



# RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

## FLEXÃO PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

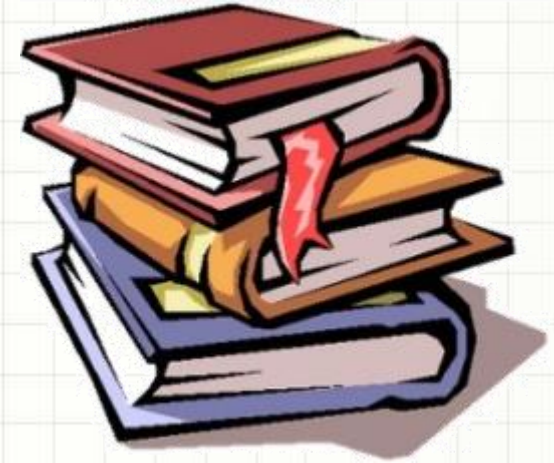
2013 - 2

# Objetivos

- Conceituar forças cortantes e momentos fletores
- Capacitar para o traçado de diagramas de cortantes e momento fletor em barras
- Explicitar a relação entre carga e cortante e entre cortante e momento



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>

(Resistência dos Materiais II – Aula 9)

Biblioteca Virtual

Resistência dos Materiais (Hibbeler) – 5ª Edição  
Páginas 199 a 221.

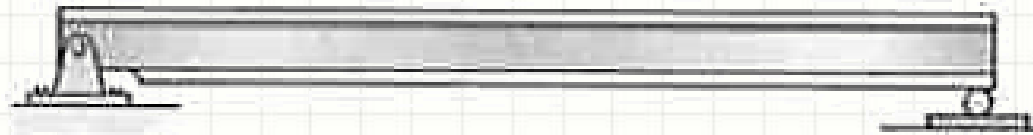
---



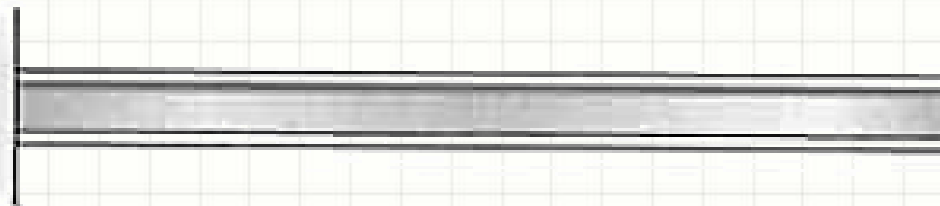
**O QUE SÃO FORÇA CORTANTE E  
MOMENTO FLETOR?**

# Objeto de Estudo

- Vigas – Cargas perpendiculares ao eixo



Viga simplesmente apoiada



Viga em balanço

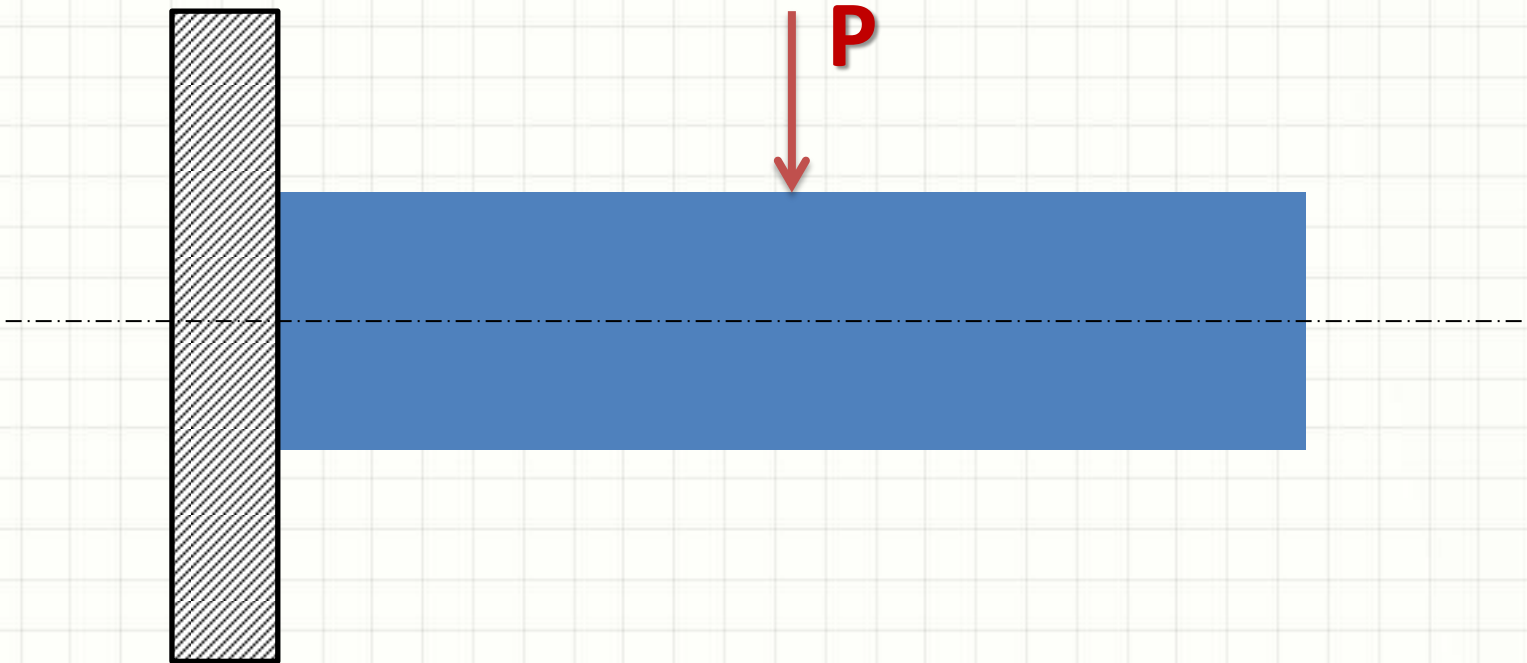


Viga apoiada com extremidade em balanço



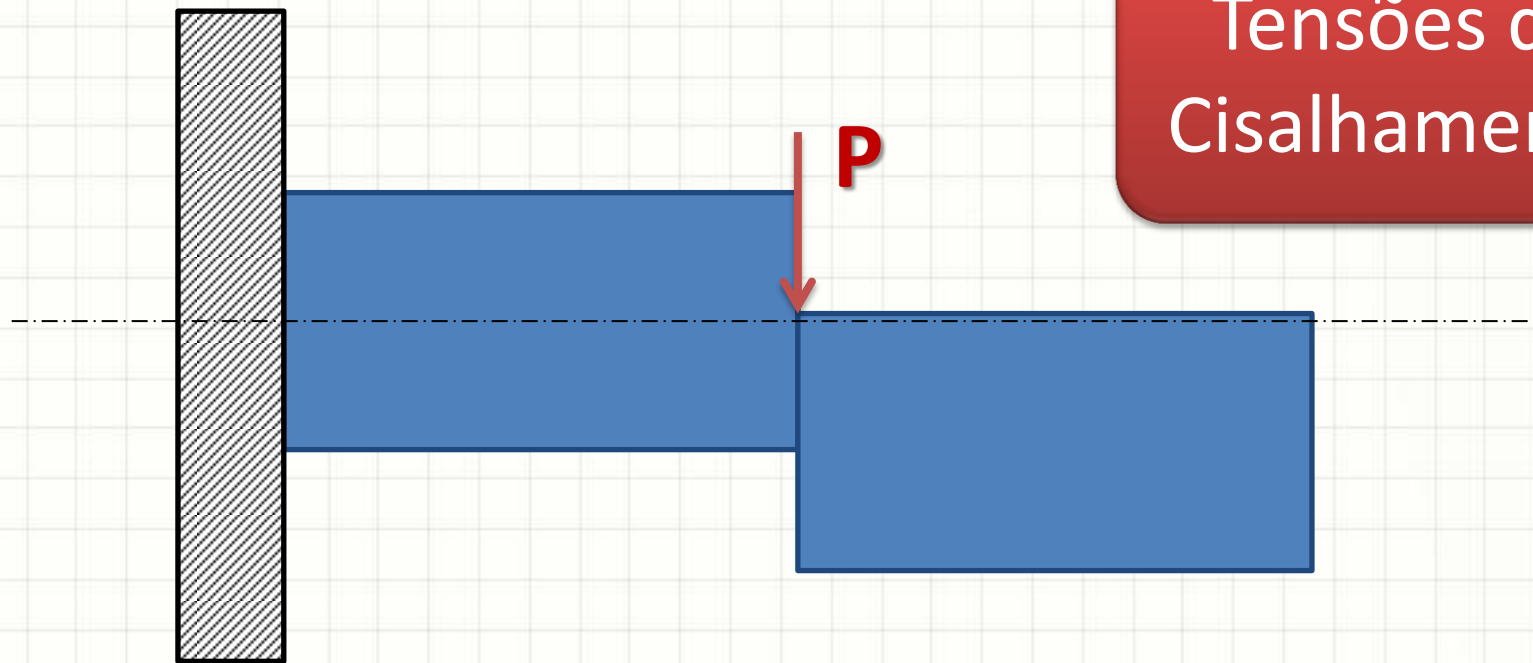
# Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
  - Perpendicular ao eixo da barra



# Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
  - Perpendicular ao eixo da barra



Tensões de  
Cisalhamento

# Momento Fletor

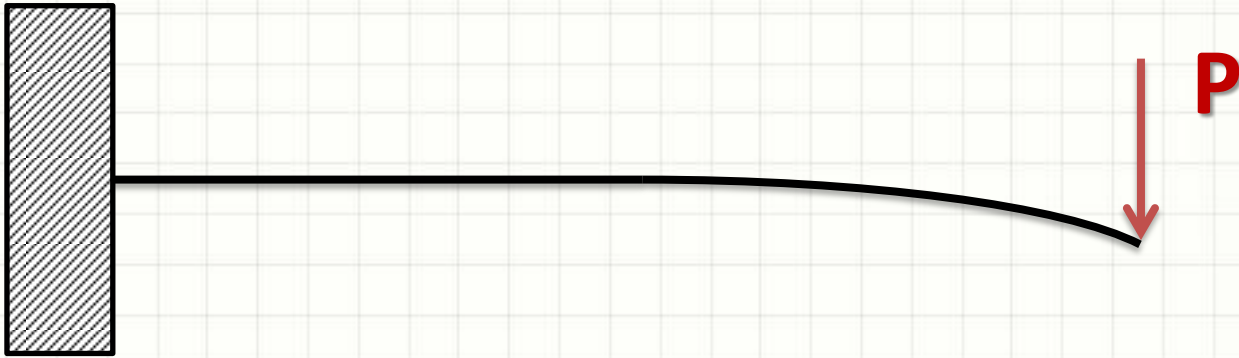
- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Causado por forças cortantes





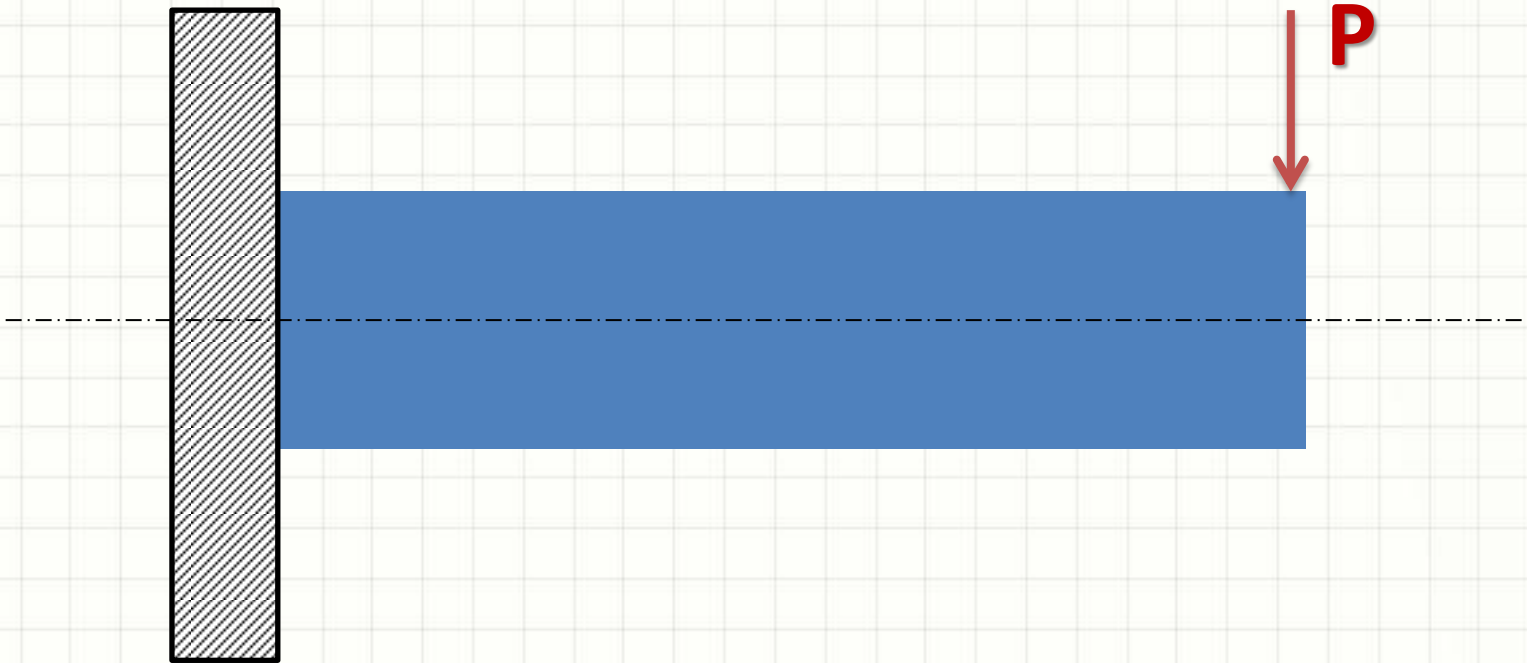
# Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Causado por forças cortantes



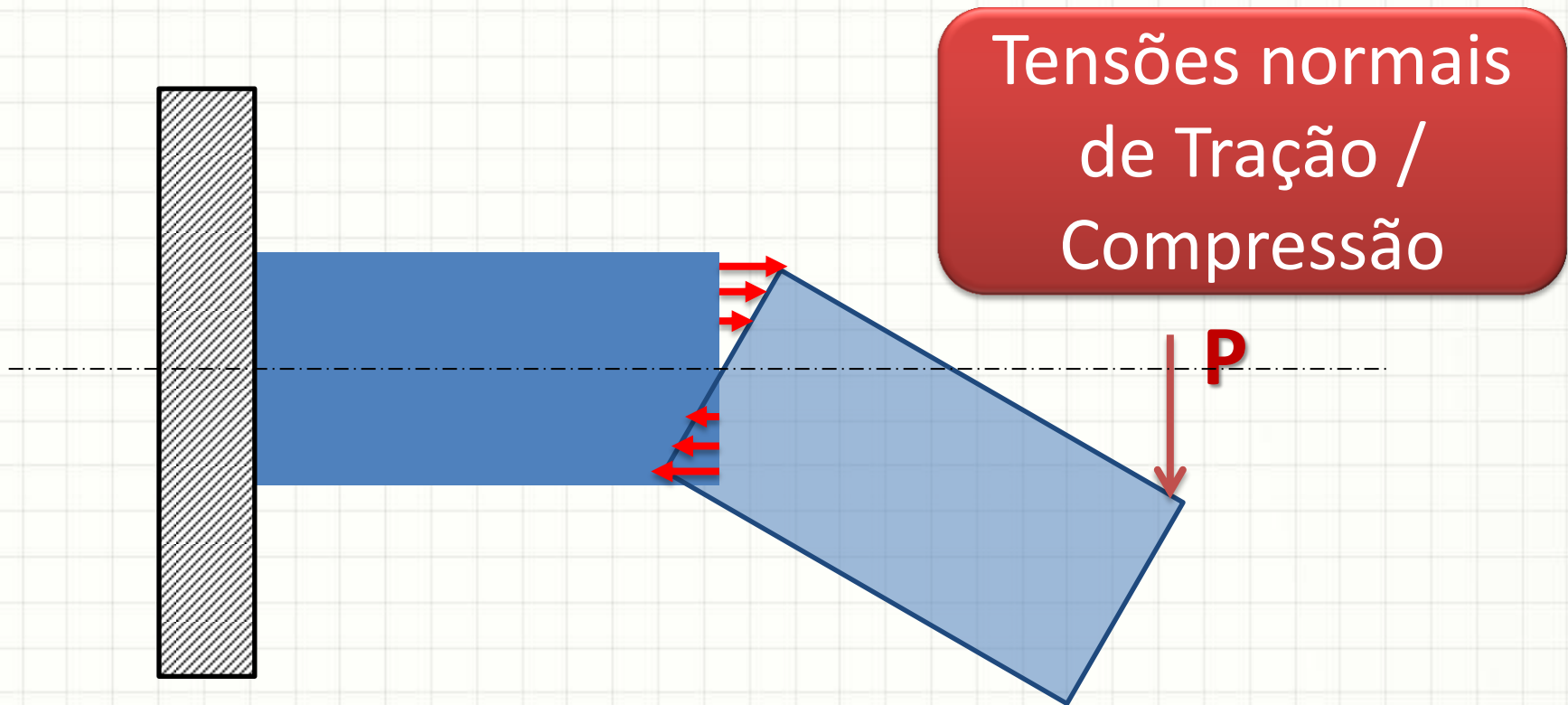
# Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Causado por forças cortantes



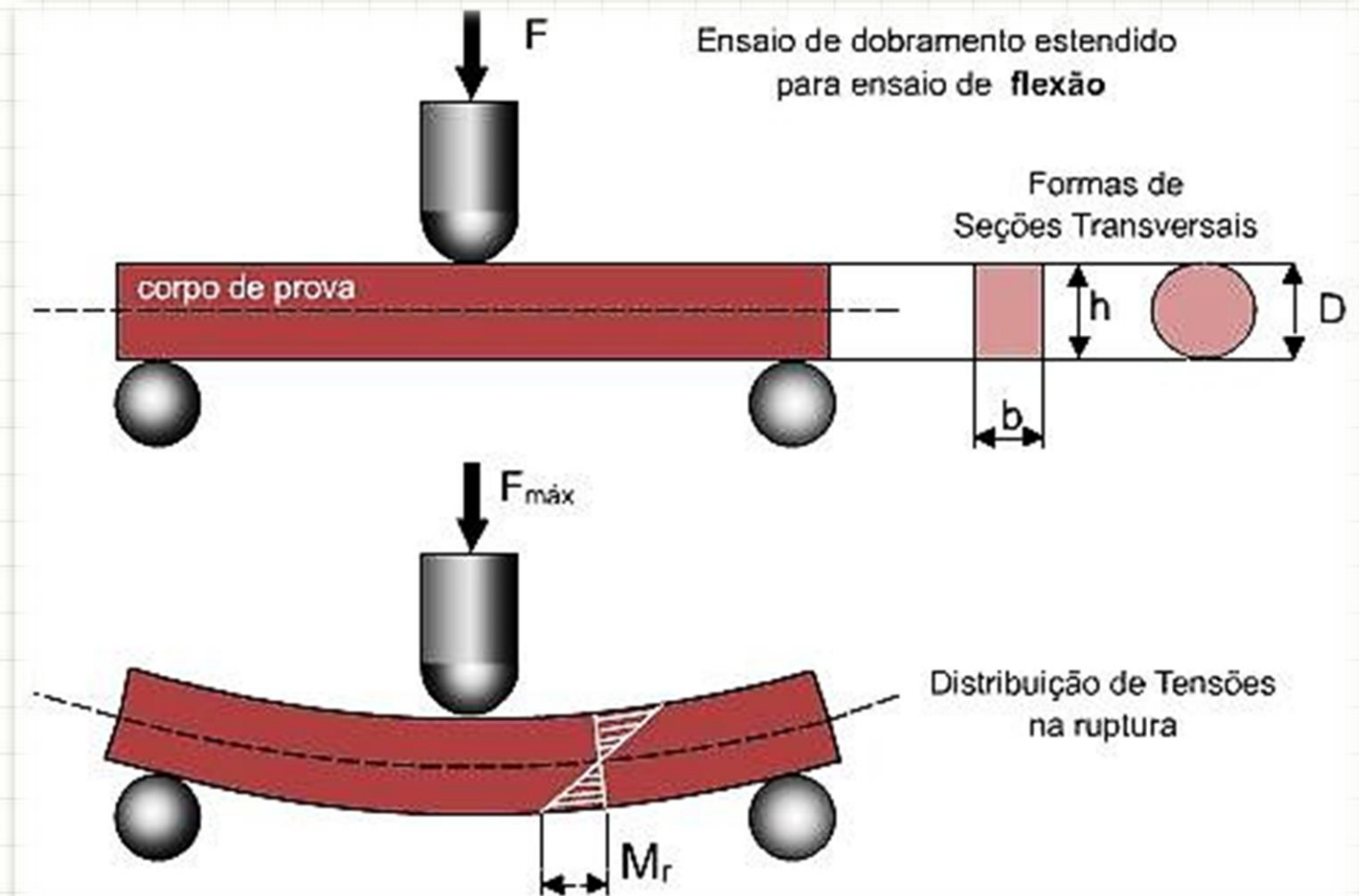
# Momento Fletor

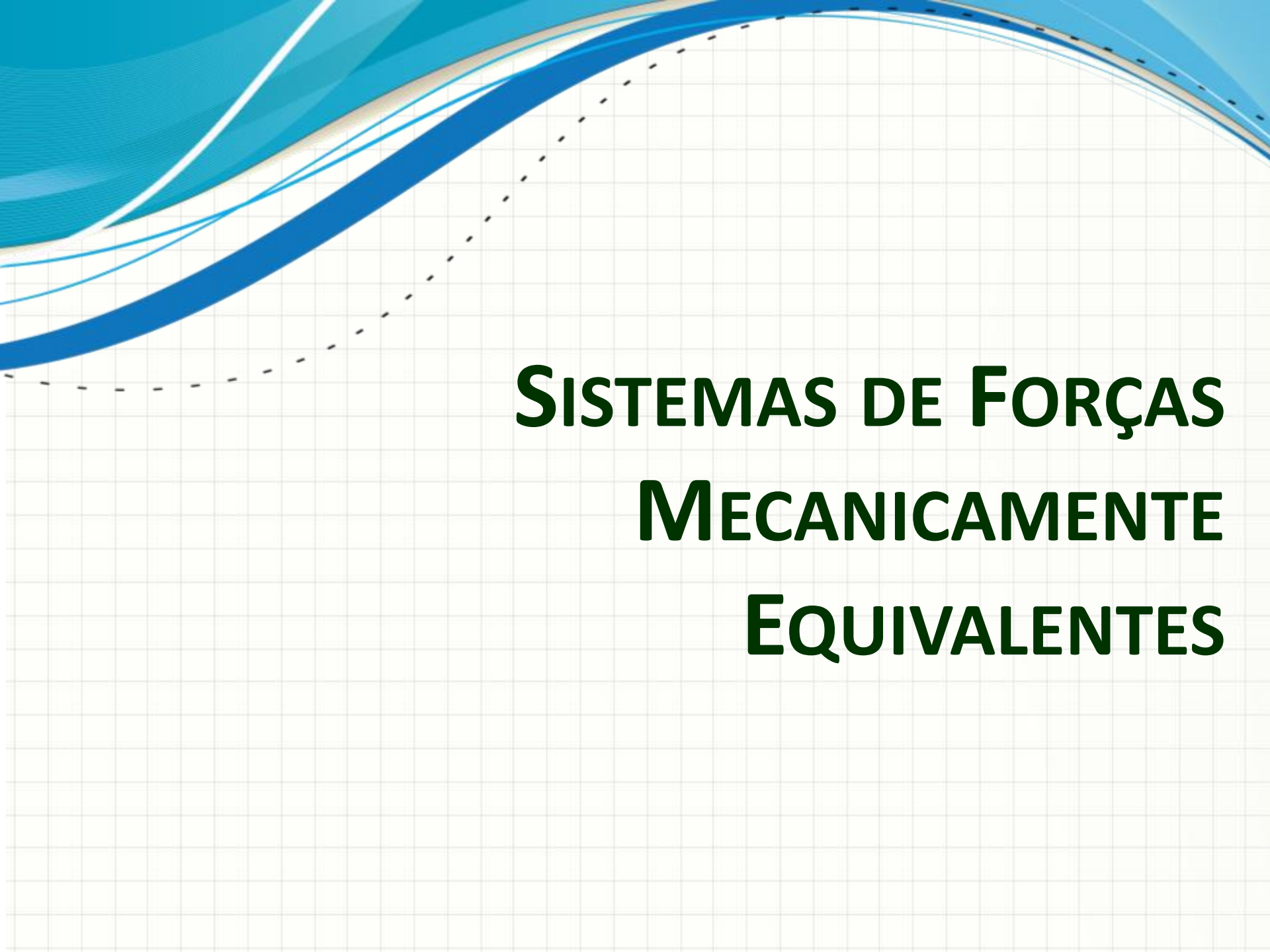
- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Causado por forças cortantes



# Momento Fletor

- Tensões Normais em viga Bi-Apoiada





# **SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES**

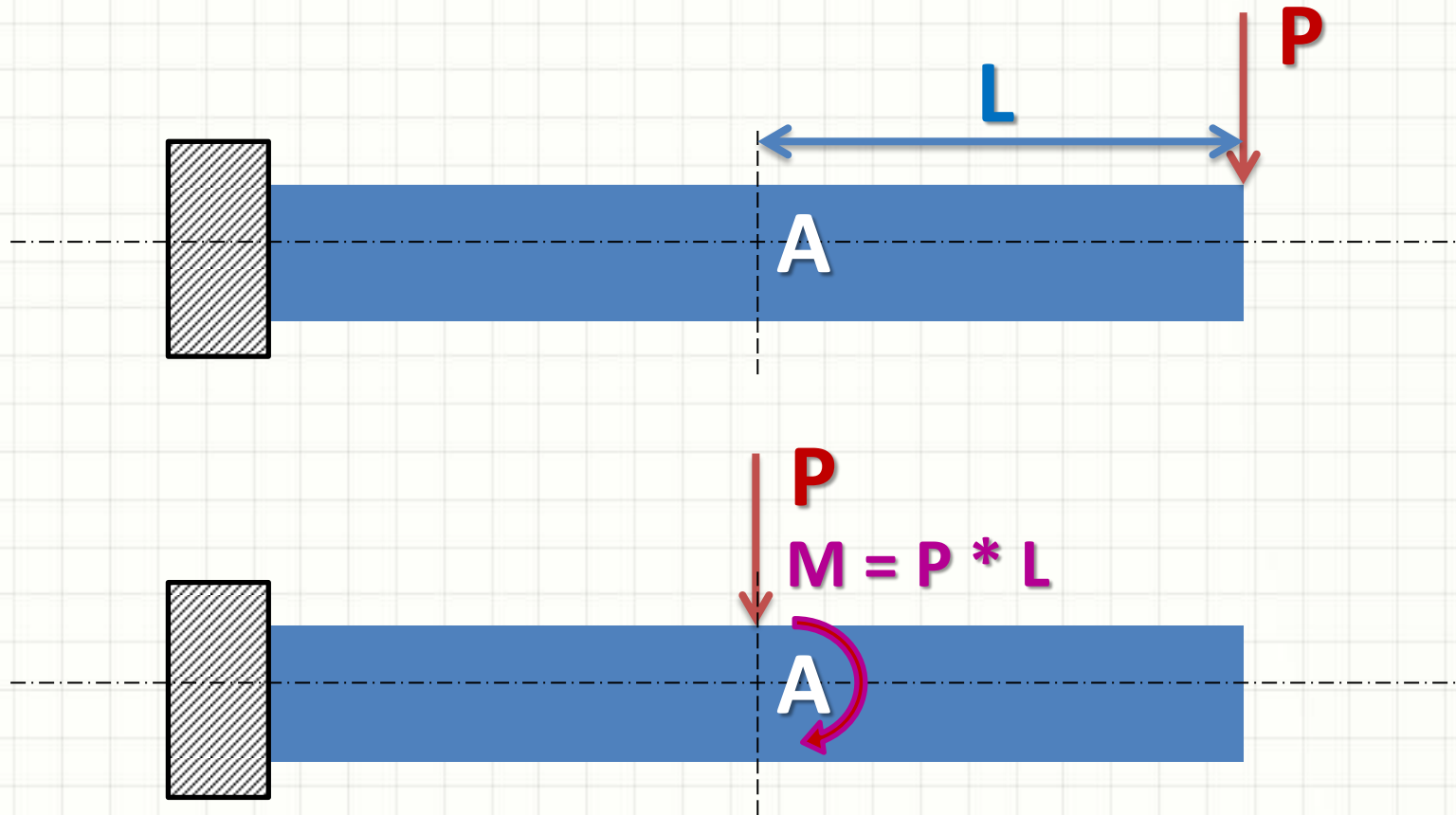
# Sistemas de Forças ME

- Alguns cálculos: muito complexos
  - **Alguns** podem ser simplificados com “truques”
- Em algumas situações, para um dado ponto:
  - Vários sistemas de forças diferentes
  - Mesmos esforços
- Vamos escolher os que simplificam a vida!
  - Apenas para o cálculo!



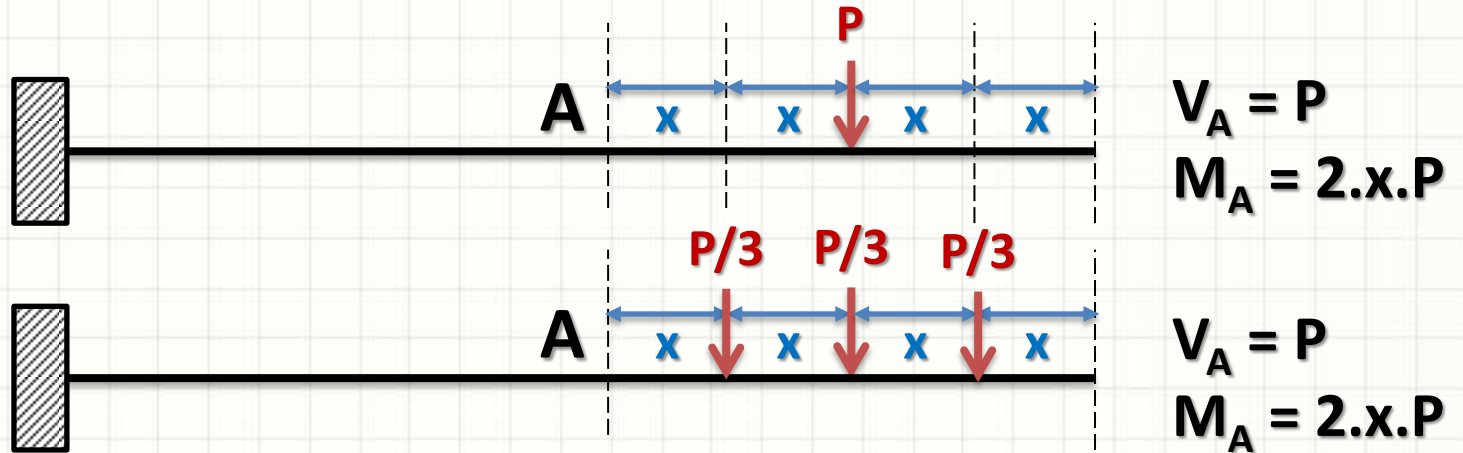
# Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



# Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



$$V = 3 \cdot P/3$$

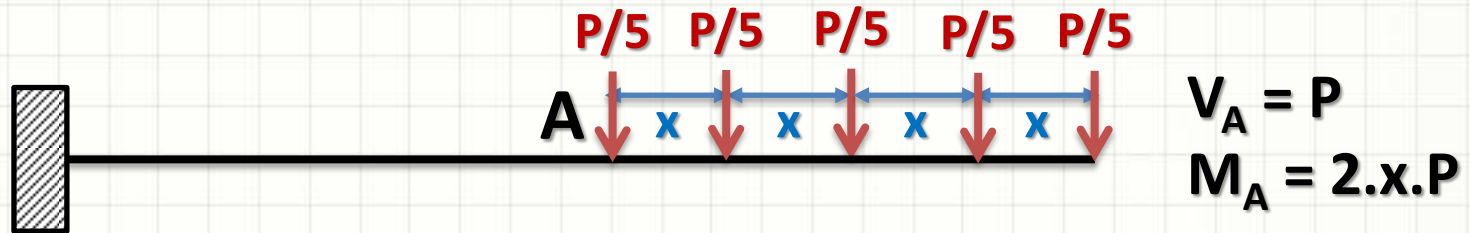
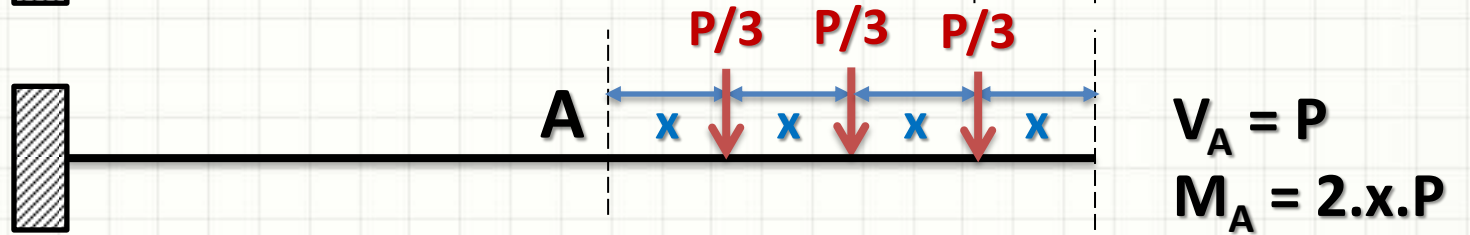
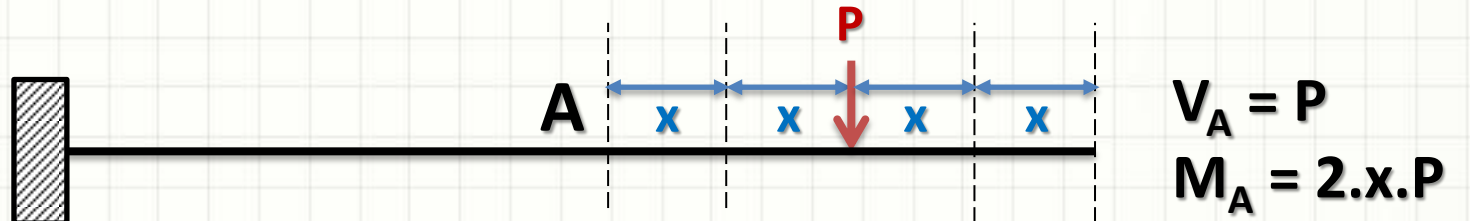
$$M = (P/3) \cdot x + (P/3) \cdot 2 \cdot x + (P/3) \cdot 3 \cdot x$$

$$M = 6 \cdot x \cdot (P/3)$$

$$M = 2 \cdot x \cdot P$$

# Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



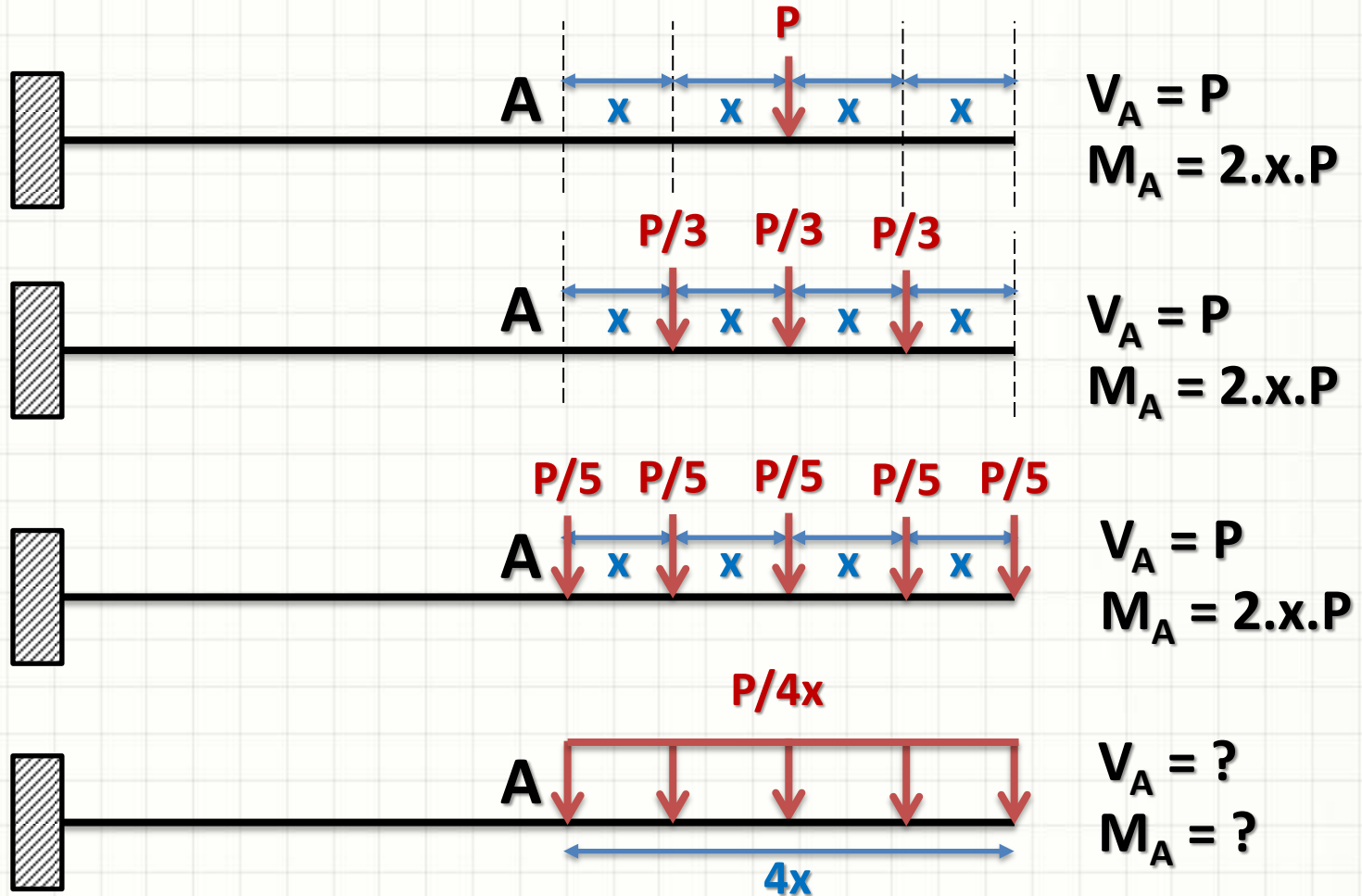
$$V = 5.P/5$$

$$M = (P/5).0 + (P/5).x + (P/5).2.x + (P/5).3.x + (P/5).4.x$$

$$M = 10.x.(P/5)$$

# Sistemas de Forças ME

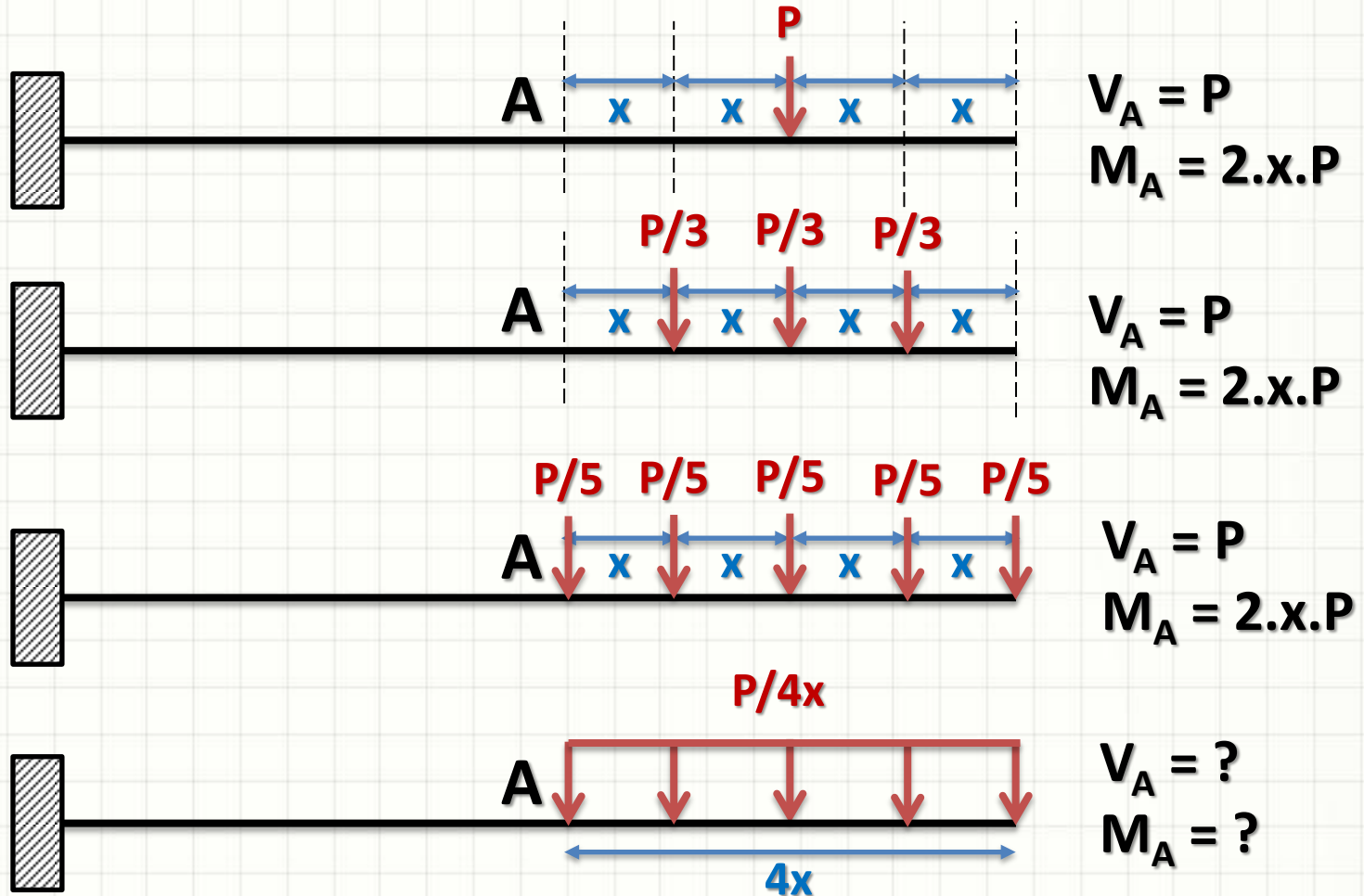
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sist

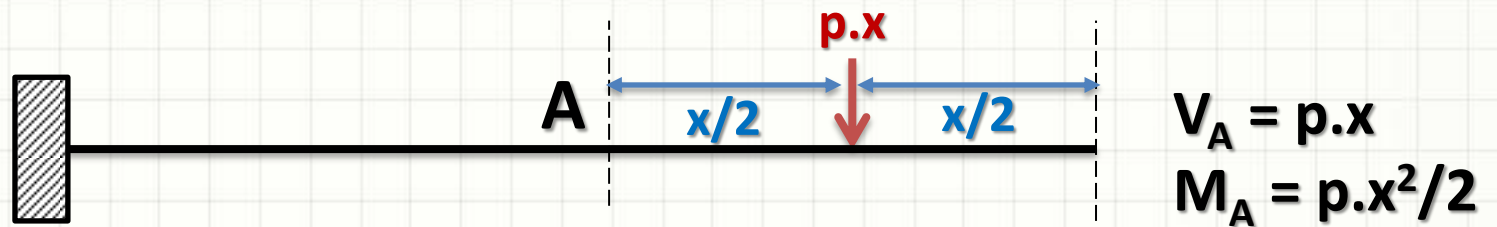
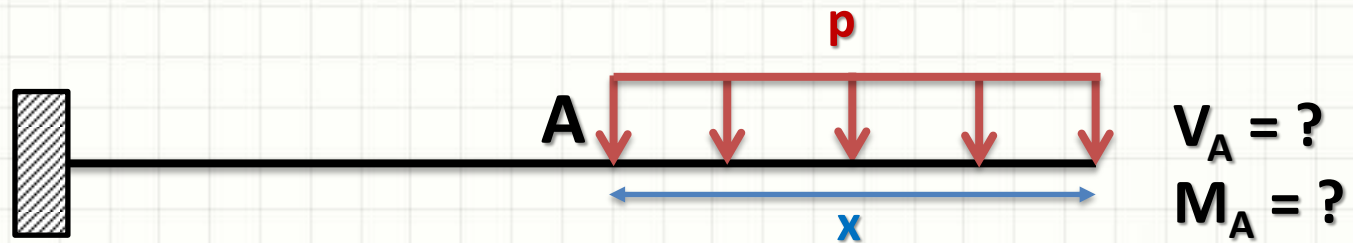
É como se a carga total estivesse  
no centro de gravidade!

- Exemplo: Do ponto de vista de A



# Sistemas de Forças ME

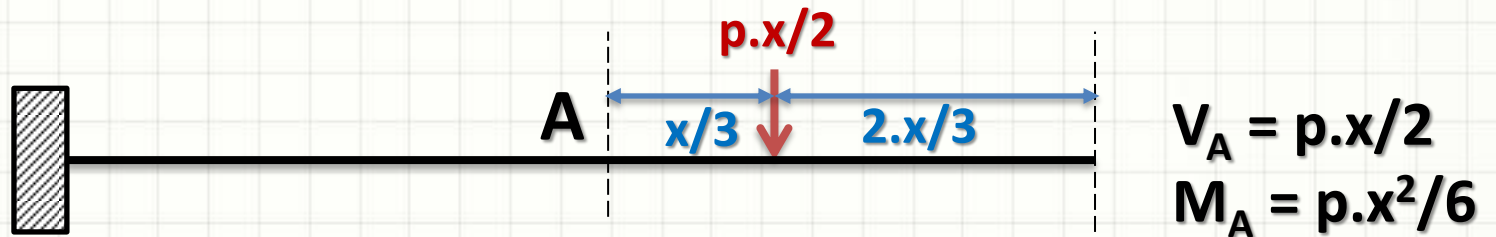
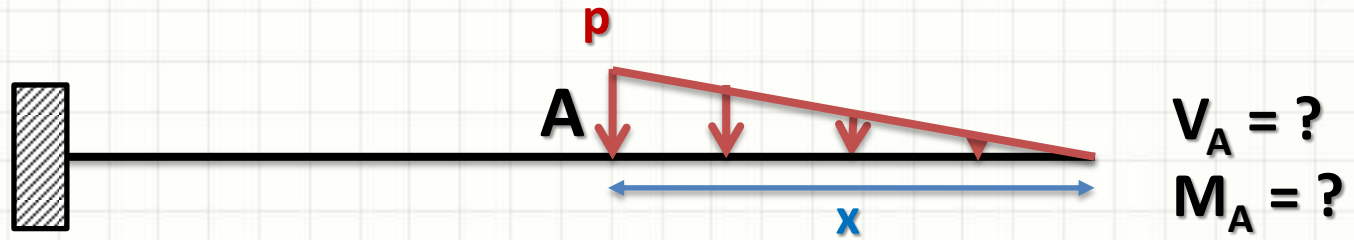
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**

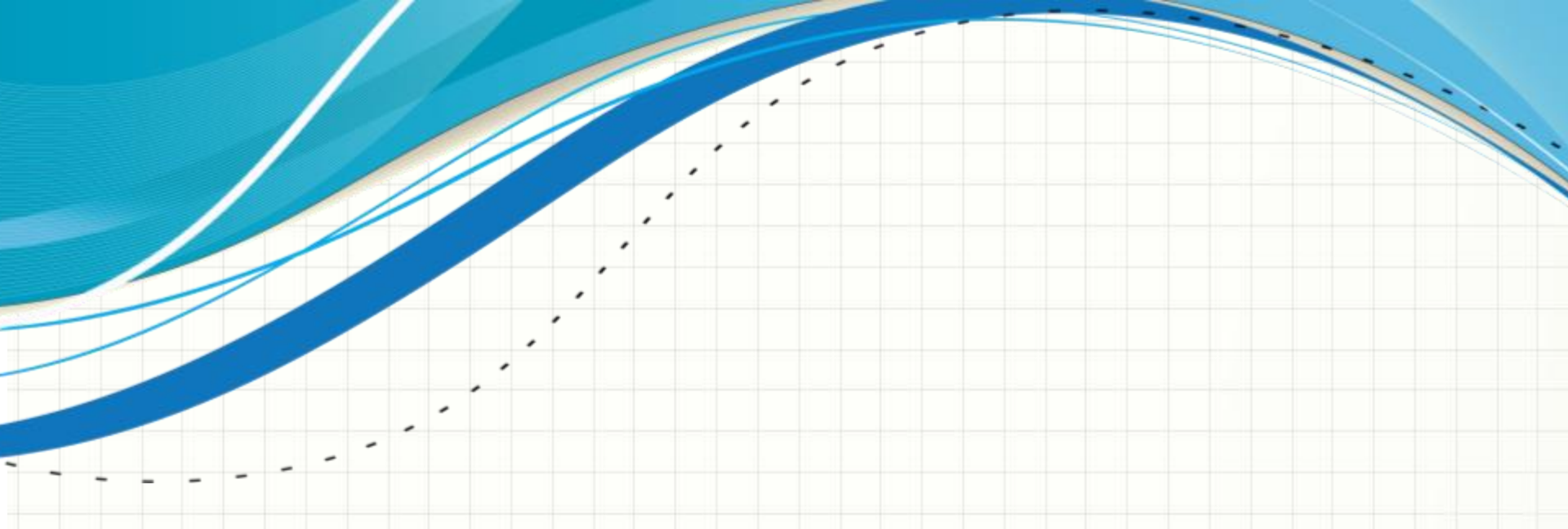




# Sistemas de Forças ME

- Sempre no meio?
  - Não, no centro de gravidade!





# DIAGRAMAS DE FORÇA CORTANTE

# Diagramas de Forças Cortantes

- Já vimos os mais simples:
  - Diagramas de esforços normais (N)
  - Diagramas de esforços de torção (T)
- Veremos mais dois:
  - Diagramas de Esforços Cortantes (V)
  - Diagramas de Momentos Fletores (M)

# Diagramas de Forças Cortantes

- Por que traçar diagrama de cortante?
  - Cortante pode variar ao longo do comprimento
  - Encontrar o ponto de maior sollicitação

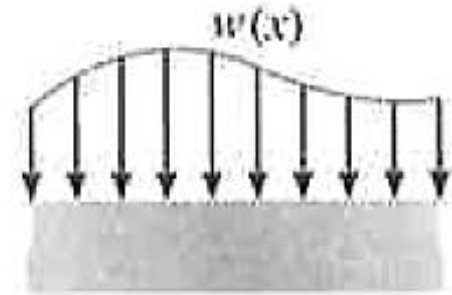
- Convenção de Sinais

- Carregamento

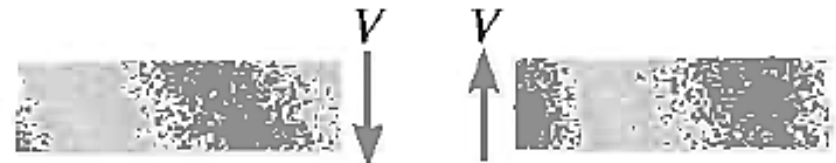
- De cima para baixo: +
    - De baixo para cima: -

- Cortante

- Gira sent. Horário: +
    - Gira sent. Anti-Horário: -



Carga distribuída positiva



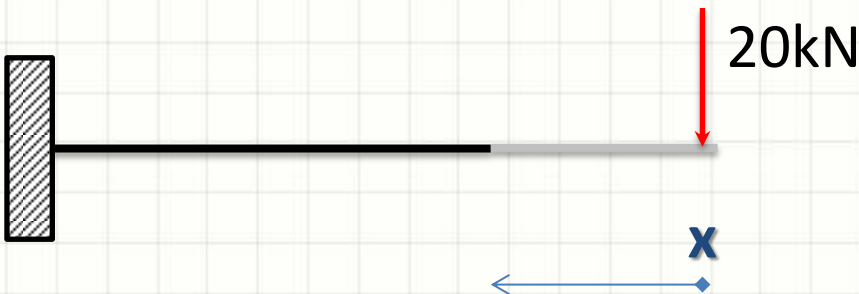
Cisalhamento interno positivo

# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto "x"?

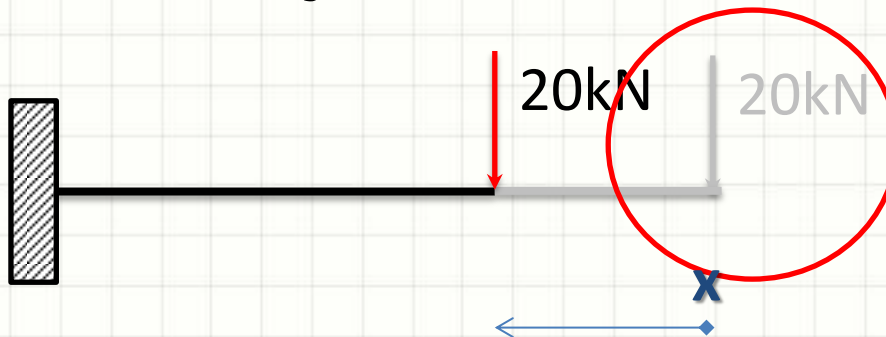


# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



Sentido  
Horário!

- $V(x) = \text{cte.} = 20\text{kN!}$

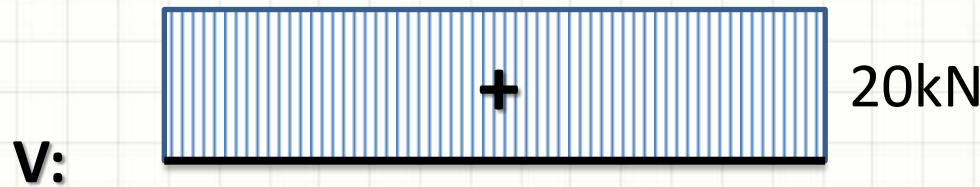


# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada

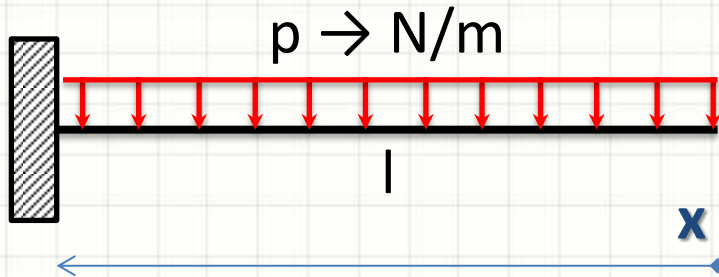


- $V(x) = \text{cte.} = 20\text{kN}$ ... Sentido horário
- Logo... O diagrama de cortante é

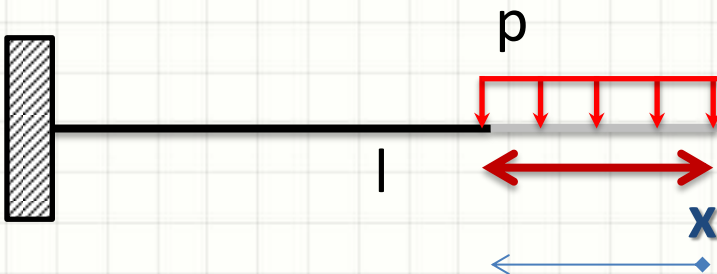


# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída

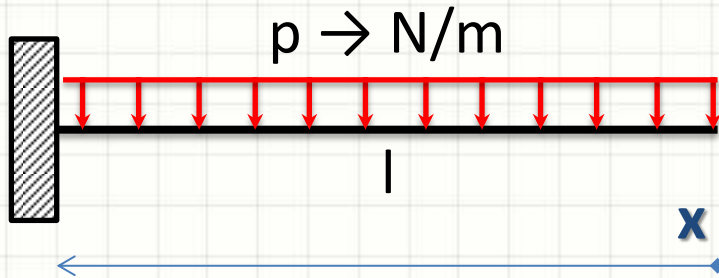


- Qual a força cortante em um ponto “ $x$ ”?

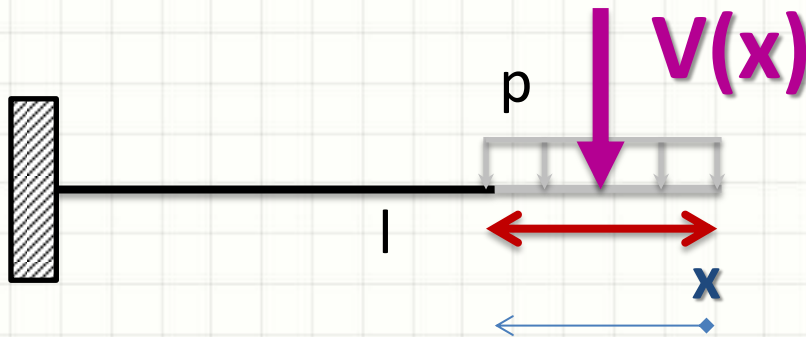


# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



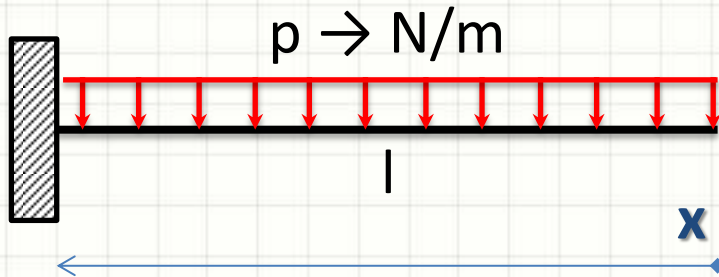
**x**

$$V(x) = p \cdot x$$

- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!

# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



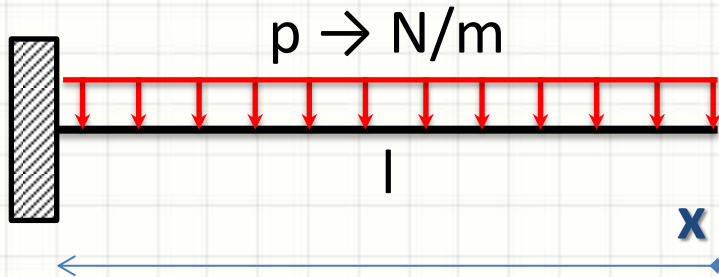
- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

V: \_\_\_\_\_  
|

??

# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída

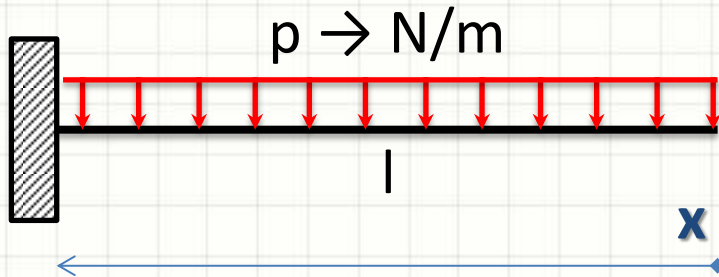


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

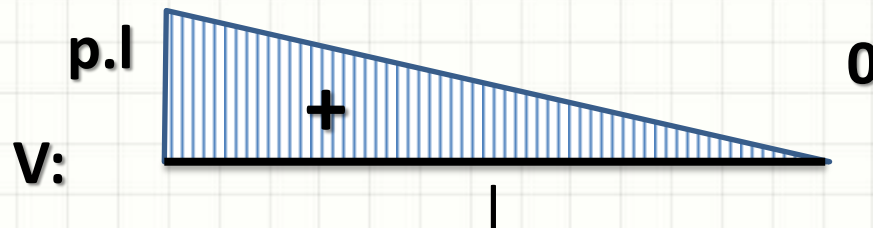


# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



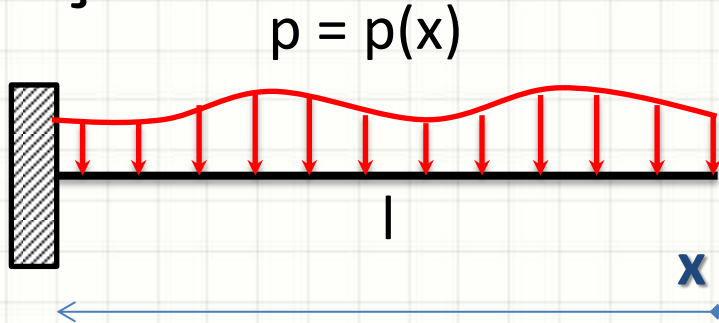
- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...





# Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual a força cortante de  $a$  até  $b$ ?

$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$



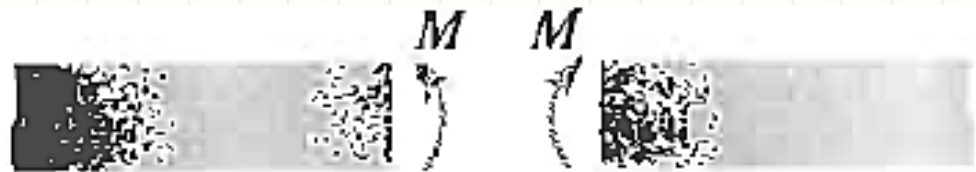
**PAUSA PARA O CAFÉ!**



# **DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR**

# Diagramas de Momentos Fletores

- Por que traçar diagramas de momento?
  - Momento usualmente varia ao longo da viga
  - Encontrar o ponto de maior sollicitação
- Convenção de Sinais
  - Momento Positivo
    - Traciona parte inferior
  - Momento Negativo
    - Traciona parte superior



Momento interno positivo

# Diagramas de Momentos Fletores

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Determinação do Equilíbrio Estático
  - Direções positivas são **arbitrárias**



# Diagramas de Momentos Fletores

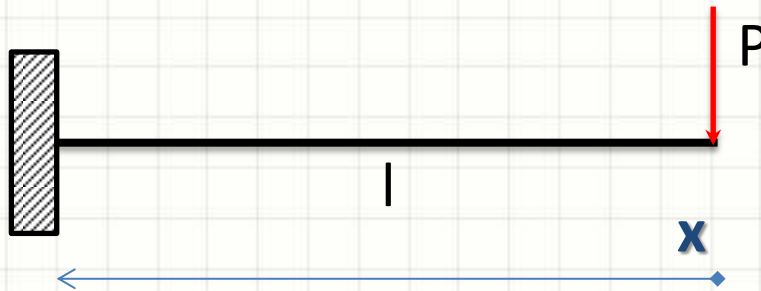
- **ATENÇÃO!** Não confunda as convenções!
- Traçado de Diagramas
  - Direções positivas são **convencionadas**

Grandeza	+	-
<b>Força Normal</b>	Força saindo da barra (tração)	Força entrando na barra (compr.)
<b>Momento Torçor</b>	Torque saindo da barra	Torque entrando na barra
<b>Carga</b>	Para baixo	Para cima
<b>Força Cortante</b>	Gira barra no sentido horário	Gira barra no sentido anti-horário
<b>Momento Fletor</b>	Traciona em baixo	Traciona em cima

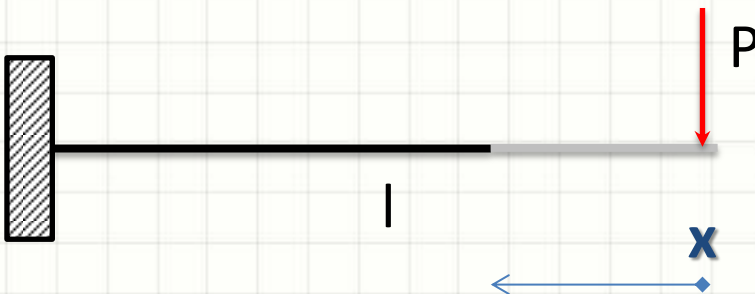


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “ $x$ ”?

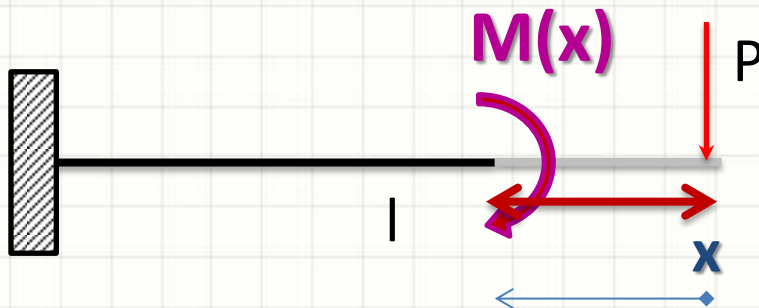


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?



X

O sinal vem do fato que traciona em cima!

$$M(x) = -P \cdot x$$

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

M: \_\_\_\_\_  
|

??

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

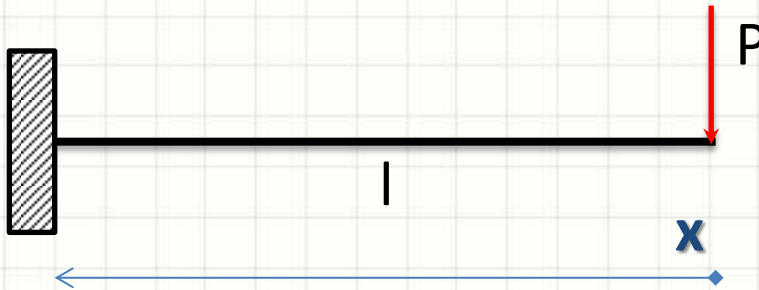
??

0

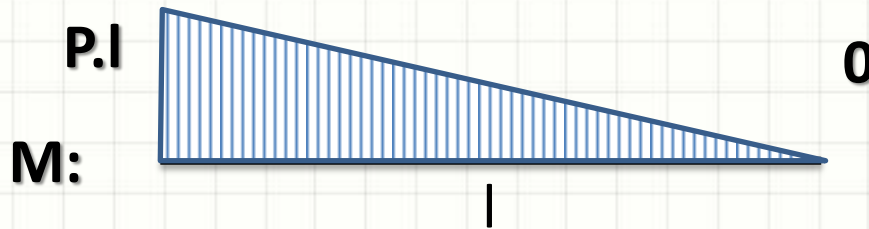


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada

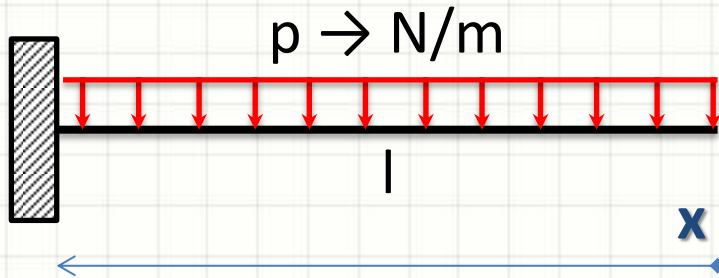


- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

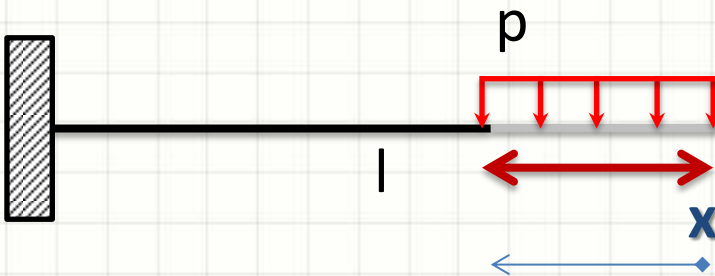


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



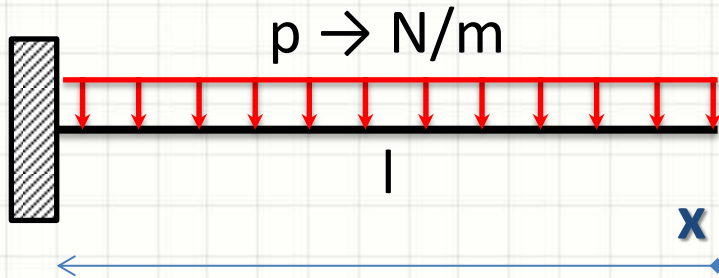
- Qual a força cortante total em “x”?



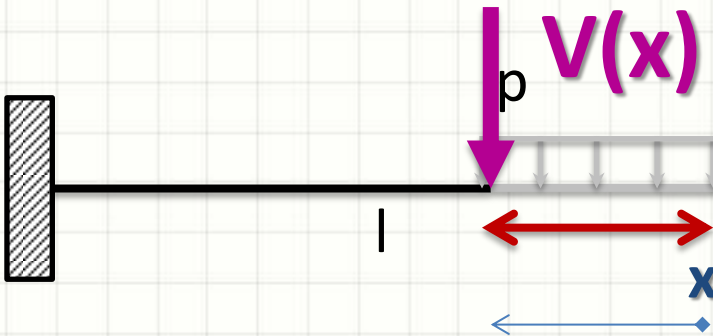


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?



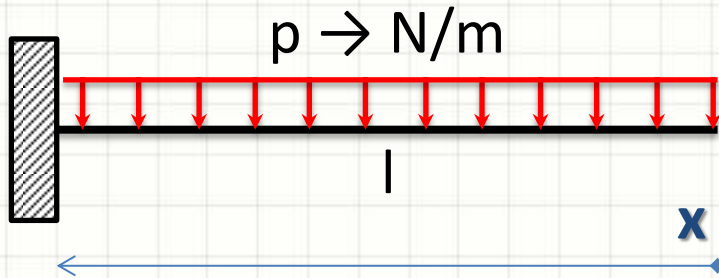
$x$

$$V(x) = p \cdot x$$

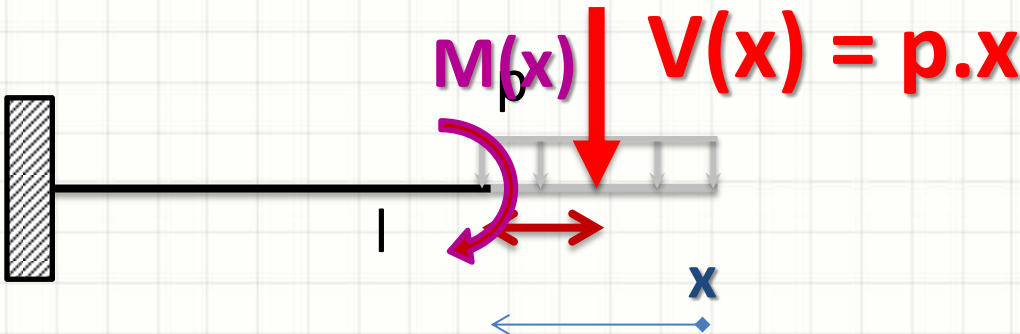
- Mas e o momento em “x”?

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

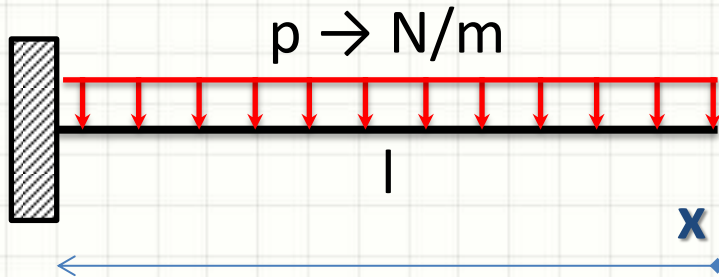


- Qual o momento em um ponto “x”?

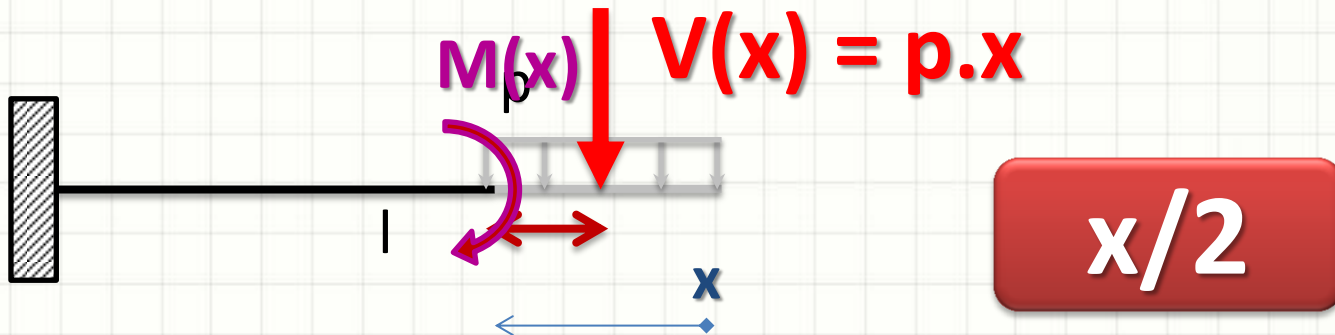


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



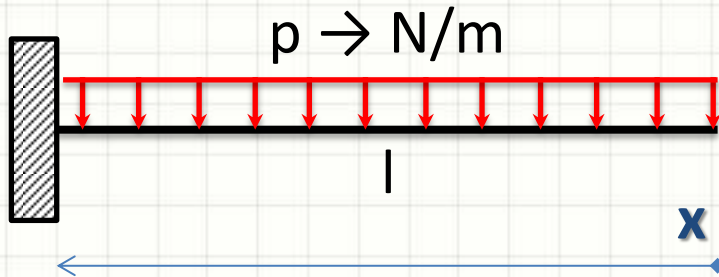
- Qual o momento em um ponto “x”?



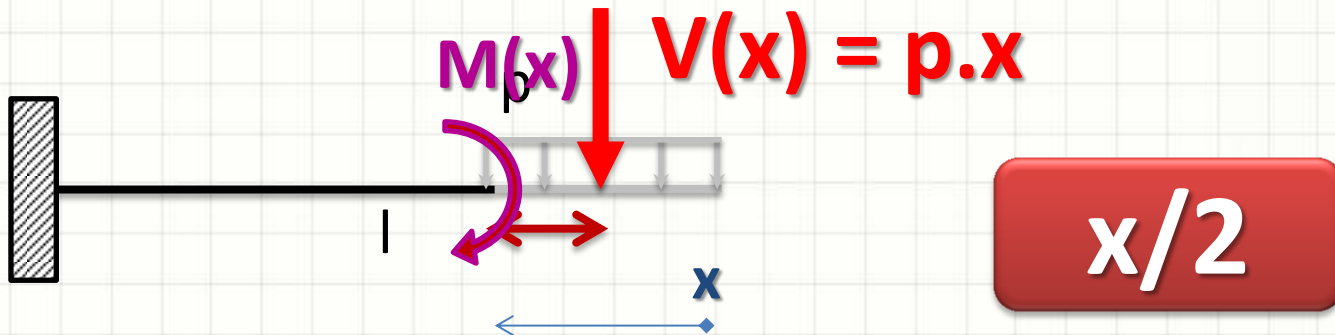
$$M(x) = -p \cdot x \cdot x/2$$

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



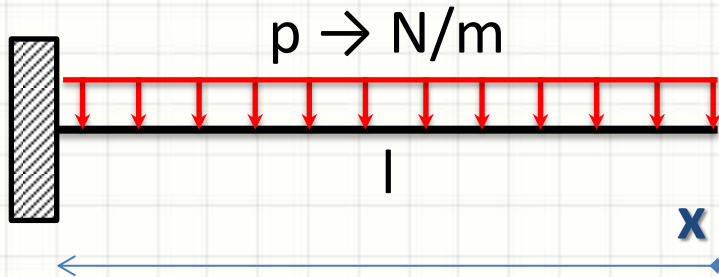
- Qual o momento em um ponto “x”?



$$M(x) = - [p \cdot x^2 / 2]$$

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



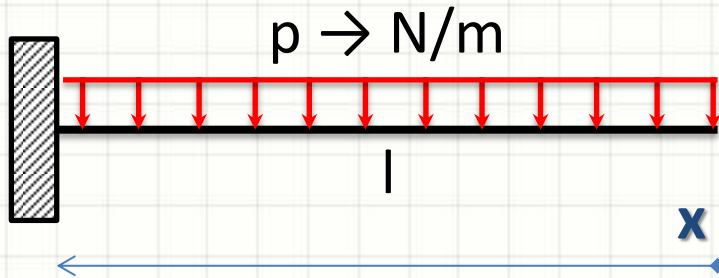
- $M(x) = - [ p \cdot x^2 / 2 ] \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

M: \_\_\_\_\_  
|

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - [ p \cdot x^2 / 2 ] \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

0

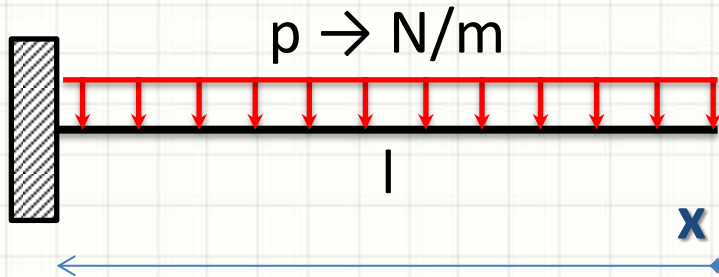
M:





# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

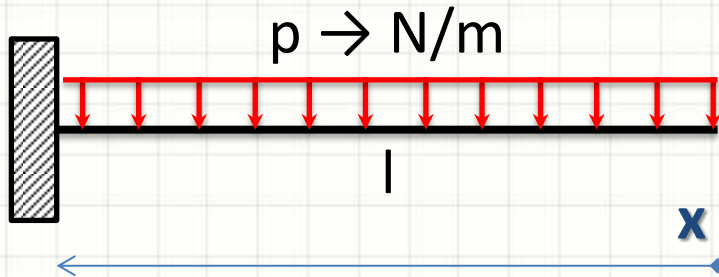


- $M(x) = - [ p \cdot x^2 / 2 ] \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

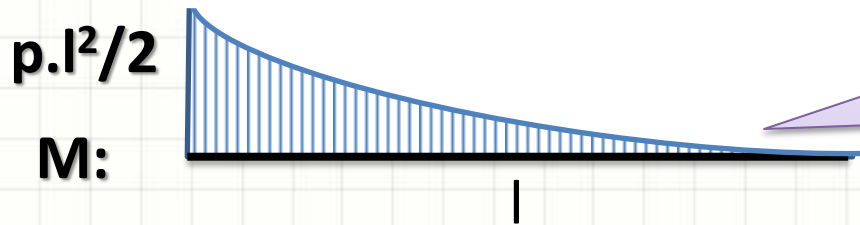


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



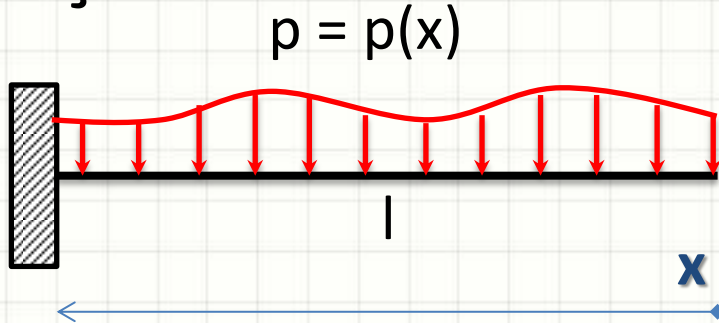
- $M(x) = - [ p \cdot x^2 / 2 ] \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



“Boca para cima”  
porque o sinal  
de  $x^2$  é positivo!

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual o momento de  $a$  até  $b$ ?

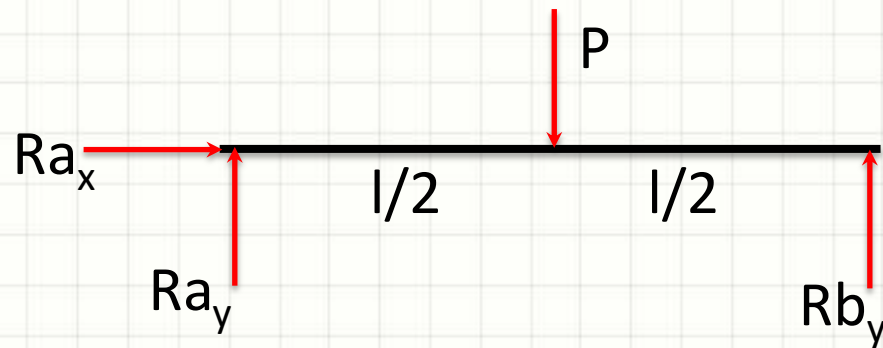
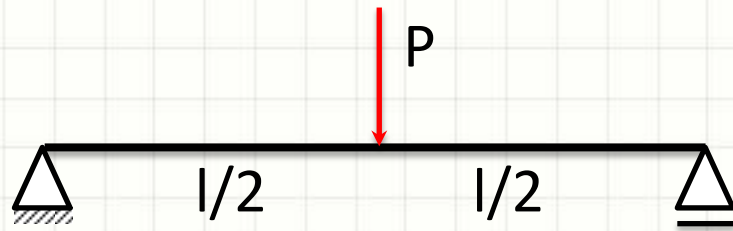
$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$

- Cuidado com o sinal!



# **DIAGRAMAS EM VIGAS BIAPOIADAS**

# Diagramas em Vigas – 1) Reações



$$Ra_y = Rb_y = \frac{P}{2}$$

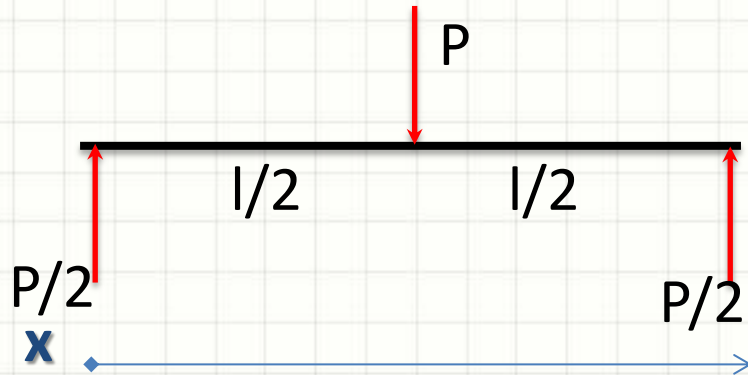
- $\sum F_x = 0$
- $\sum F_y = 0$
- $\sum M_a = 0$

$$\mathbf{Ra_x = 0}$$

$$P - Ra_y - Rb_y = 0$$

$$Rb_y \cdot l - P \cdot l/2 = 0$$

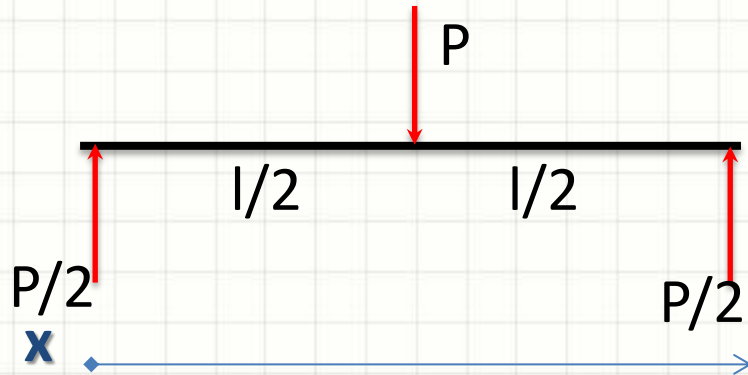
# Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$   $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$   $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$   $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$   $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x - P \cdot (x - \frac{l}{2})$

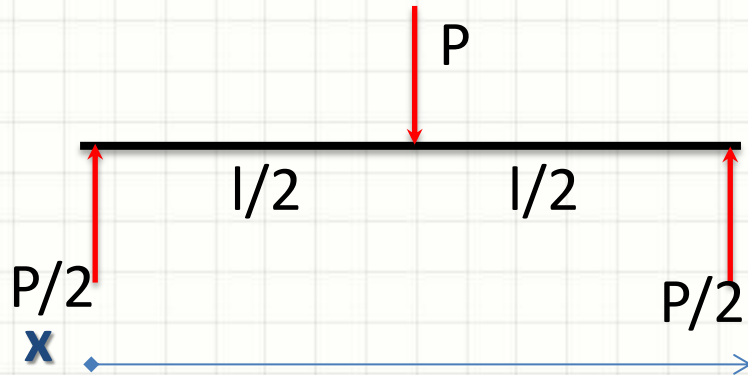


# Diagramas em Vigas – 2) Equações



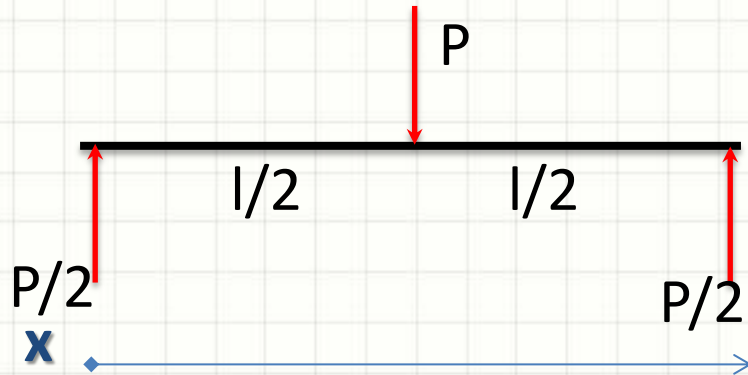
- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$   $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$   $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$   $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$   $M(x) = P \cdot \frac{x}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)$

# Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$   $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$   $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$   $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$   $M(x) = P \cdot \left( \frac{x}{2} + \frac{l}{2} - x \right)$

# Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$V(x) = P/2$$

- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$$

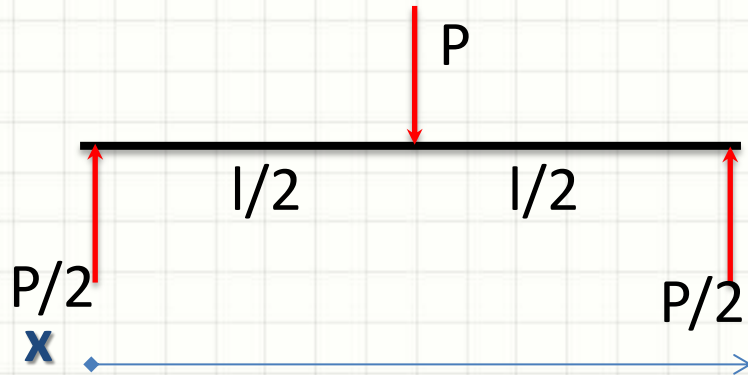
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$M(x) = P \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

# Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$V(x) = P/2$$

- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$$

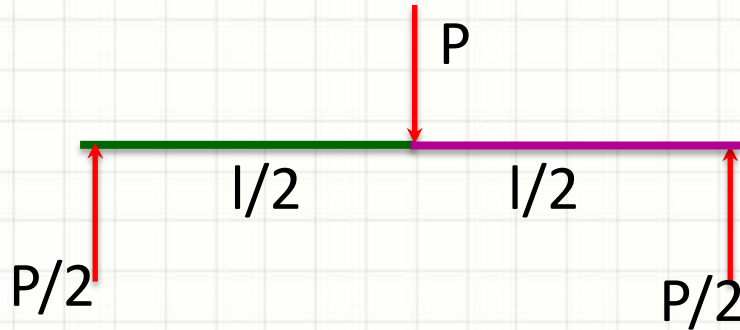
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$M(x) = P \cdot \left(\frac{l-x}{2}\right)$$

# Diagramas em Vigas – 3) Diagramas

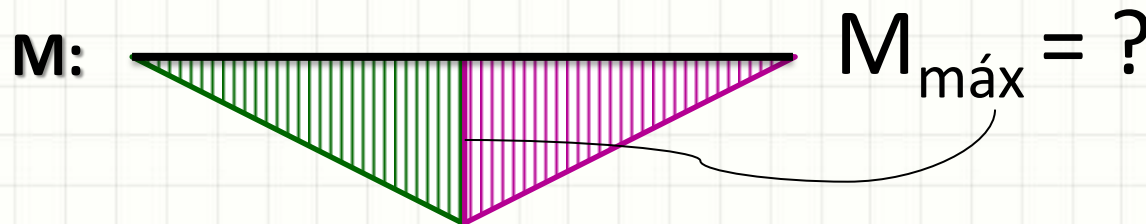
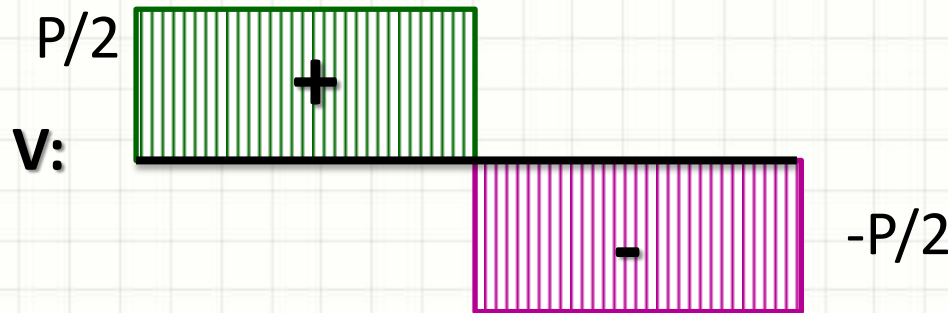


$$V(x) = P/2$$

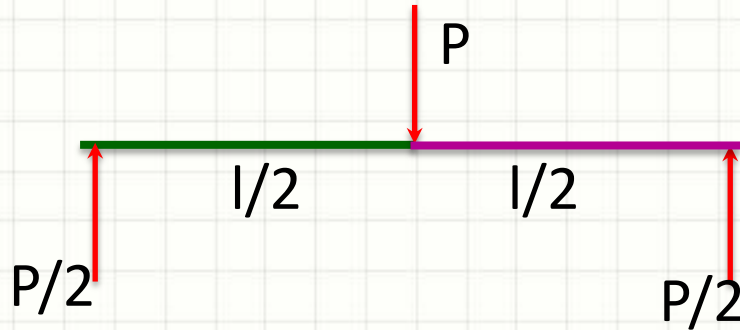
$$V(x) = -P/2$$

$$M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$



# Diagramas em Vigas – 3) Diagramas

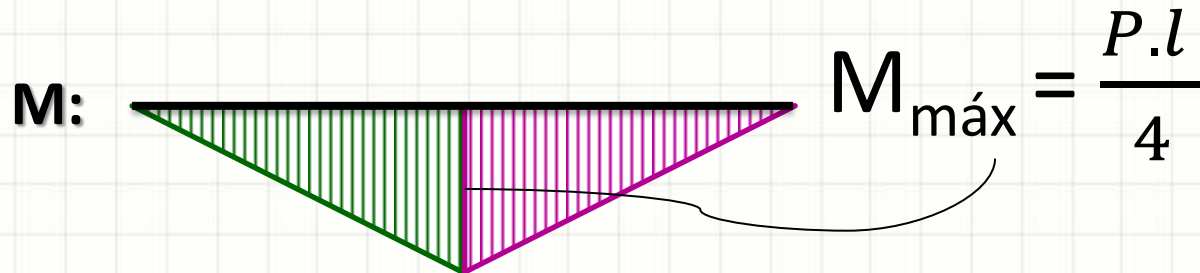
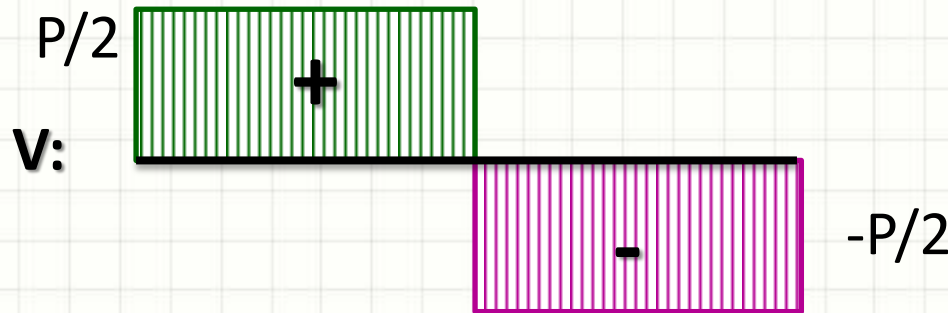


$$V(x) = P/2$$


$$V(x) = -P/2$$

$$M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$

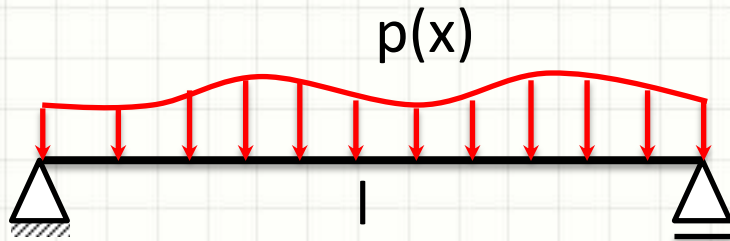






**RELAÇÃO ENTRE CARGA  
DISTRIBUÍDA, CORTANTE E  
MOMENTO EM VIGAS  
BIAPOIADAS**

# Equações: Carregamento Qualquer



Área sob a curva da carga distribuída

$$p(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = \int -p(x) \cdot dx$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$

$$M = \int V(x) \cdot dx$$

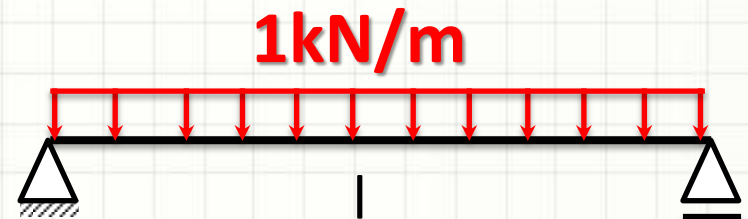
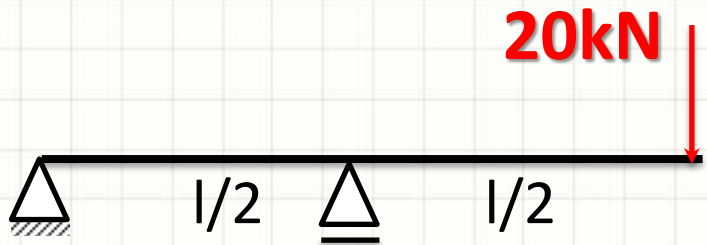
Área sob a curva do diagrama de cortante



**EXEMPLOS**

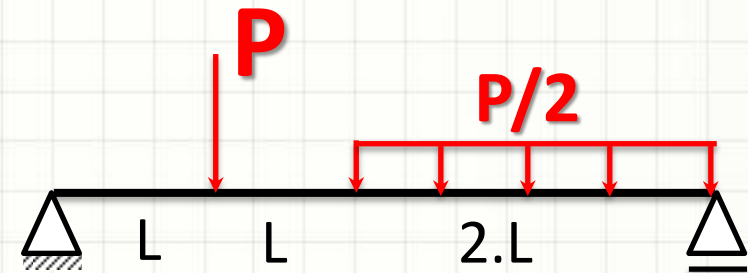
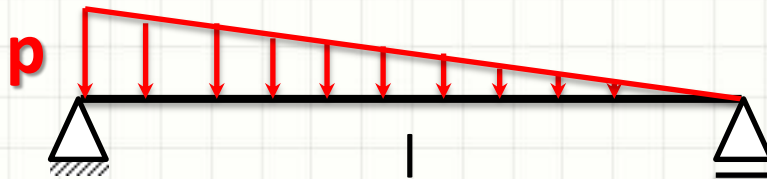
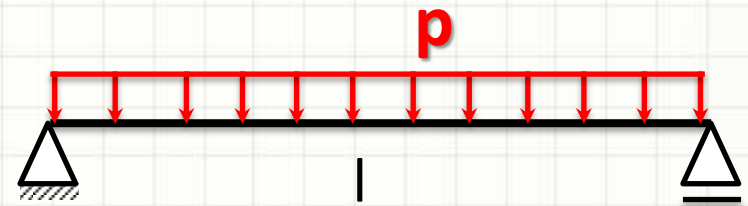
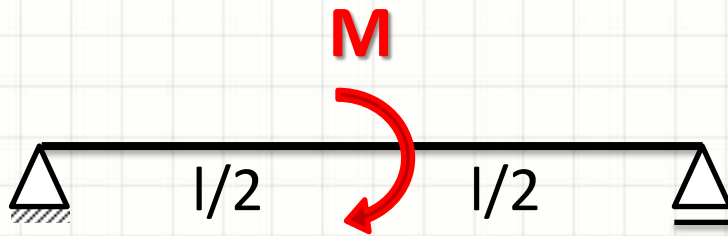
# Exemplo

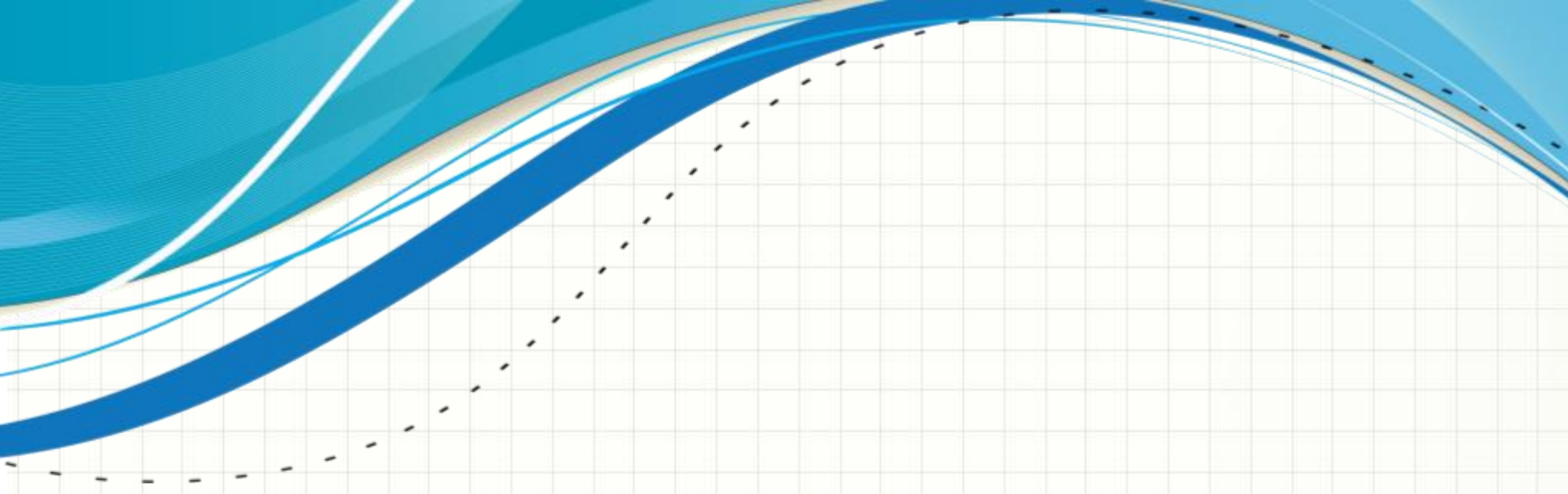
- Calcular, para  $l = 2\text{m}$ :



# Exemplo

- Discutir intuitivamente diagramas de momento e cortante das vigas abaixo:



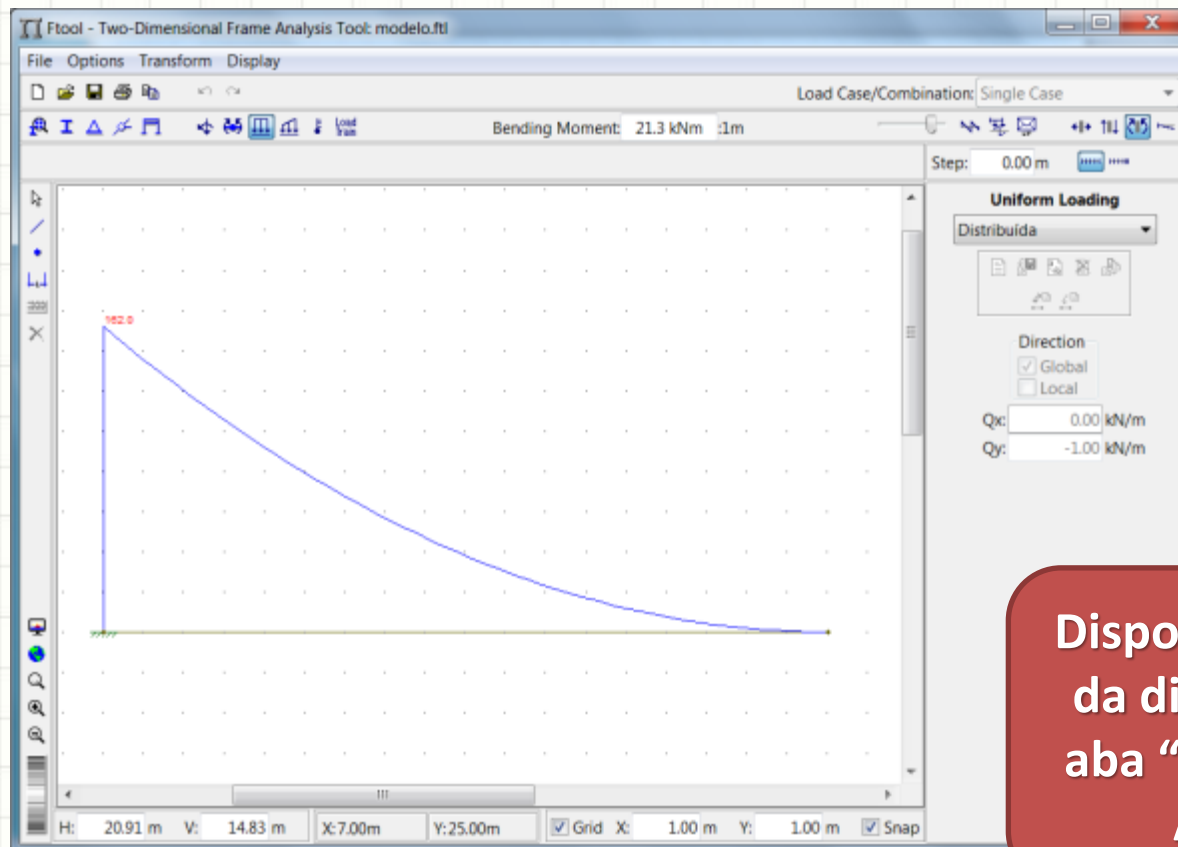


**FTOOL**



# FTool

- Programa de auxílio no aprendizado
  - Construir estruturas simples e verificar diagramas



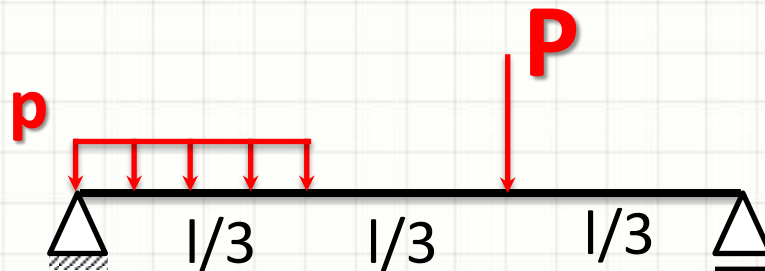
Disponível no site da disciplina, na aba "Material de Apoio"



# EXERCÍCIO

# Exercício – Entrega Individual

- Trace, intuitivamente os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo. Para estimar a magnitude, considere que:  
 **$P = 100\text{N}$ ,  $p = 10\text{N/m}$  e  $l = 3\text{m}$ .**





**PARA TREINAR**

# Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 216 a 221
- Mínimos:
  - Exercícios 6.1, 6.3, 6.14, 6.24
- Extras:
  - Exercícios 6.5, 6.17, 6.21, 6.27
- Adote essas conversões:
  - 1 ksi = 7MPa
  - 1 pol = 25mm
  - 1 lb = 4,5N
  - 1hp = 1000W
  - 1lb/pé = 15 N/m

# Para Treinar em Casa

## Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.





# CONCLUSÕES

# Resumo

- A partir das cargas podemos determinar:
  - Cortante em qualquer ponto da viga
  - Momento em qualquer ponto da viga
- Os diagramas permitem encontrar facilmente
  - Pontos de maior solicitação
- **Exercitar: Hibbeler**

- 
- Como é a deformação por momento fletor?
  - Como é a distribuição de tensões dentro da viga?



**PERGUNTAS?**