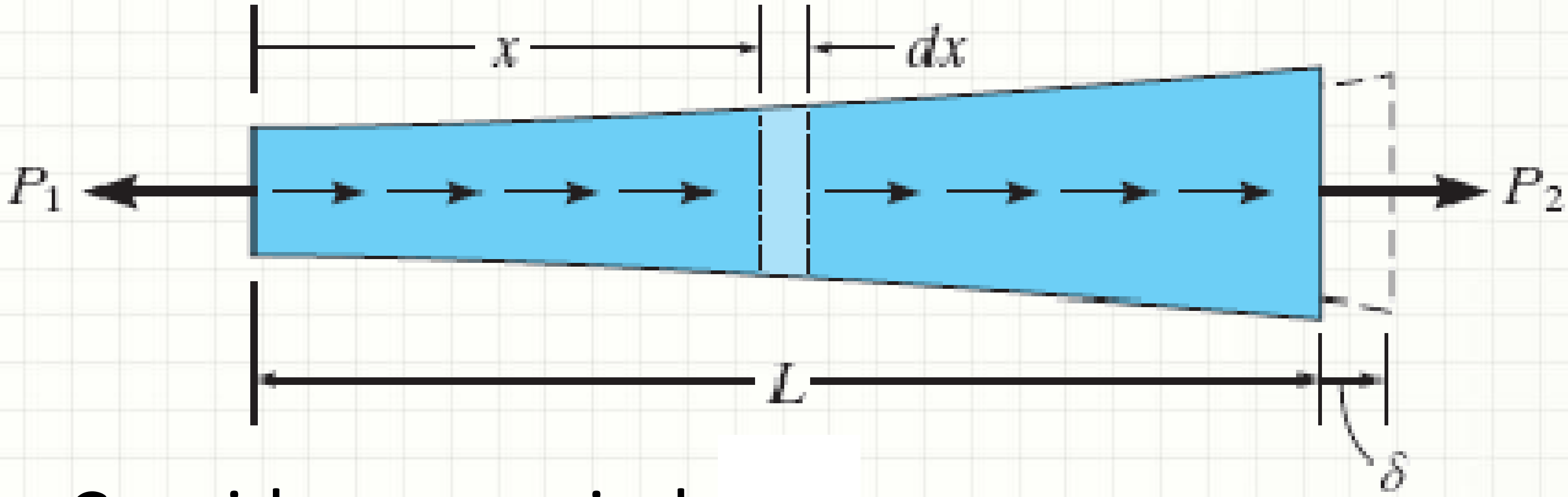
- O espraiamento é em 45º
- Mas não há pressuposição de posição!




# Deformação Elástica de Corpo em Carga Axial

# Deformação por Carga Axial

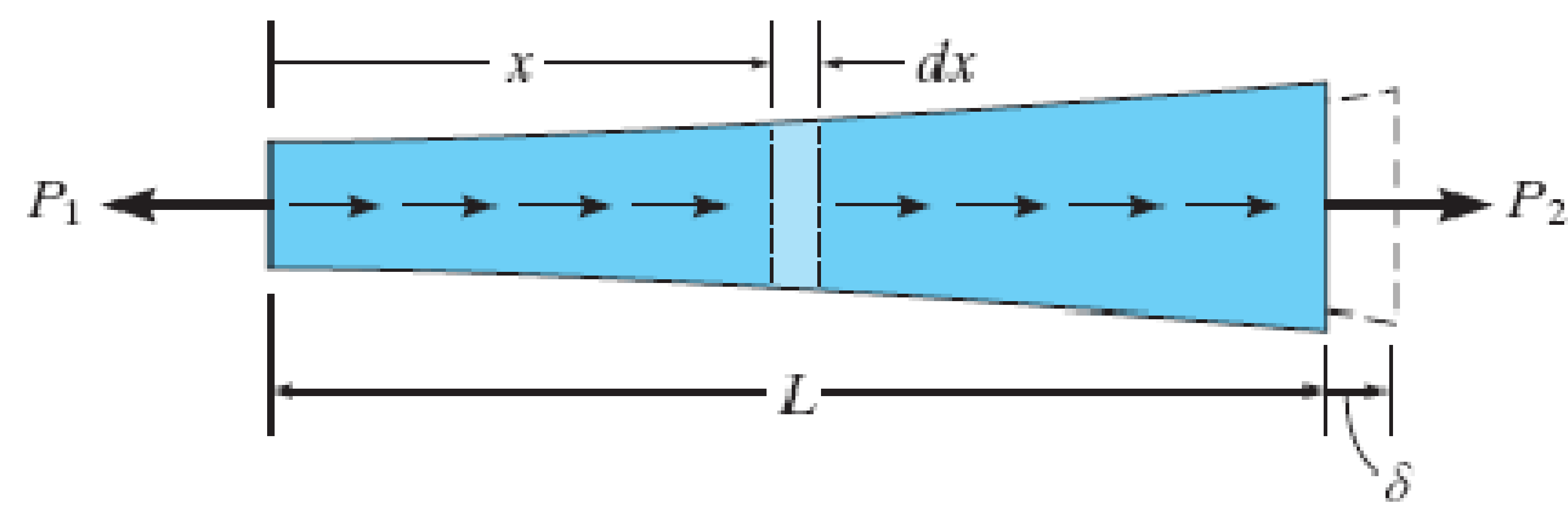
- Consideremos a viga genérica sob carga axial



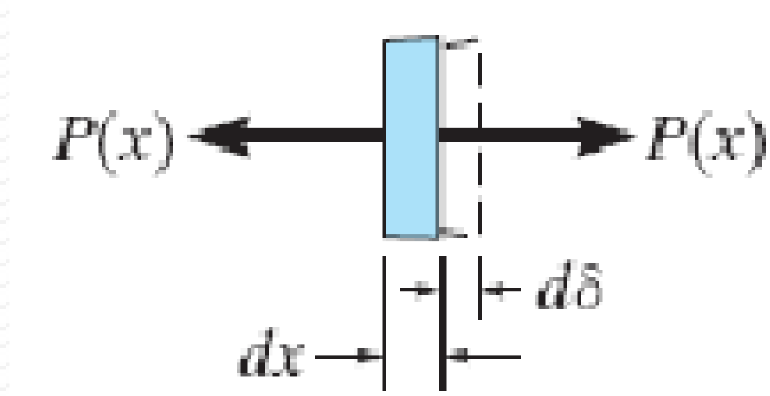

- Consideremos ainda:
  - Carga varia ao longo de x → P(x)
  - Área varia ao longo de x → A(x)
  - Elasticidade varia ao longo de x → E(x)
  - Tensão uniforme em cada seção (Saint-Venant)

# Deformação por Carga Axial

- Considerements a viga genérica sob carga axial

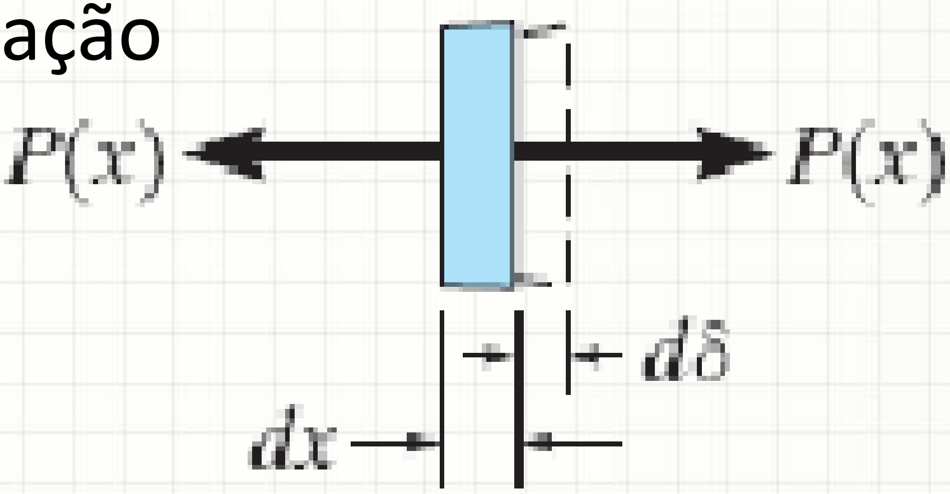



- Vamos calcular a deformação no elemento dx



# Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação
- $\sigma(x) = \frac{P(x)}{A(x)}$
- $\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$
- $\sigma(x) = E(x) \cdot \epsilon$

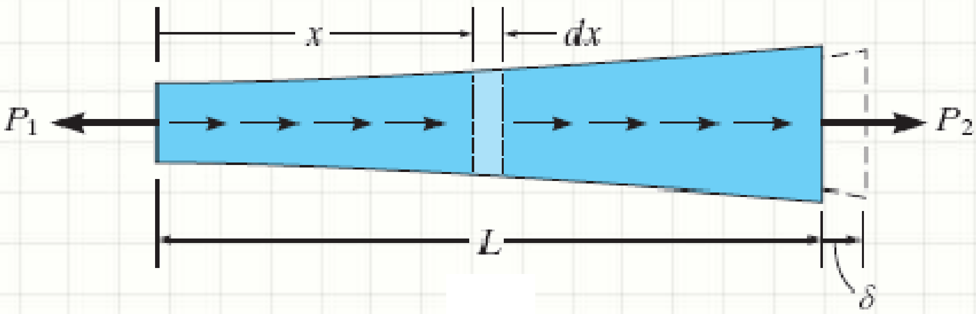


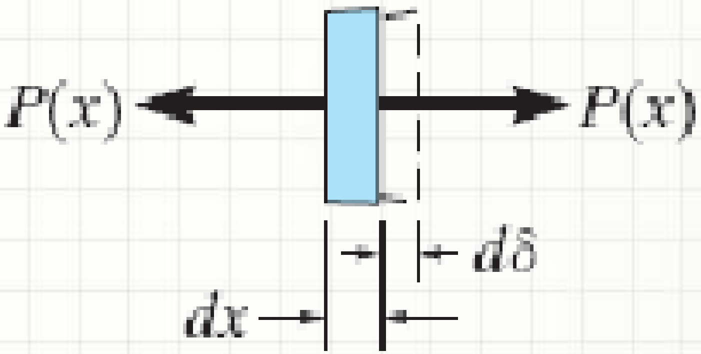

$$\frac{P(x)}{A(x)} = \mathrm{E} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E(x) \cdot A(x)}$$

# Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação



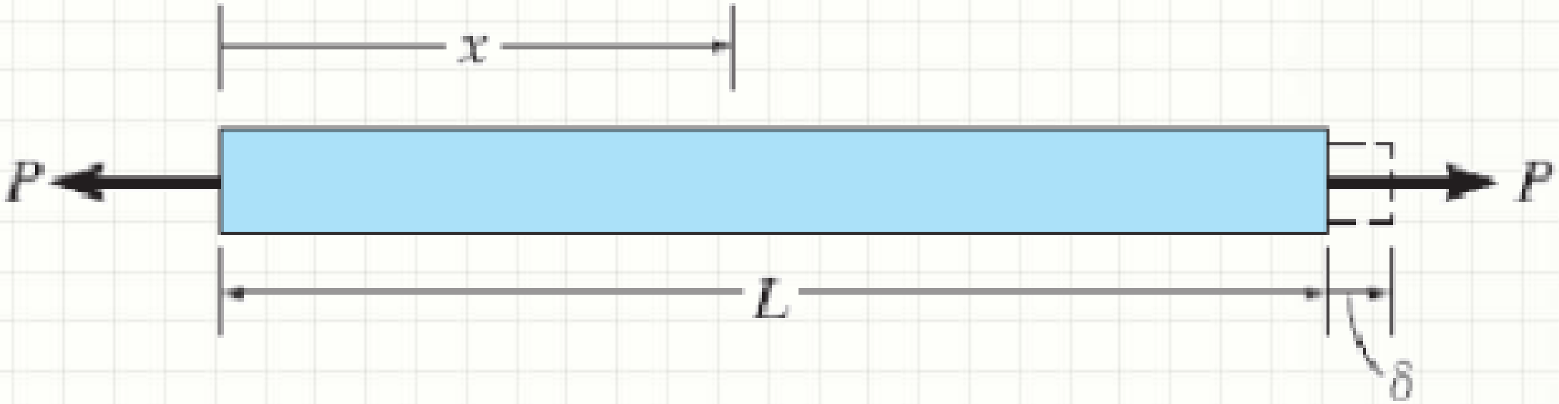

$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E(x) \cdot A(x)}$$

Deformação Total na Barra?

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E(x) \cdot A(x)}$$

# Deformação por Carga Axial

- Deform.: Viga de **seção**/**carga**/**E** constantes

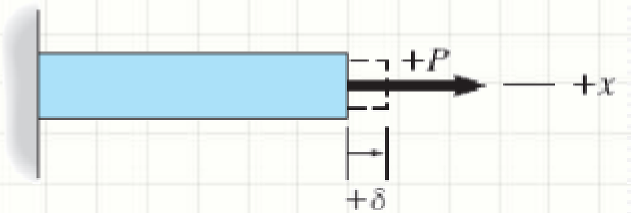


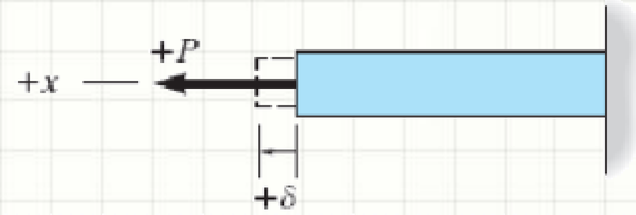

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E(x) \cdot A(x)} = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{P}{E \cdot A} \cdot \int_0^L dx$$

$$\boldsymbol{\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}}$$

# Deformação por Carga Axial

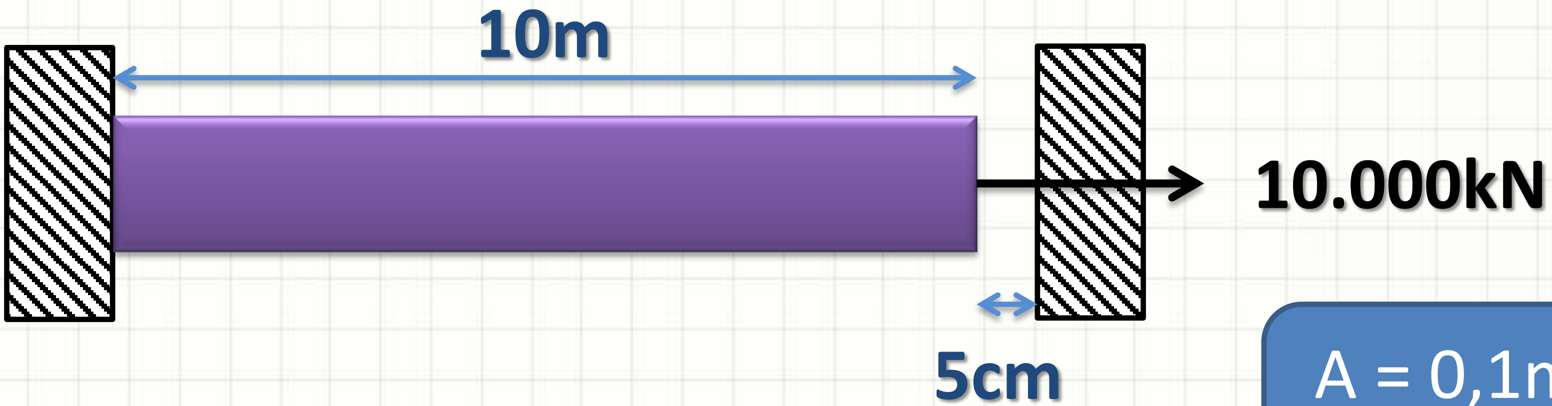
- Convenção de Sinais




- Trações → Alongamentos → +
- Compressões → Contrações → -

# Exemplo – O vão é suficiente?




A = 0,1m²
E = 50GPa

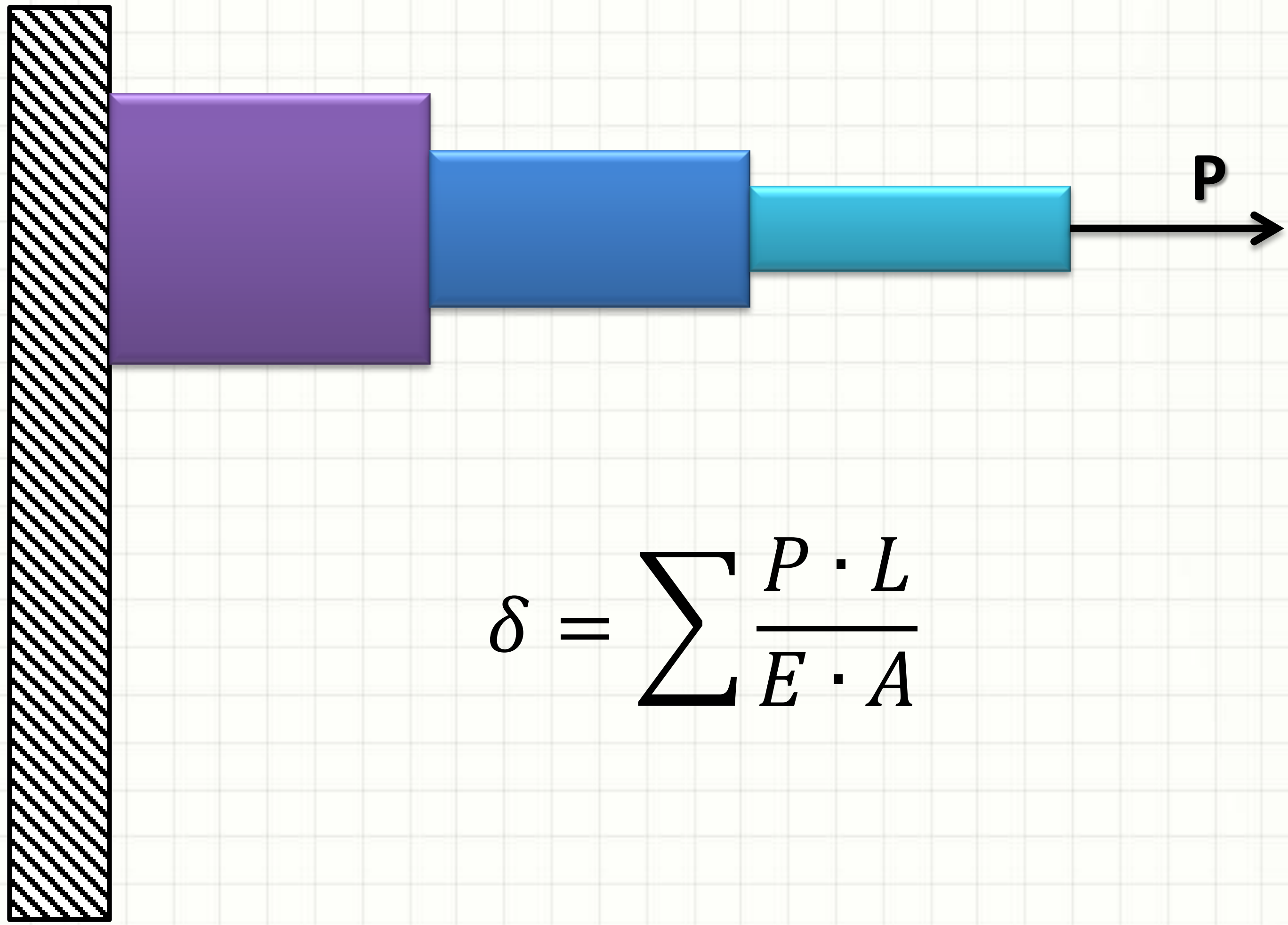
- Se o espaço fosse suficiente...

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{10^7 \cdot 10}{5.10^{10} \cdot 10^{-1}} = \frac{10^8}{5.10^9}$$

$$\boldsymbol{\delta = 2.10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

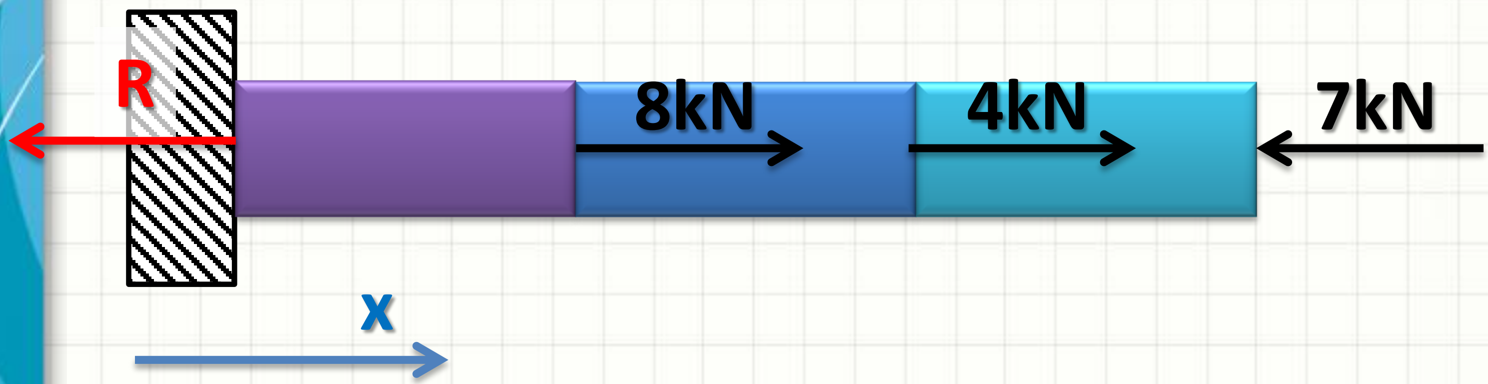
# Deformação por Carga Axial

- Barras compostas de várias seções constantes




$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

# Deformação por Carga Axial



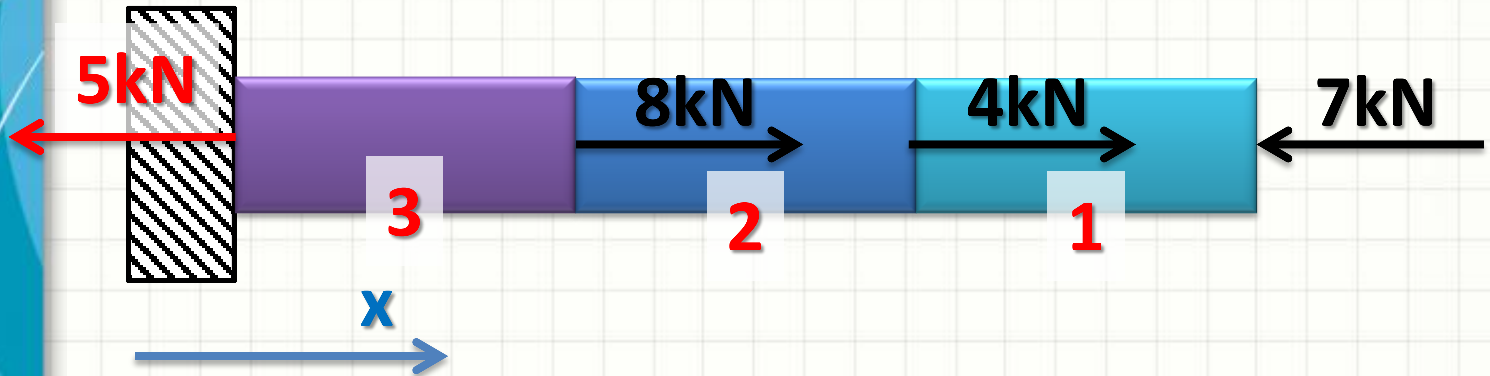

- A reação de apoio é...

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R + 8 + 4 - 7 = 0 \Rightarrow$$

**R = 5kN**

# Deformação por Carga Axial

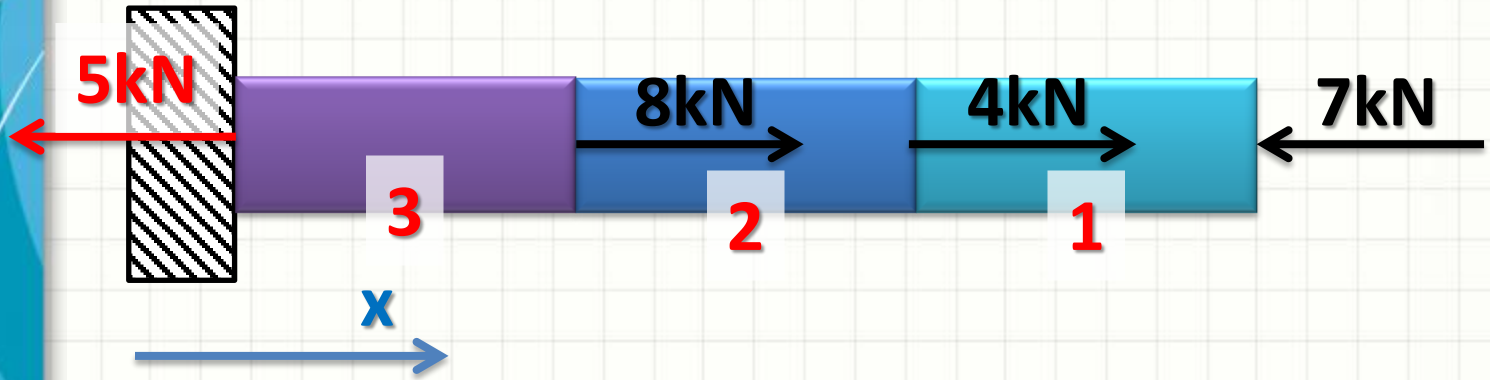



- O alongamento é...

$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \Rightarrow$$

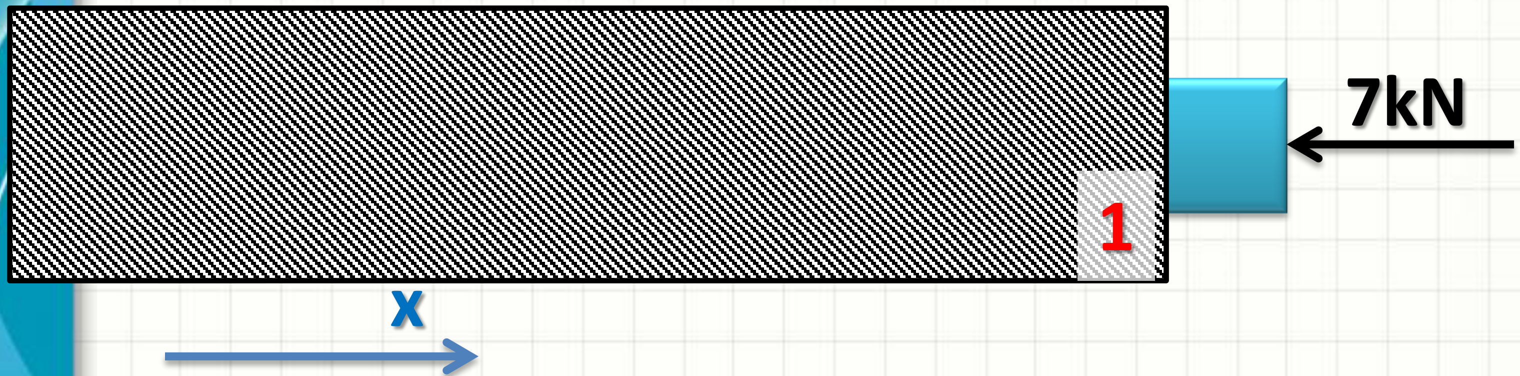
$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

# Deformação por Carga Axial



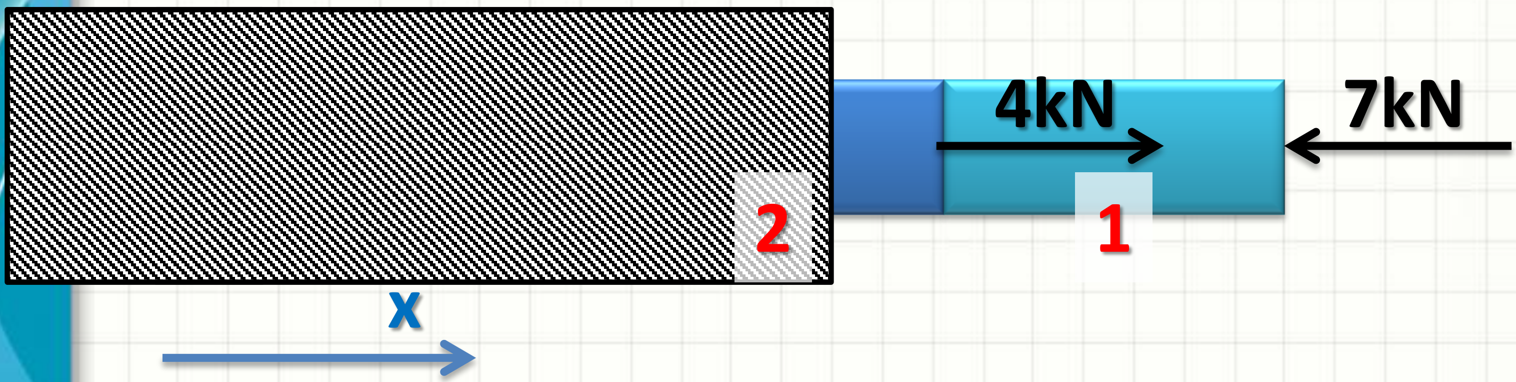

- Mas quanto valem P1, P2 e P3?

# Deformação por Carga Axial



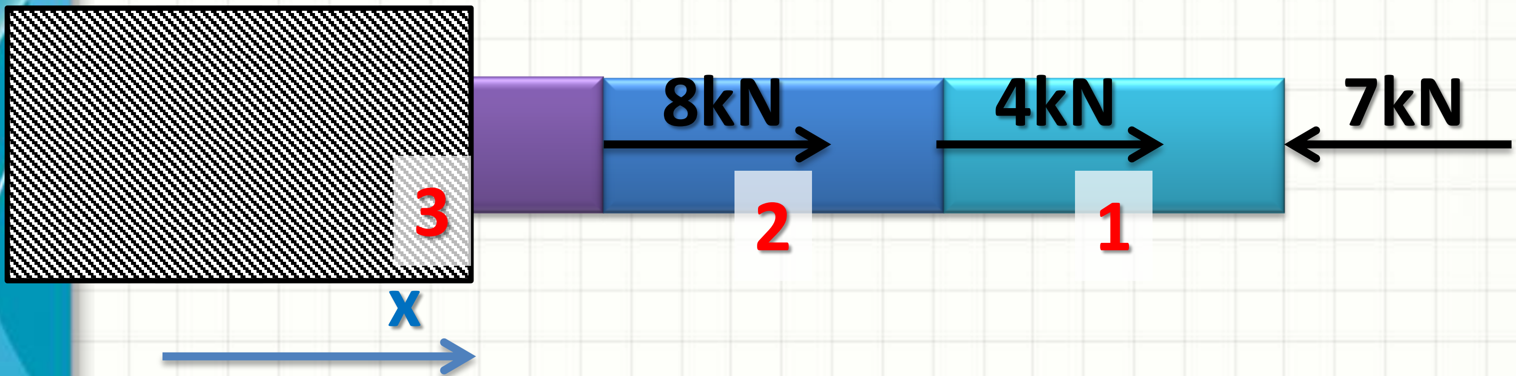

- Mas quanto valem P1, P2 e P3?
- Qual a única força atuando em 1?
- P1 = -7kN

# Deformação por Carga Axial



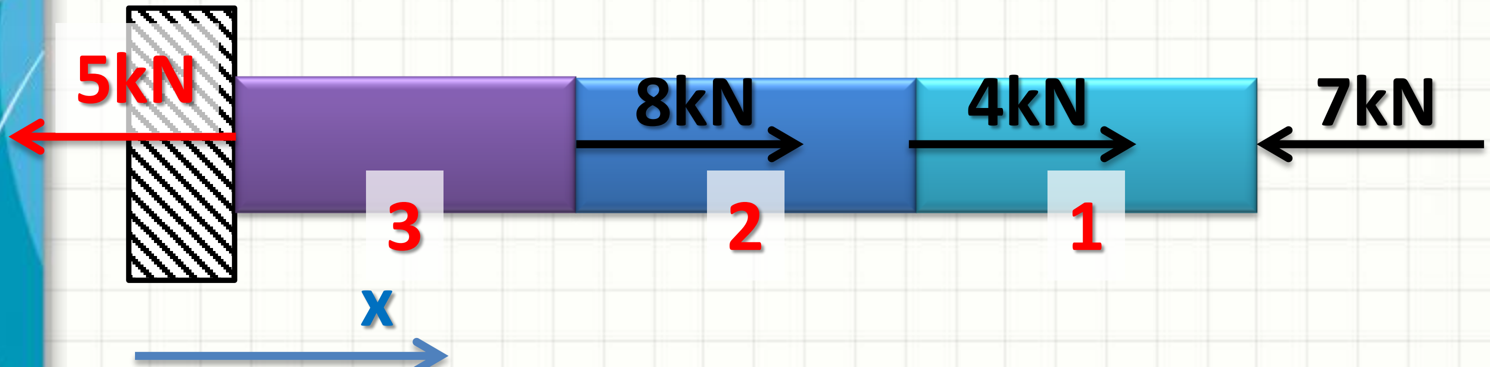

- Mas quanto valem P1, P2 e P3?
- Quais são as forças atuando em 2?
- P2 = -7kN + 4kN = -3kN

# Deformação por Carga Axial

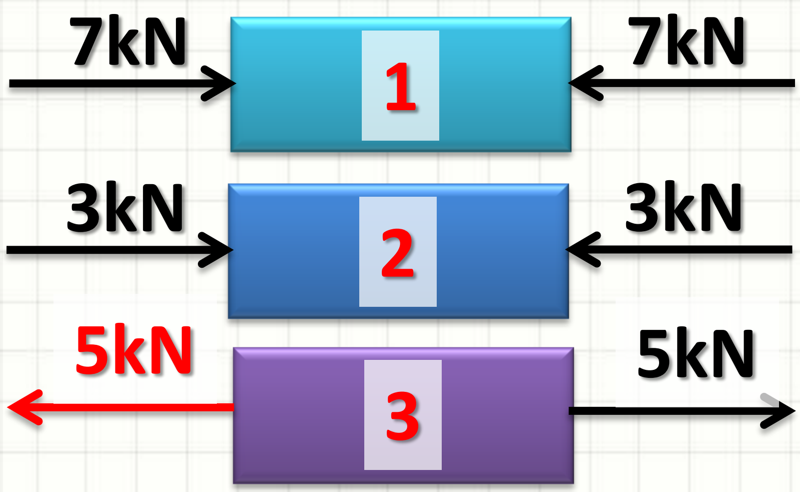



- Mas quanto valem P1, P2 e P3?
- Quais são as forças atuando em 3?
- P3 = -7kN + 4kN + 8kN = 5kN

# Deformação por Carga Axial




$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$




P1 = -7kN

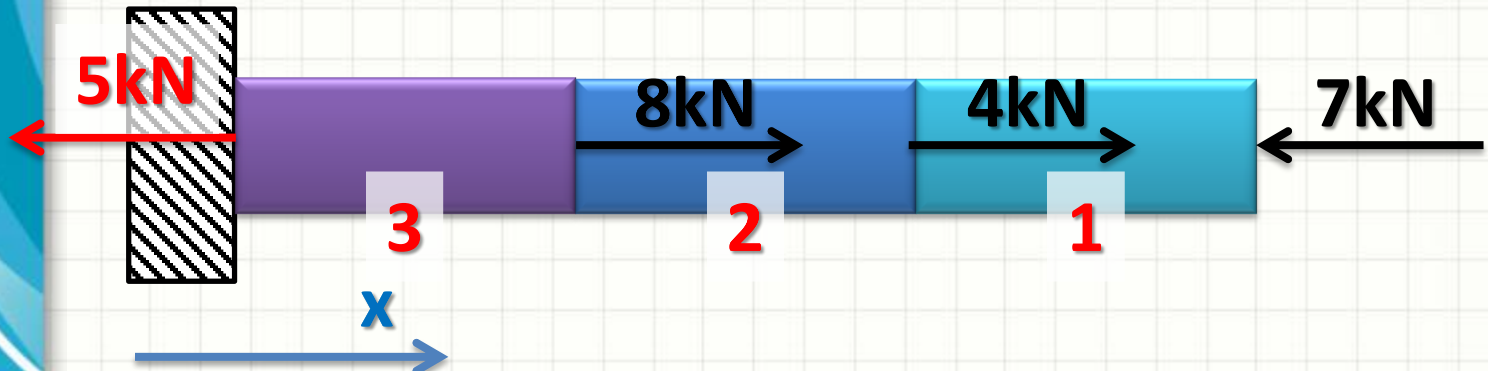
P2 = -3kN

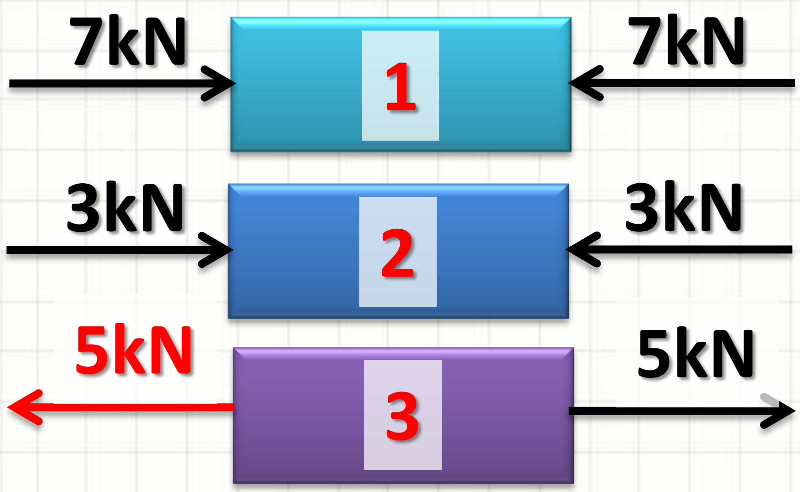
P3 = 5kN

# Diagrama de Esforços Normais

# Diagrama de Esforços Normais

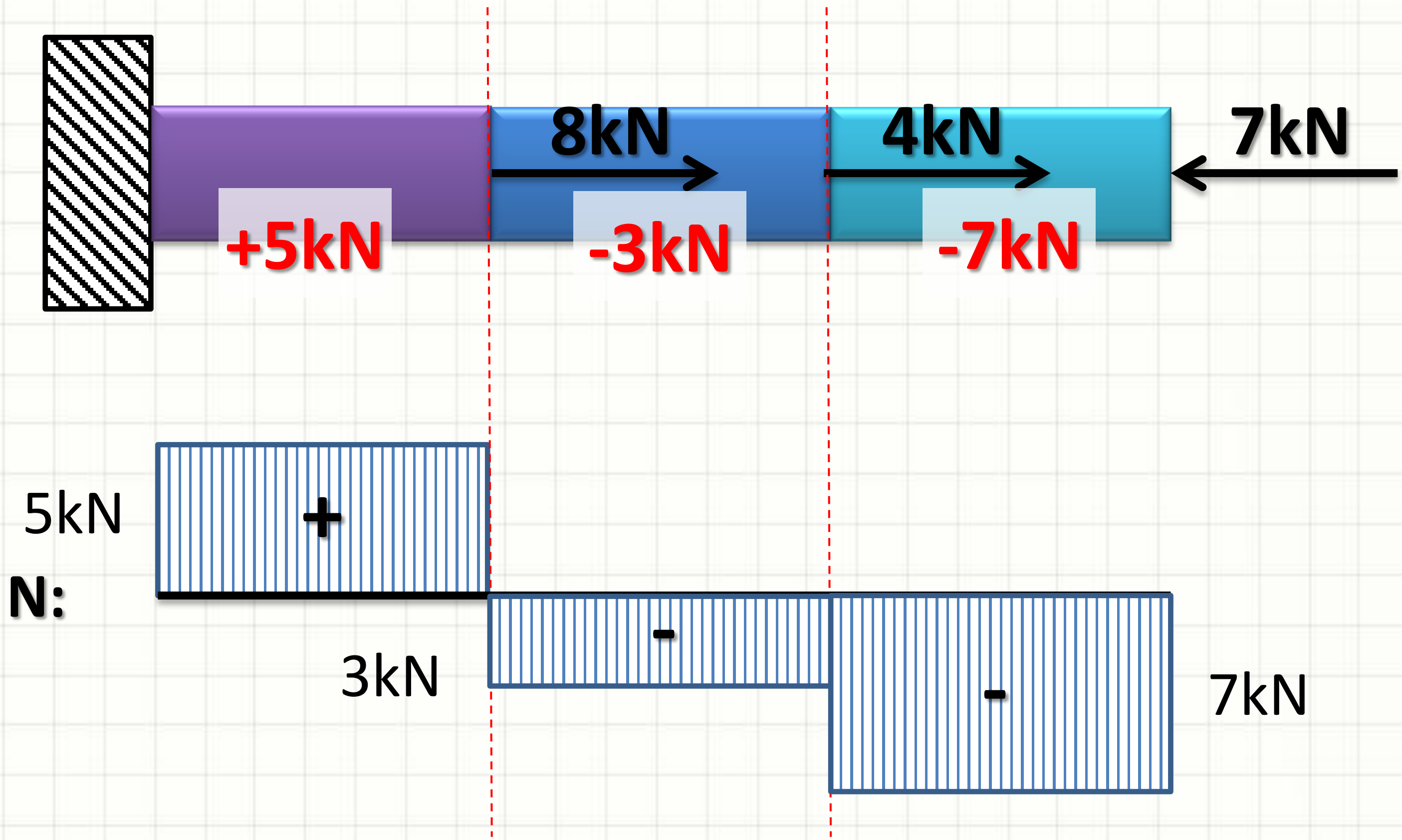
- No exercício anterior, vimos:




Será que mão tem um jeito **simples** de indicar os esforços reais em cada trecho?

# Diagrama de Esforços Normais



# Pausa para o Café!

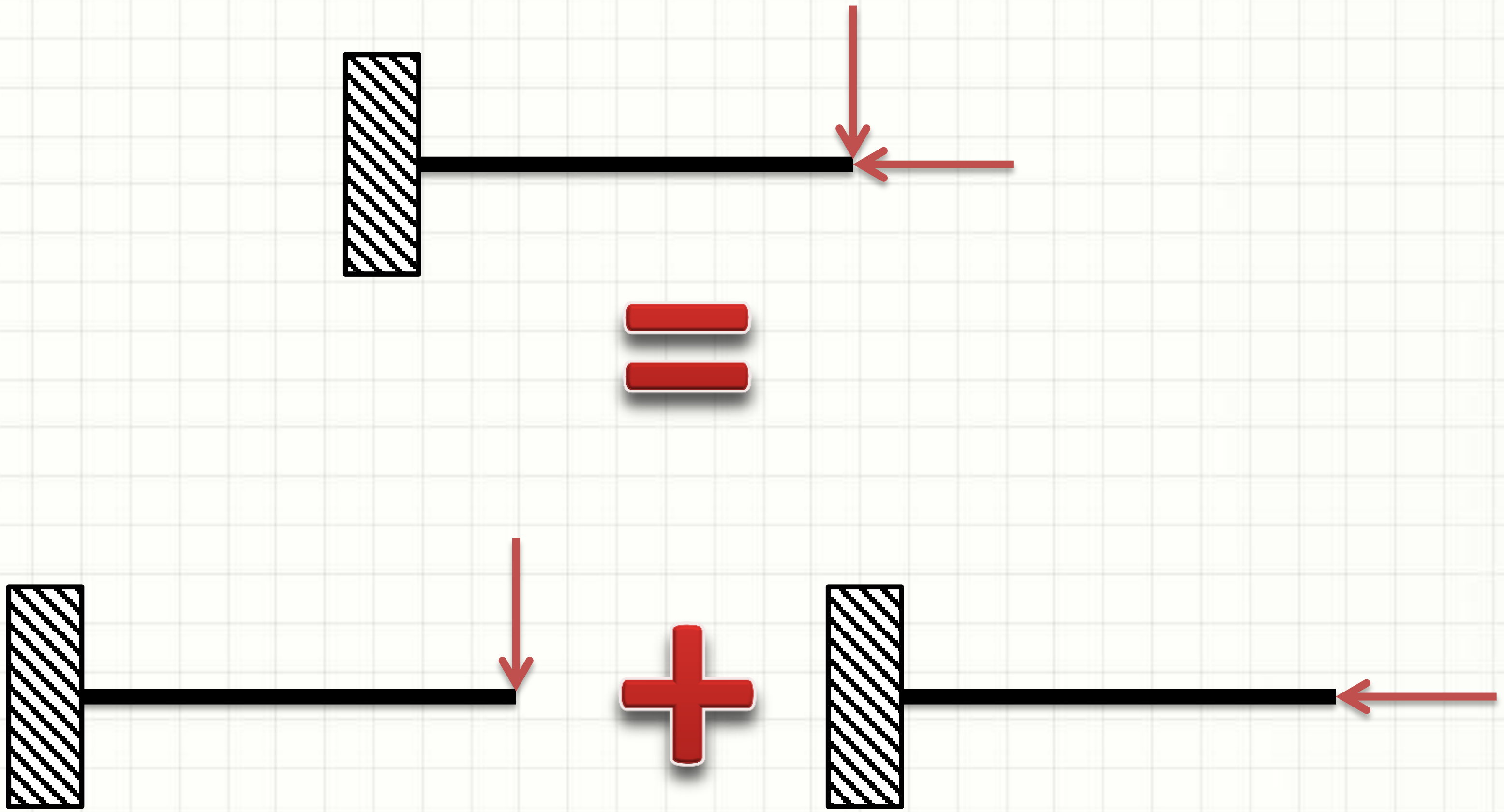
# Superposição de Efeitos

# Superposição de Efeitos

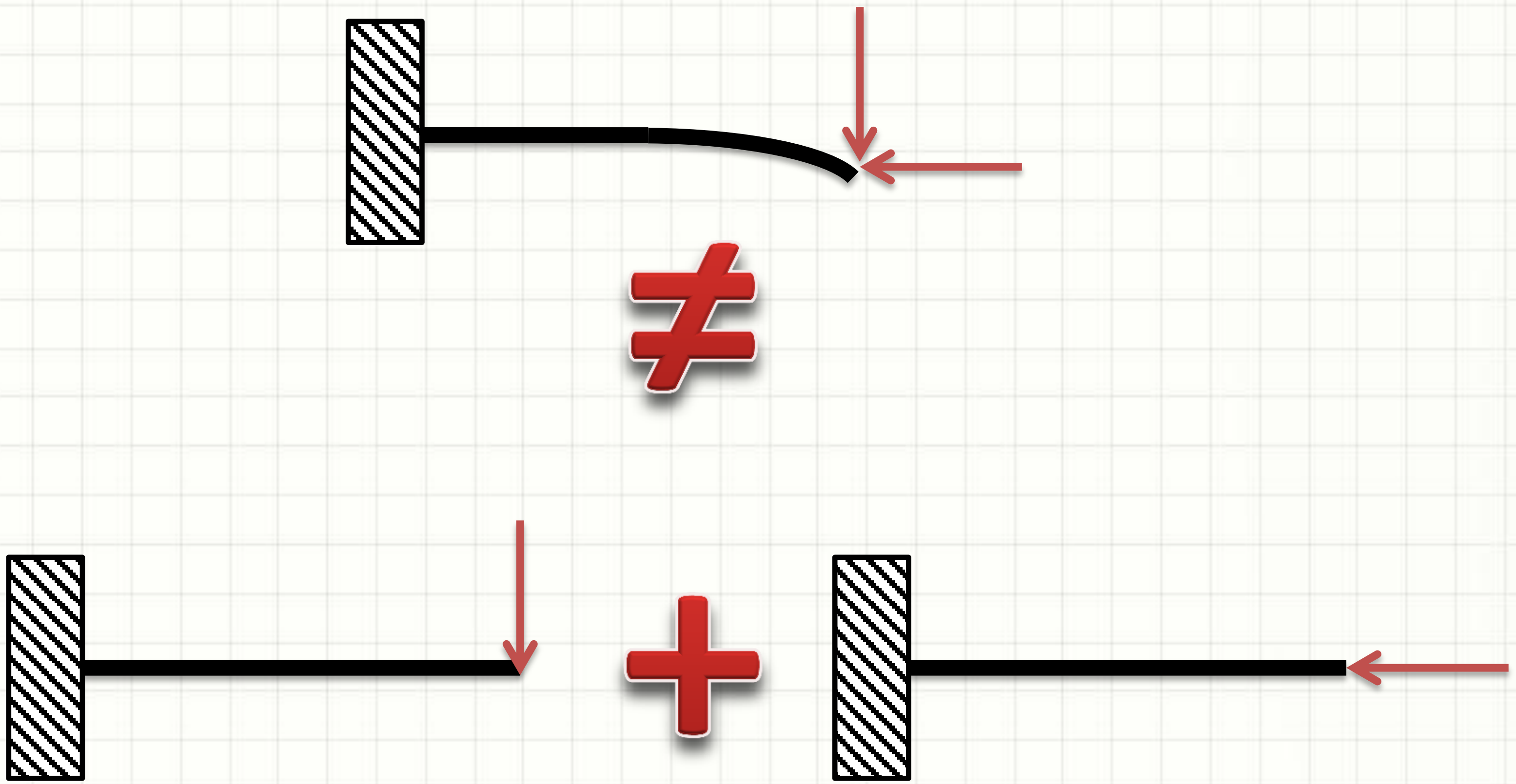
- Princípio da Superposição de Efeitos
  - Subdividir o carregamento em componentes
  - Calcular os efeitos em separado
  - Somar os resultados

- Carga relacionada linearmente com $\sigma$ ou $\delta$
  - Ex.: $\sigma = P/A$ ou $\delta = PL/EA$
  - Não pode alterar a geometria do elemento

# Superposição de Efeitos

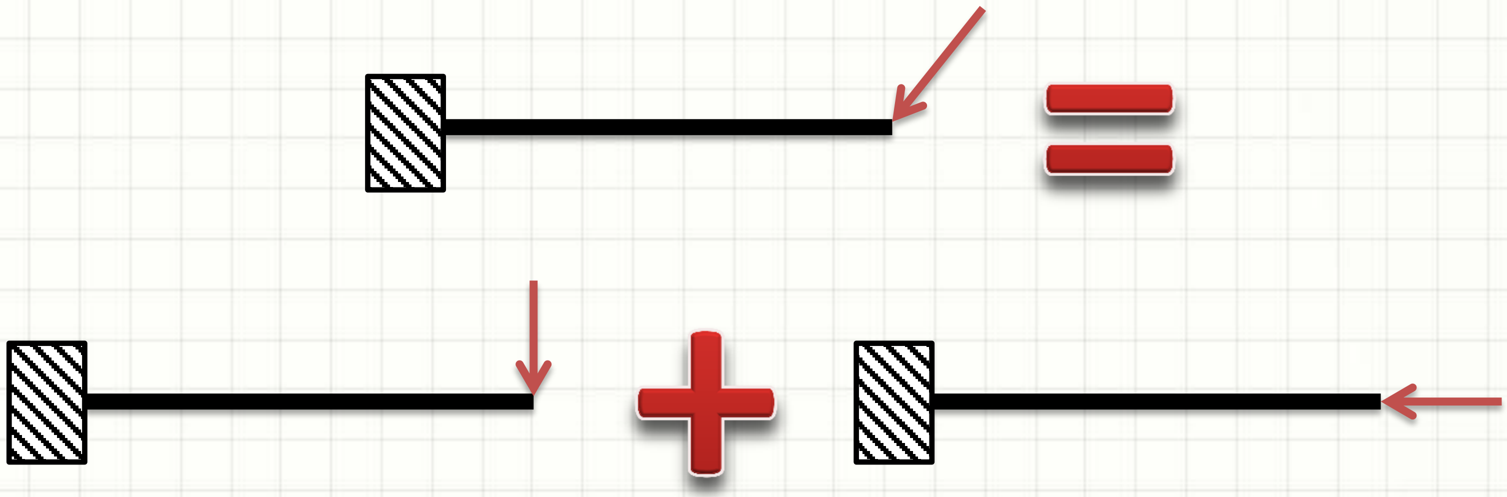


# Superposição de Efeitos



# Superposição de Efeitos

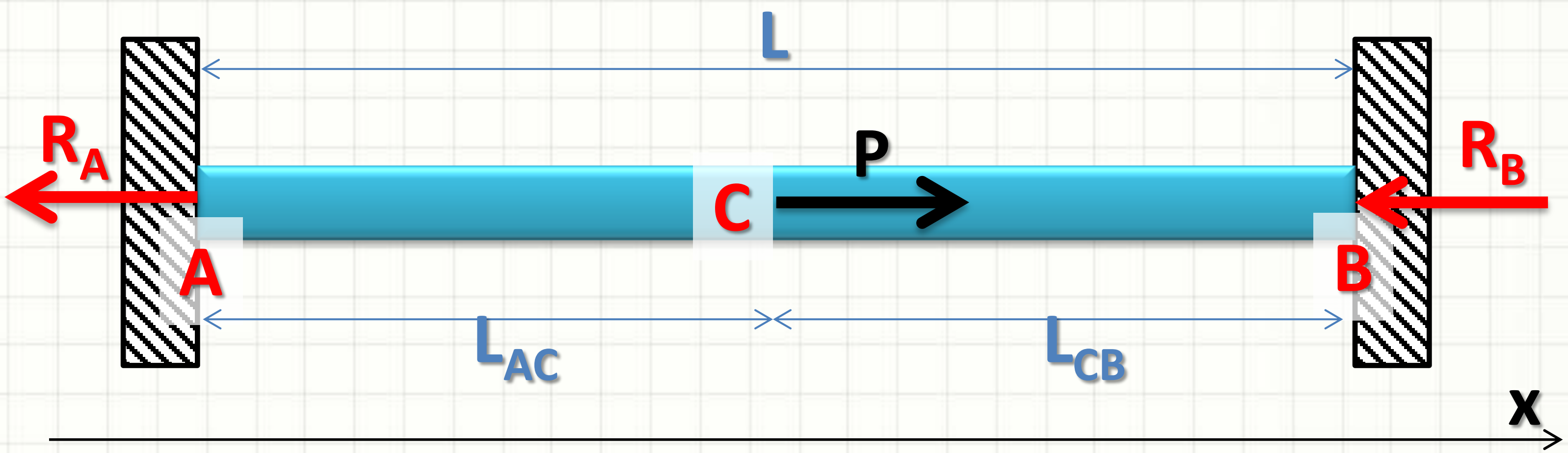
- Neste curso...
  - Pouca deformação
  - Cargas proporcionais a $\sigma$ ou $\delta$
- A menos que especificado diferentemente!
- Em geral, valerá a superposição!



# Elementos Estaticamente Indeterminados sob Carga Axial

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



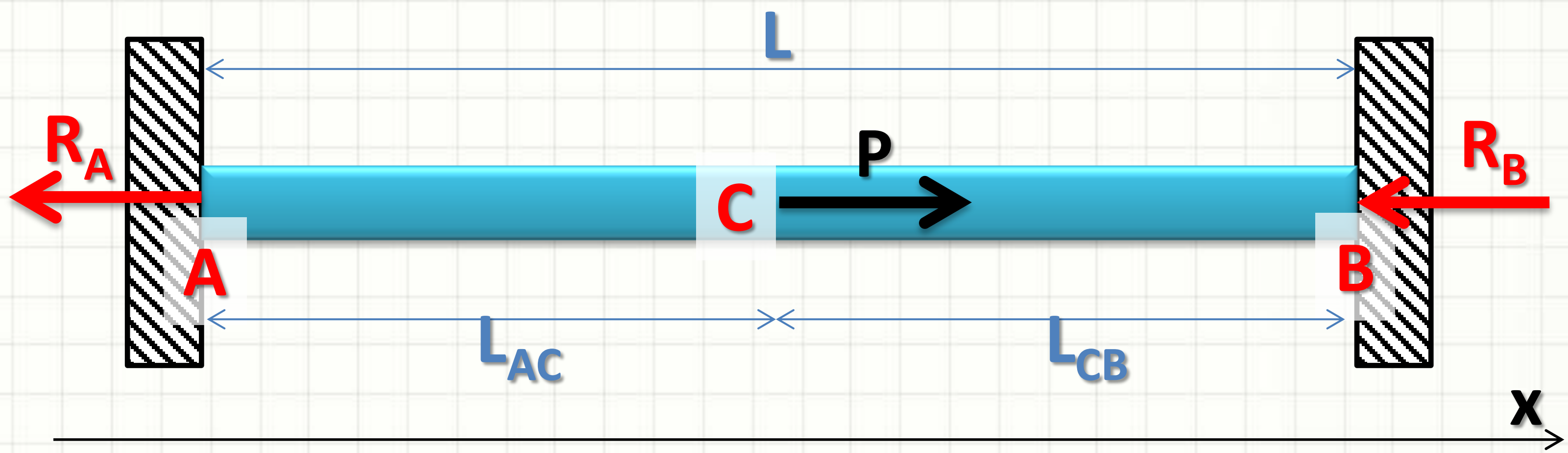

- Reações $R_A$ e $R_B$ ... ?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



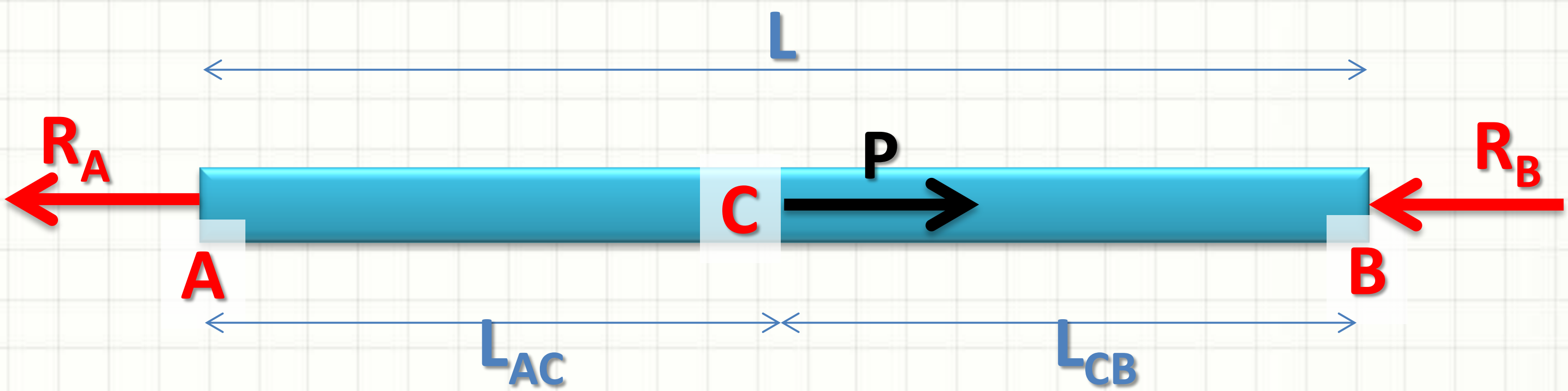

- Reações R

**Viga Estaticamente Indeterminada**

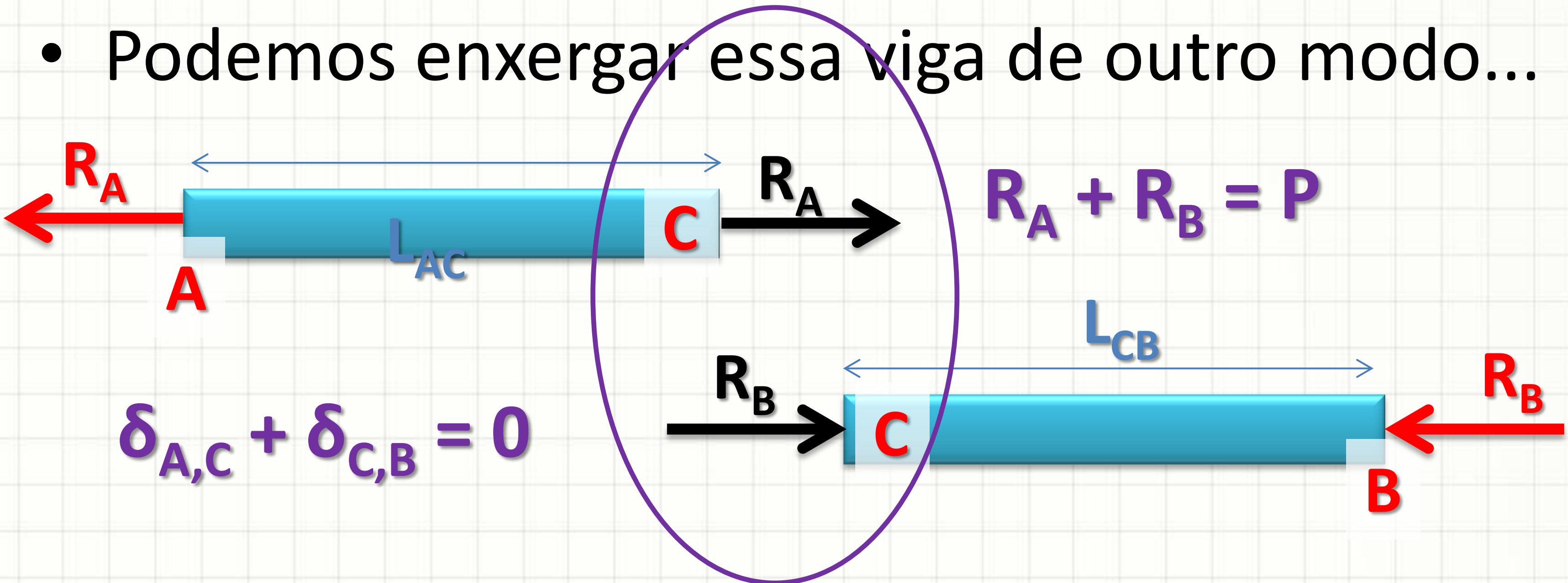
$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo

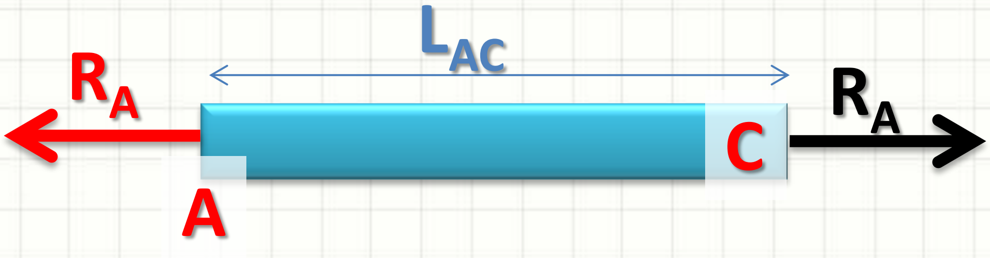



- Podemos enxergar essa viga de outro modo...



# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...




$$R_A + R_B = P$$

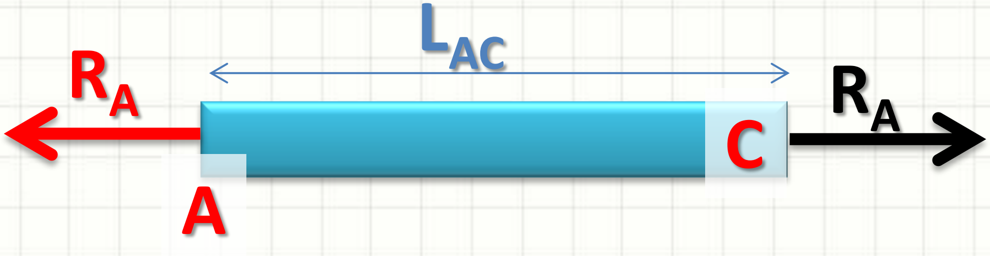
$$\delta_{A,C} + \delta_{C,B} = 0$$


$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \frac{-R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0$$

$$R_A = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...




$R_A + R_B = P$


$\delta_{A,C} + \delta_{C,B} = 0$

Condição de Equilíbrio

$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{\quad} + \frac{-R_B}{E \cdot A}$$

$$= \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

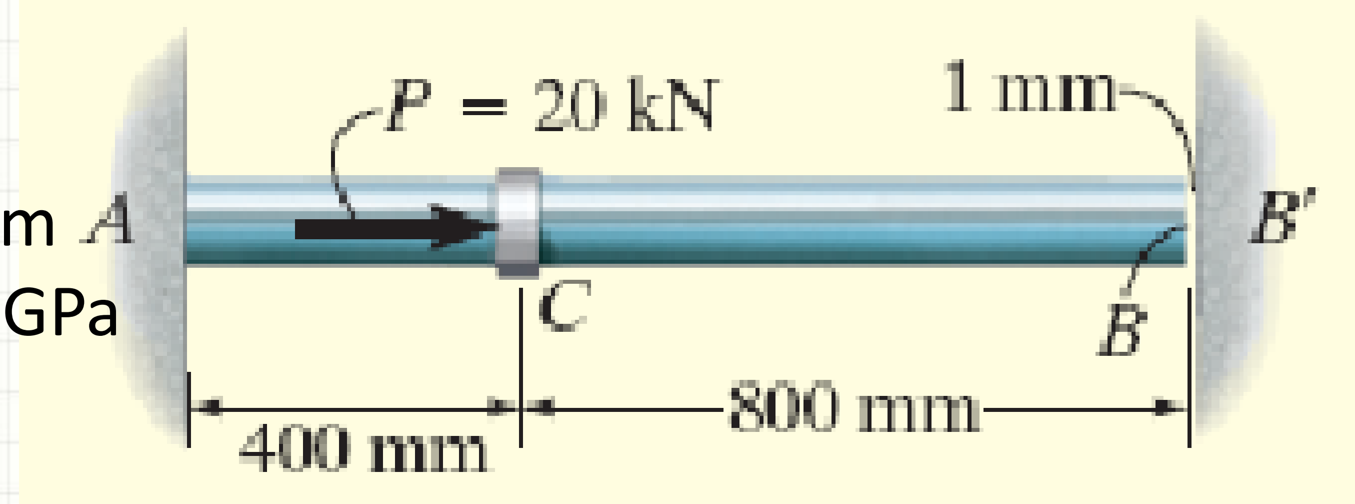
Condição de Compatibilidade

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

ϕ = 5mm

E = 200GPa



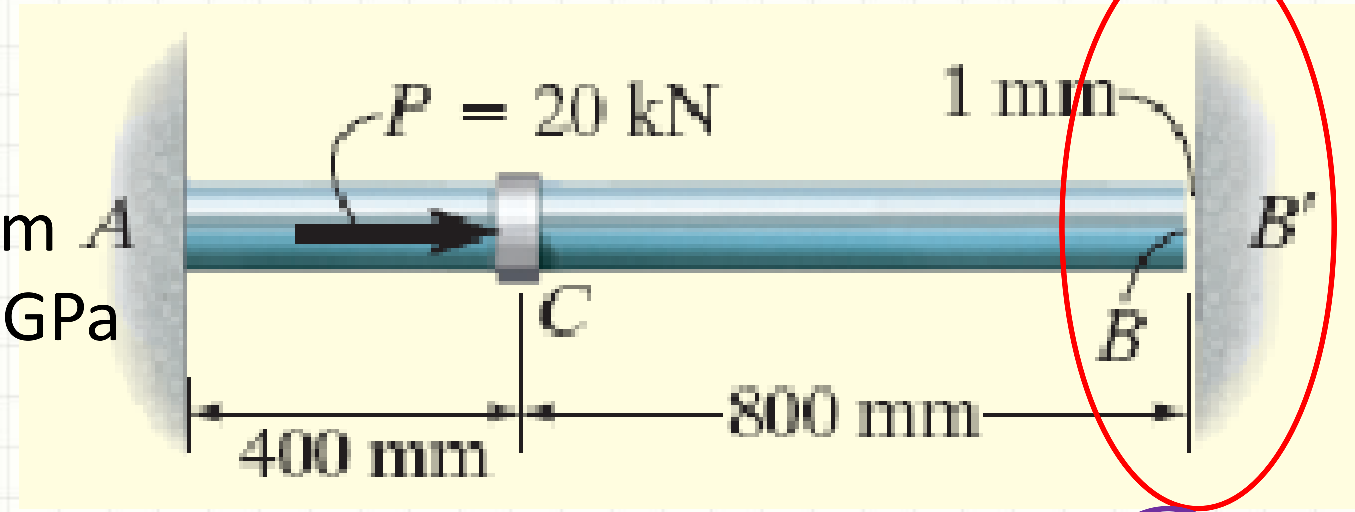

- Qual o alongamento se fosse livre em B?

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{2.10^{4} \cdot 4.10^{-1}}{2.10^{11} \cdot 6{,}25.10^{-6}.\pi} = 2.10^{-3}$$

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\phi$ = 5mm
E = 200GPa




- Reações $R_A$ e $R_B$ ... ?

$$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$$

Encurtamento!

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

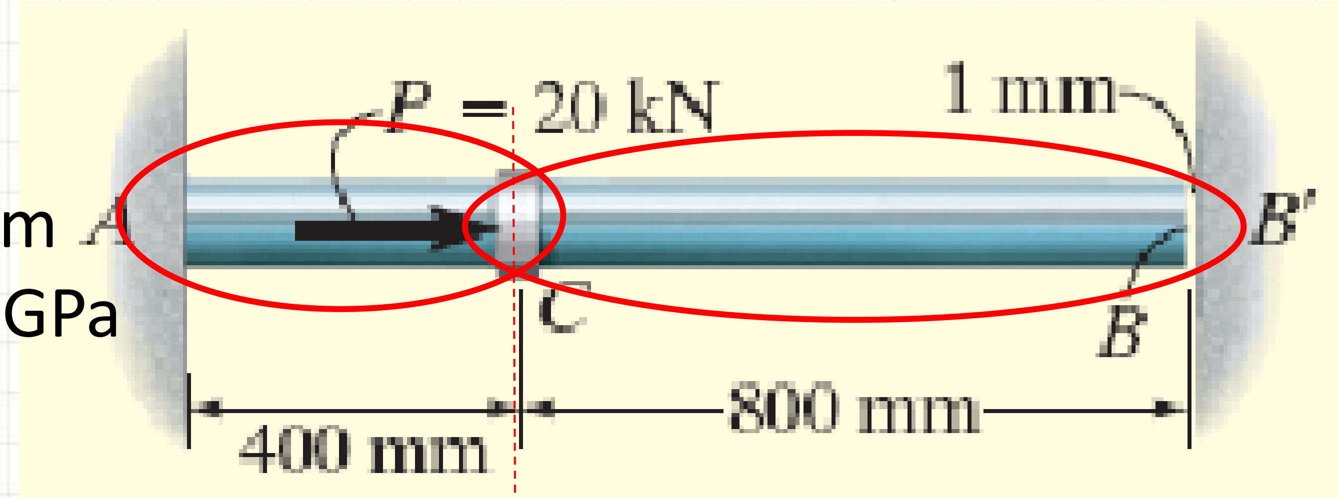
# Elem. Estaticamente Indeterminados

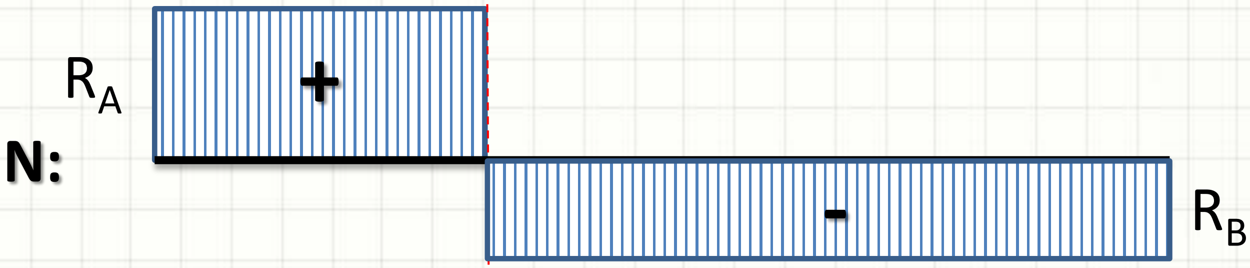
- Exemplo

$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

$\phi = 5mm$

$E = 200GPa$



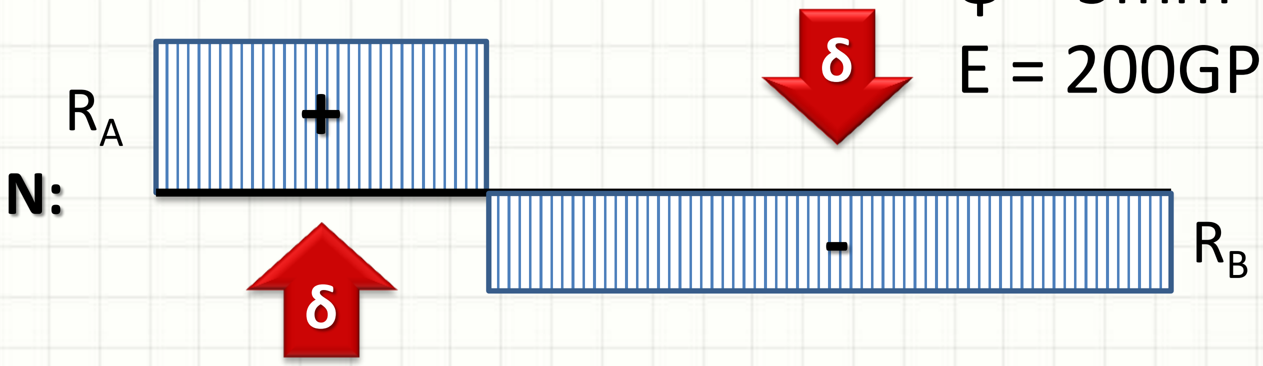
# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

$\phi = 5mm$

$E = 200GPa$




$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \frac{-R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0{,}001$$

$$\boldsymbol{R_A = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}}$$

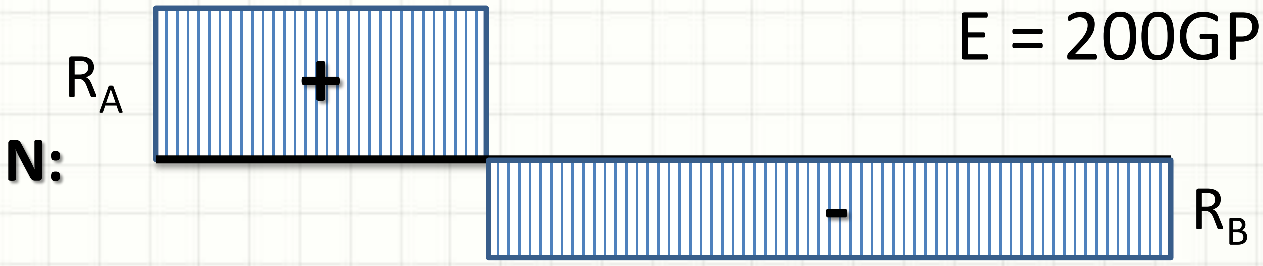
# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

$\phi = 5mm$

$E = 200GPa$




$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}} = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + (P - R_A) \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})^2 + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = \frac{0,001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 6,25 \cdot 10^{-6} + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0,8}{0,4}$$

$$R_A = \frac{3927 + (20000 - R_A) \cdot 0,8}{0,4}$$

$$R_A = 9817,5 + 40000 - 2 \cdot R_A$$

$$3 \cdot R_A = 49817,5$$

$$R_A = 16605,8N \cong 16,6kN$$

# Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = 16605{,}8N \cong 16{,}6kN$$

$$R_B = P - R_A$$

$$R_B = 20kN - 16{,}6kN$$

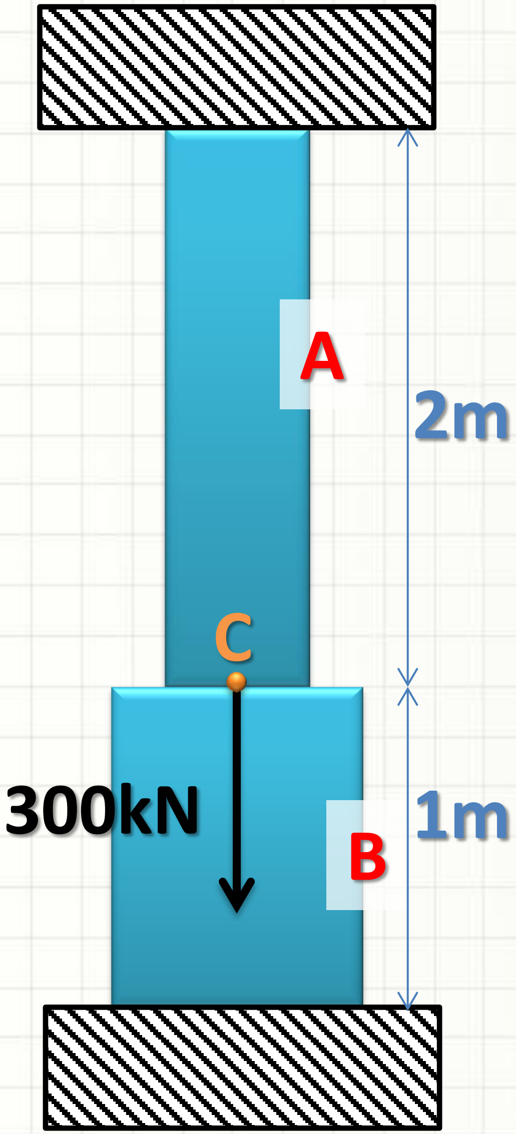
$$R_B = 3{,}4kN$$

# EXERCÍCIO

# Exercício – Entrega Individual

- Calcule as reações de apoio
- Trace o Diagrama de Normal
- Calcule o deslocamento em C

- $\phi_A = 0{,}5\text{m}$ $\phi_B = 1\text{m}$
- $E_A = E_B = 50\text{GPa}$



# Para Treinar

# Para Treinar em Casa

- Aço A-36: E = 200GPa
- Concreto de Alta Resistência: E = 35GPa
- Hibbeler (Bib. Virtual)
  - 5ª: Pág 98 a 114 7ª: Pág. 91 a 106
- Mínimos:
  - Exercícios 4.1, 4.5, 4.10, 4.29 (5ª 4.1, 4.10)
  - Exercícios 4.31, 4.33 (5ª 4.39, 4.44, 4.45)
- Extras:
  - Exercícios 4.2 a 4.4, 4.6, 4.7, 4.21, 4.30 (5ª 4.28, 4.30)
  - Exercícios: 4.34, 4.36, 4.37 (5ª 4.42, 4.53)

# Conclusões

# Resumo

- Existe relação entre carga e deslocamento
- Influenciam: Elastic. (E) / Área (A) / Comprim. (L)
- Podemos “decompor” problemas (superposição)
- Estaticamente Indeterminados?
  - Compatibilidade de deslocamentos
- **<u>Exercitar</u>: Hibbeler / Lista Aula 3**

---

- Únicas preocupações com cargas axiais?
  - Temperatura
  - Concentração de tensão
  - Deformação Inelástica

# PERGUNTAS?