



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

MOMENTO ESTÁTICO

Prof. Dr. Daniel Caetano

2014 - 2

Objetivos

- Conhecer a influência da forma na Resistência dos Materiais
- Compreender o conceito de Momento Estático
- Calcular Momento Estático





**ANTES DE
MAIS NADA...**

Para quem faltou...

Professor	Informações de Contato
Daniel Caetano	prof@caetano.eng.br

- Datas/critérios, apresent., exercícios, bibliog...

<http://www.caetano.eng.br/>



Prof. Caetano

17/07/2012, 10:55

00021224



Home

Ensino

Pesquisa

Publicações

Software

Pessoal

Nesta seção você encontra acesso ao material didático desenvolvido pelo Prof. Caetano para os cursos já ministrados. O material está dividido por períodos, visto que boa parte do material não está atualizado.

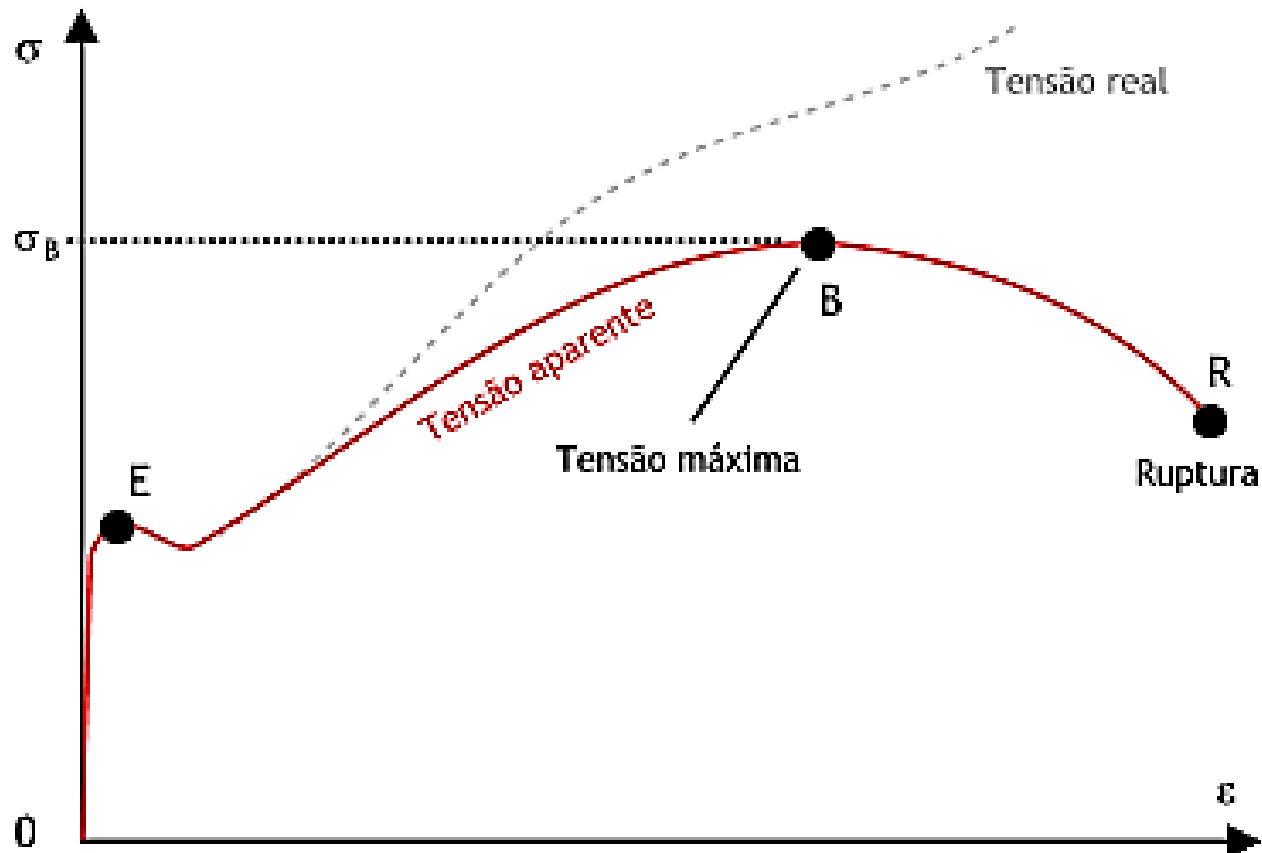


RETOMANDO:

RESISTÊNCIA E RIGIDEZ

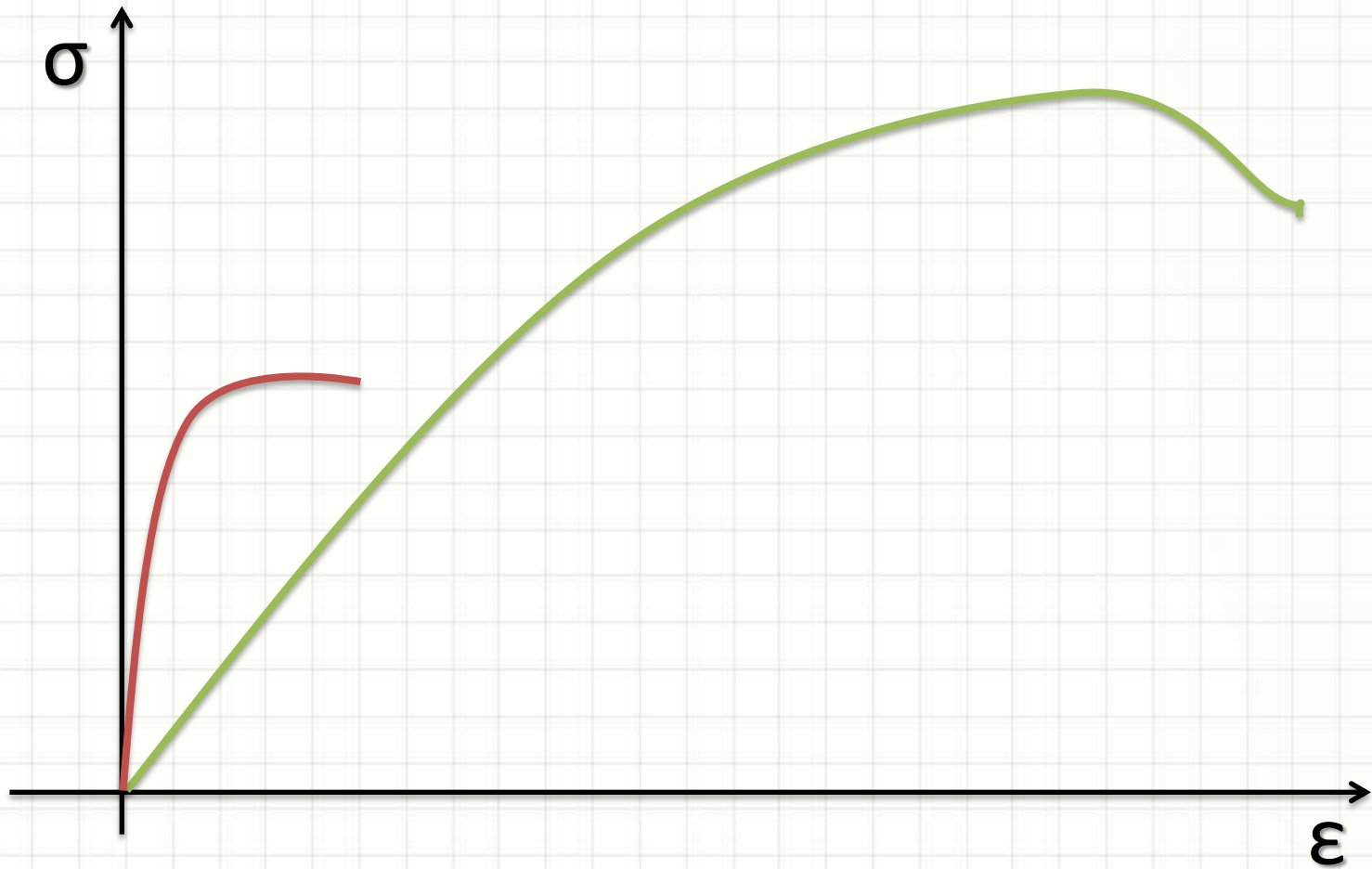
Resistência e Rigidez

- Tensão x Deformação



Resistência e Rigidez

- Resistência x Rigidez



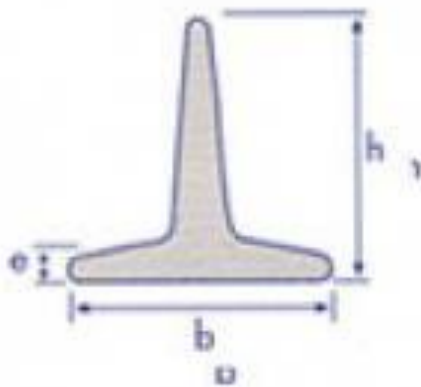
Forma x Resistência e Rigidez

- Tensão x Deformação

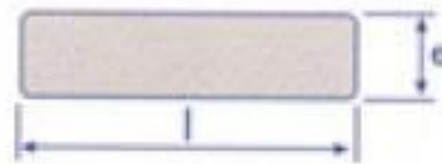


Forma x Resistência e Rigidez

- Formas diferentes: resistências diferentes



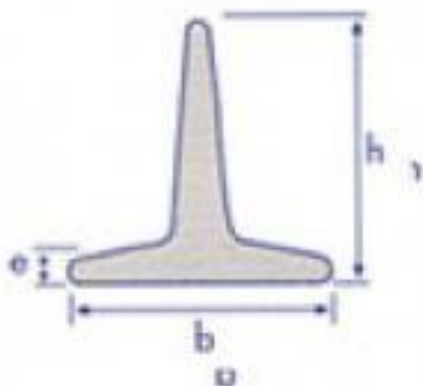
Perfil T



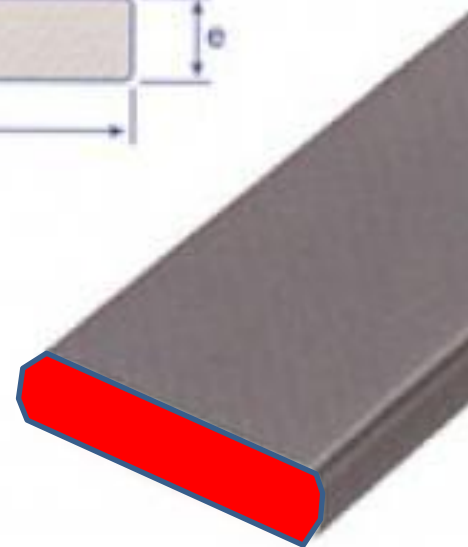
Barra Chata

Forma x Resistência e Rigidez

- Formas diferentes: resistências diferentes



Perfil T



Barra Chata

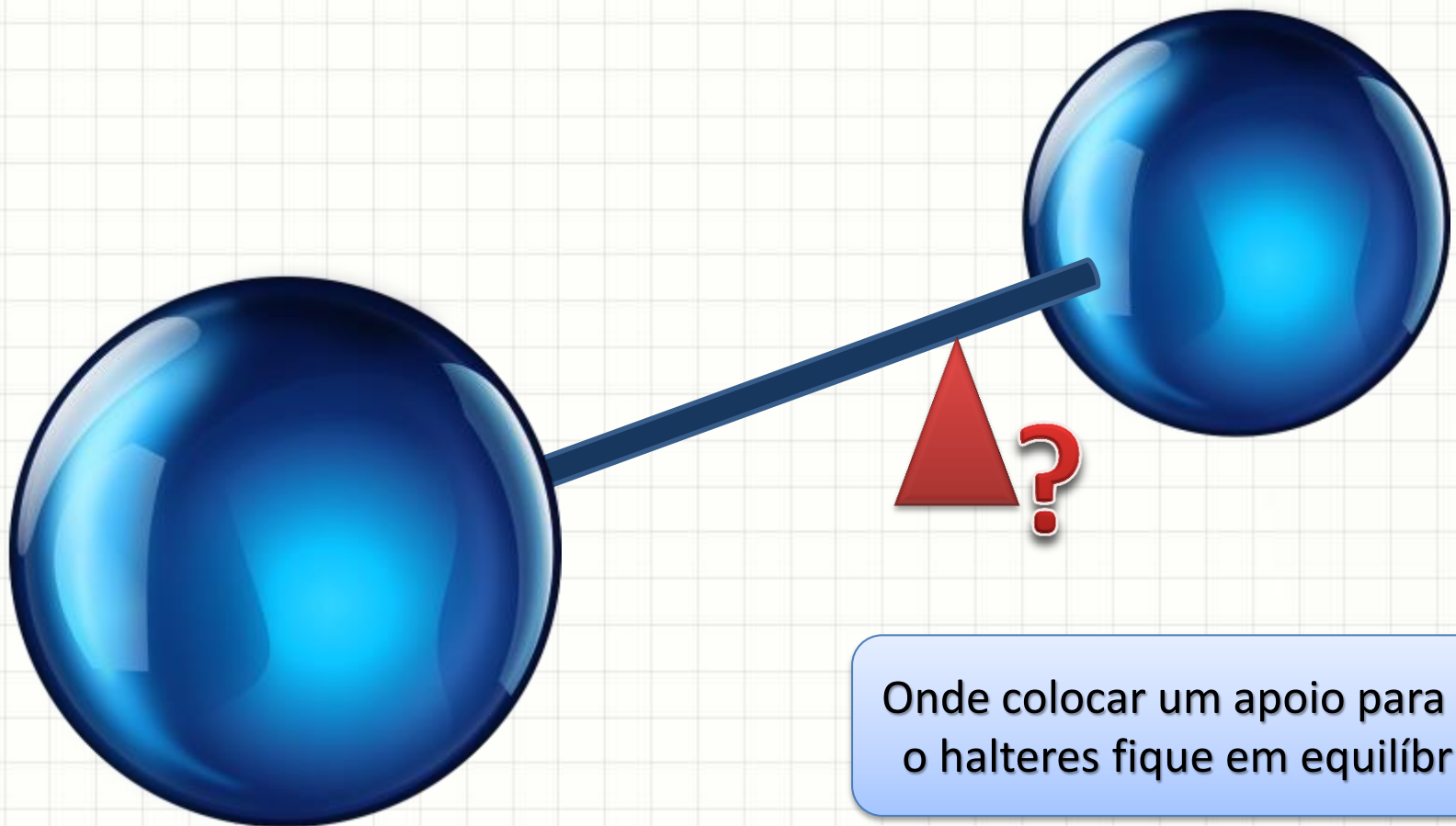
Seção Transversal



VERIFICANDO O EQUILÍBRIO

Verificando o Equilíbrio

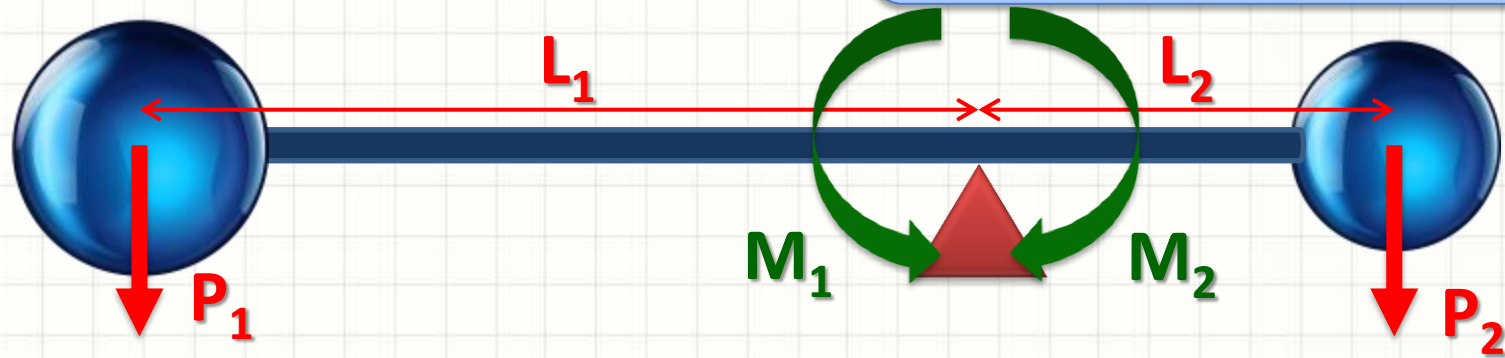
- Considere o seguinte elemento:



Onde colocar um apoio para que o halteres fique em equilíbrio?

Verificando o Equilíbrio

- Visualizando em 2D:



Onde colocar um apoio para que o halteres fique em equilíbrio?

- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 \cdot L_1 = P_2 \cdot L_2$

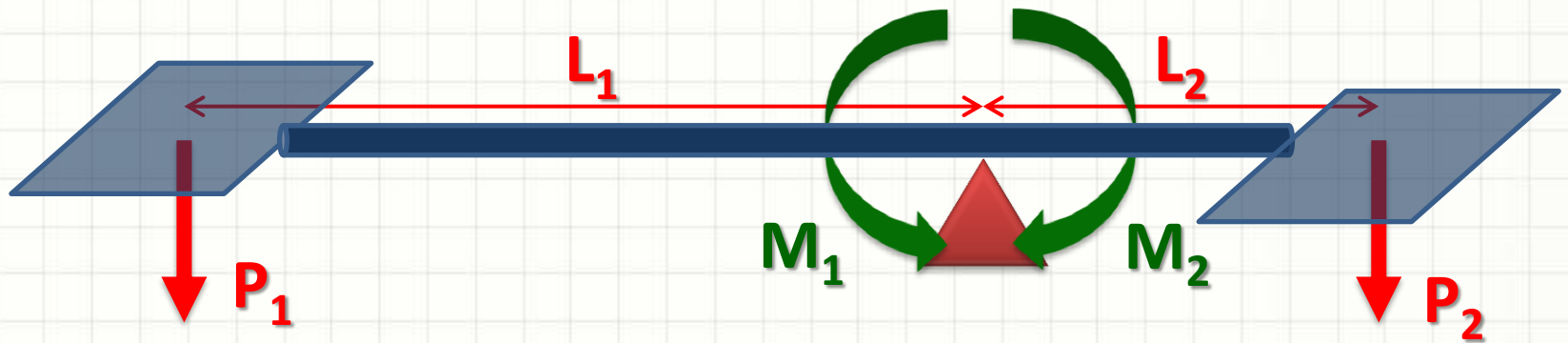
Mas

$$M_1 = P_1 \cdot L_1$$

$$M_2 = P_2 \cdot L_2$$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 \cdot L_1 = P_2 \cdot L_2$

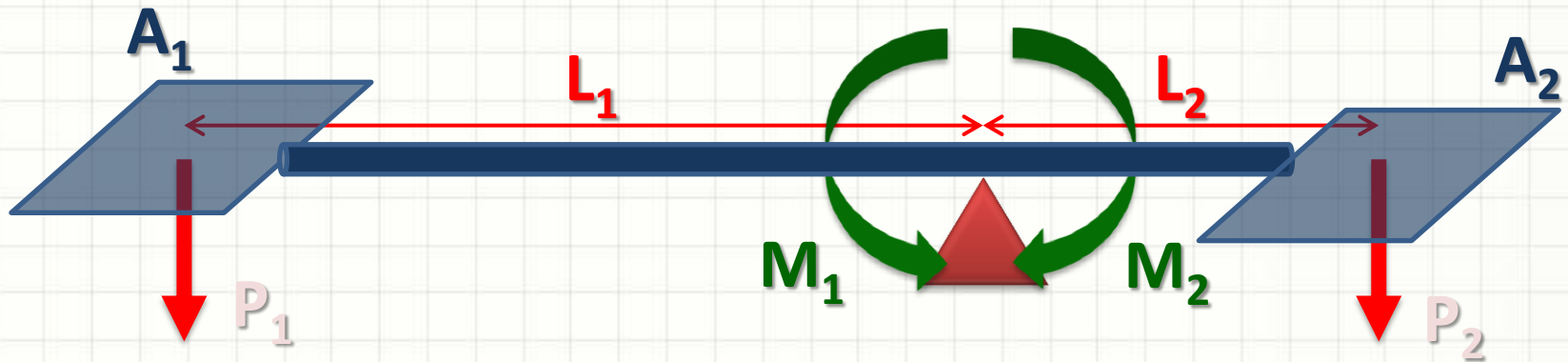
Mas

$$M_1 = P_1 \cdot L_1$$

$$M_2 = P_2 \cdot L_2$$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 \cdot L_1 = P_2 \cdot L_2$
- Ou... $A_1 \cdot \cancel{\delta} \cdot L_1 = A_2 \cdot \cancel{\delta} \cdot L_2$
- Finalmente... $A_1 \cdot L_1 = A_2 \cdot L_2$

Mas

$$P_1 = A_1 \cdot \Delta$$

$$P_2 = A_2 \cdot \delta$$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



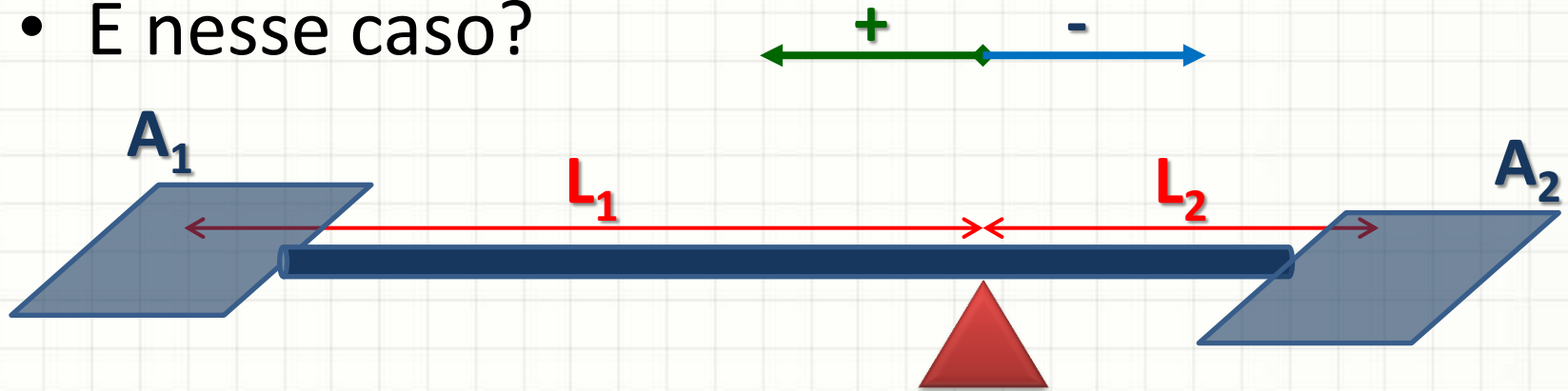
- Para equilíbrio: $A_1 \cdot L_1 = A_2 \cdot L_2$
- Vamos chamar $A \cdot L$ de S (momento estático)
- Assim, para equilíbrio: $S_1 = S_2$
- Ou...

$$S_1 - S_2 = 0$$

O segredo para achar o ponto de equilíbrio está no tal momento estático!

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $A_1 \cdot L_1 = A_2 \cdot L_2$
- Vamos chamar $A \cdot L$ de S (momento estático)
- Assim, para equilíbrio: $S_1 = S_2$
- Ou...

$$S_1 - S_2 = 0$$

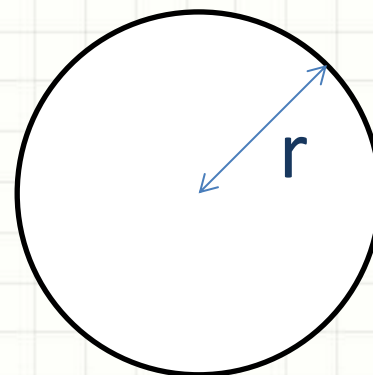
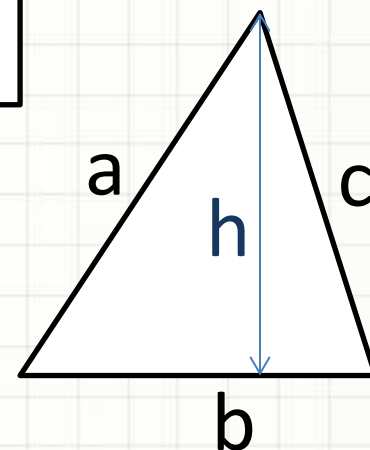
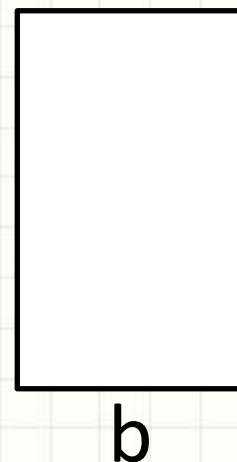
$$S_{\text{total}} = S_1 - S_2$$



“MEDINDO” A FORMA

Caracterizando uma Forma Plana

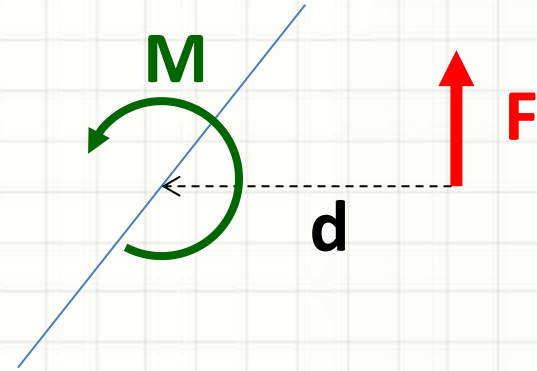
- Perímetro
 - Retângulo: $2 \cdot b + 2 \cdot h$
 - Triângulo: $a + b + c$
 - Círculo: $2 \cdot \pi \cdot r$
- Área
 - Retângulo: $b \cdot h$
 - Triângulo: $b \cdot h / 2$
 - Círculo: $\pi \cdot r^2$
- Só isso?



Momento Estático

- Momento de uma Força

$$-\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$$

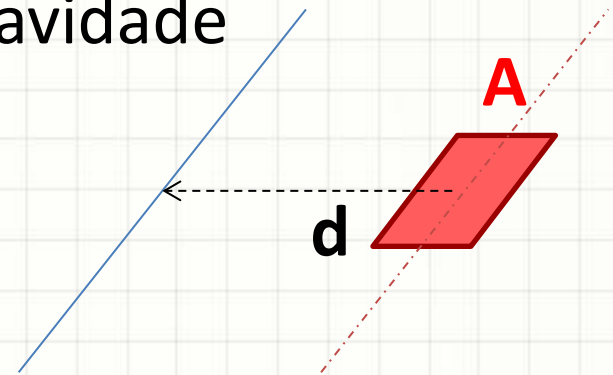


- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)

$$- S = A \cdot d$$

– d: a partir do centro de gravidade

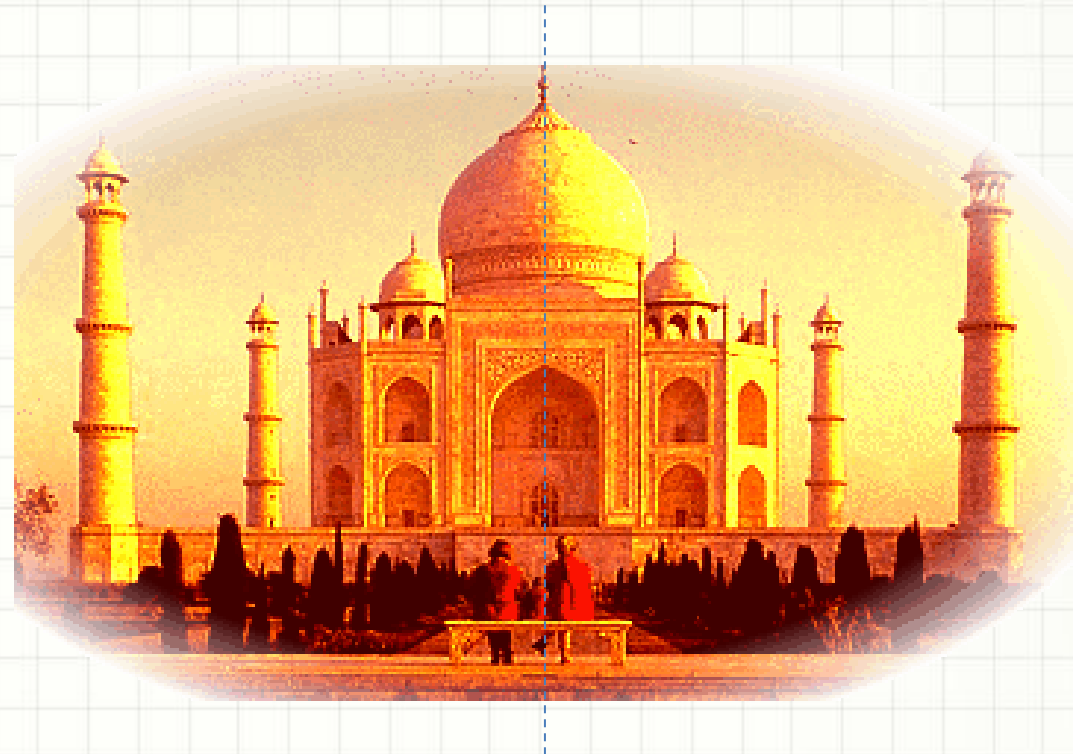
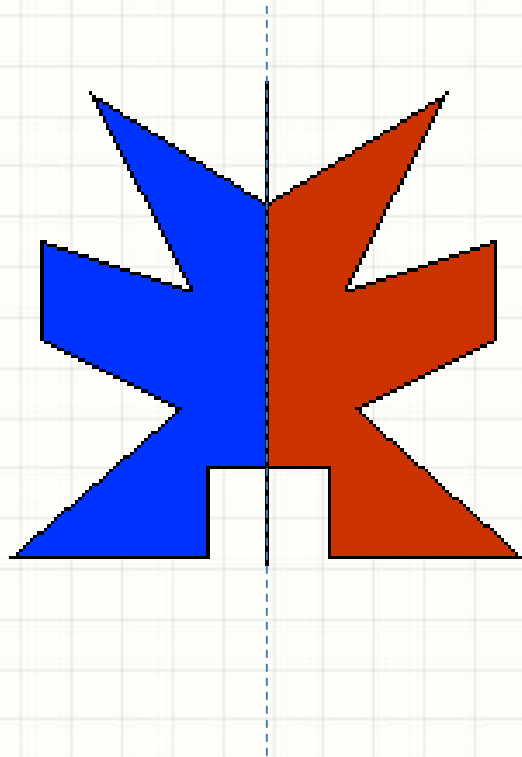
Informação sobre a distribuição de uma área com relação a um eixo de interesse!



- Maior simetria / antissimetria → menor S

Momento Estático

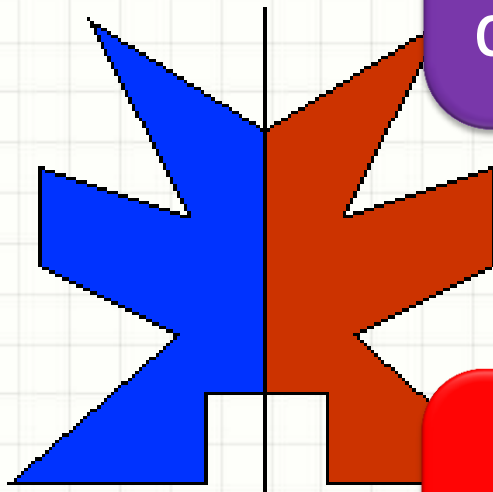
- Simetria - distribuição idêntica da área, relativamente a um eixo



Momento Estático

- Simetria - distância entre o eixo de simetria e a área, relativamente

Momento Estático
em Relação ao Eixo
de Simetria é ZERO!

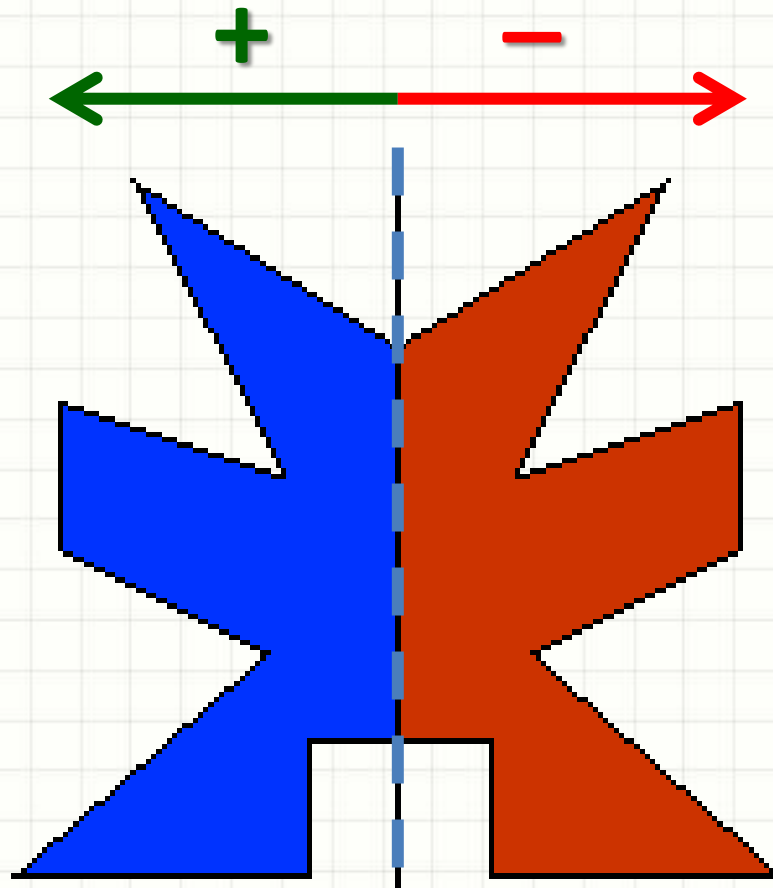


A distância tem
SINAL!



Sinal da Distância

- Há convenção de sinais... (veremos depois!)



Sinal da Distância

- Há convenção de sinais... (veremos depois!)



Vamos aprender a calcular o momento estático... Depois voltamos à questão do centro de gravidade da figura

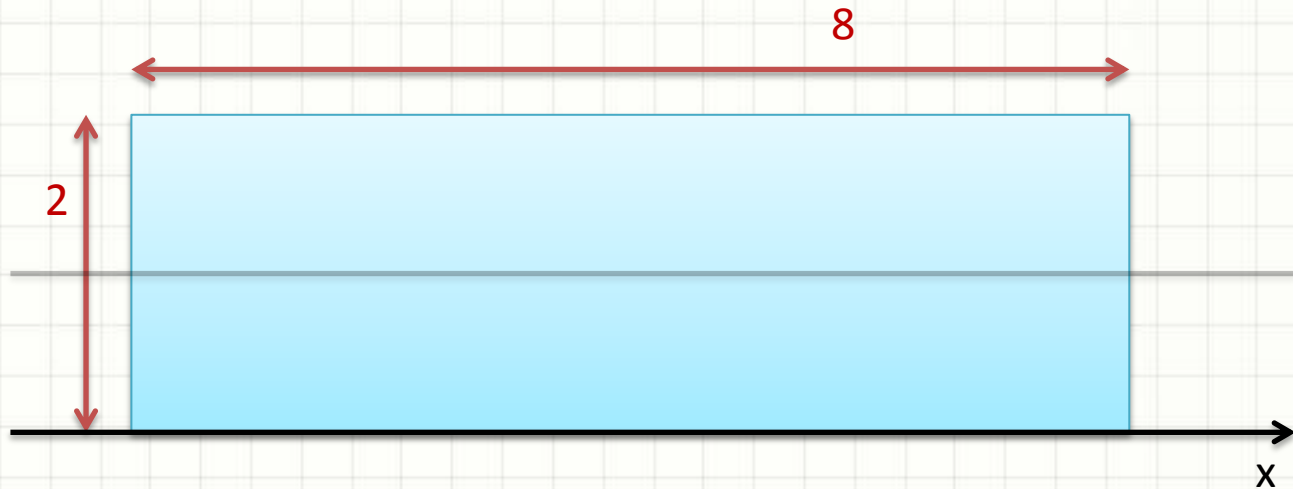




CÁLCULO DO MOMENTO ESTÁTICO

Momento Estático

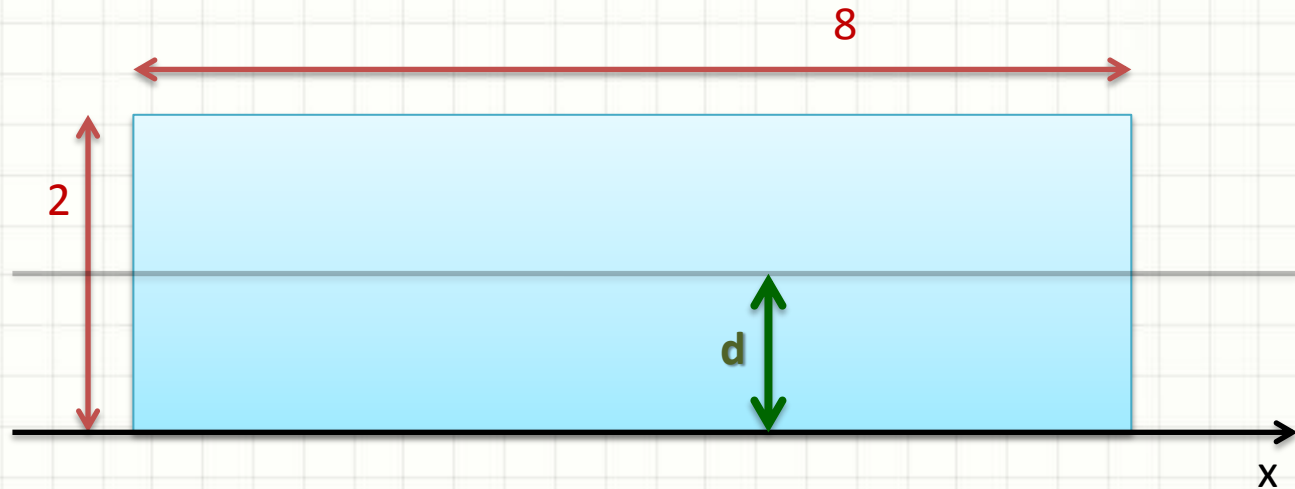
- Exemplo



- Simétrico a Y? $\rightarrow S_y = 0$
- Simétrico a X? \rightarrow **Não!**

Momento Estático

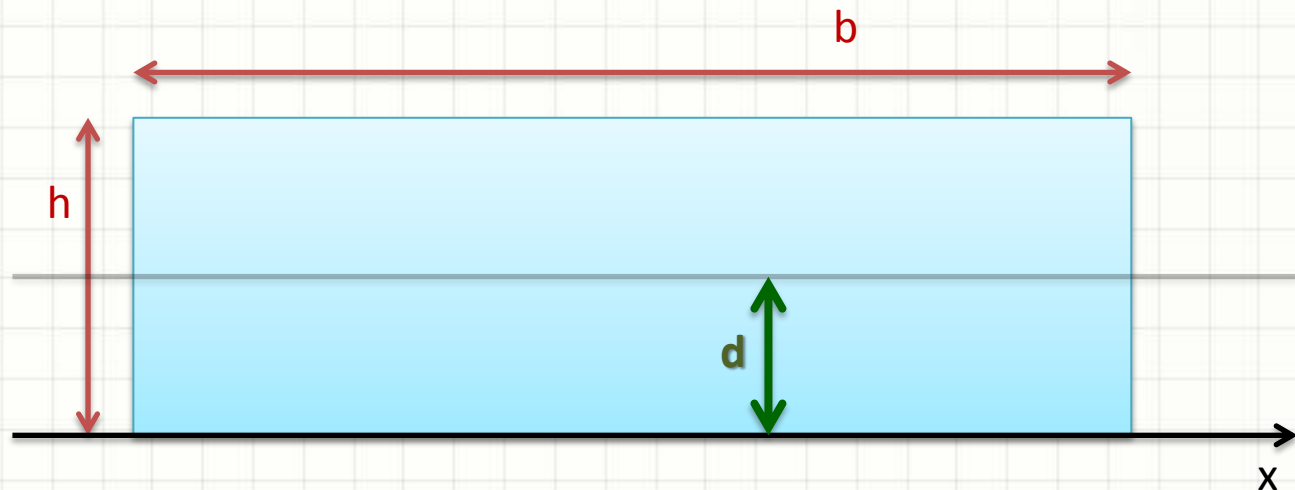
- Exemplo



- $S_x = ?$
- $S_x = A \cdot d = (2 \cdot 8) \cdot 1 = 16$

Momento Estático

- Exemplo Genérico



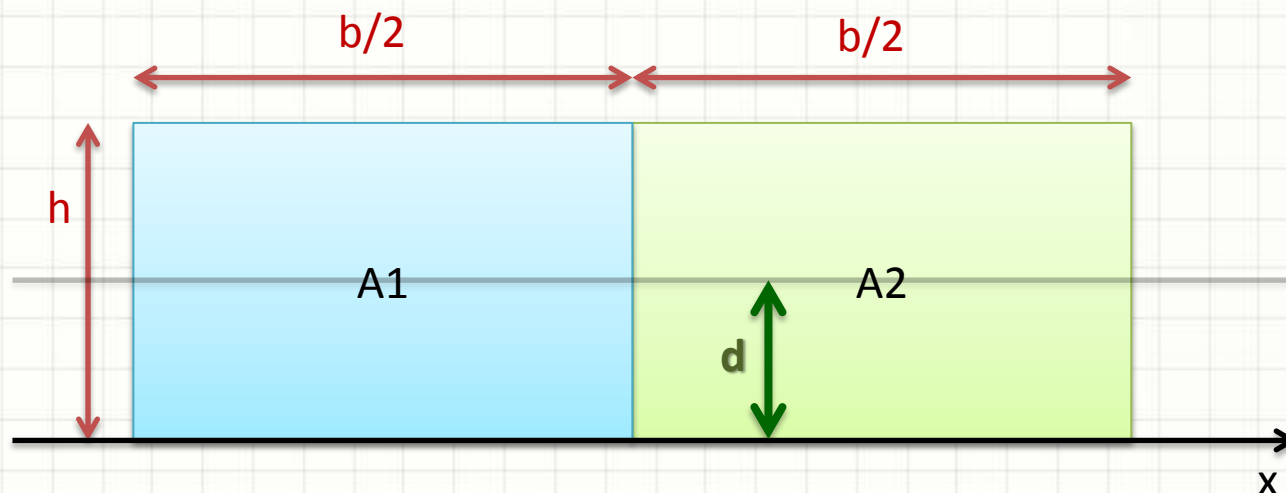
- $S_x = ?$
- $S_x = A \cdot d =$
- $S_x = (b \cdot h) \cdot h/2 =$

$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Anotem!

Momento Estático

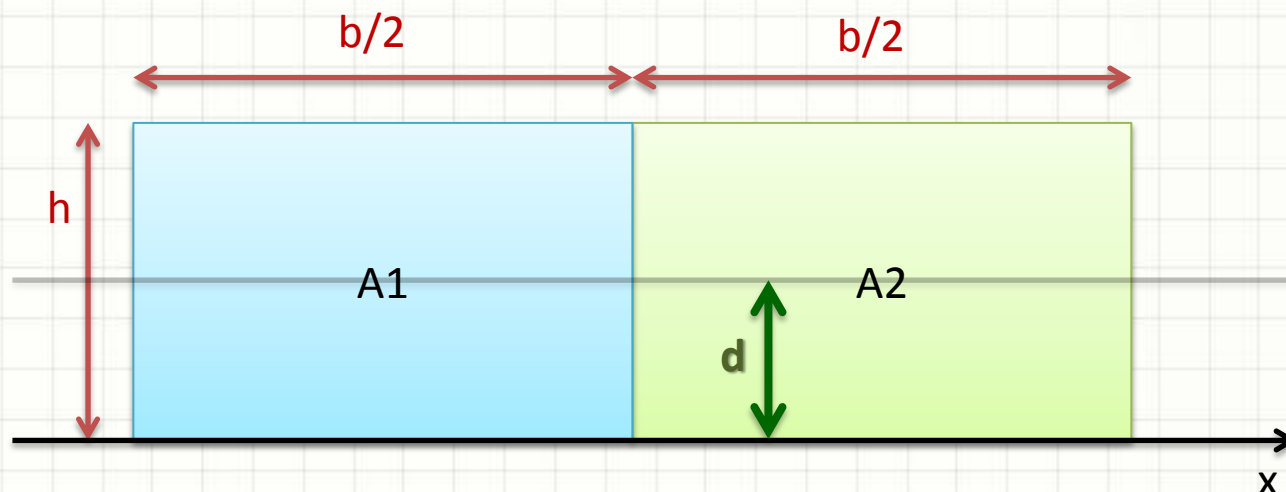
- E se a área for considerada em duas partes?



- $S_x = ?$
- $S_x = A_1 \cdot d + A_2 \cdot d =$
- $S_x = (b/2 \cdot h) \cdot h/2 + (b/2 \cdot h) \cdot h/2 =$
- $S_x = (b/4 \cdot h^2) + (b/4 \cdot h^2) =$

Momento Estático

- E se a área for considerada em duas partes?



- $S_x = ?$

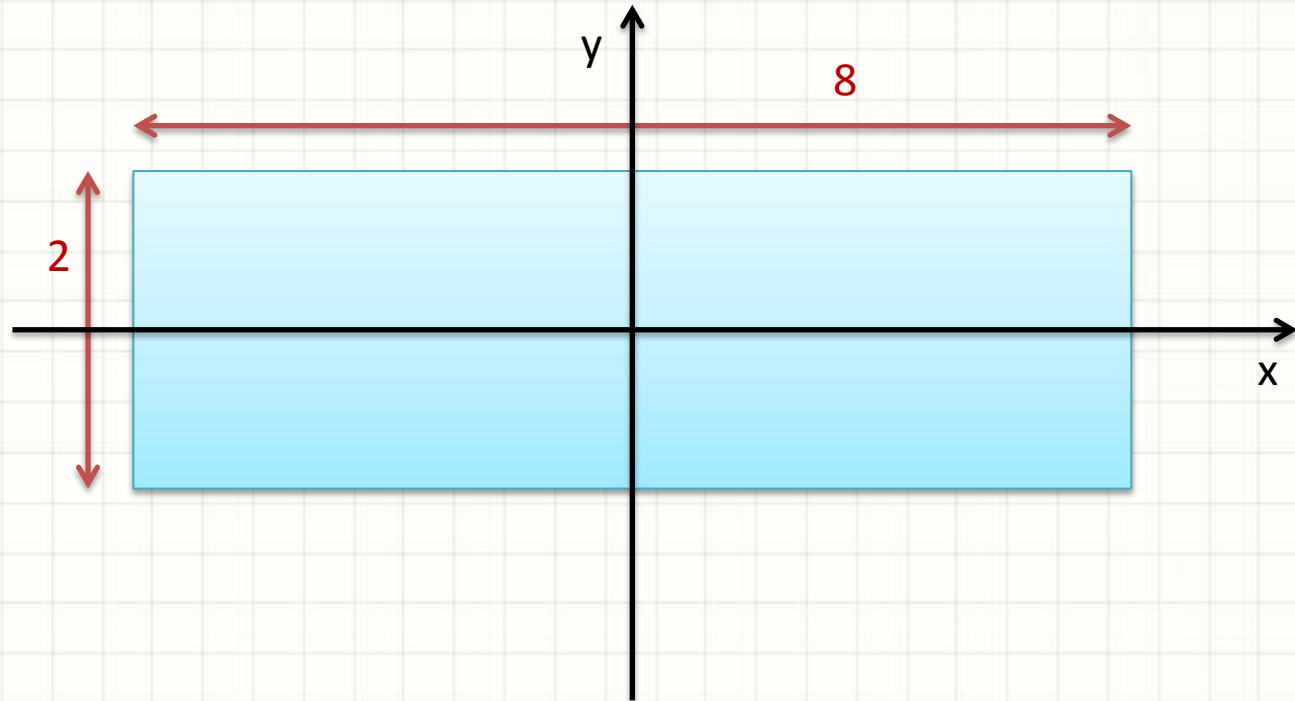
- $S_x = (b/4 \cdot h^2) + (b/4 \cdot h^2) =$
- $S_x = 2 \cdot (b/4 \cdot h^2) =$

$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Comparem!

Momento Estático

- E quando há simetria?



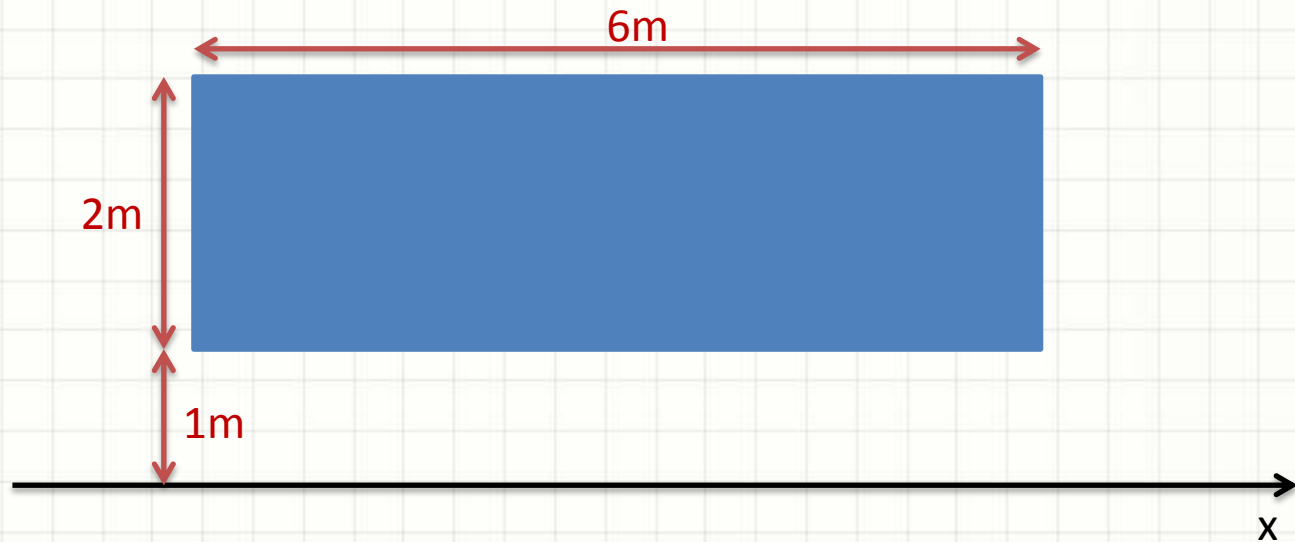
- Simétrico a X? $\rightarrow S_x = 0$
- Simétrico a Y? $\rightarrow S_y = 0$



EXERCÍCIO

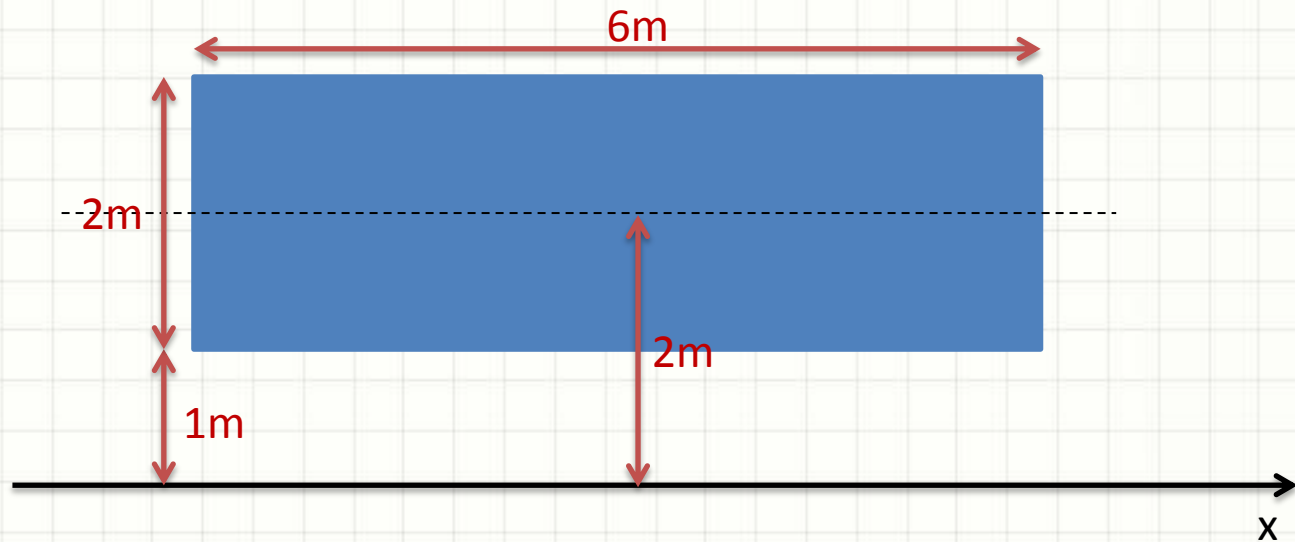
Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo



Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo

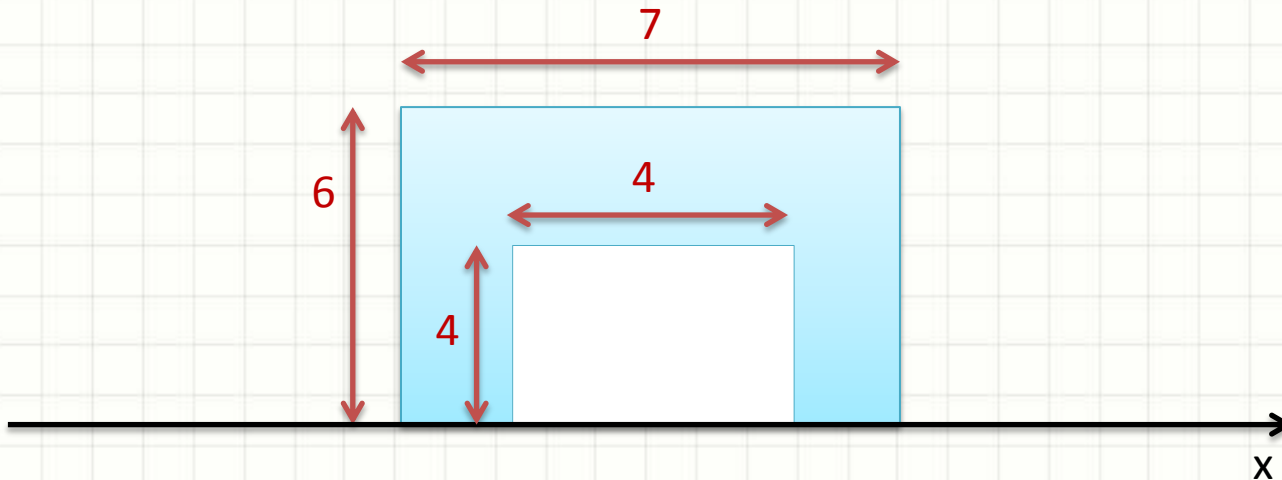




MOMENTO ESTÁTICO CALCULADO POR PARTES

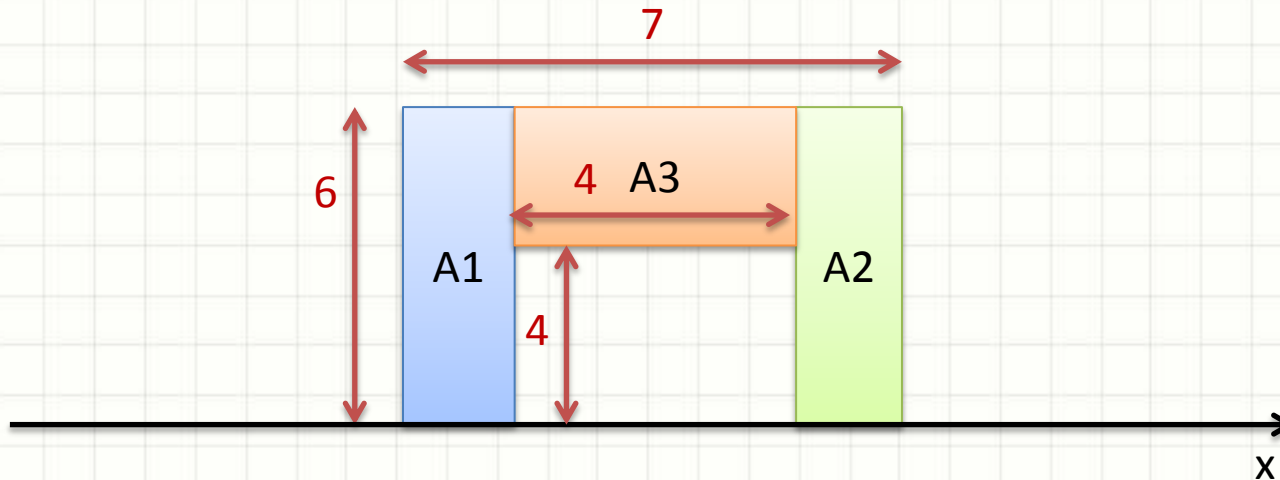
Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul



Momento Estático

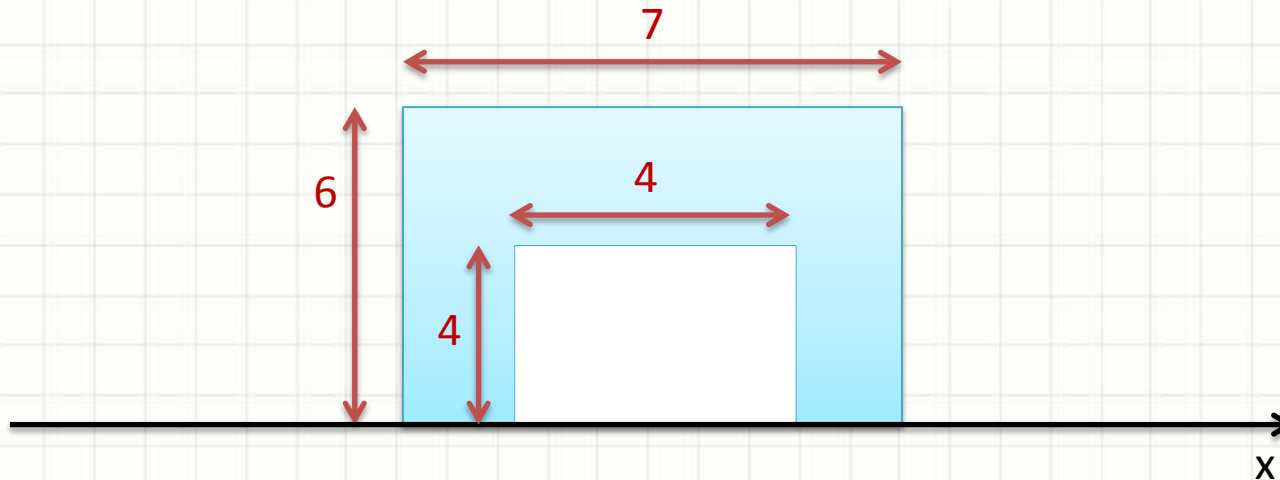
- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul



- $S_{xAzul} = Sx_{A1} + Sx_{A2} + Sx_{A3}$

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul



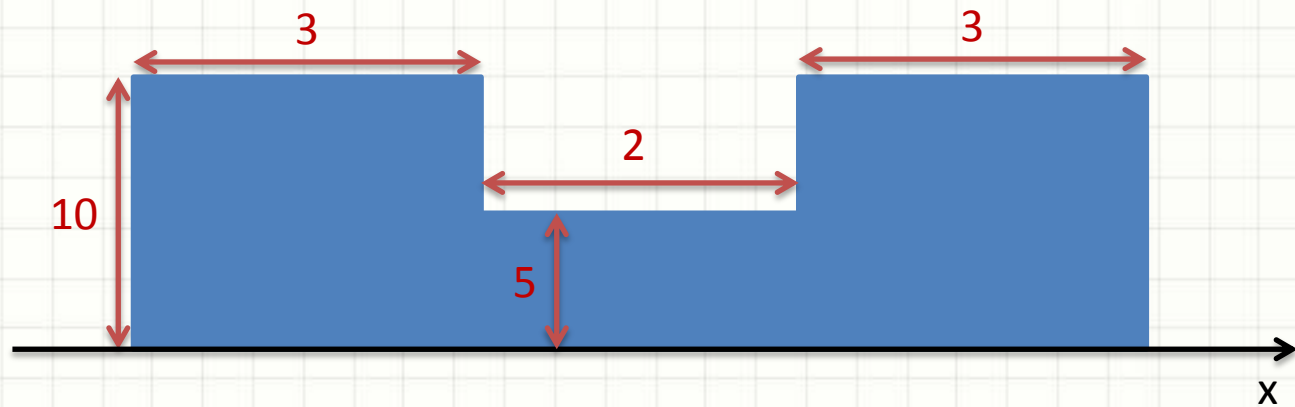
- $S_{xAzul} = S_{xRetAzul} - S_{xRetBranco}$
- $S_{xAzul} = \frac{b_1 \cdot h_1^2}{2} - \frac{b_2 \cdot h_2^2}{2} =$
- $S_{xAzul} = \frac{7 \cdot 36}{2} - \frac{4 \cdot 16}{2} = 126 - 32 = \mathbf{94}$



EXERCÍCIOS

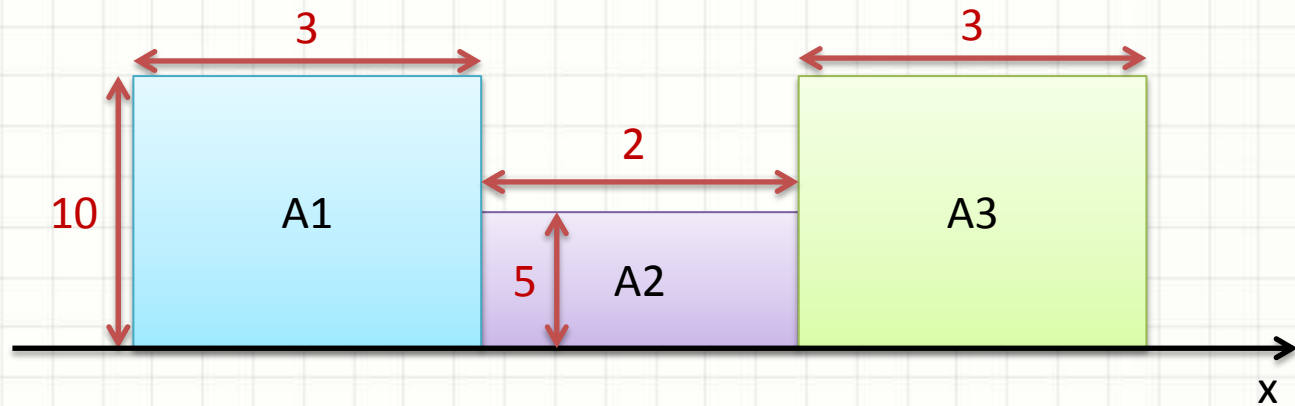
Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo



Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo



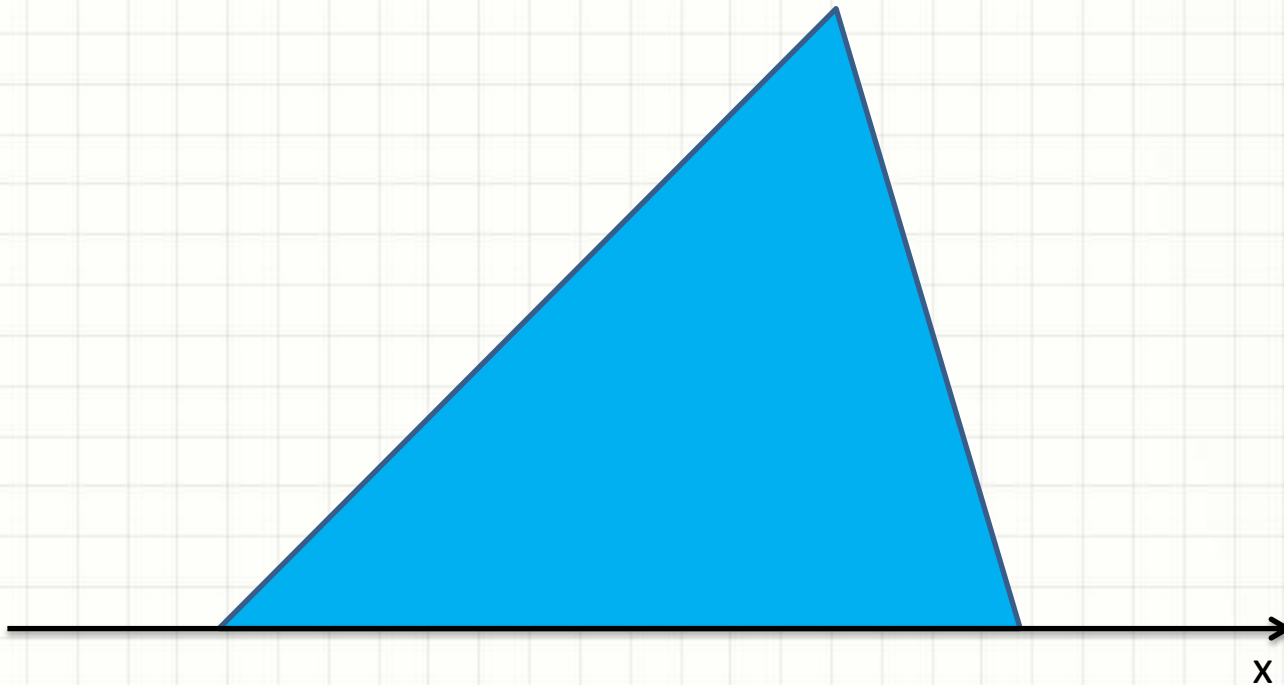
- $$S_x = S_{xA1} + S_{xA2} + S_{xA3}$$



MOMENTO ESTÁTICO EM REGIÕES PLANAS GENÉRICAS

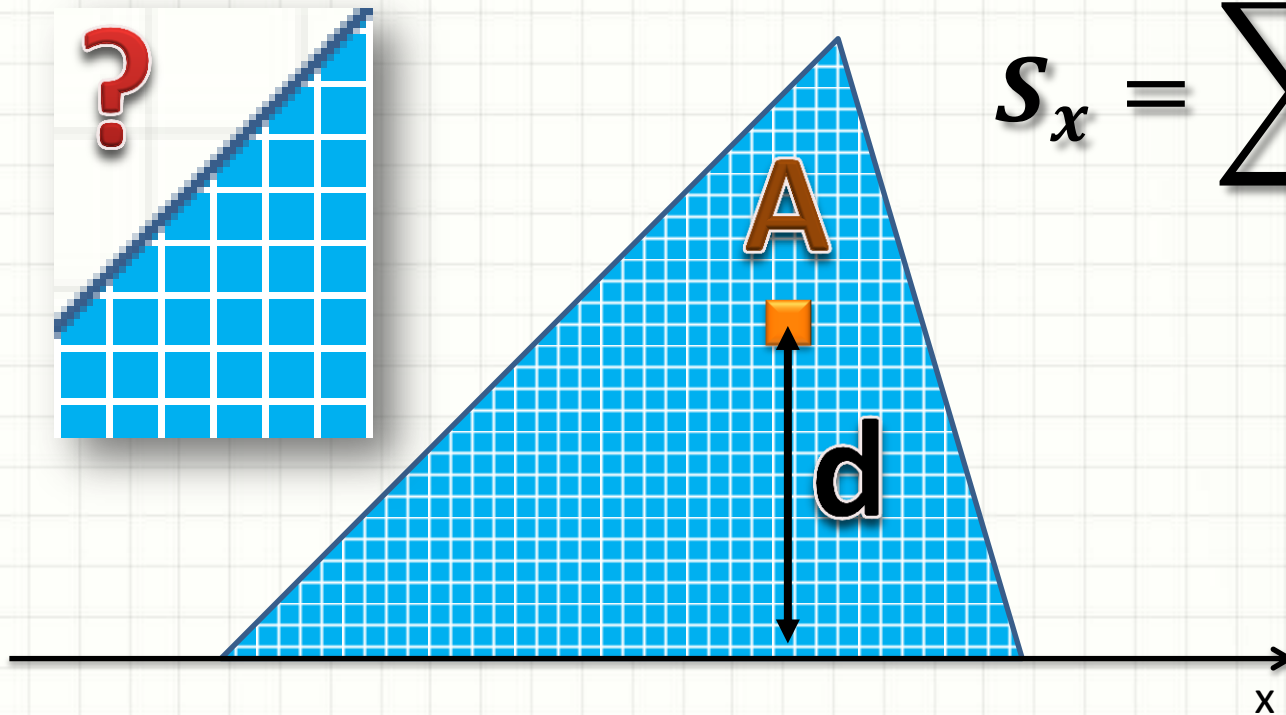
Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



Momento Estático

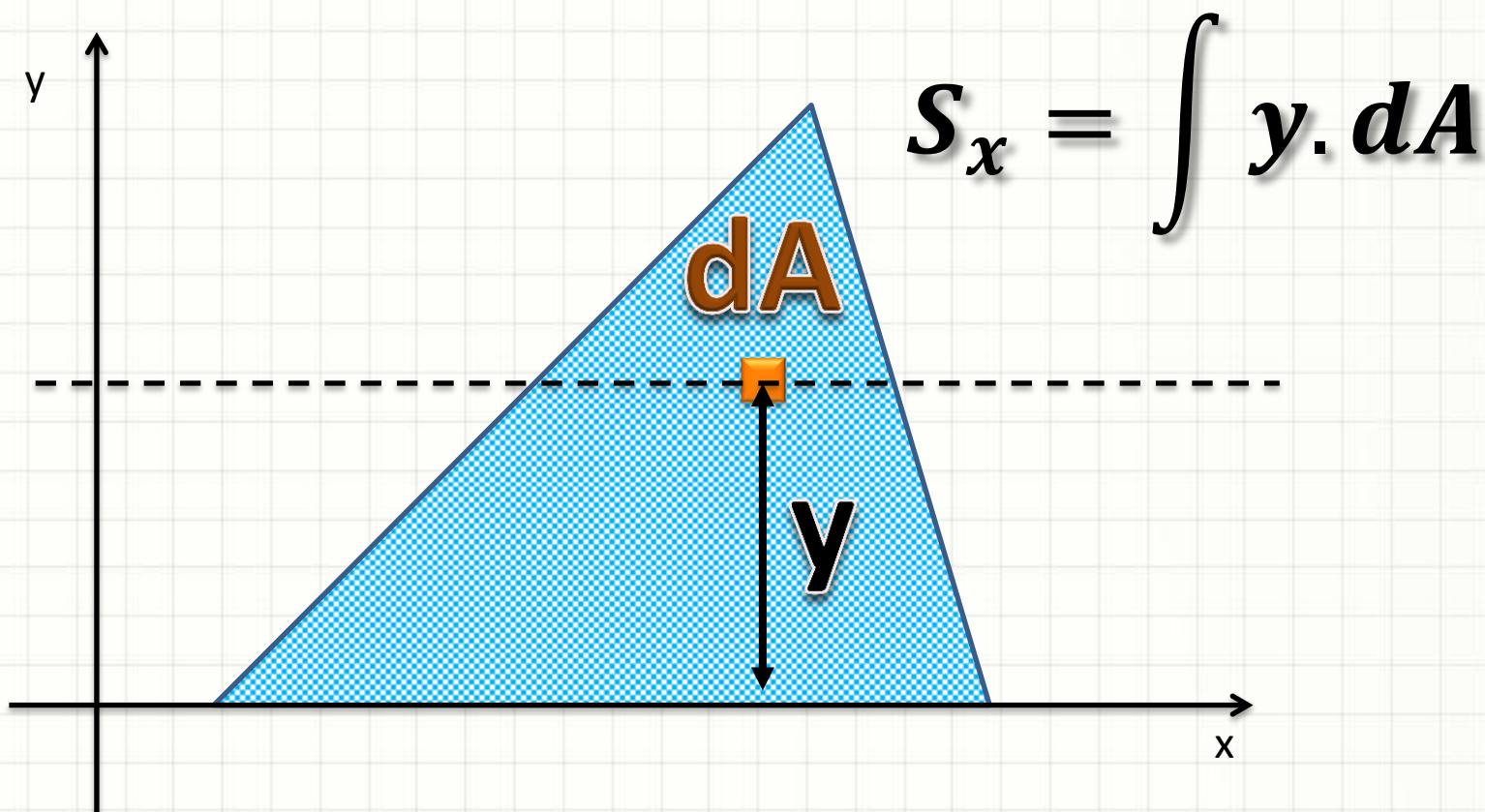
- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \sum d \cdot A$$

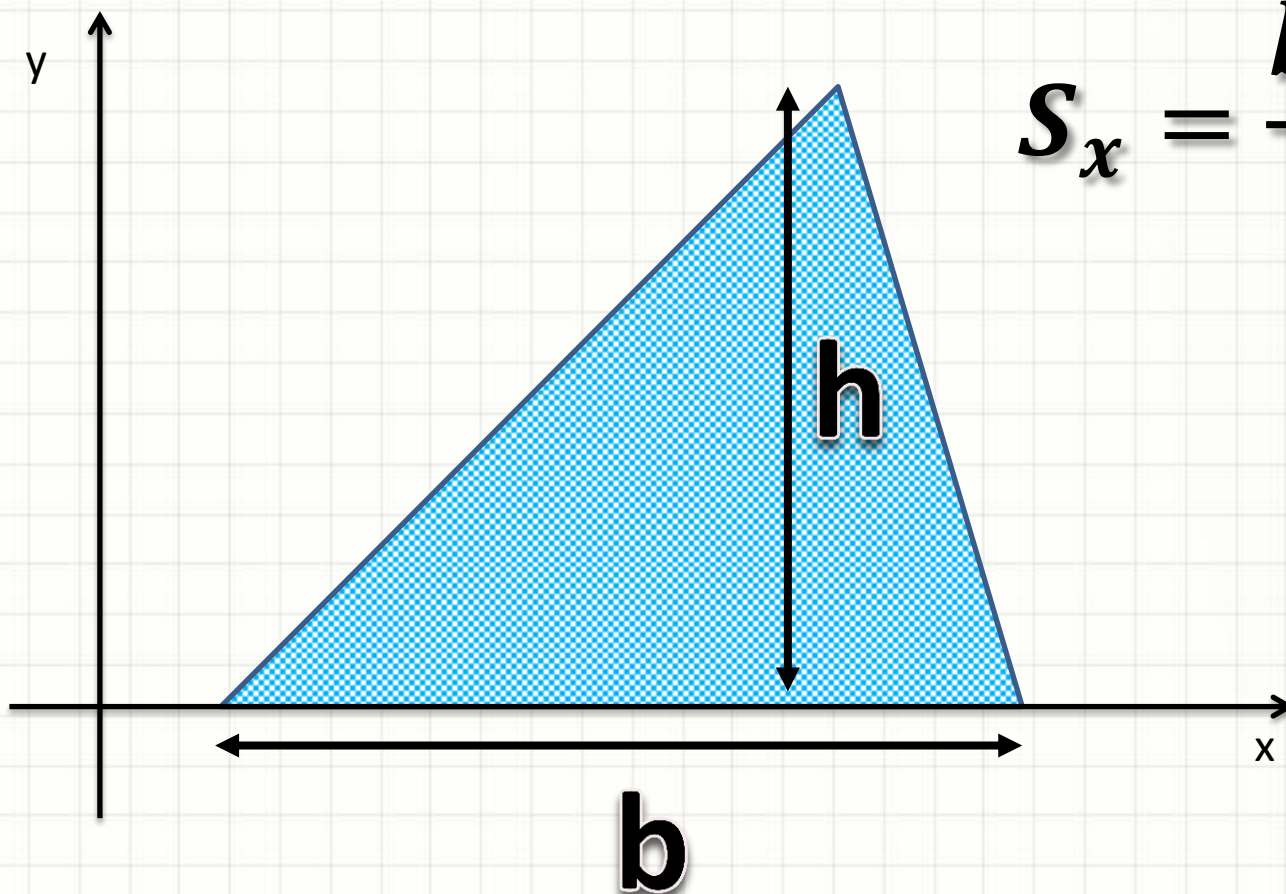
Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Momento Estático

- Cálculo genérico

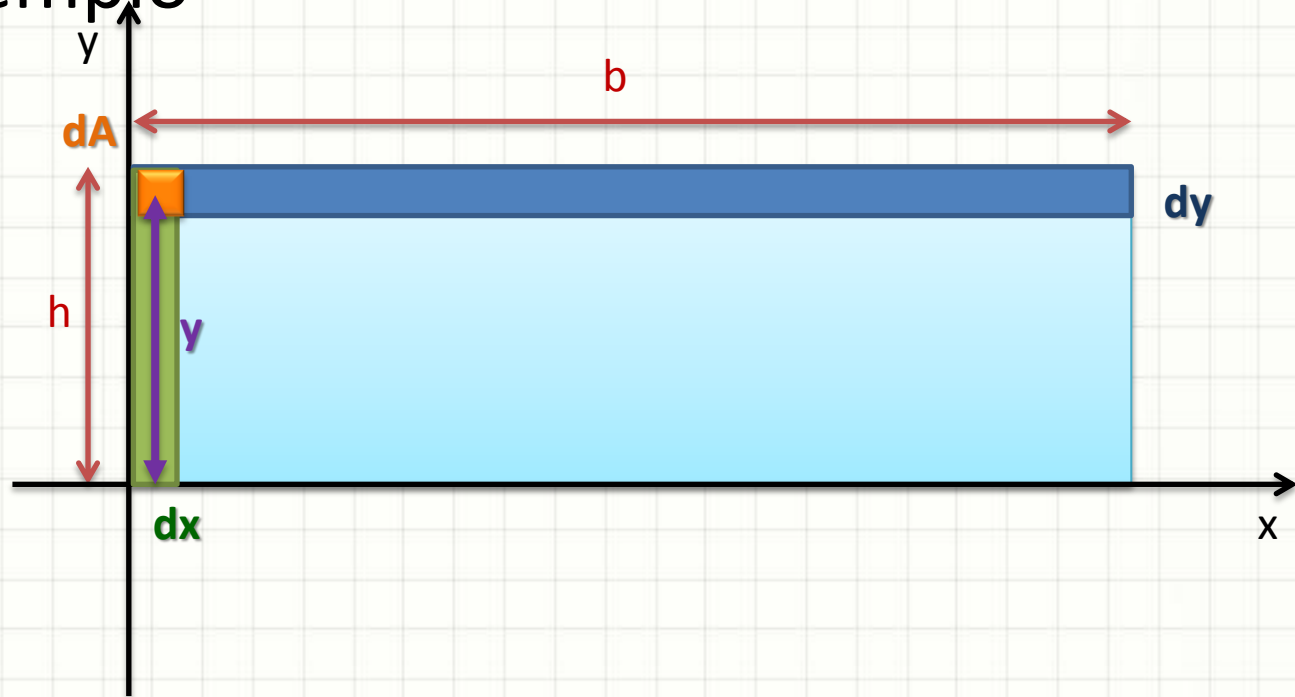
$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

- Unidade $S = [L^3]$

Momento Estático

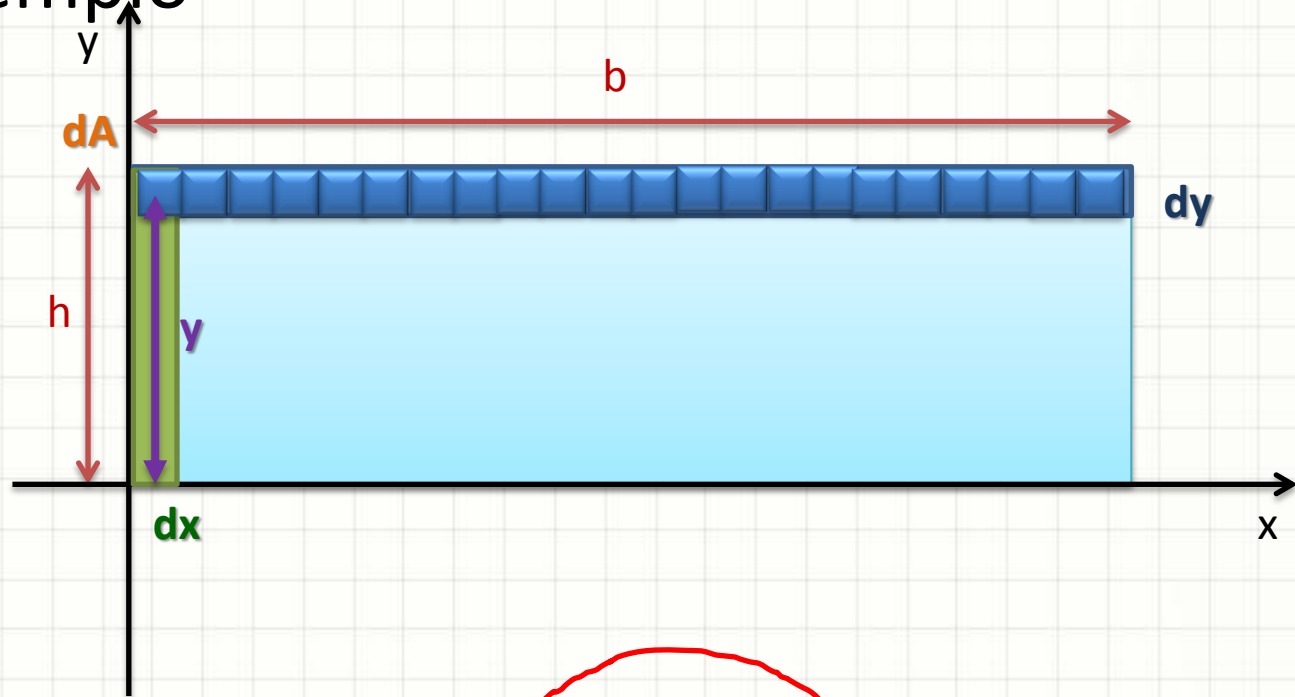
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx \cdot dy =$$

Momento Estático

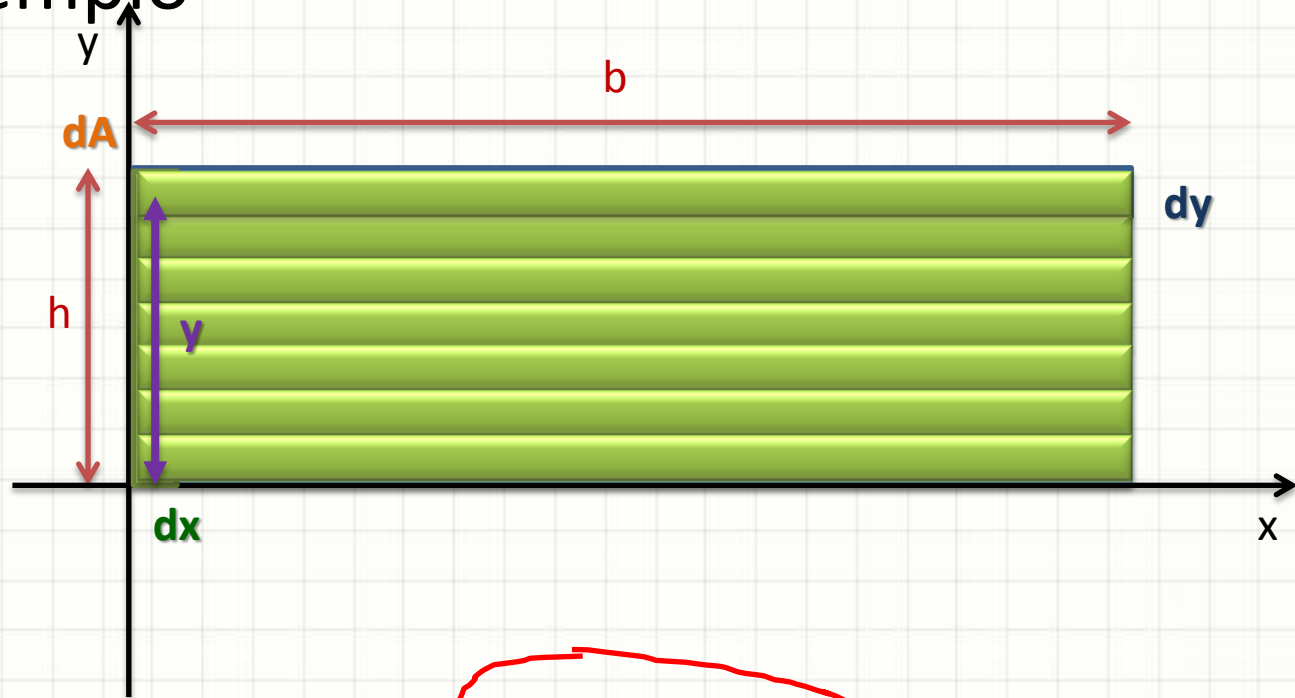
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx \cdot dy =$$

Momento Estático

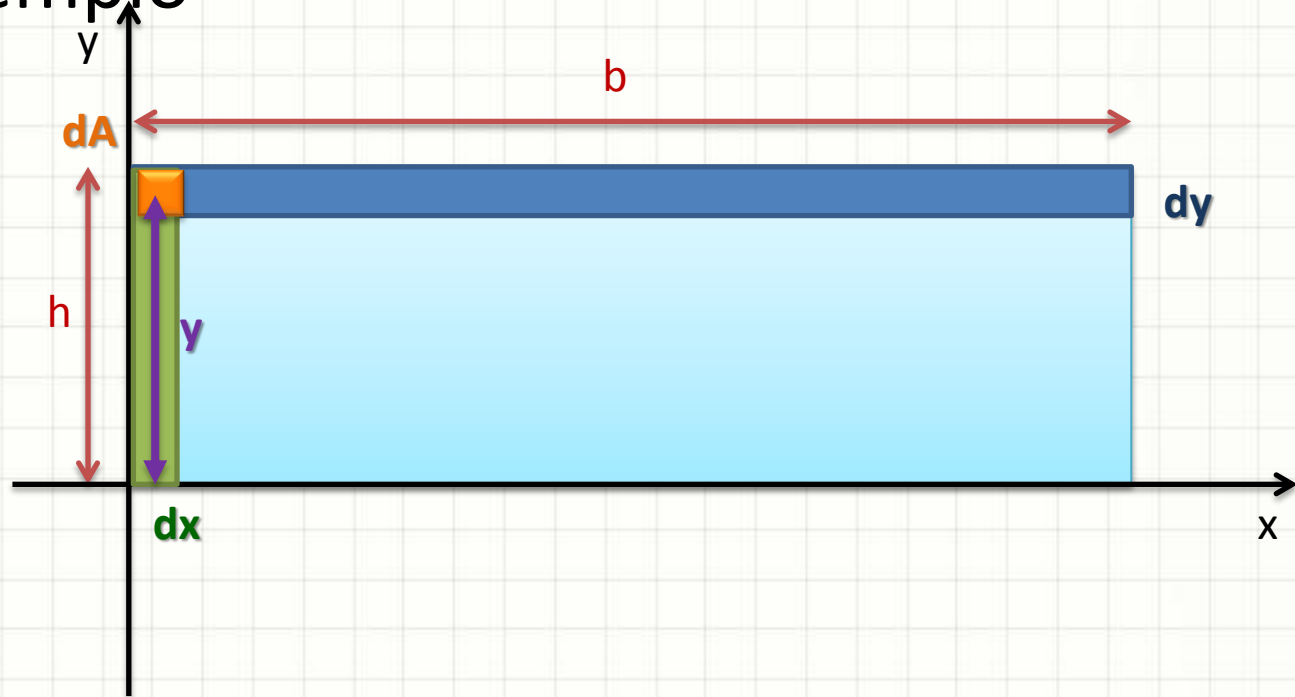
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx \cdot dy =$$

Momento Estático

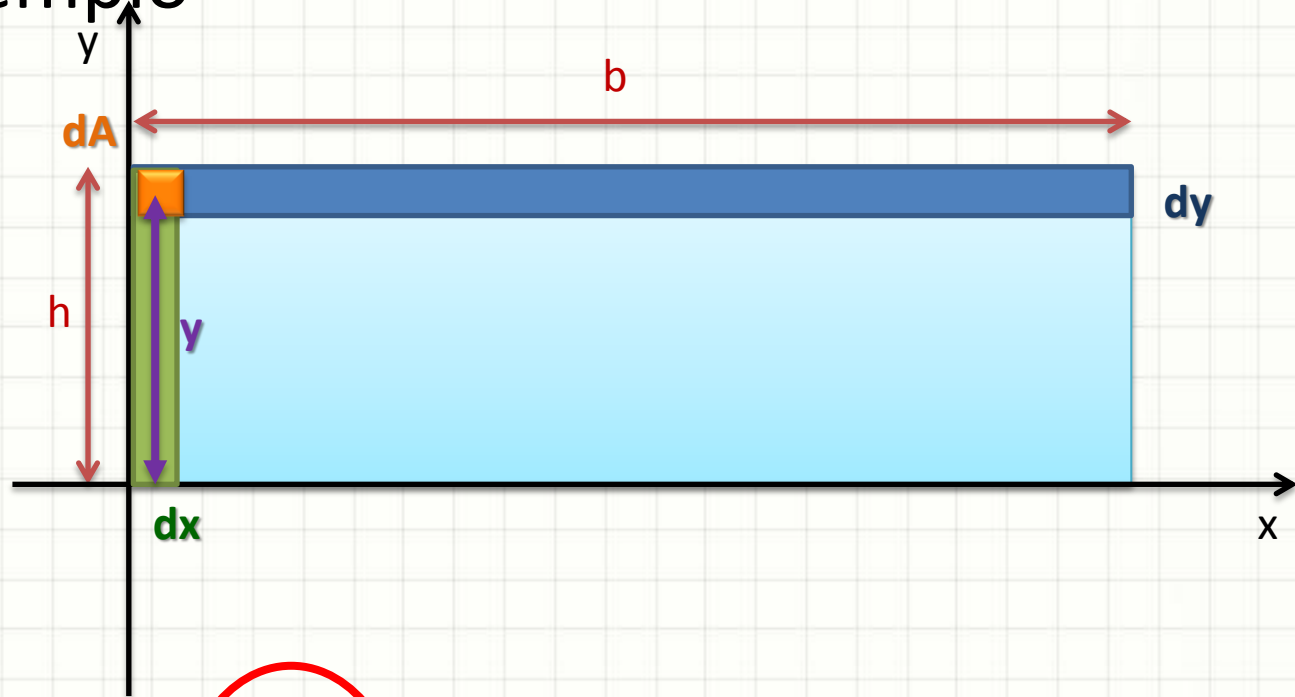
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx \cdot dy = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx \cdot dy =$$

Momento Estático

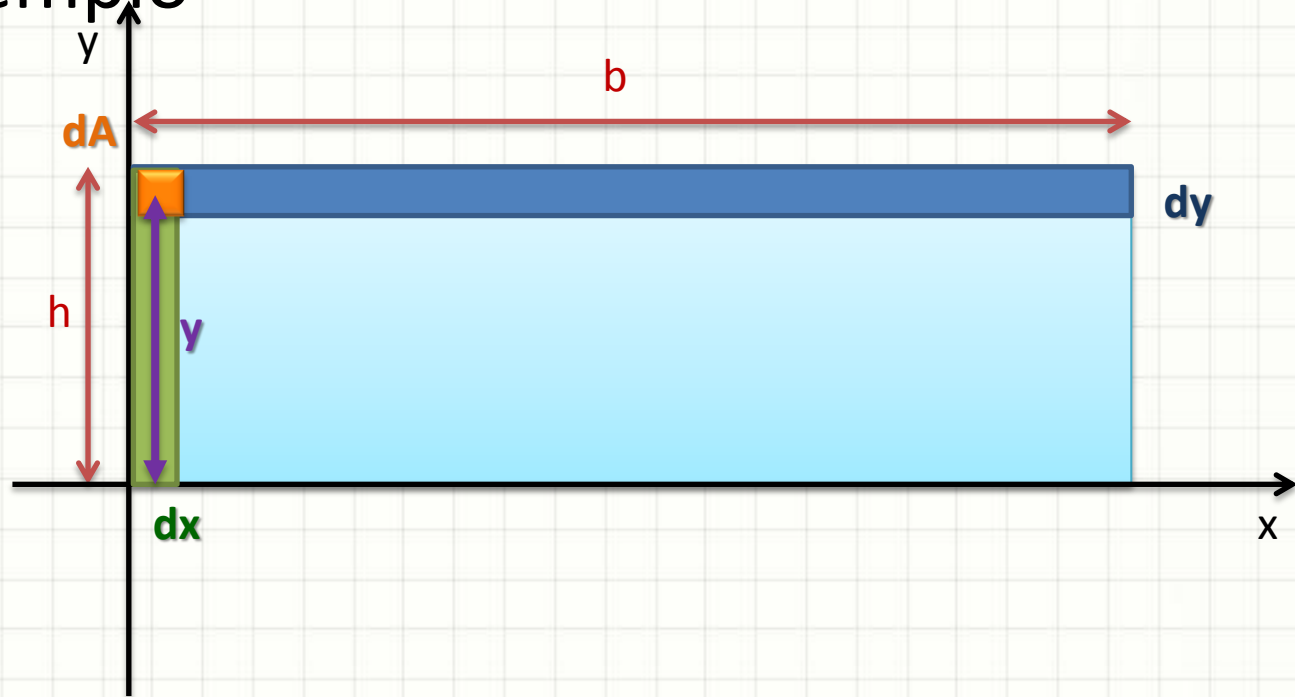
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot \left(\int_0^b dx \right) dy = \int_0^h y \cdot b \cdot dy =$$

Momento Estático

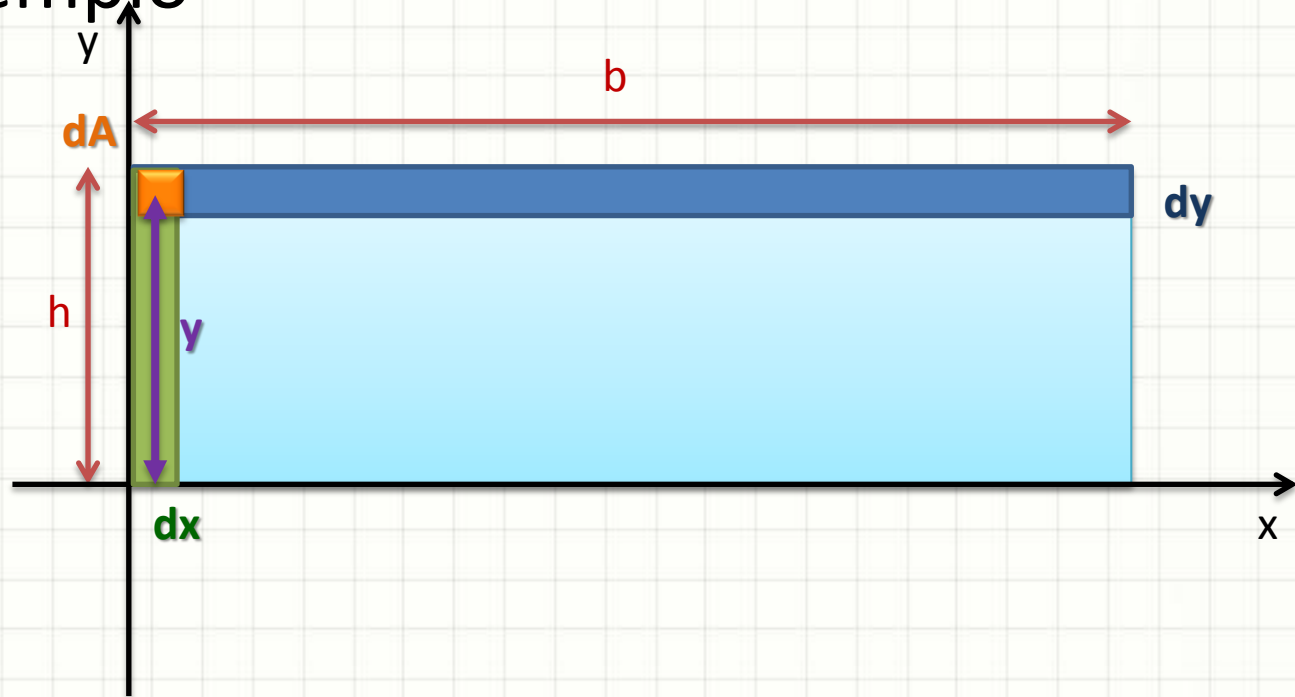
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y \cdot dy =$$

Momento Estático

- Exemplo



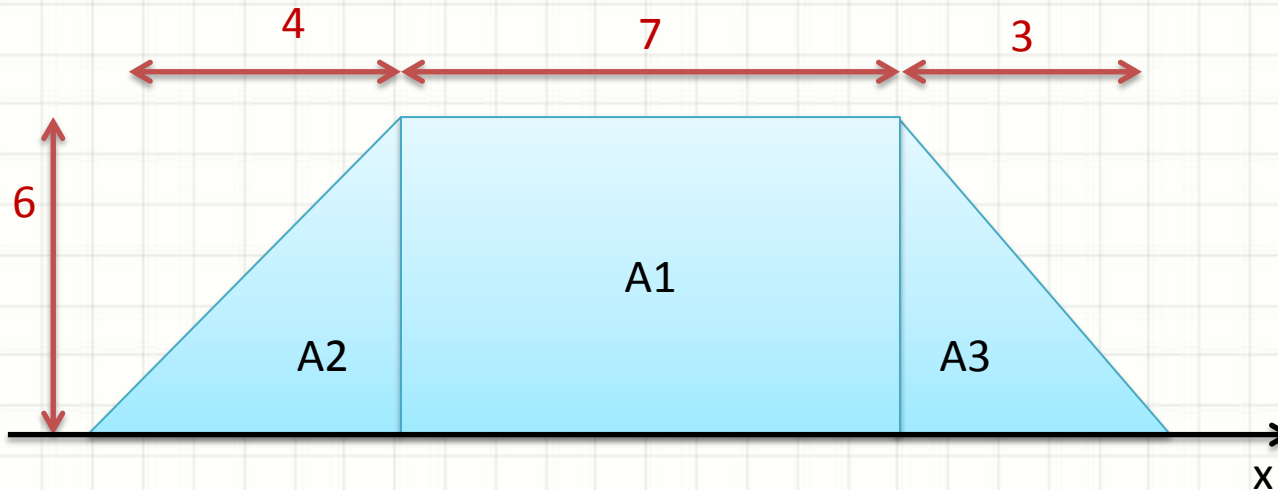
$$S_x = b \cdot \int_0^h y \cdot dy = b \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^h = \frac{b \cdot h^2}{2}$$



MOMENTO ESTÁTICO CALCULADO POR PARTES

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x :



- $S_x = Sx_{A1} + Sx_{A2} + Sx_{A3}$
- $S_x = \frac{b_1 \cdot h^2}{2} + \frac{b_2 \cdot h^2}{6} + \frac{b_3 \cdot h^2}{6} = \frac{(3 \cdot b_1 + b_2 + b_3) \cdot h^2}{6}$
- $S_x = \frac{(3 \cdot 7 + 4 + 3) \cdot 36}{6} = 168$



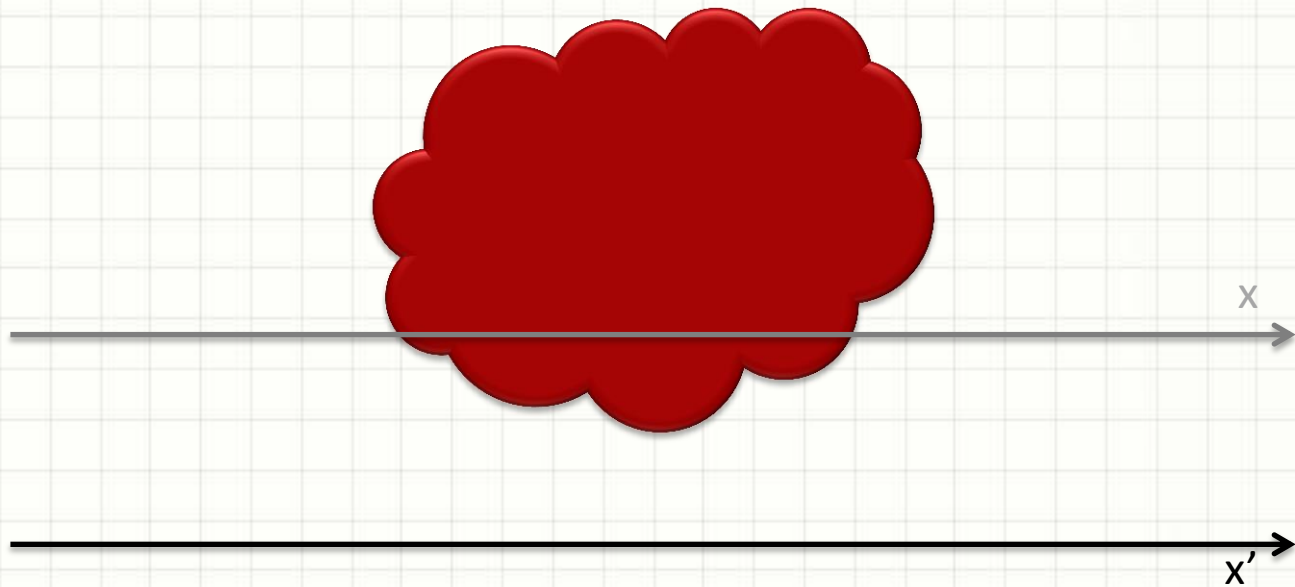
PAUSA PARA O CAFÉ!



TRANSLAÇÃO DE EIXO NO MOMENTO ESTÁTICO

Mudando o Eixo de Referência

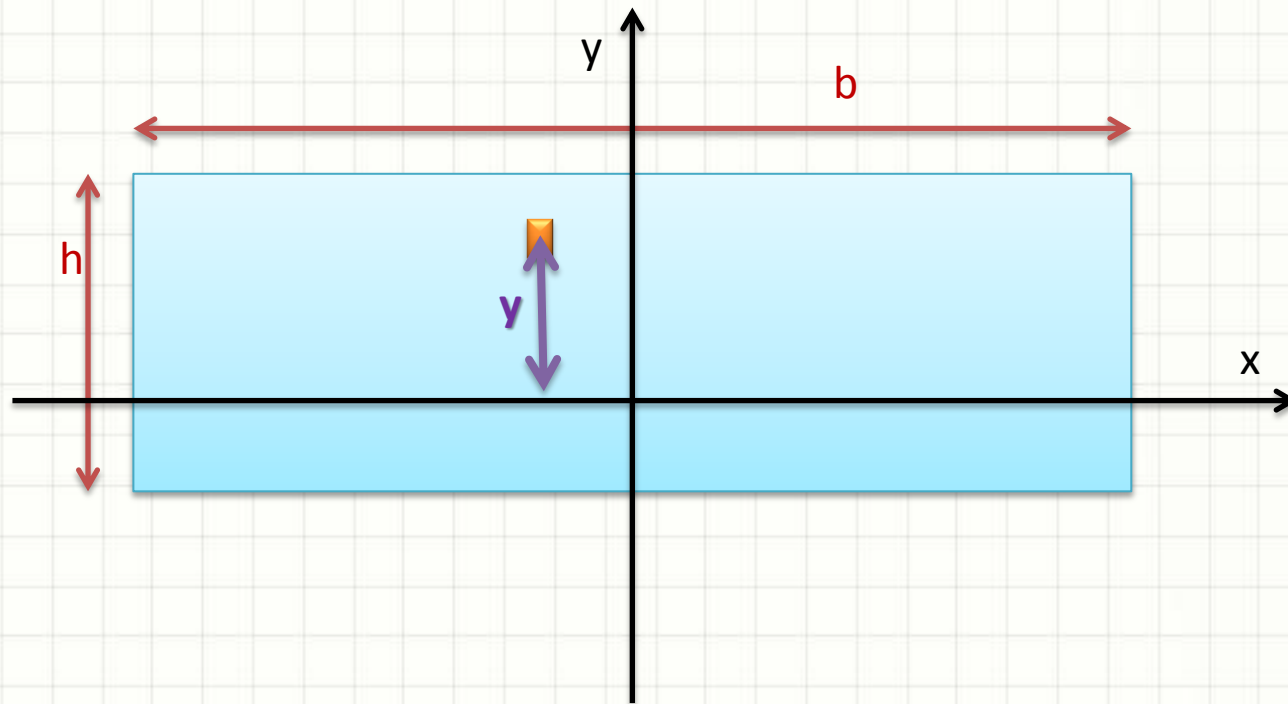
- Como calcular $S_{x'}$?



- Integral?
- Será que conhecer S_x ajuda?

Translação de Eixos

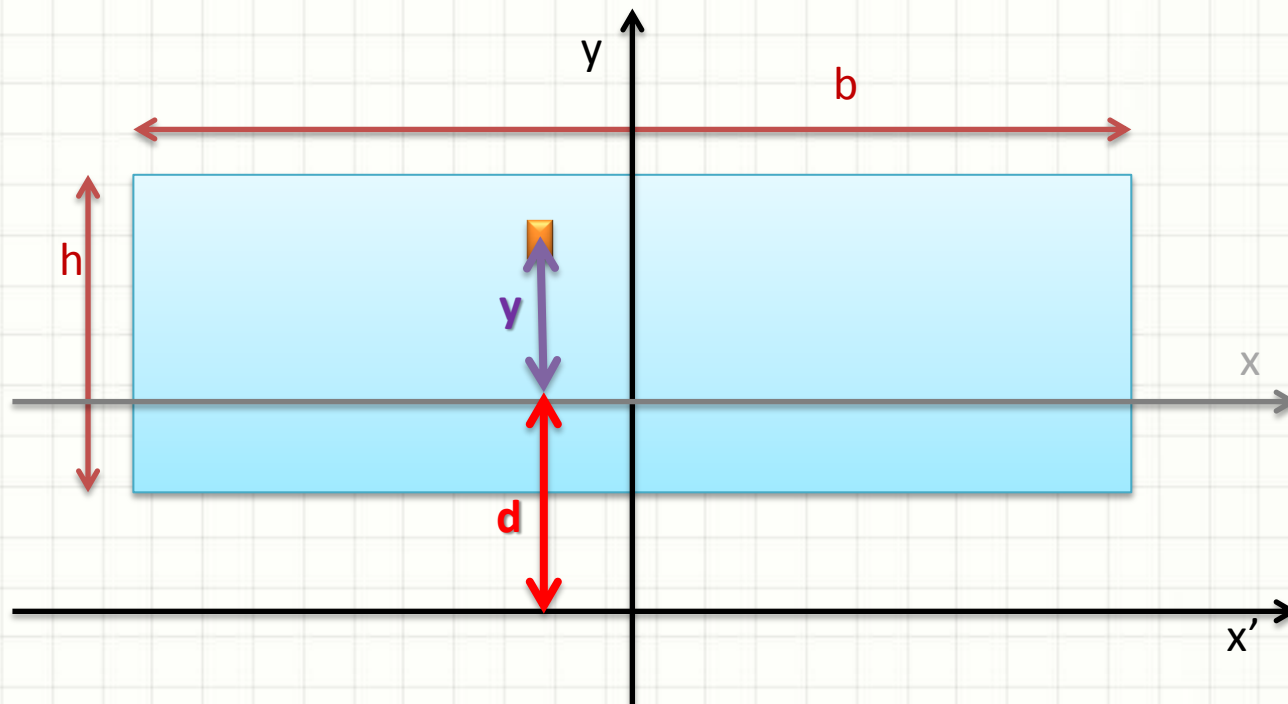
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

Translação de Eixos

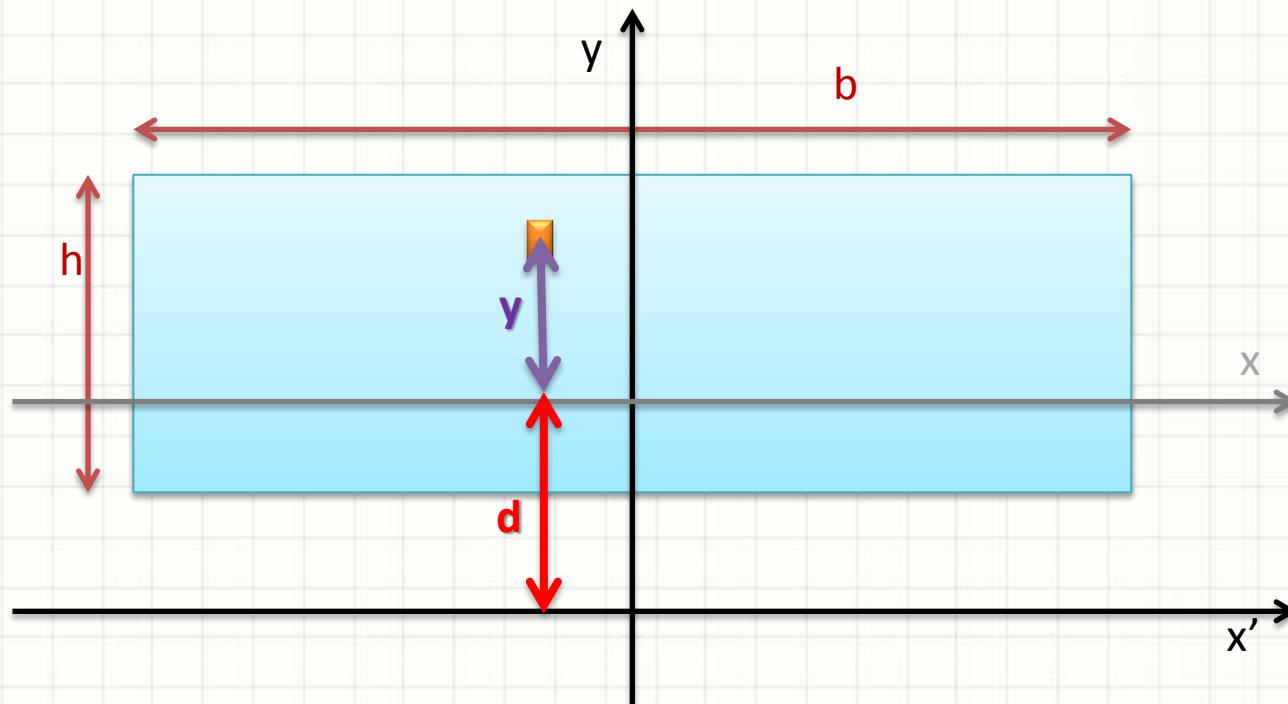
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_x = \int_A y \cdot dA \quad S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA$$

Translação de Eixos

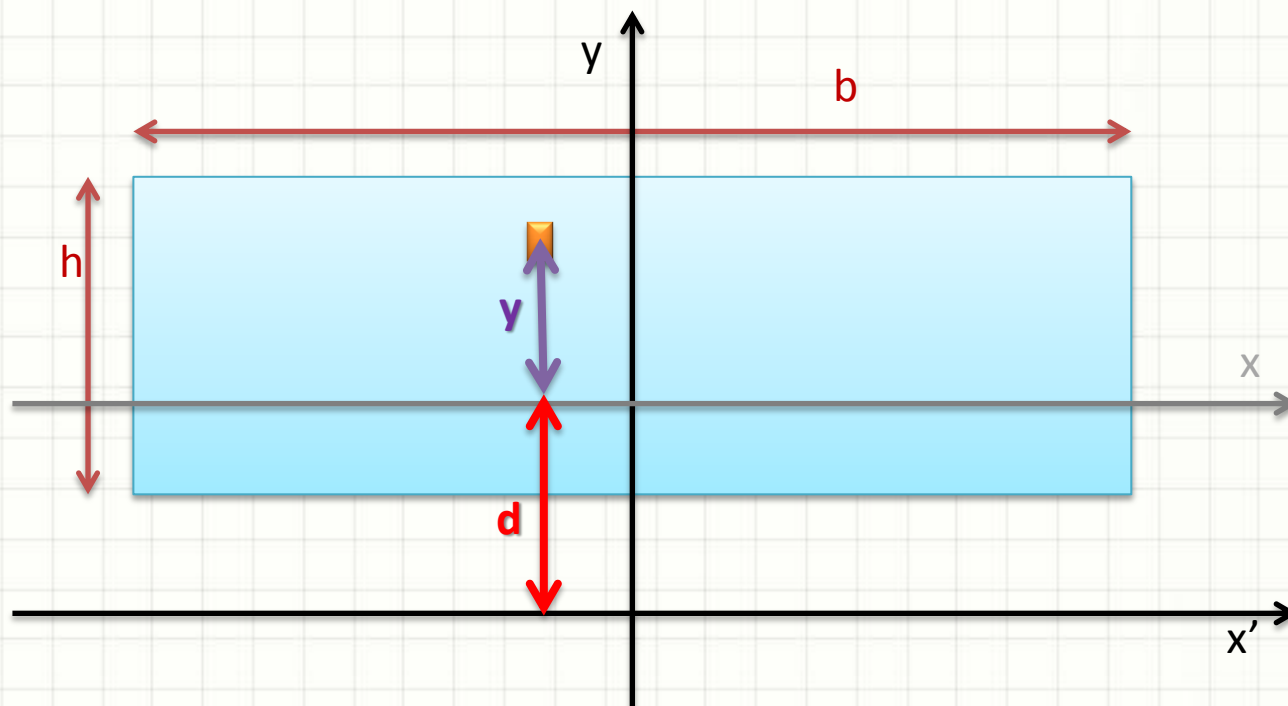
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA$$

Translação de Eixos

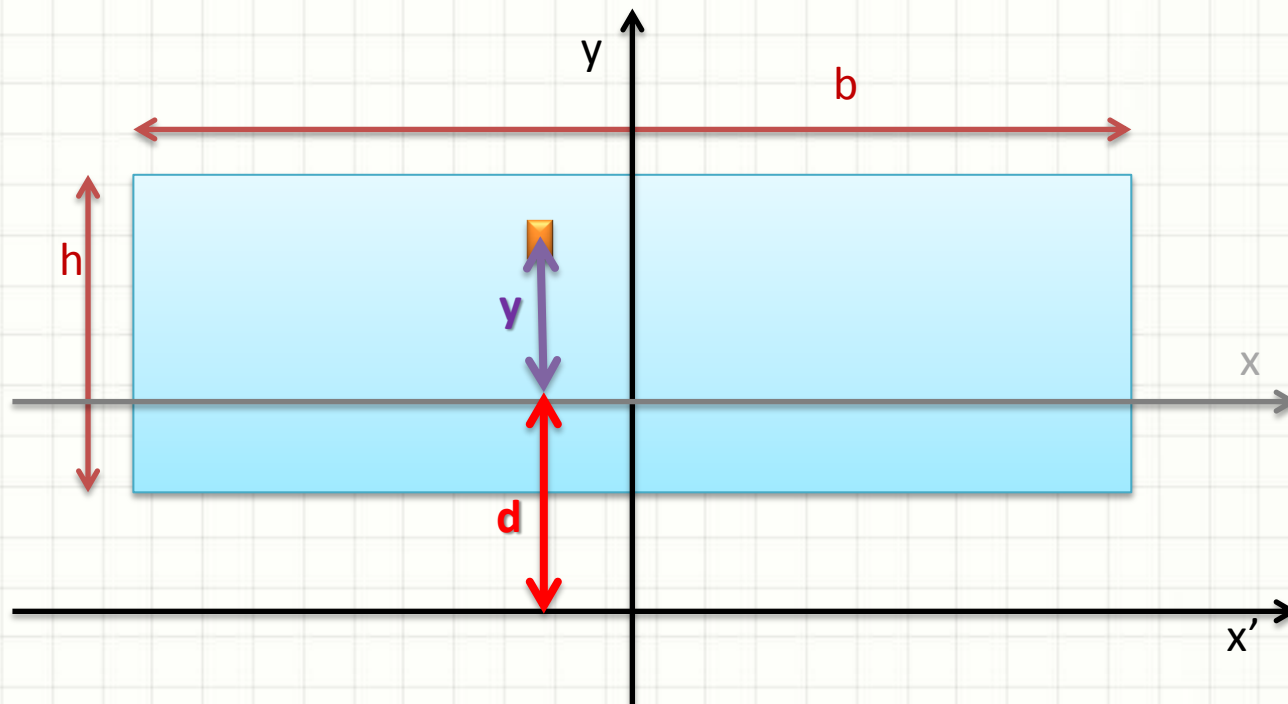
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_{x'} = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA = \int_A y \cdot dA + d \cdot \int_A dA$$

Translação de Eixos

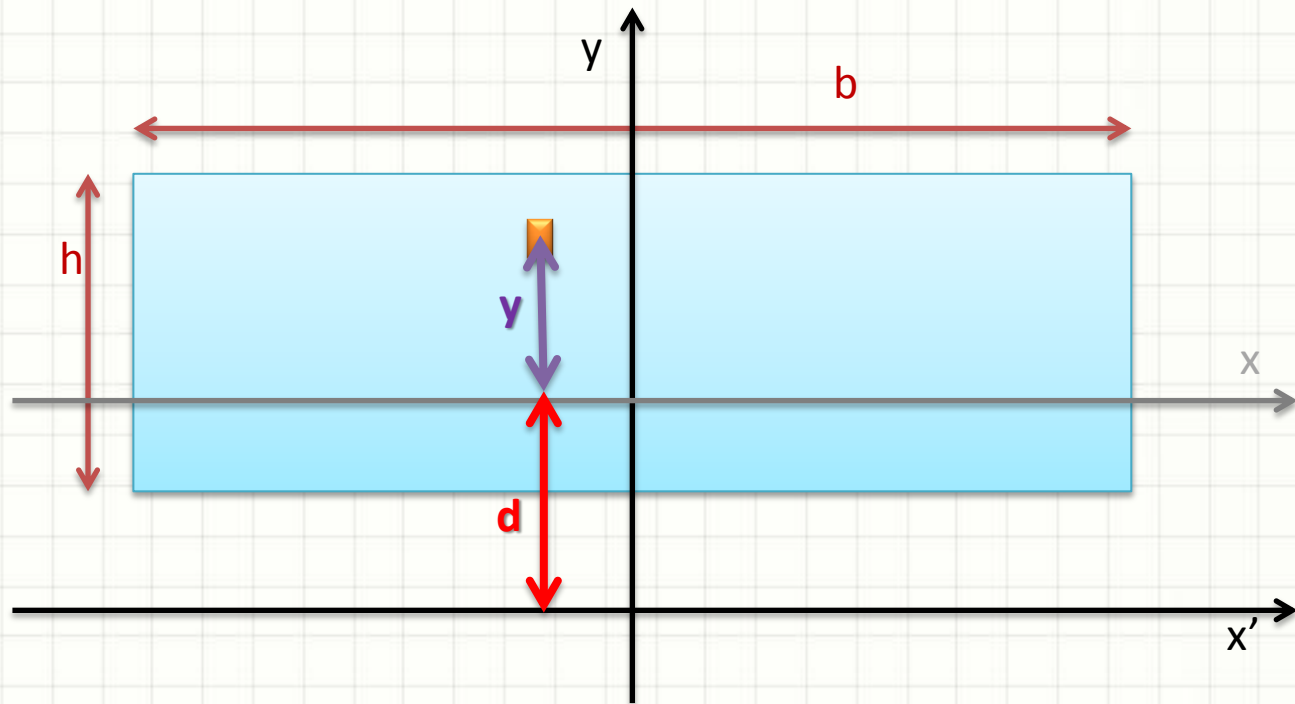
- Momento Estático (S_x conhecido)



$$S_{x'} = \int_A y \cdot dA + d \cdot \int_A dA$$

Translação de Eixos

- Momento Estático (S_x conhecido)

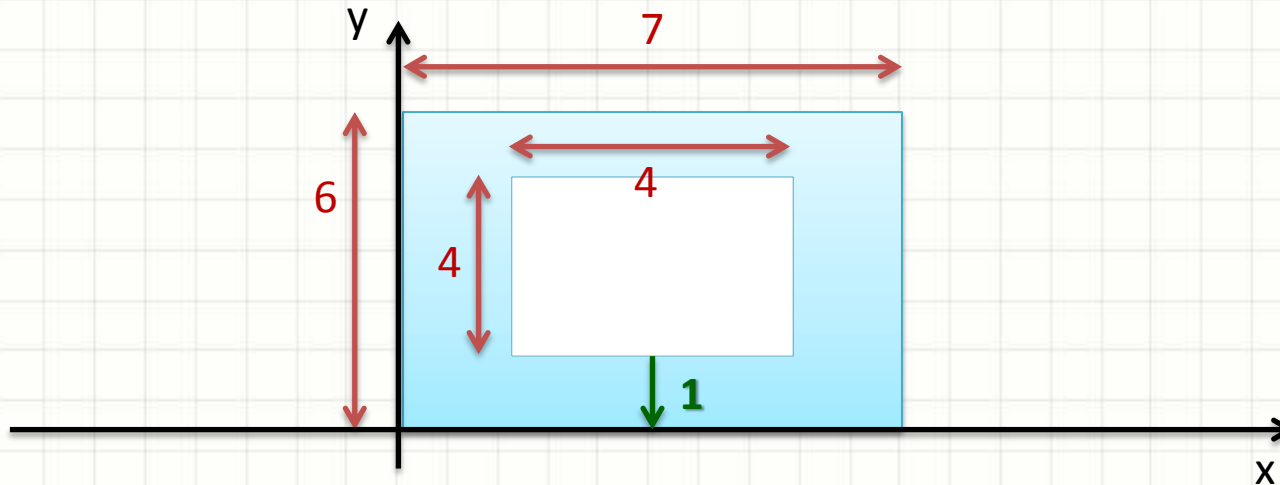


$$S_{x'} = S_x + d \cdot A$$



Translação de Eixo - Exemplo

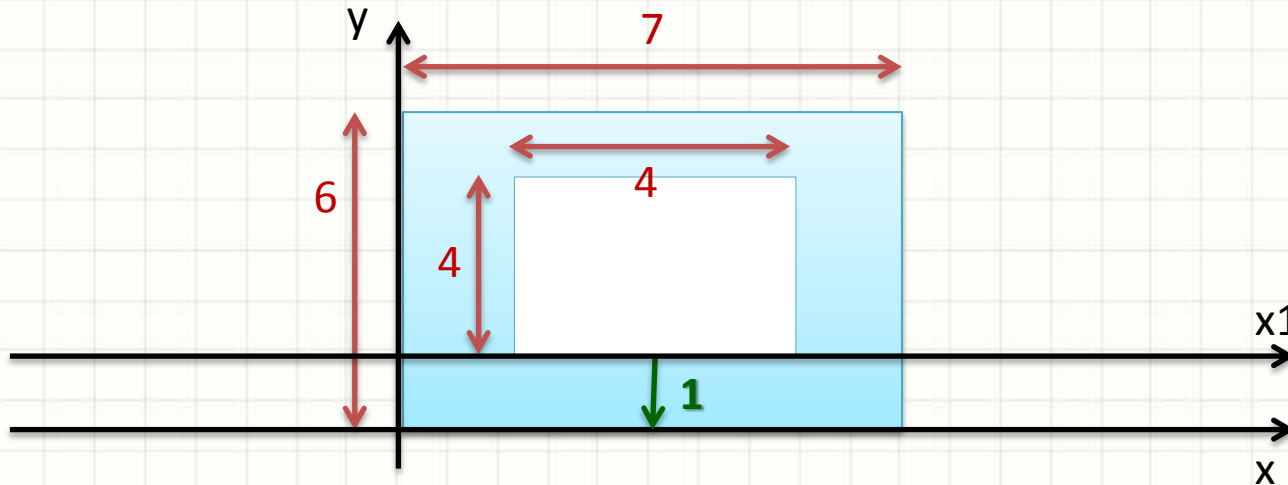
- Como calcular esse momento estático?



- $S_{xAzul} = S_{xRA} - S_{xRB}$
- Só que $S_{x_{RB}} \neq \frac{b \cdot h^2}{2}$

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?

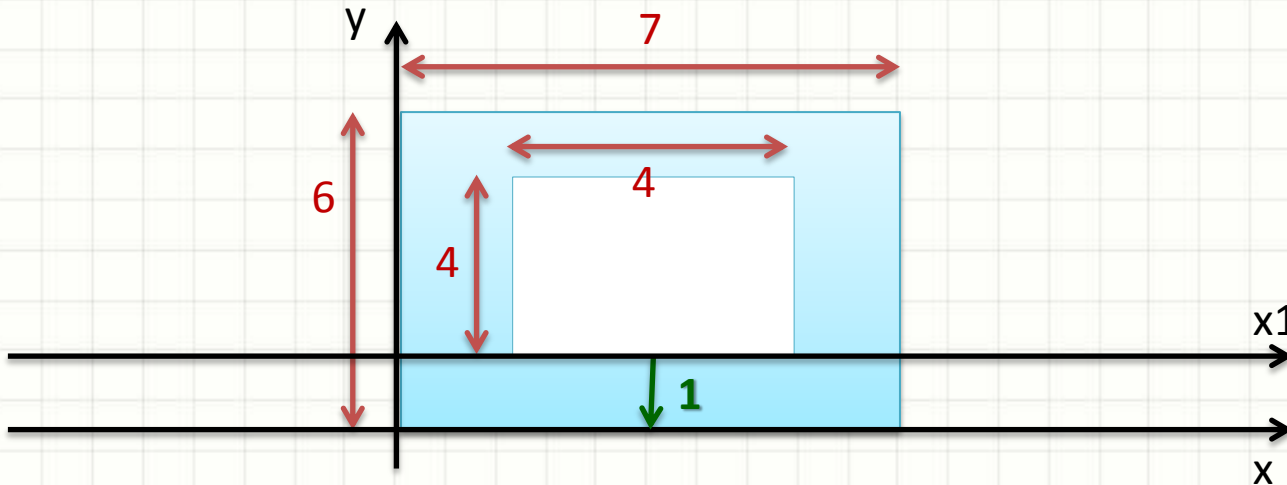


- Se temos o momento estático de um eixo, podemos calcular em outro
- $S_x = S_{x1} + d.A$
- $d \rightarrow$ Sinal?

$d \rightarrow \uparrow S$ se distanciando do centro
 $d \rightarrow \downarrow S$ se aproximando do centro

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



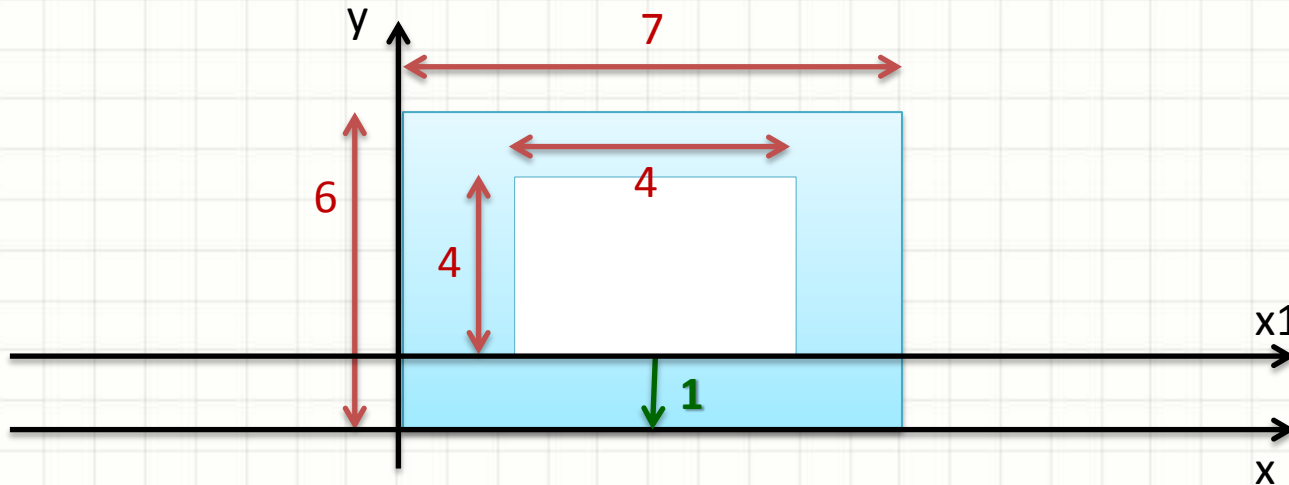
- Se temos o momento estático de um eixo, podemos calcular em outro
- $S_{xRB} = S_{x1RB} + d \cdot A$
- $\Delta S = \Delta y \cdot A = 1 \cdot 16 = 16$

Sinal $S_{xRB} = ?$

Sinal $\Delta S = ?$

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



- Logo...

$$S_{xRB} = S_{x1RB} + d \cdot A = \frac{b \cdot h^2}{2} + 16 = \frac{4 \cdot 16}{2} + 16 = \mathbf{48}$$

$$S_{xAzul} = S_{xRA} - S_{xRB} = 126 - 48 = \mathbf{78}$$



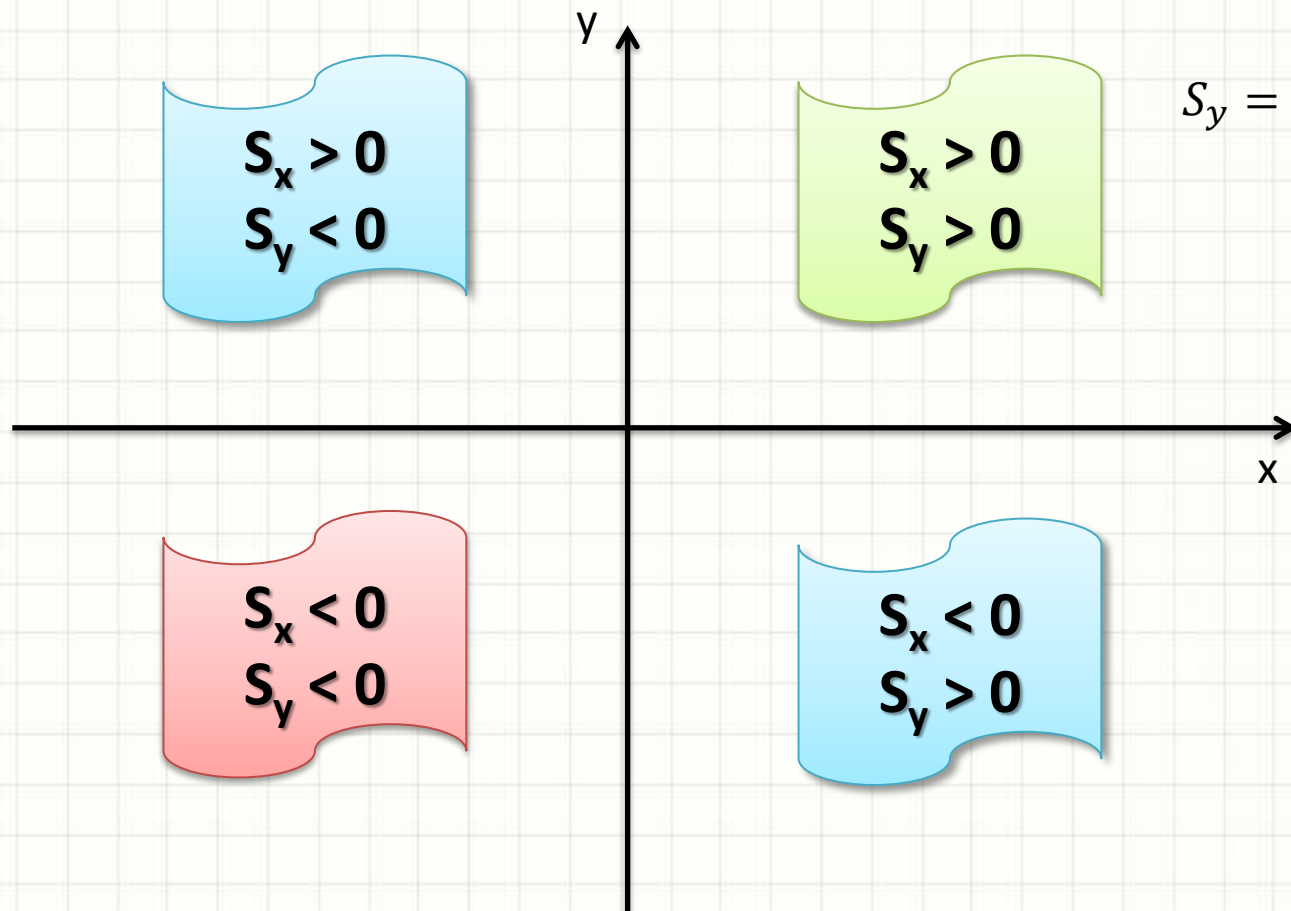
SINAL DO MOMENTO ESTÁTICO

Sinal do Momento Estático

- Depende do “quadrante” da área

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

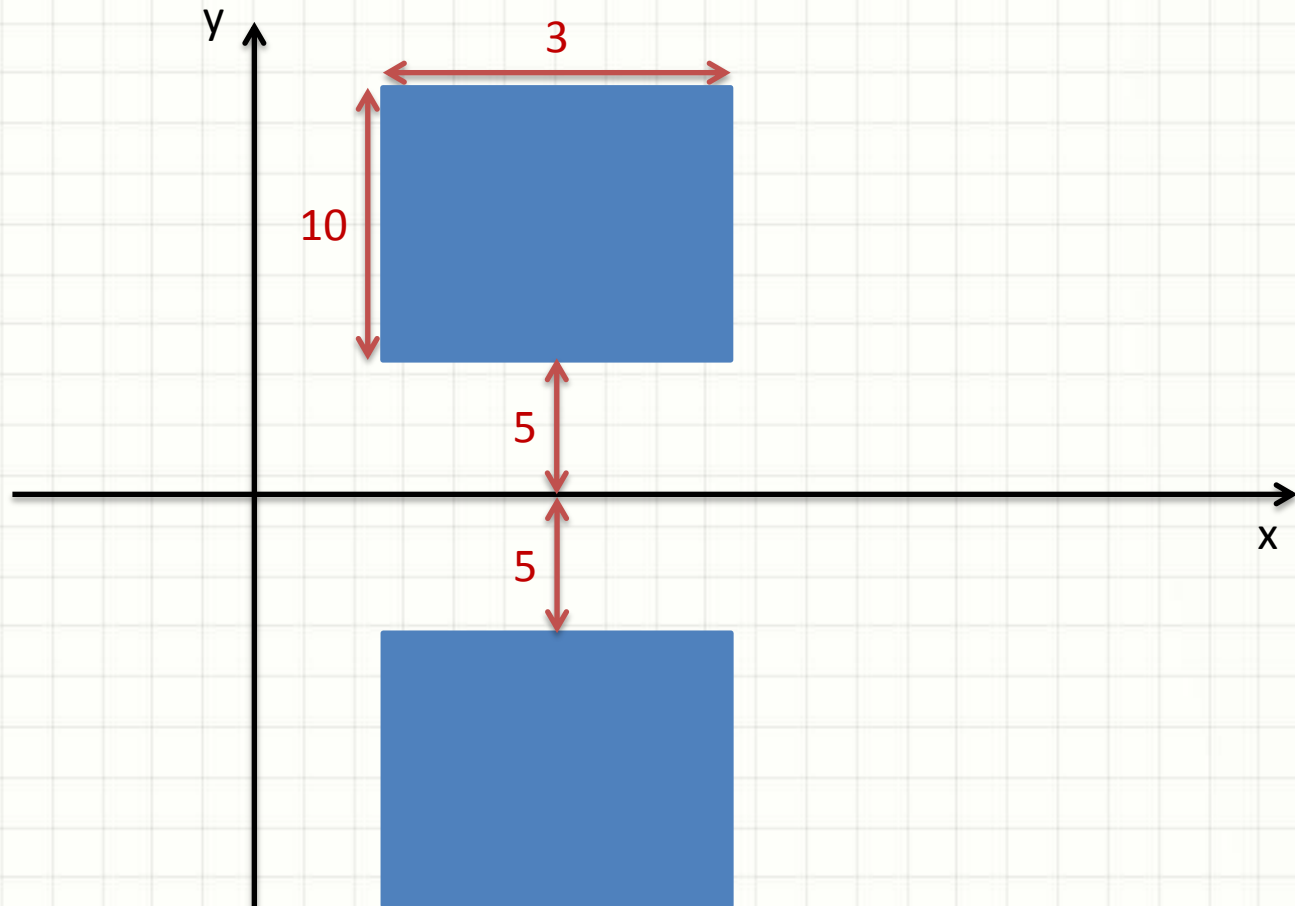




EXERCÍCIOS

Exercício

- Calcule o momento estático S_x da figura:

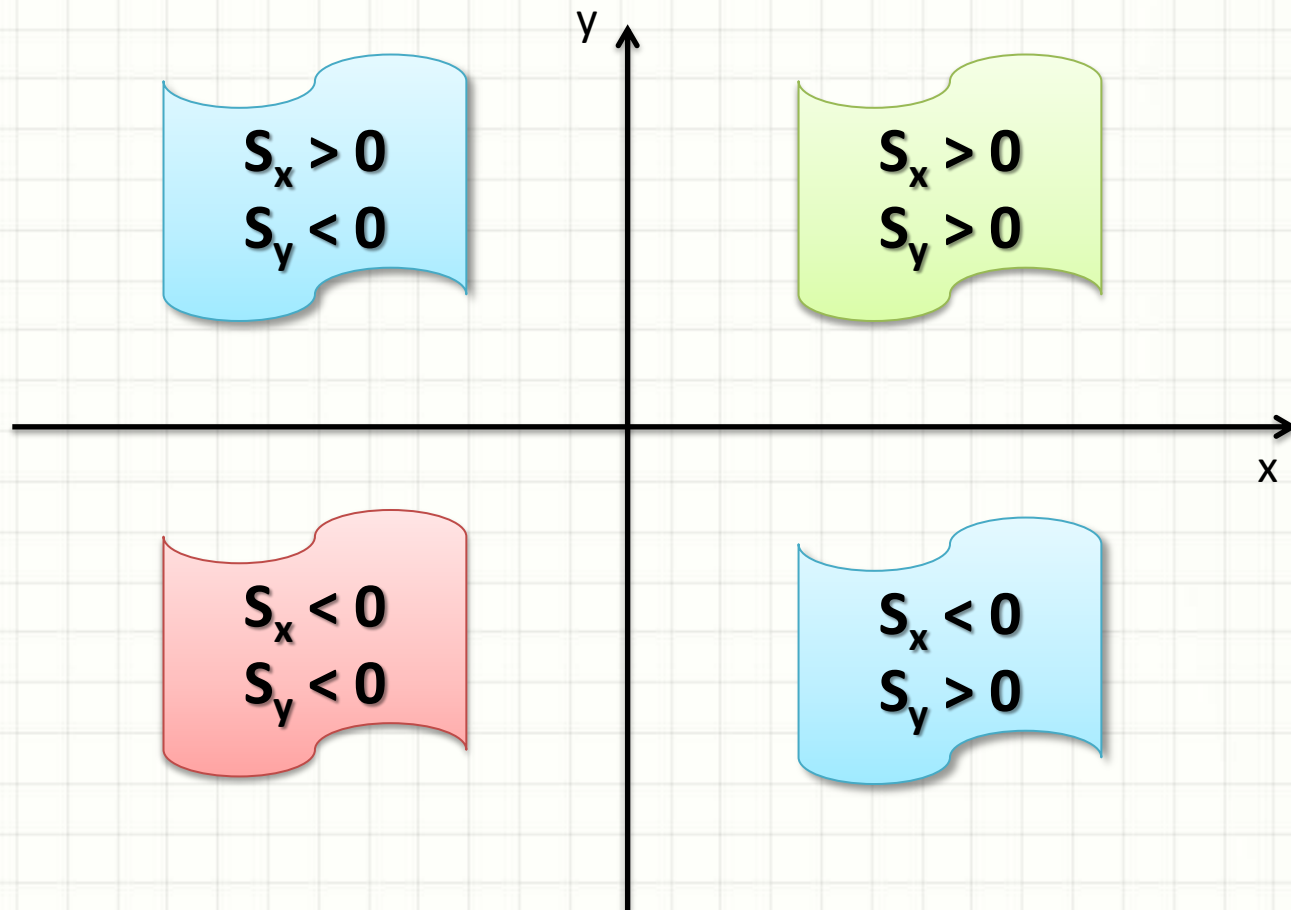




CONSEQUÊNCIAS DO SINAL DO MOMENTO ESTÁTICO

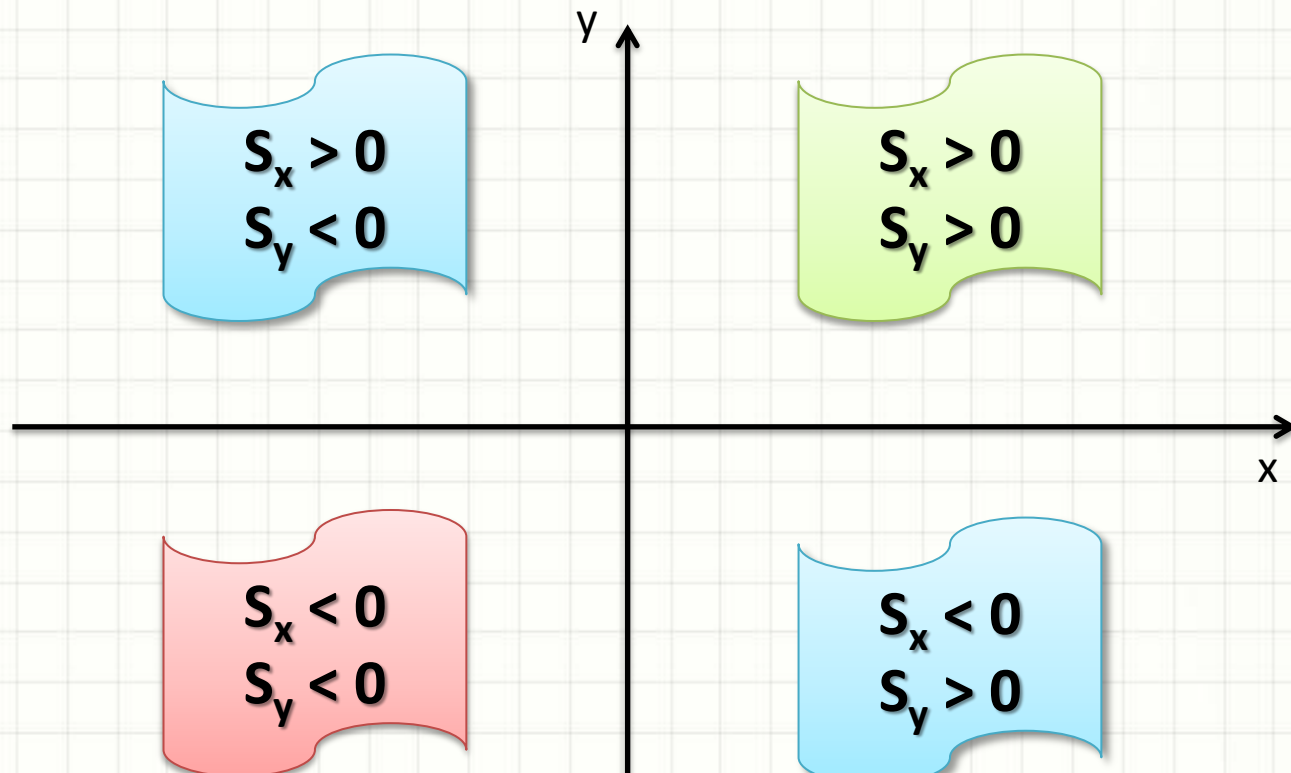
Consequências do Sinal no M.E.

- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Consequências do Sinal no M.E.

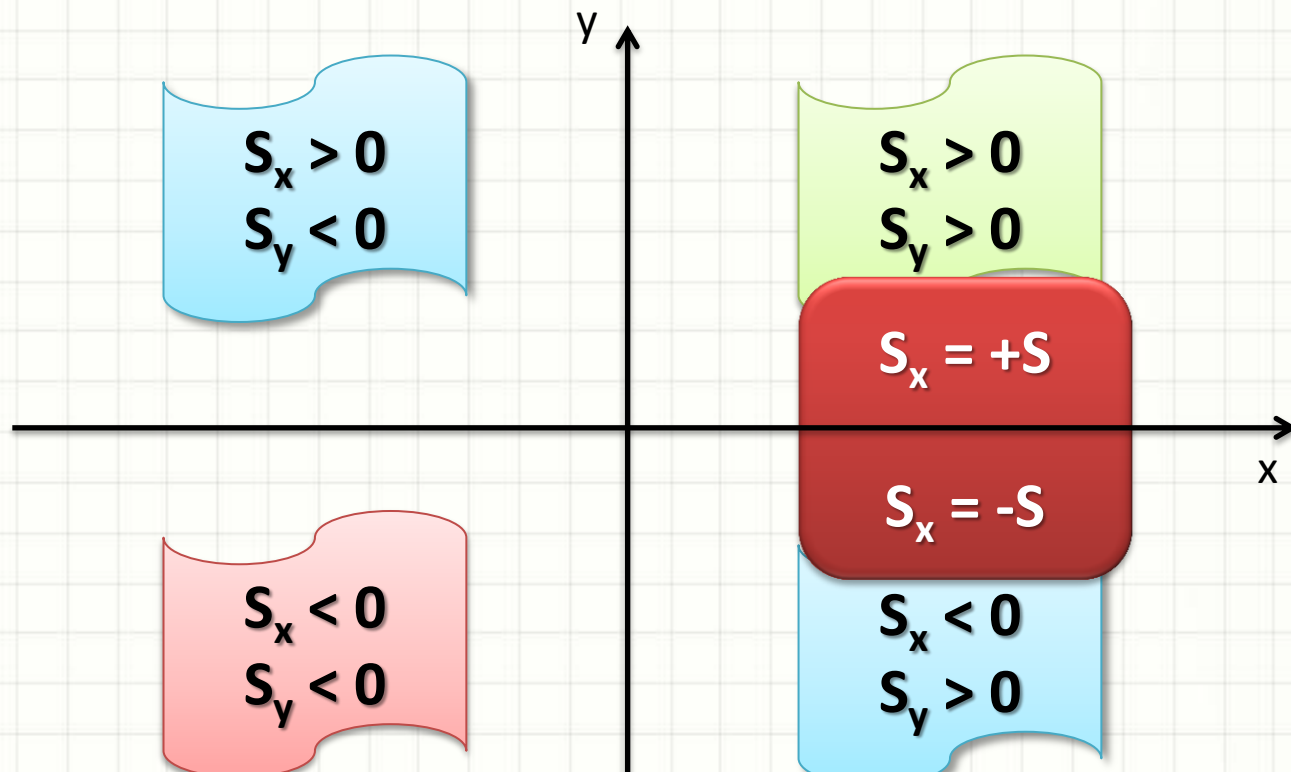
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



**Por isso a simetria leva a
momento estático igual a zero!**

Consequências do Sinal no M.E.

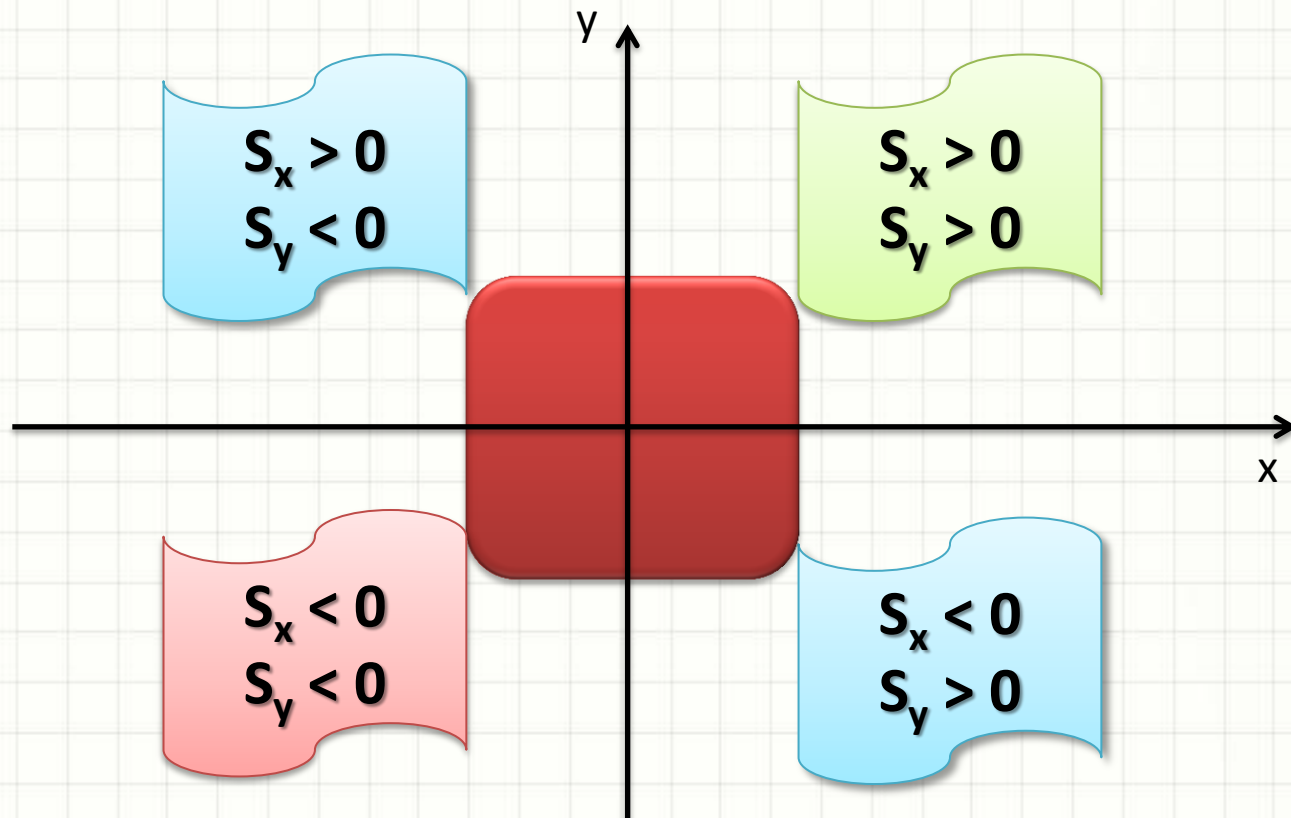
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



**Por isso a simetria leva a
momento estático igual a zero!**

Consequências do Sinal no M.E.

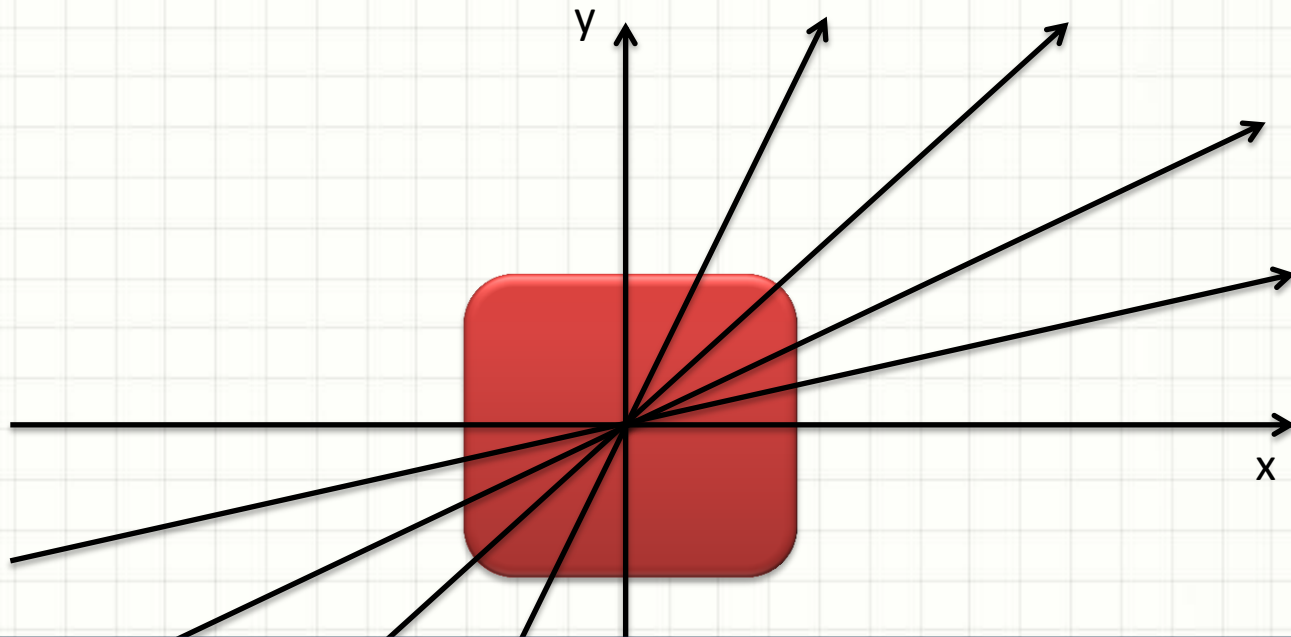
- O ponto em que S_x e S_y do corpo são zero...



É o centro da área: centróide

Consequências do Sinal no M.E.

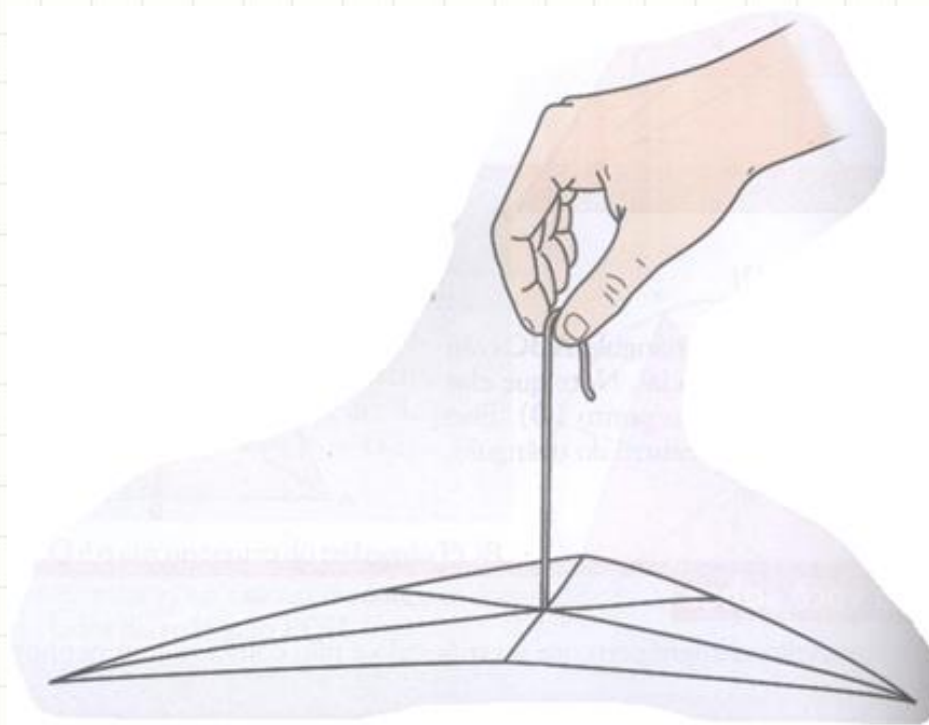
- O ponto em que S_x e S_y da região são zero...



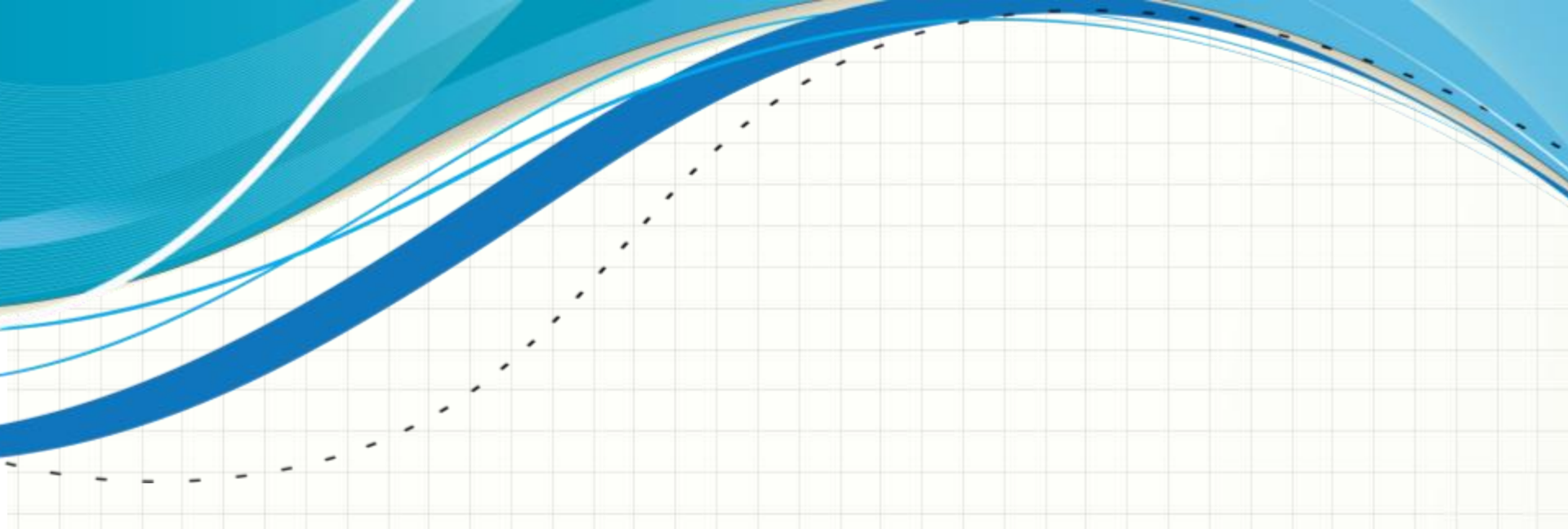
O Momento Estático da região será zero com relação a qualquer eixo que passe por esse ponto

Centroide x Baricentro

- Distribuição Idêntica da Área / Massa



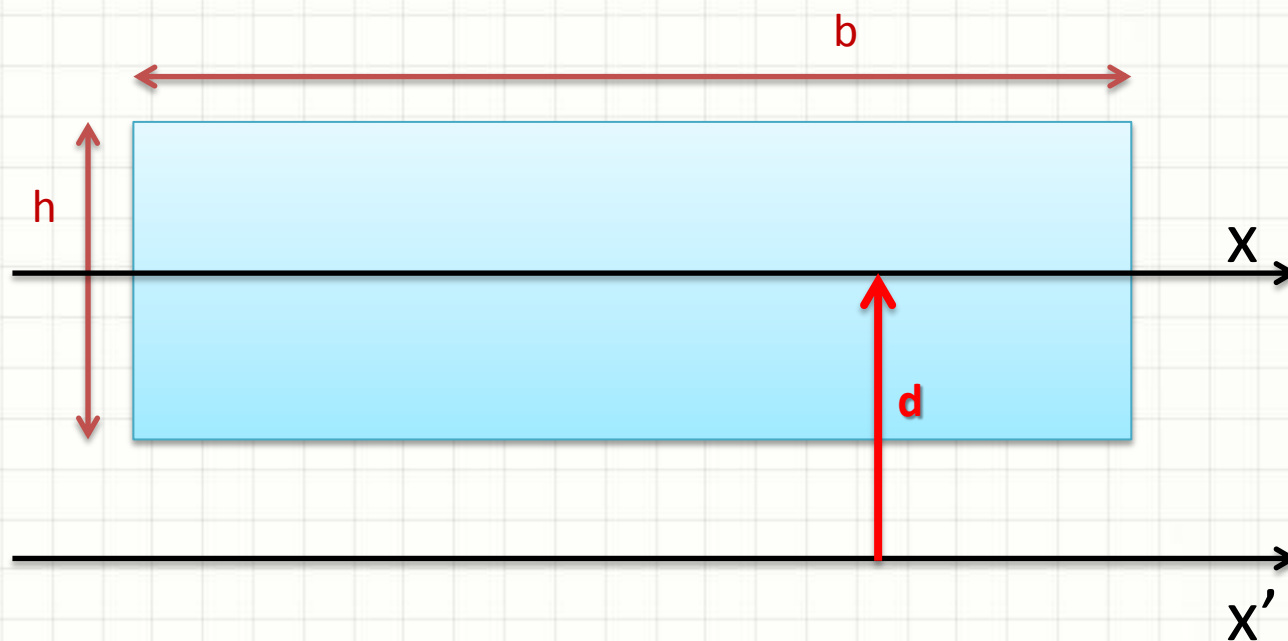
- Baricentro = Centro de Massa
 - Densidade uniforme: centroide = baricentro



ENCONTRANDO O CENTROIDE/BARICENTRO

Baricentro de Figuras Planas

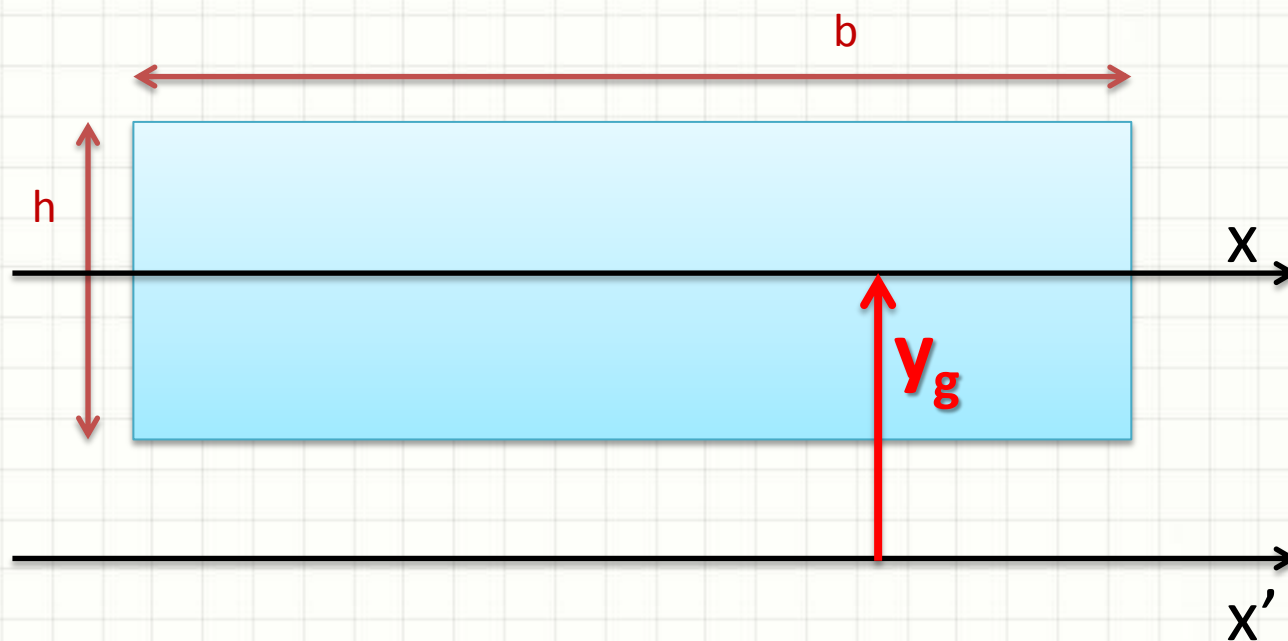
- Dados $S_{x'}$ e $S_{y'}$; baricentro $\rightarrow S_x = 0$ e $S_y = 0$



$$S_x = S_{x'} - d \cdot A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

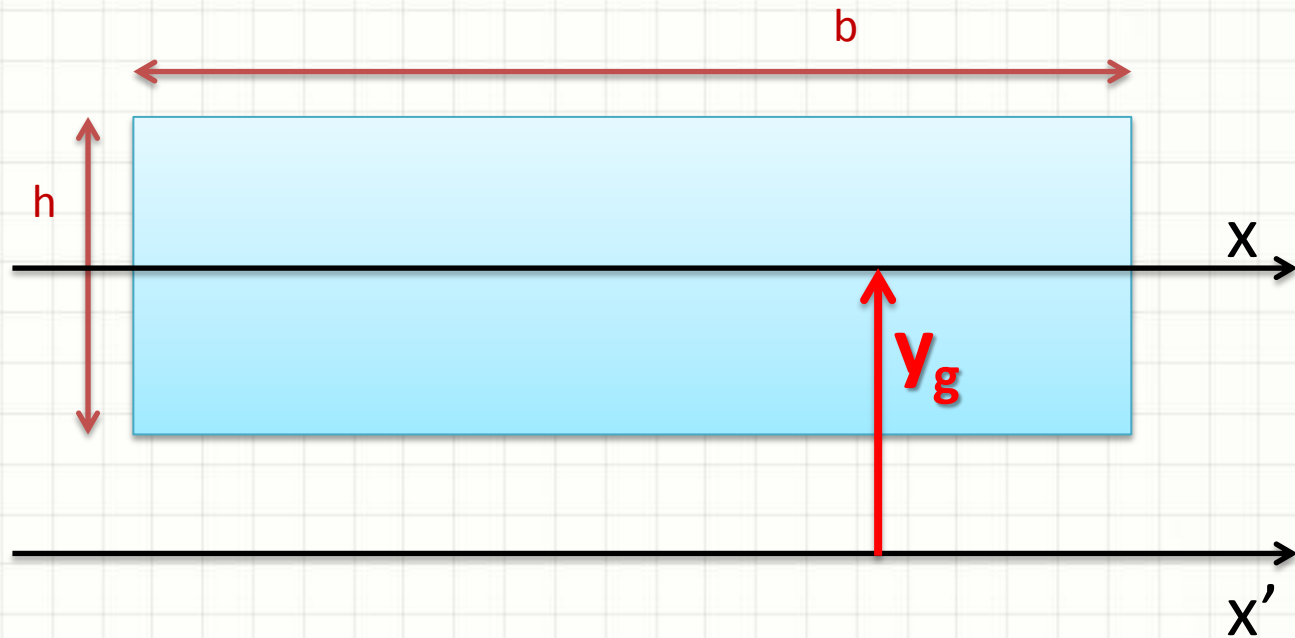
- Dados $S_{x'}$ e $S_{y'}$; baricentro $\rightarrow S_x = 0$ e $S_y = 0$



$$S_x = S_{x'} - y_g \cdot A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

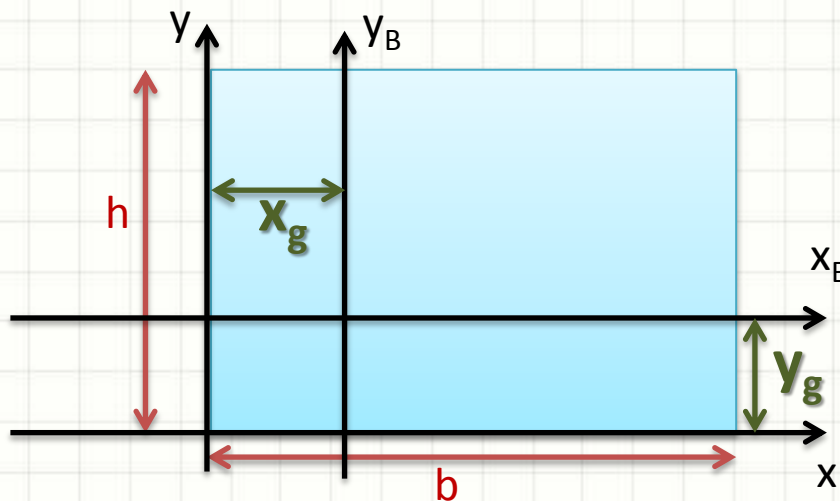
- Dados $S_{x'}$ e $S_{y'}$; baricentro $\rightarrow S_x = 0$ e $S_y = 0$



$$S_{x'} - y_g \cdot A = 0 \quad \rightarrow \quad y_g = \frac{S_{x'}}{A}$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Retângulo

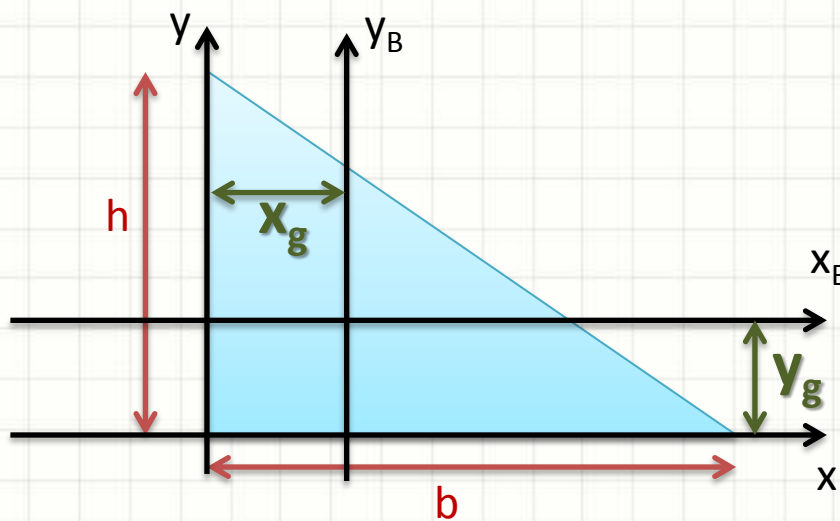


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = h/2$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = b/2$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Triângulo

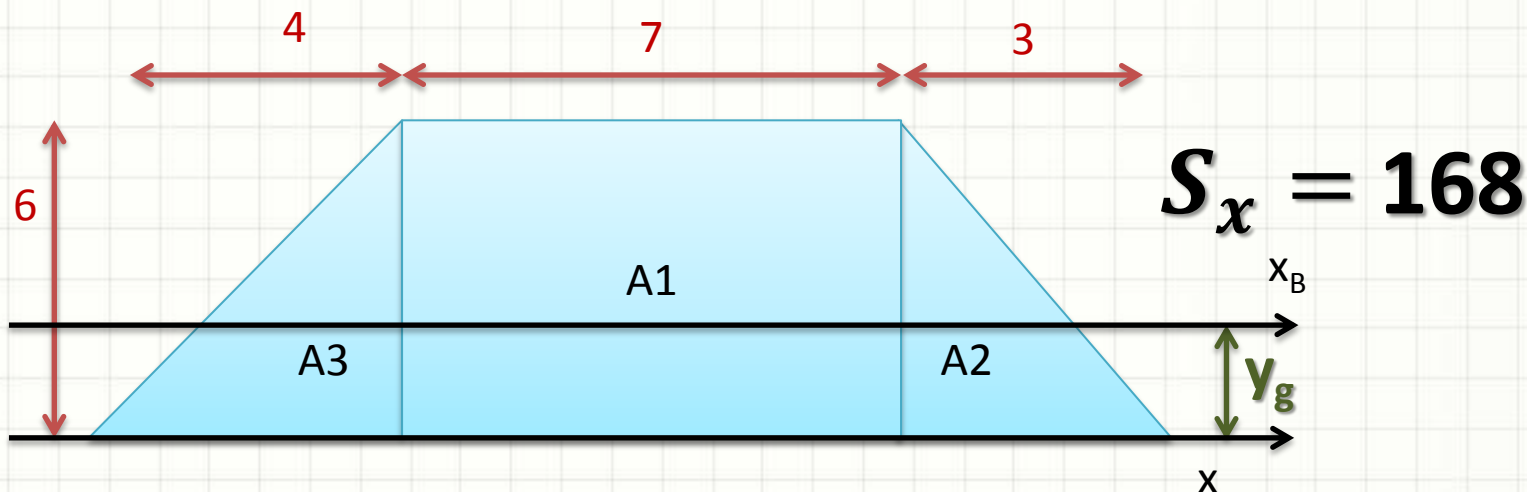


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = h/3$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = b/3$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o \bar{y} do baricentro da área abaixo

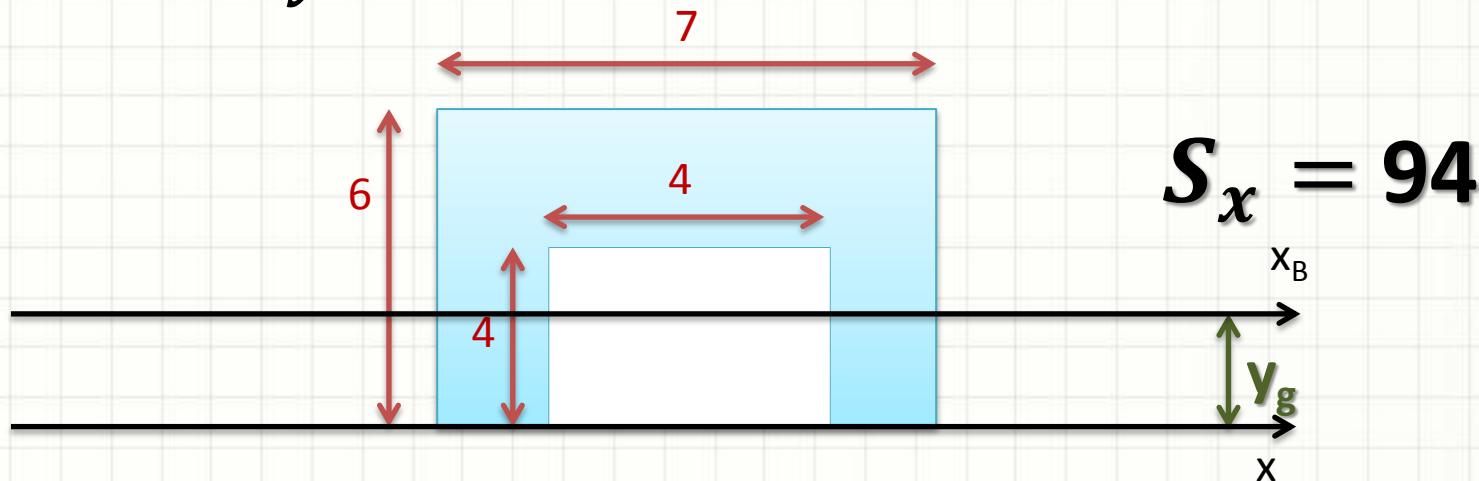


$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A1 + A2 + A3} = \frac{168}{7 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2}} =$$

$$y_g = 2,67$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o \bar{y} do baricentro da área abaixo



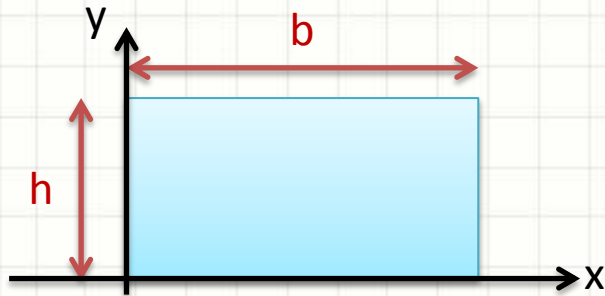
$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A_{ATotal} - A_B} = \frac{94}{7 \cdot 6 - 4 \cdot 4} =$$

$$y_g = 3,62$$



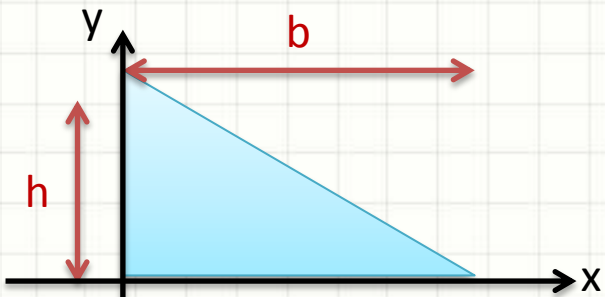
RESULTADOS IMPORTANTES

Momentos Estáticos



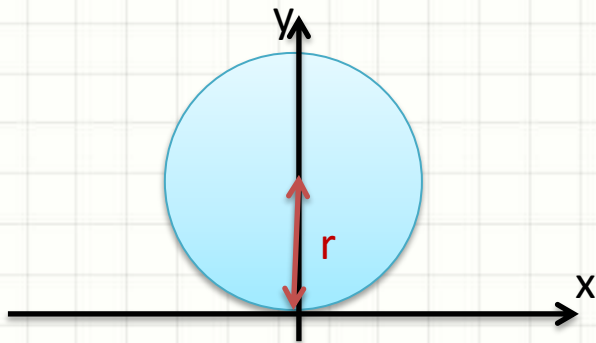
$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

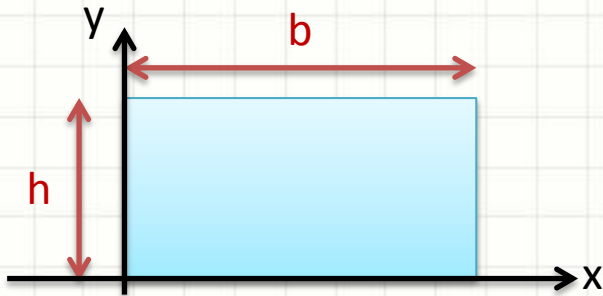
$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$



$$S_x = \pi \cdot r^3$$

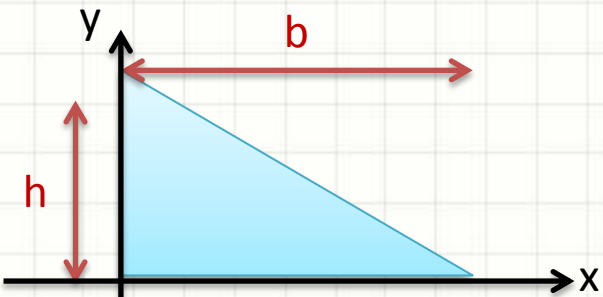
$$S_y = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



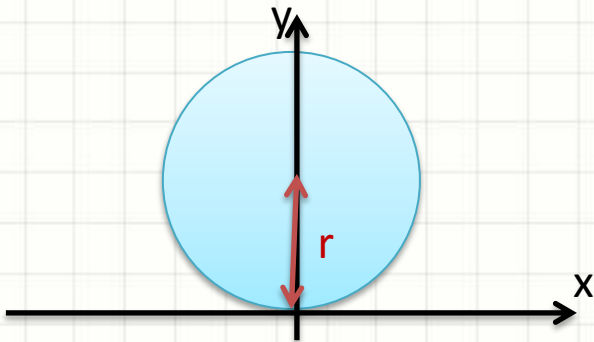
$$y_g = \frac{h}{2}$$

$$x_g = \frac{b}{2}$$



$$y_g = \frac{h}{3}$$

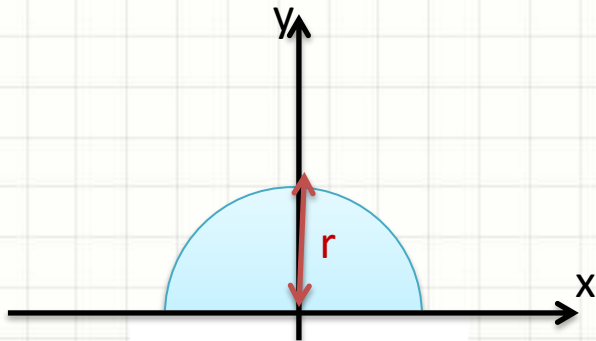
$$x_g = \frac{b}{3}$$



$$y_g = r$$

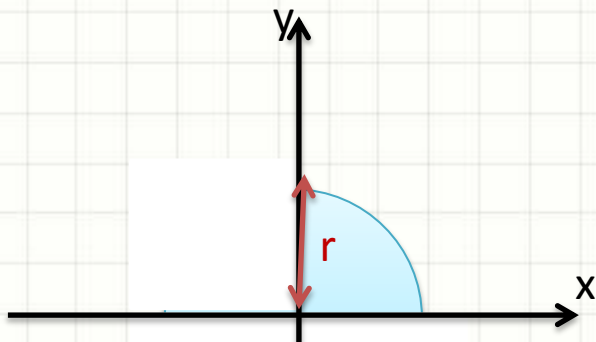
$$x_g = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_g = 0$$



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

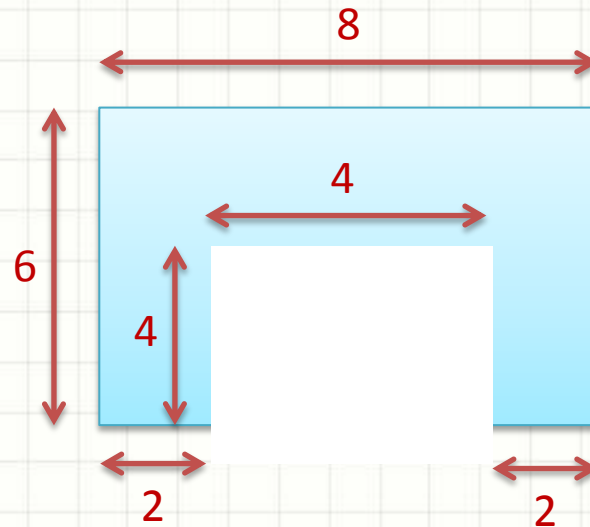
$$x_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$



EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- Calcule a posição do centroide da área azul





PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Material Didático, Pág. 578 e 579 (5ª. 622-623)
- 5ª Edição: Leitura págs 611 a 613
- Mínimos:
 - Exercício A.1 (5ª. A.1)
 - Exercícios A.2 a A.6 (5ª A.3 a A.6) - **Só localização do centroide**
- Extras:
 - Exercícios A.7 a A.12 (5ª A.8 a A.12) - **Só localização do centroide**



CONCLUSÕES

Resumo

- Importância da Forma na Resistência
 - Propriedades das Áreas Planas
 - Momento Estático
 - Localização do Centroide
 - **Exercitar: Material Didático**
-

- Momento de Inércia
 - Momento de Segunda Ordem
 - O que é isso?
 - Para quê serve?



PERGUNTAS?