



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

FLEXÃO PARTE I

Prof. Dr. Daniel Caetano

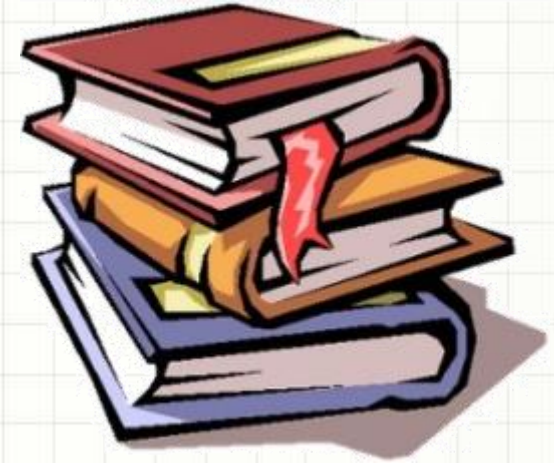
2014 - 2

Objetivos

- Conceituar forças cortantes e momentos fletores
- Capacitar para o traçado de diagramas de cortantes e momento fletor em barras
- Explicitar a relação entre carga e cortante e entre cortante e momento



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>

(Resistência dos Materiais II – Aula 9)

Biblioteca Virtual

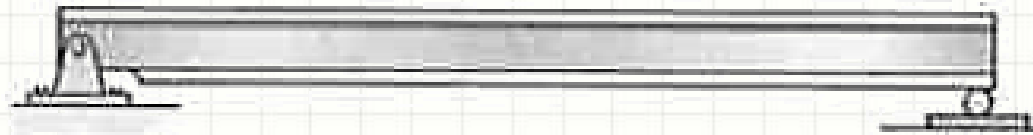
Resistência dos Materiais (Hibbeler) – 5ª Edição
Páginas 199 a 221.



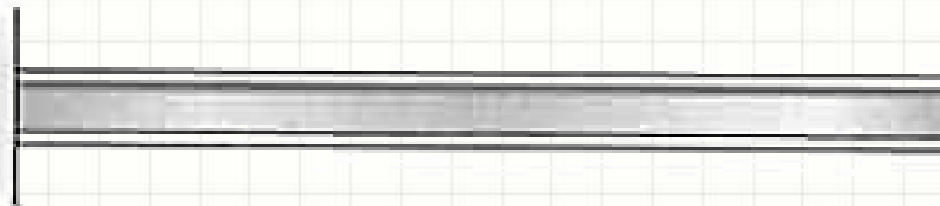
**O QUE SÃO FORÇA CORTANTE E
MOMENTO FLETOR?**

Objeto de Estudo

- Vigas – Cargas perpendiculares ao eixo



Viga simplesmente apoiada



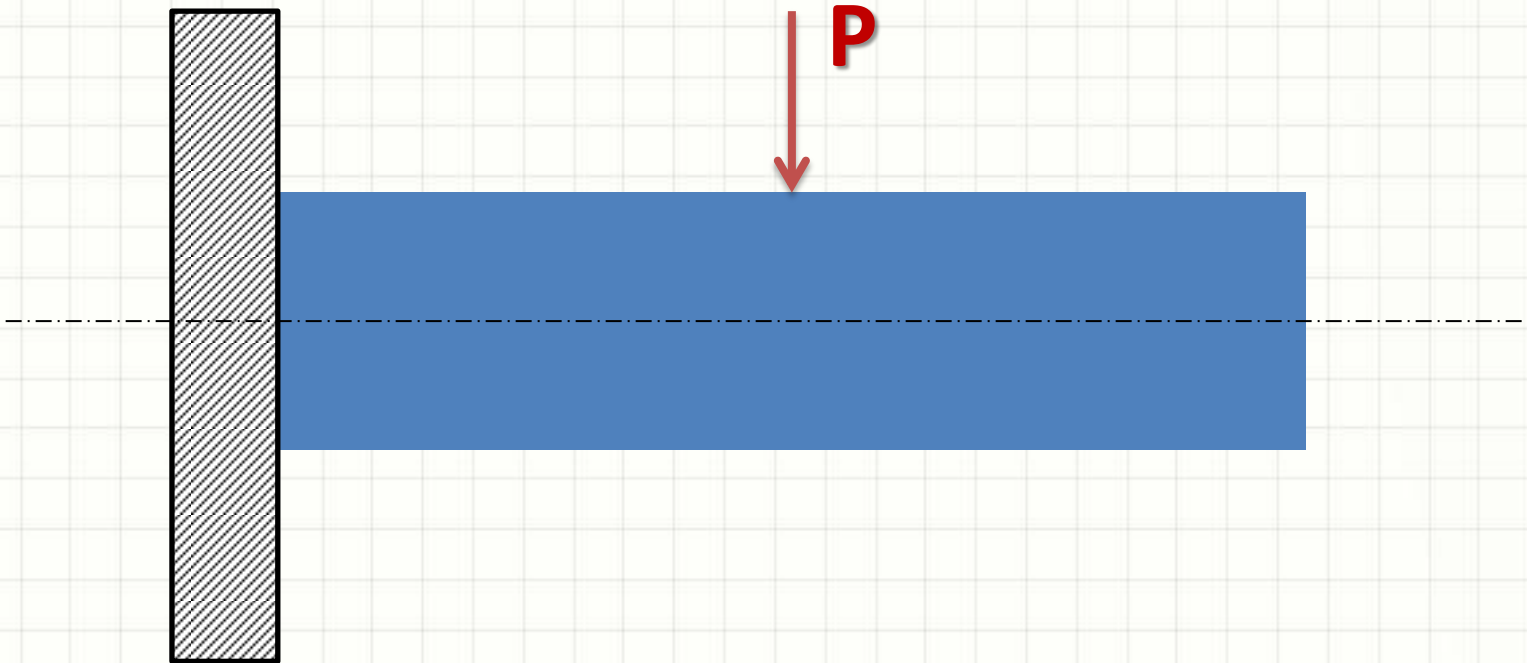
Viga em balanço



Viga apoiada com extremidade em balanço

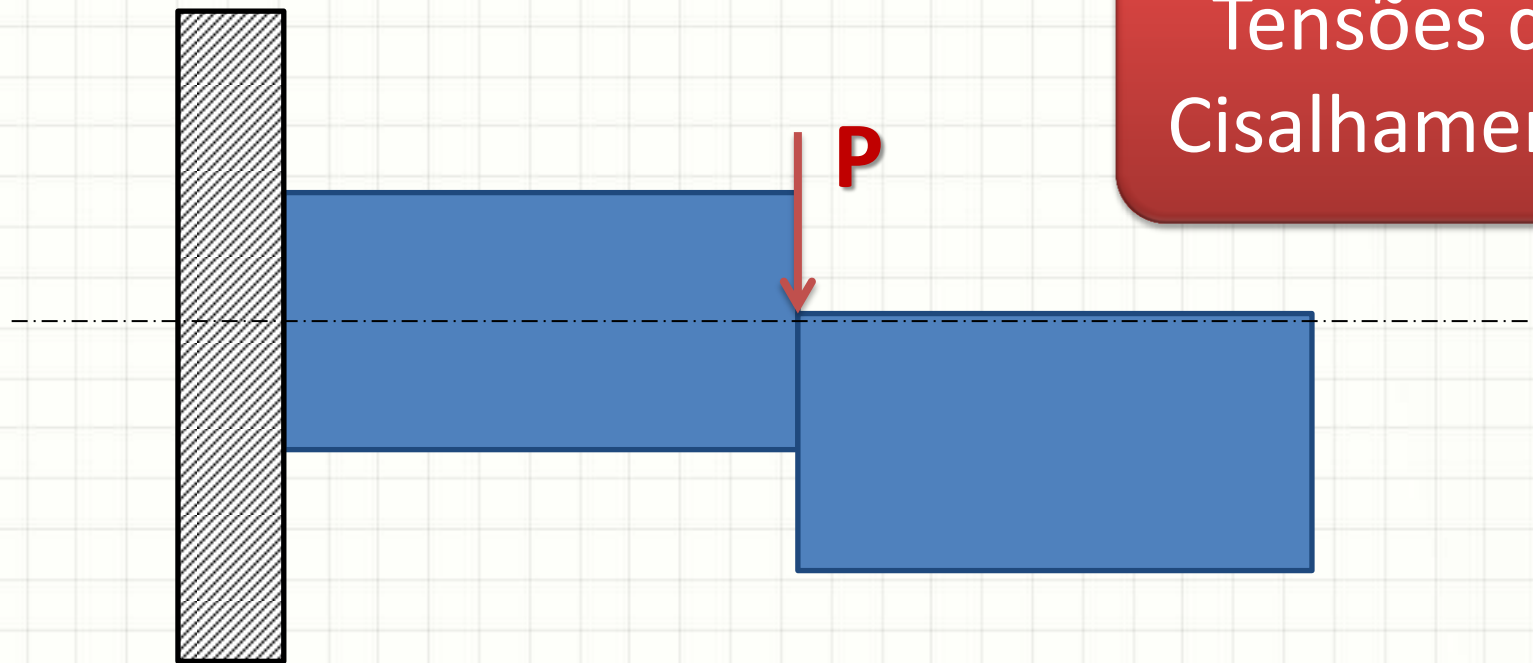
Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Perpendicular ao eixo da barra



Força Cortante

- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - Perpendicular ao eixo da barra



Tensões de
Cisalhamento

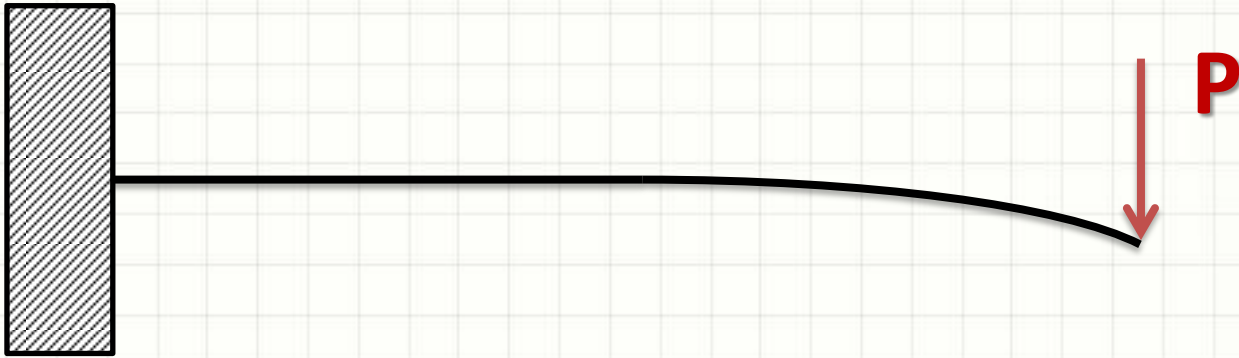
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



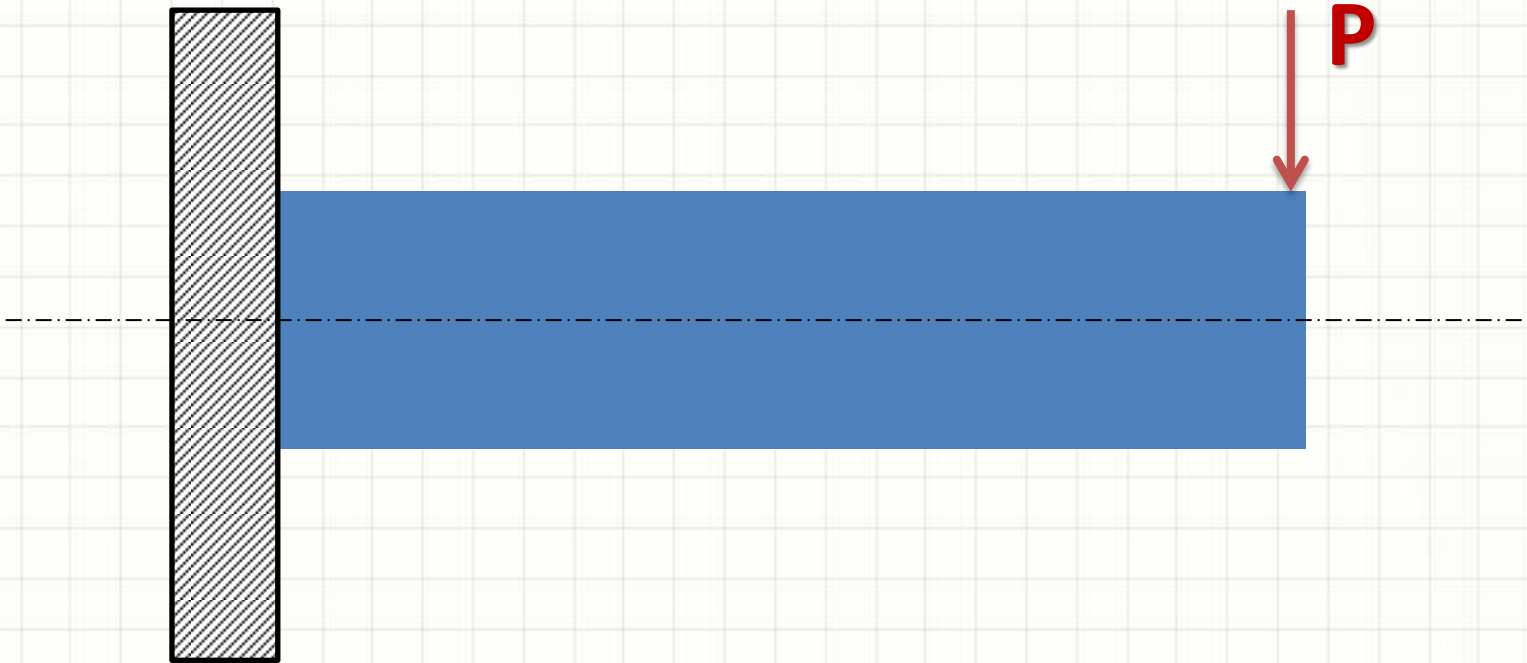
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



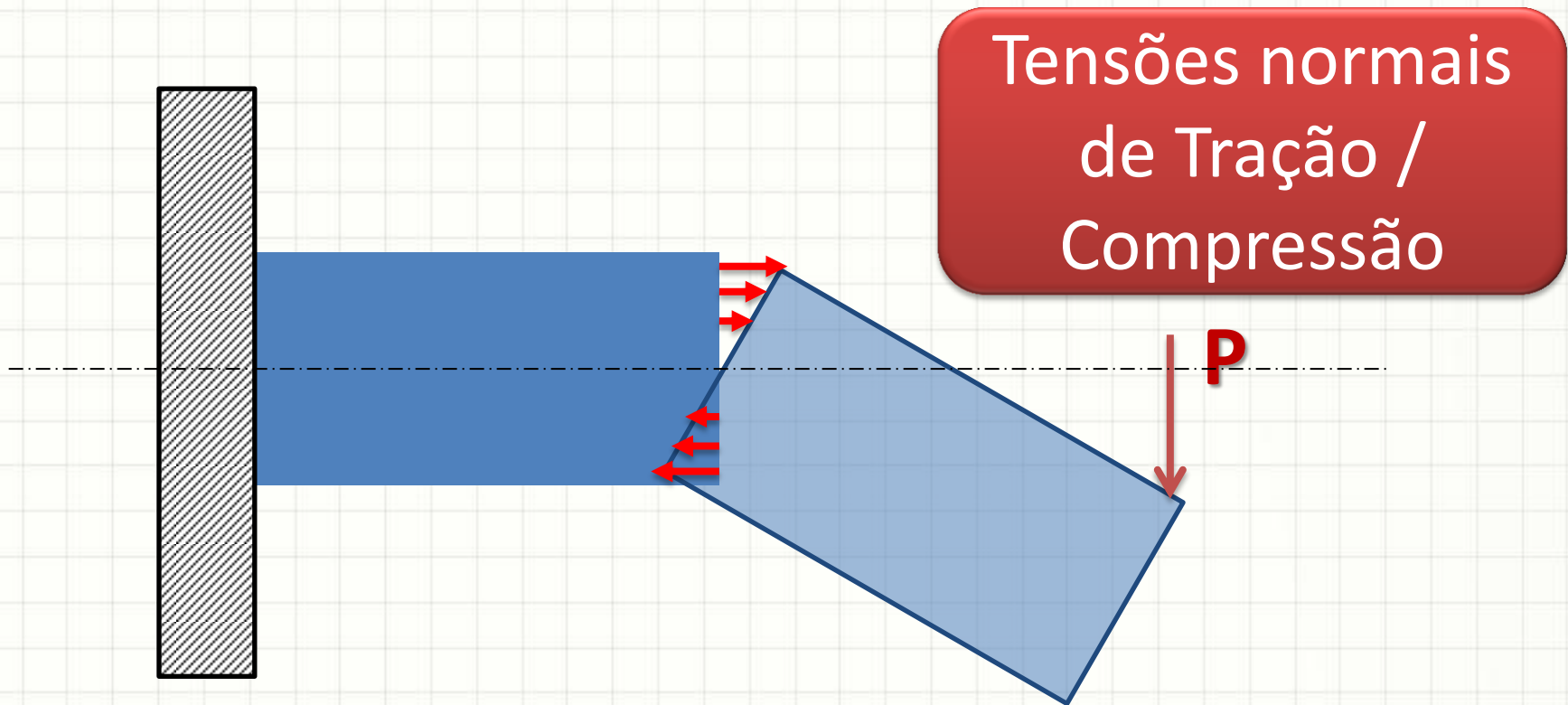
Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



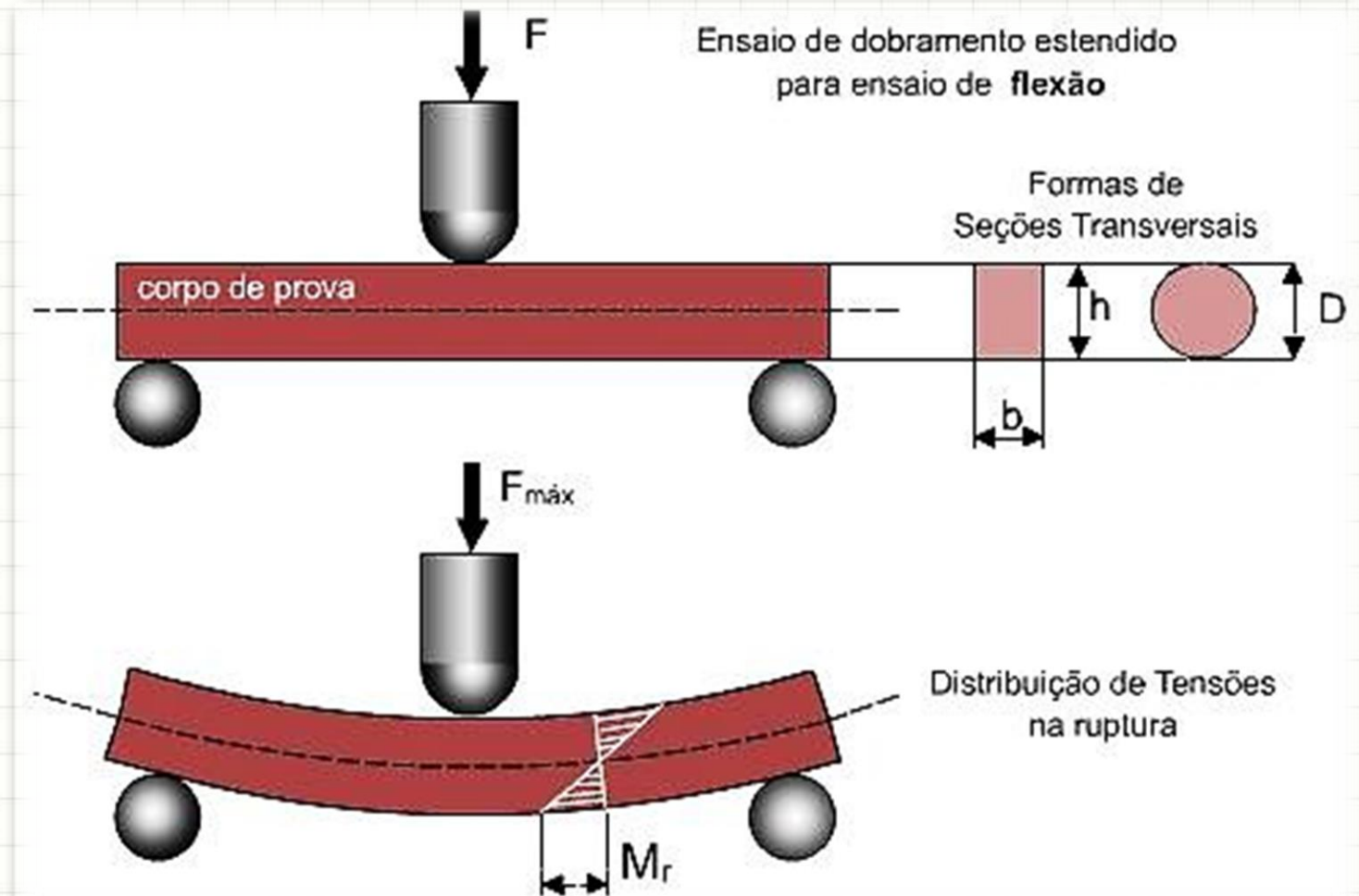
Momento Fletor

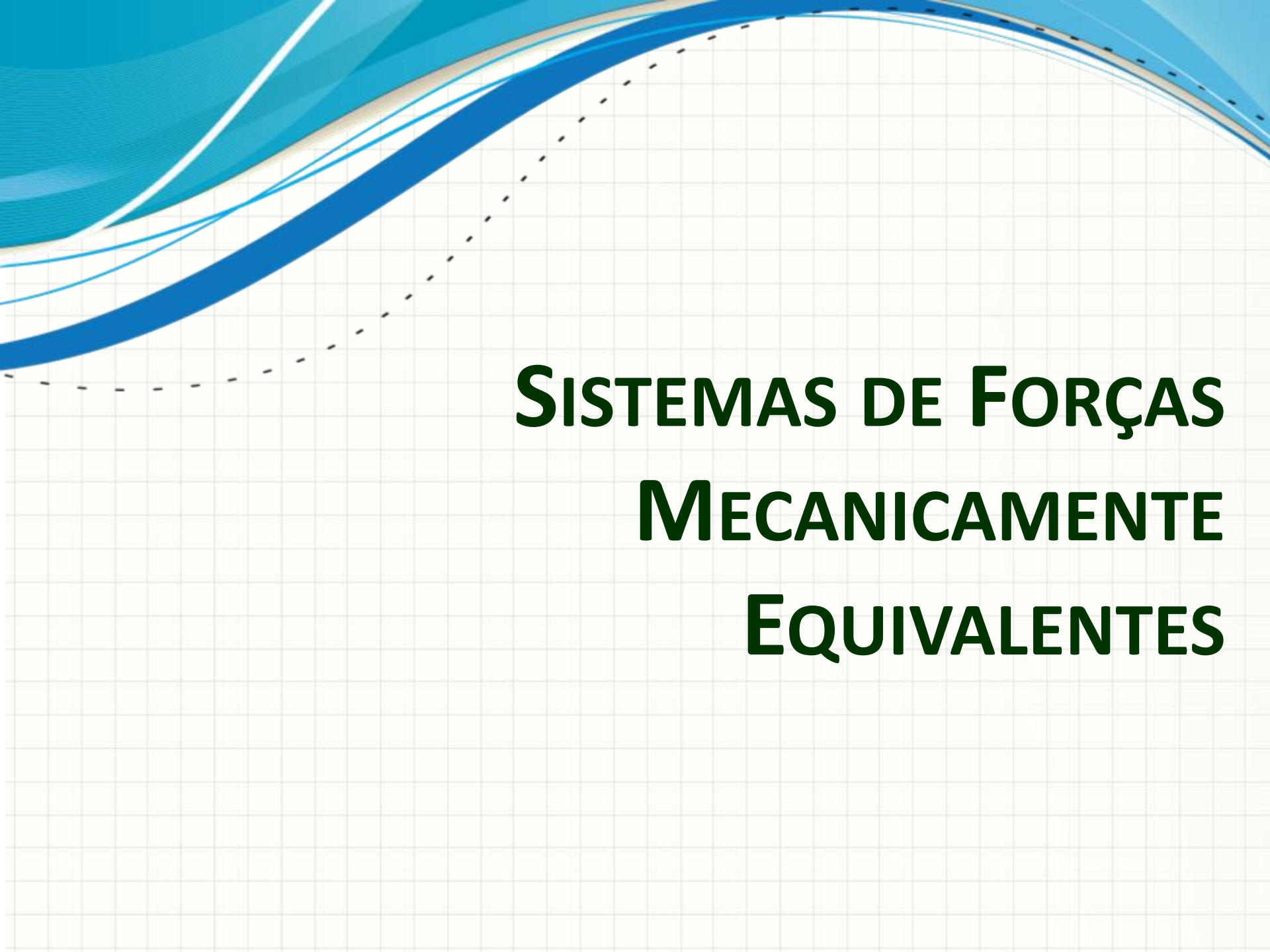
- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Causado por forças cortantes



Momento Fletor

- Tensões Normais em viga Bi-Apoiada





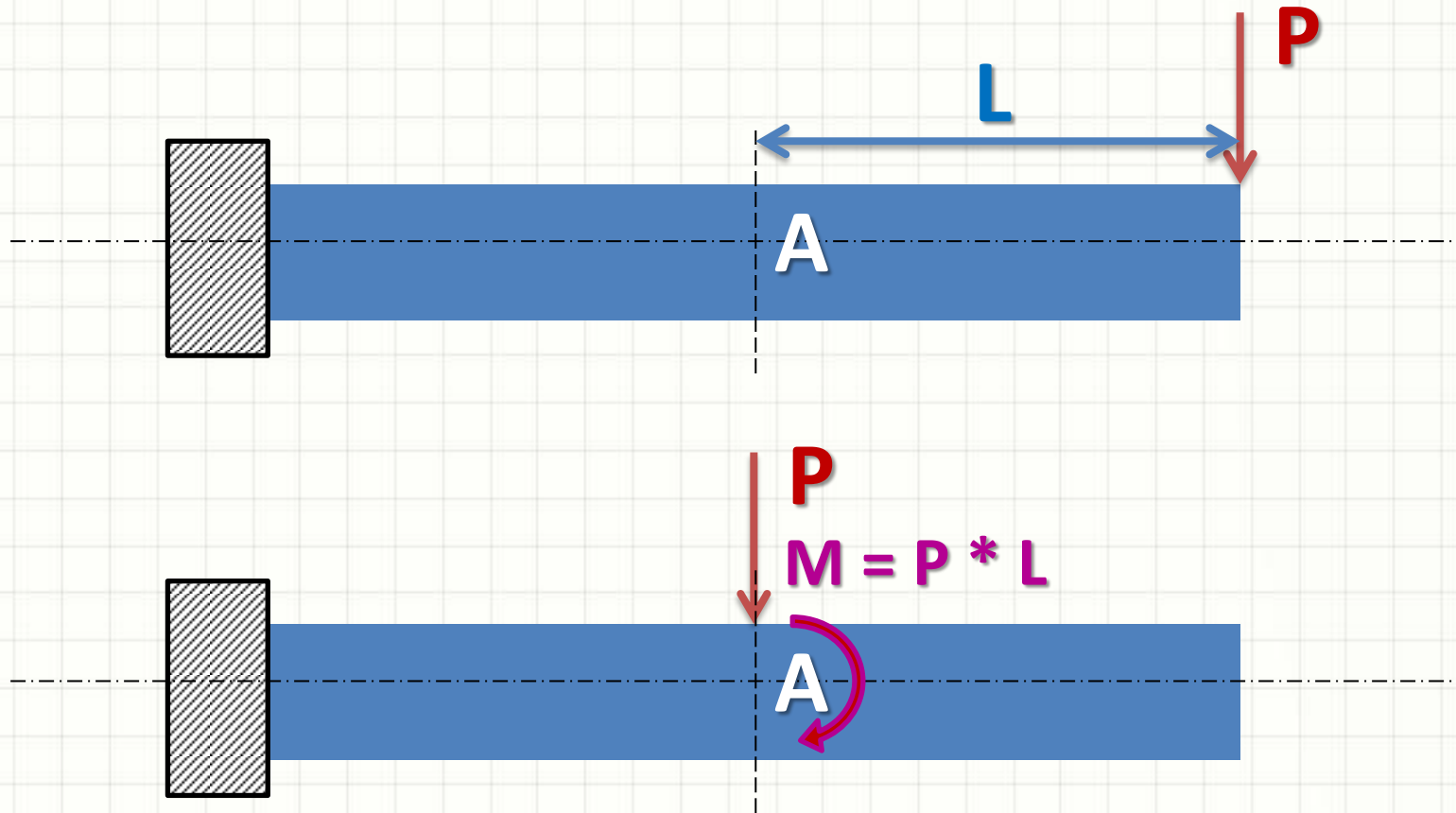
SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES

Sistemas de Forças ME

- Alguns cálculos: muito complexos
 - **Alguns** podem ser simplificados com “truques”
- Em algumas situações, para um dado ponto:
 - Vários sistemas de forças diferentes
 - Mesmos esforços
- Vamos escolher os que simplificam a vida!
 - Apenas para o cálculo!

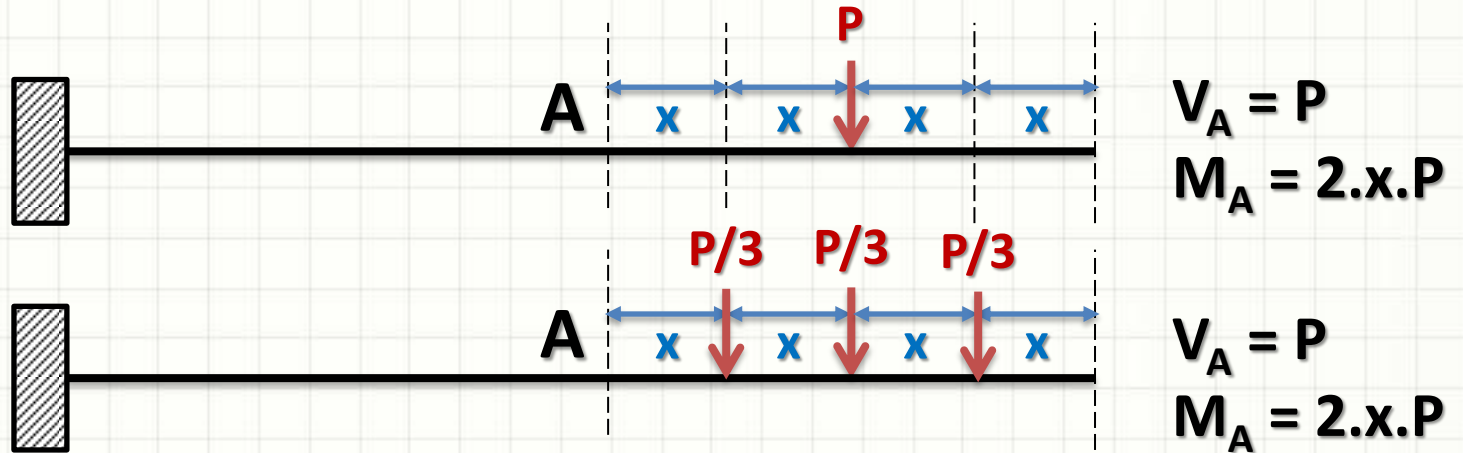
Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



$$V = 3 \cdot P/3$$

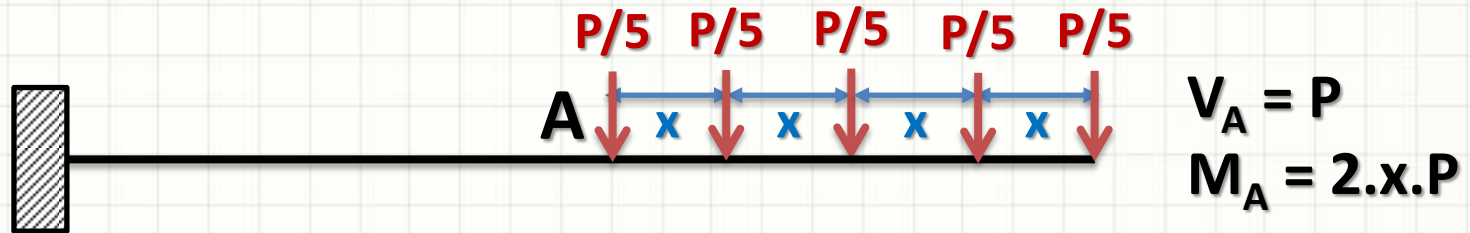
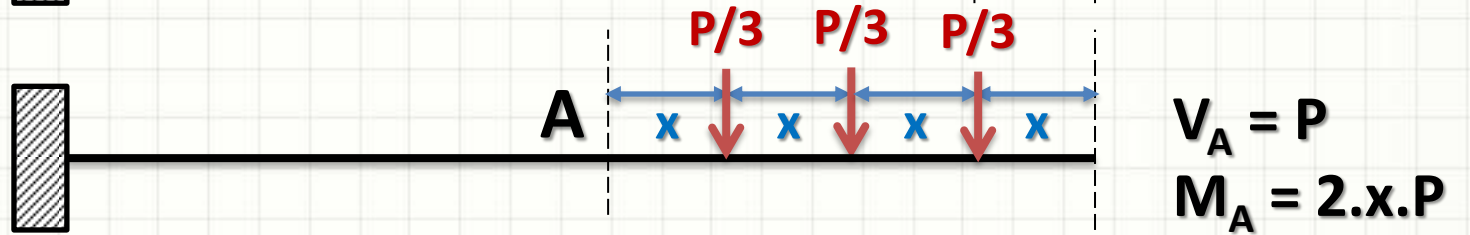
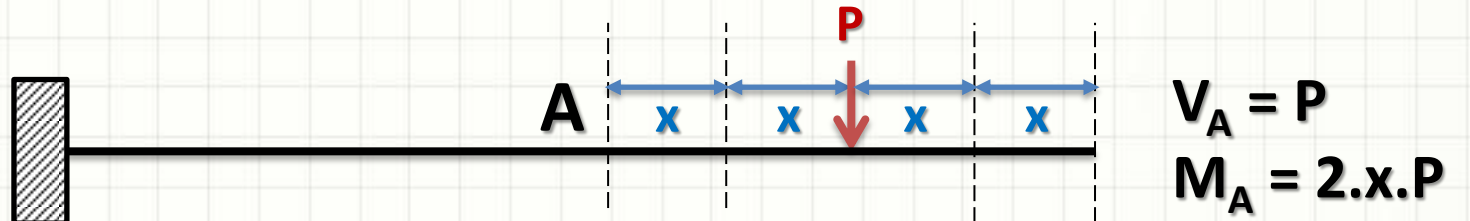
$$M = (P/3) \cdot x + (P/3) \cdot 2 \cdot x + (P/3) \cdot 3 \cdot x$$

$$M = 6 \cdot x \cdot (P/3)$$

$$M = 2 \cdot x \cdot P$$

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



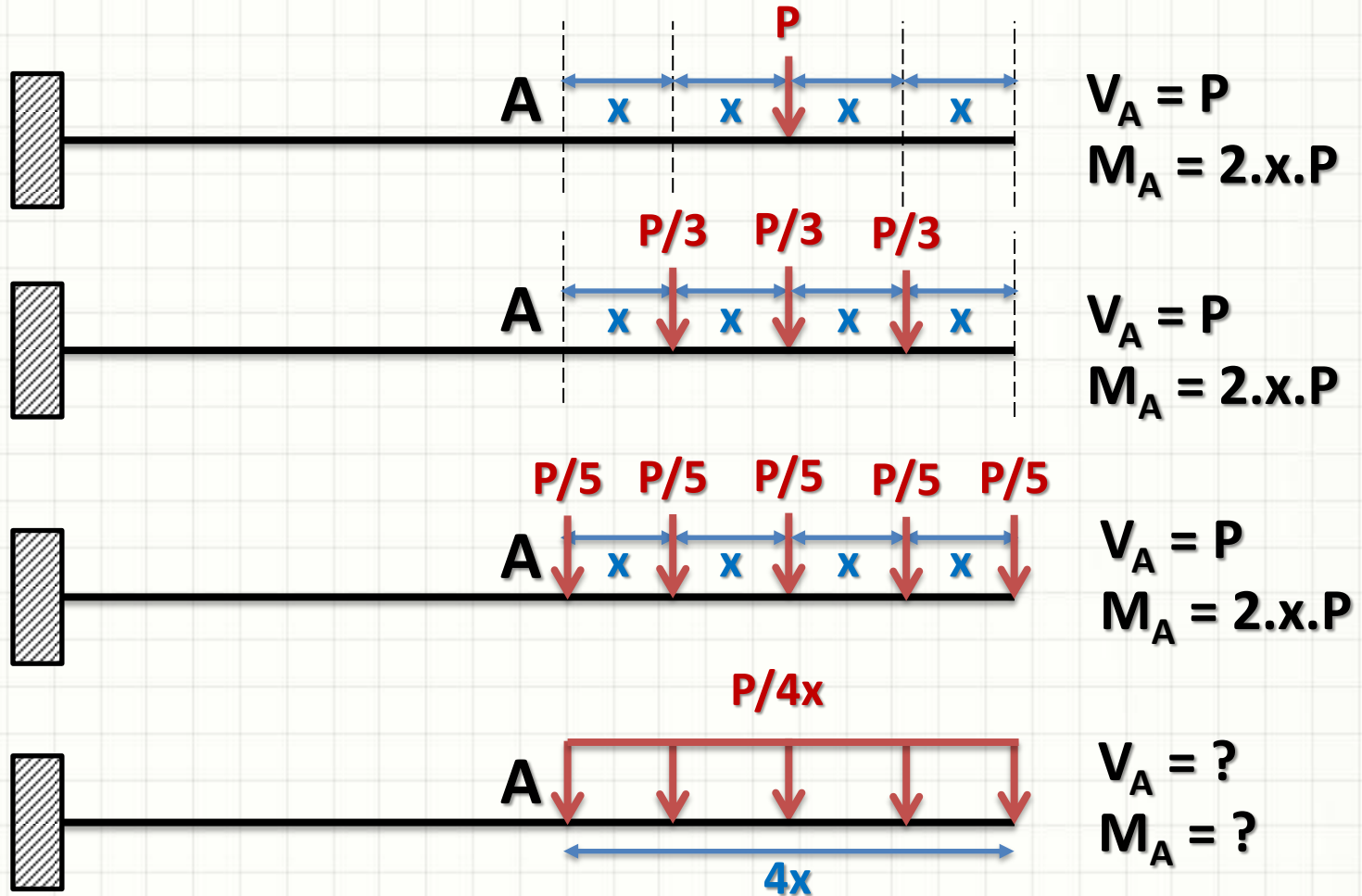
$$V = 5.P/5$$

$$M = (P/5).0 + (P/5).x + (P/5).2.x + (P/5).3.x + (P/5).4.x$$

$$M = 10.x.(P/5)$$

Sistemas de Forças ME

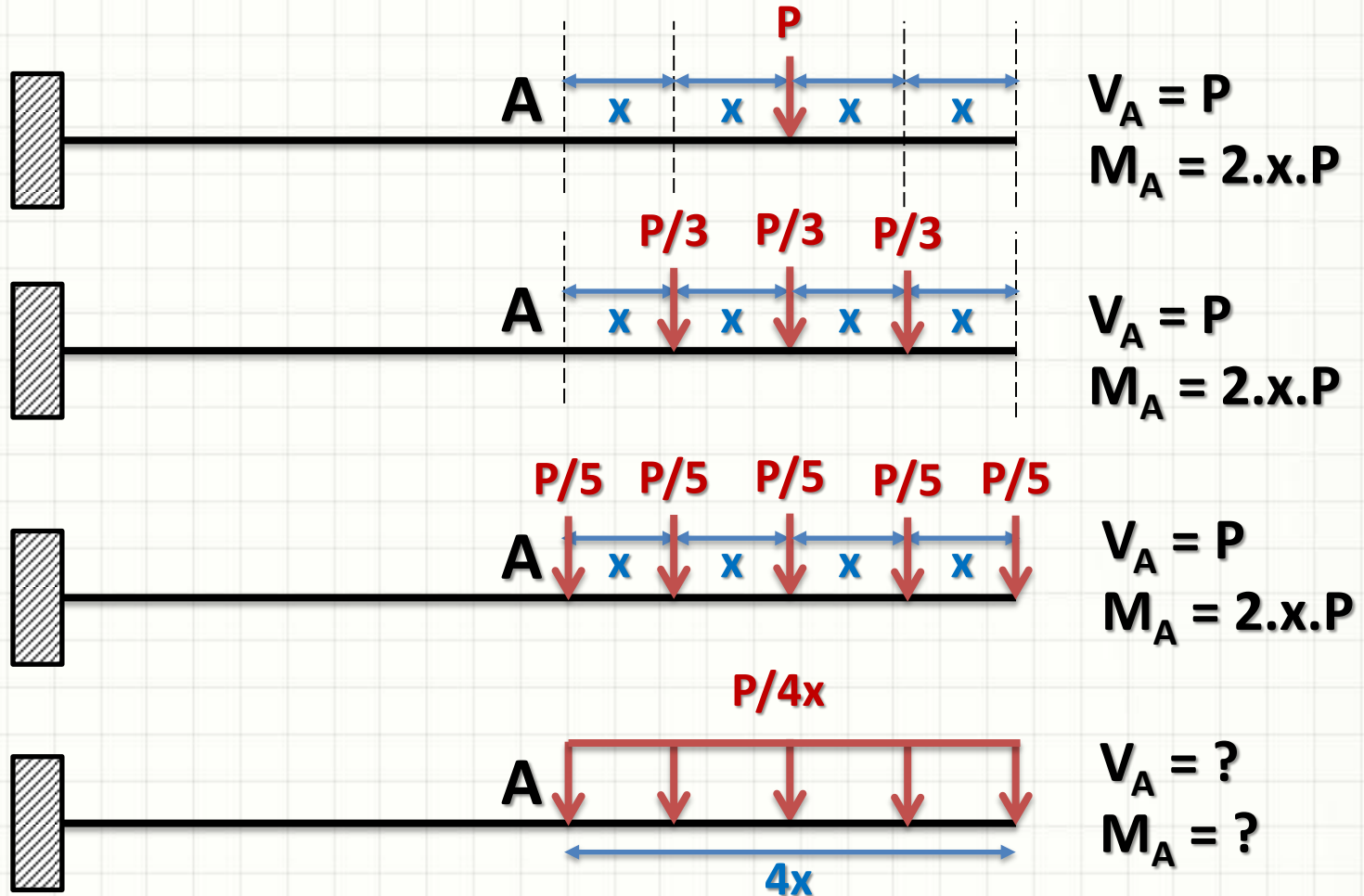
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sist

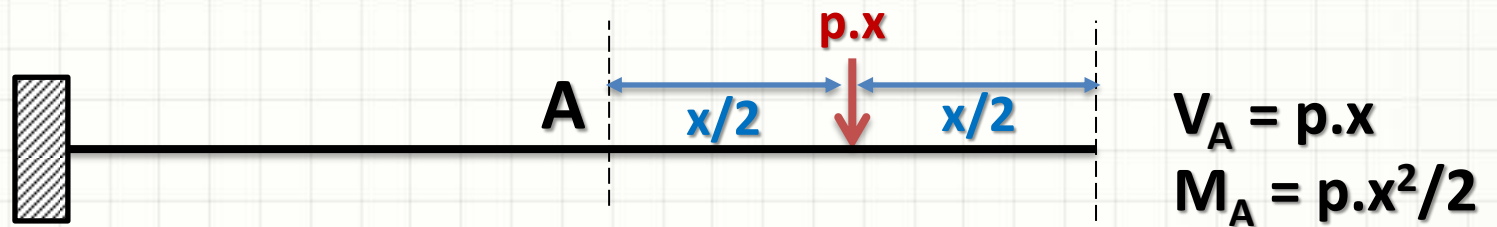
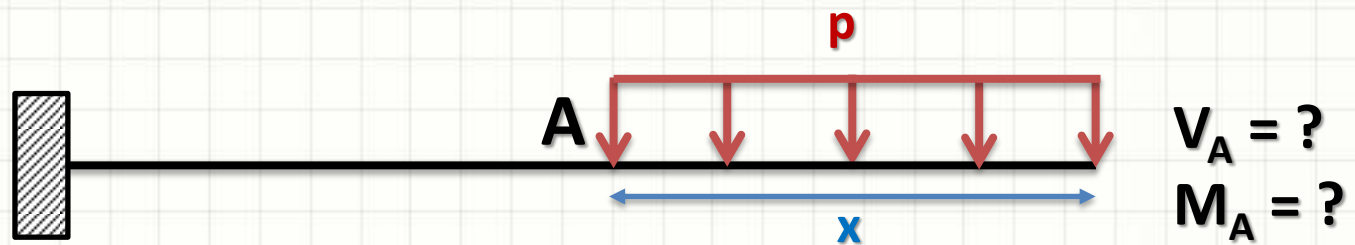
É como se a carga total estivesse
no centro de gravidade!

- Exemplo: Do ponto de vista de A



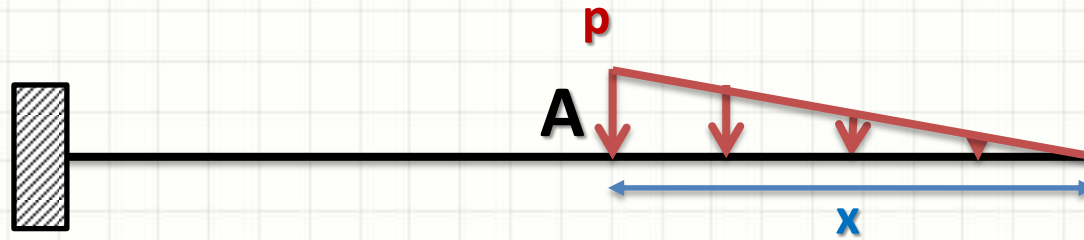
Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**

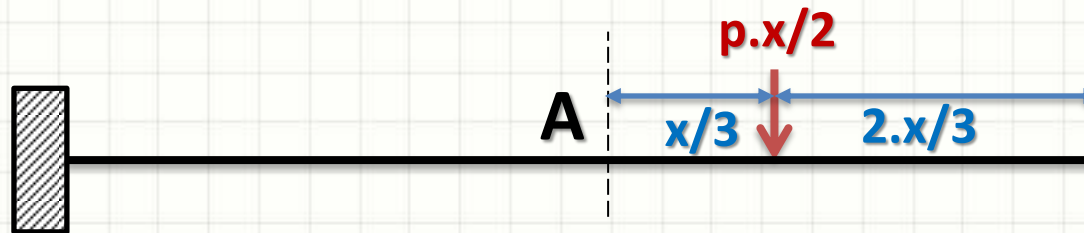


Sistemas de Forças ME

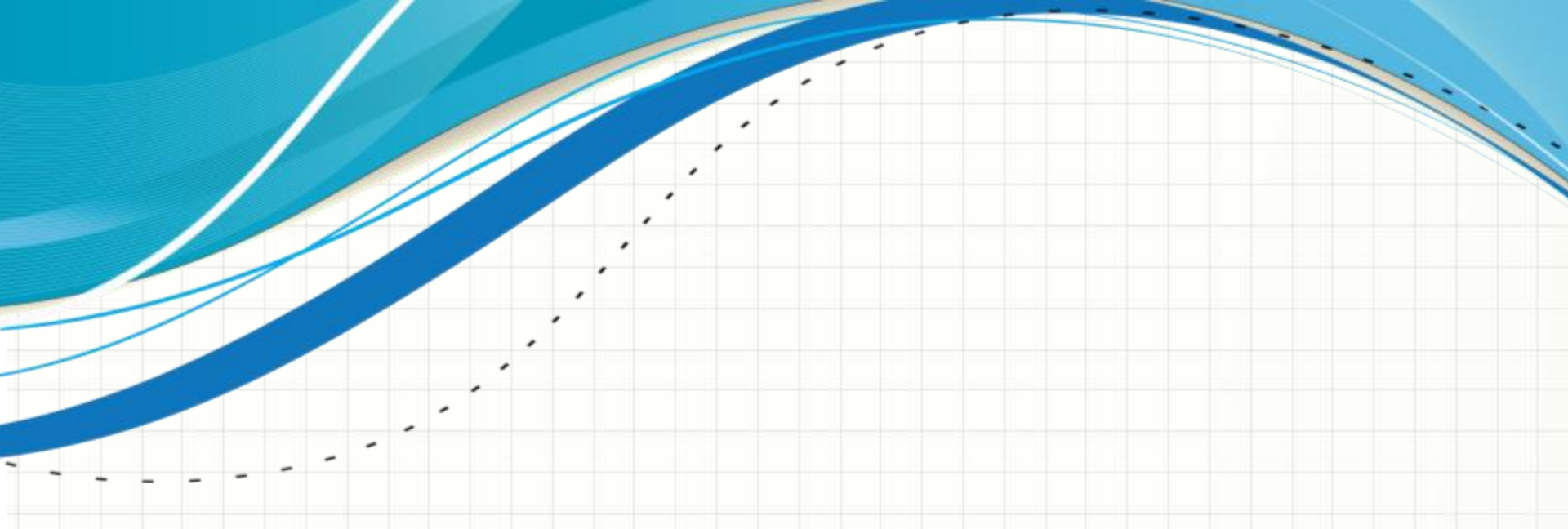
- Sempre no meio?
 - Não, no centro de gravidade!



$$V_A = ?$$
$$M_A = ?$$



$$V_A = p \cdot x / 2$$
$$M_A = p \cdot x^2 / 6$$



DIAGRAMAS DE FORÇA CORTANTE

Diagramas de Forças Cortantes

- Já vimos os mais simples:
 - Diagramas de esforços normais (N)
 - Diagramas de esforços de torção (T)
- Veremos mais dois:
 - Diagramas de Esforços Cortantes (V)
 - Diagramas de Momentos Fletores (M)

Diagramas de Forças Cortantes

- Por que traçar diagrama de cortante?
 - Cortante pode variar ao longo do comprimento
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação

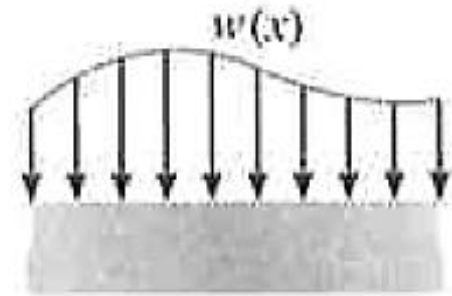
- Convenção de Sinais

- Carregamento

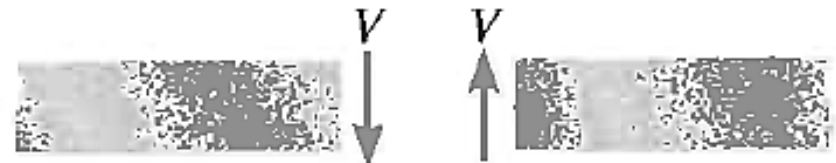
- De cima para baixo: +
 - De baixo para cima: -

- Cortante

- Gira sent. Horário: +
 - Gira sent. Anti-Horário: -



Carga distribuída positiva



Cisalhamento interno positivo

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto "x"?

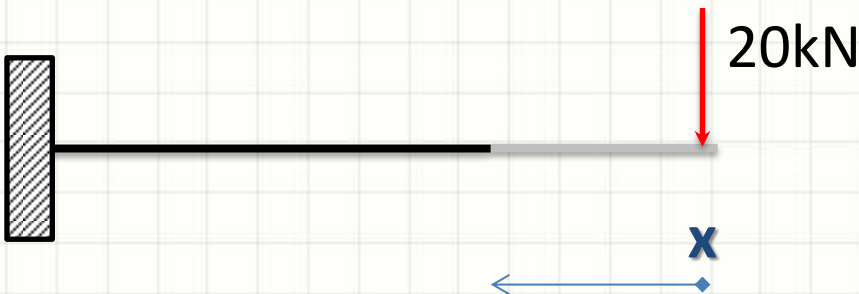
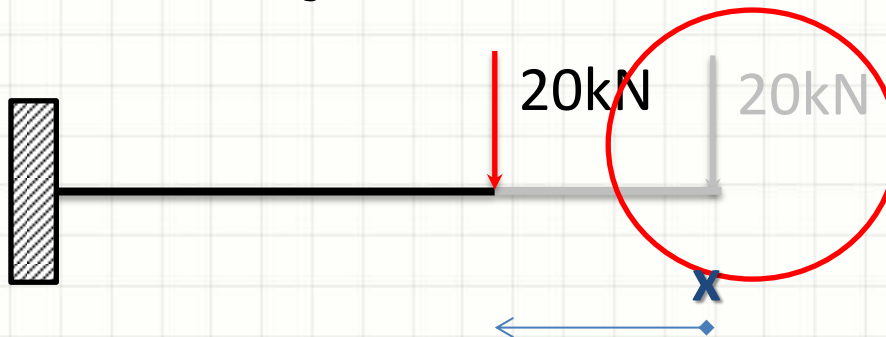


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



Sentido
Horário!

- $V(x) = \text{cte.} = 20\text{kN!}$

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Concentrada



- $V(x) = \text{cte.} = 20\text{kN}$... Sentido horário
- Logo... O diagrama de cortante é

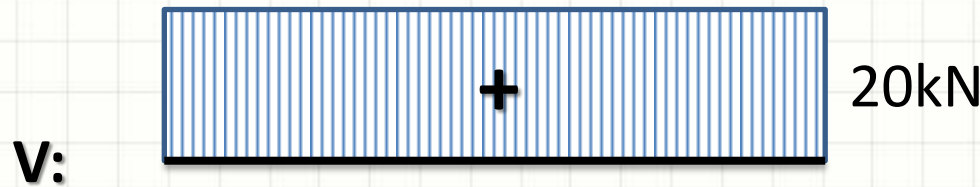
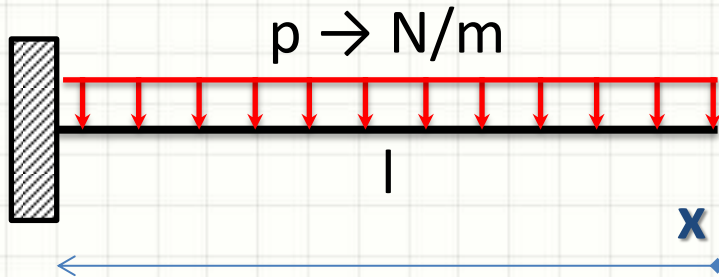


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “ x ”?

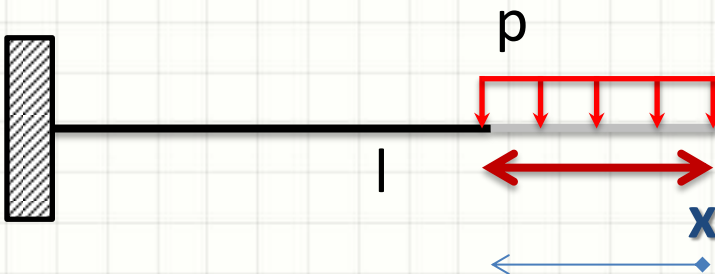
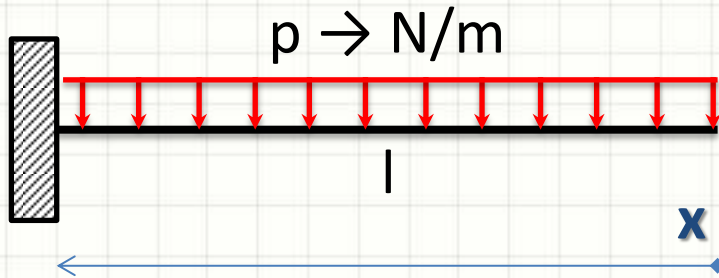
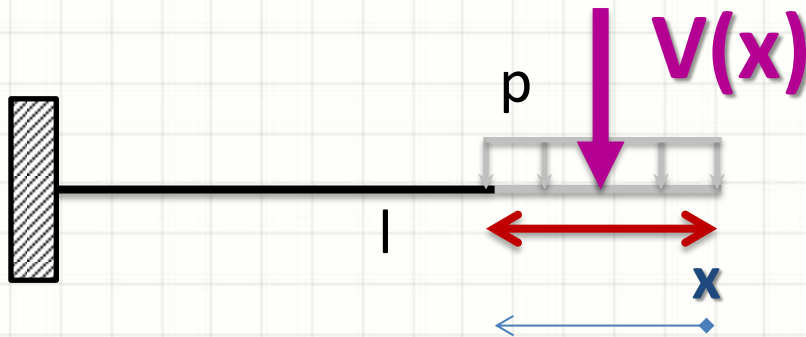


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



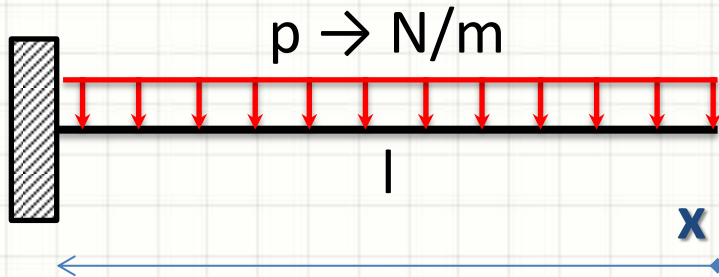
x

$$V(x) = p \cdot x$$

- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

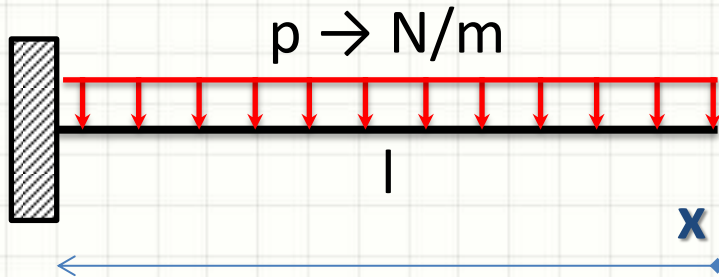
V: _____

|

??

Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída

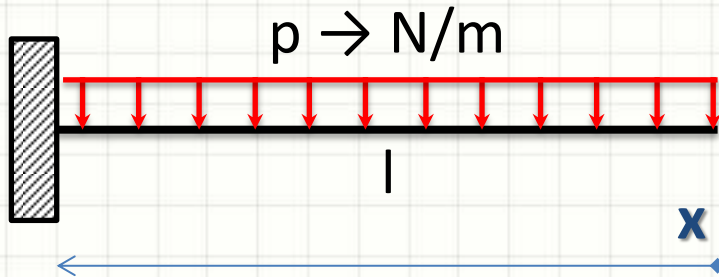


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...



Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Distribuída



- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

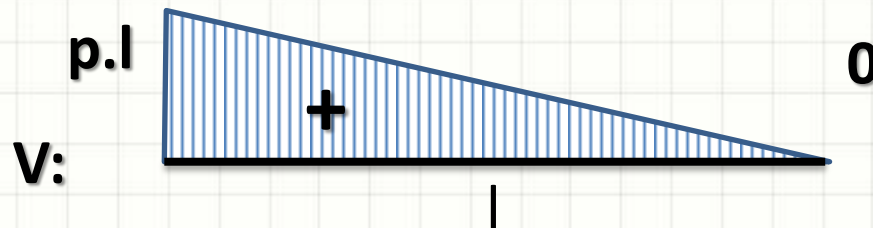
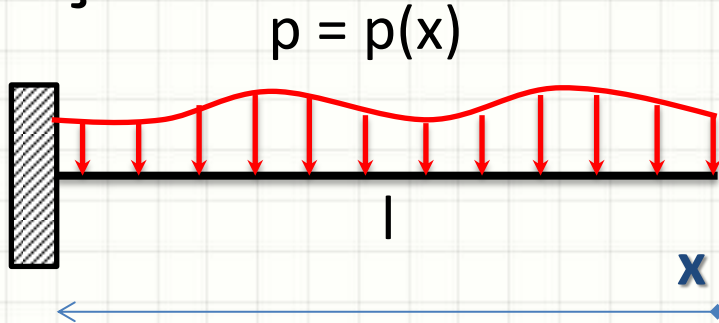


Diagrama de Força Cortante

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual a força cortante de a até b ?

$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$



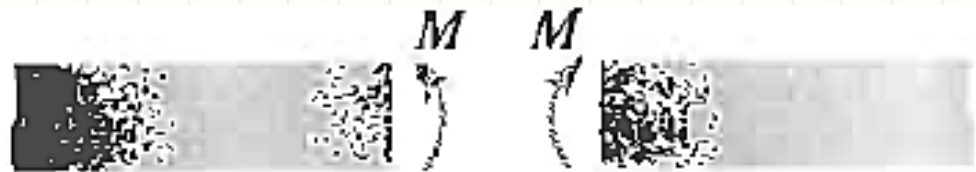
PAUSA PARA O CAFÉ!



DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR

Diagramas de Momentos Fletores

- Por que traçar diagramas de momento?
 - Momento usualmente varia ao longo da viga
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação
- Convenção de Sinais
 - Momento Positivo
 - Traciona parte inferior
 - Momento Negativo
 - Traciona parte superior



Momento interno positivo

Diagramas de Momentos Fletores

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Determinação do Equilíbrio Estático
 - Direções positivas são **arbitrárias**



Diagramas de Momentos Fletores

- **ATENÇÃO!** Não confunda as convenções!
- Traçado de Diagramas
 - Direções positivas são **convencionadas**

Grandeza	+	-
Força Normal	Força saindo da barra (tração)	Força entrando na barra (compr.)
Momento Torçor	Torque saindo da barra	Torque entrando na barra
Carga	Para baixo	Para cima
Força Cortante	Gira barra no sentido horário	Gira barra no sentido anti-horário
Momento Fletor	Traciona em baixo	Traciona em cima

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “ x ”?

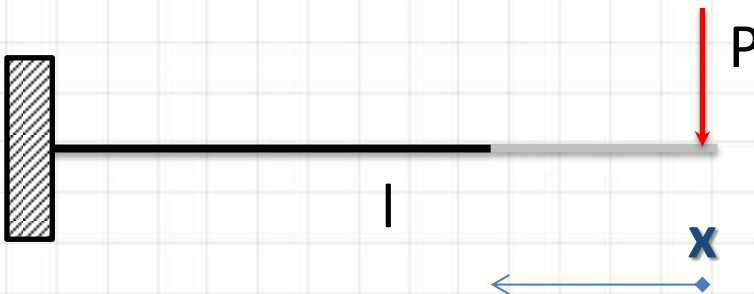
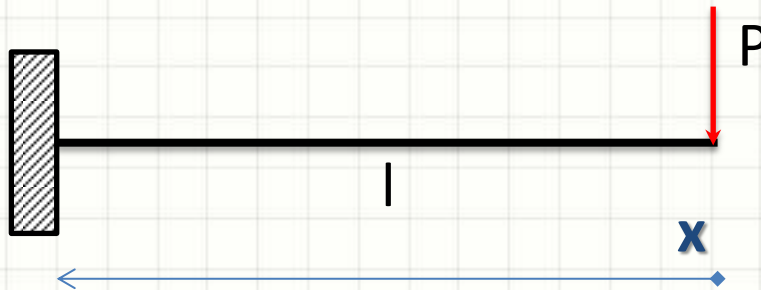
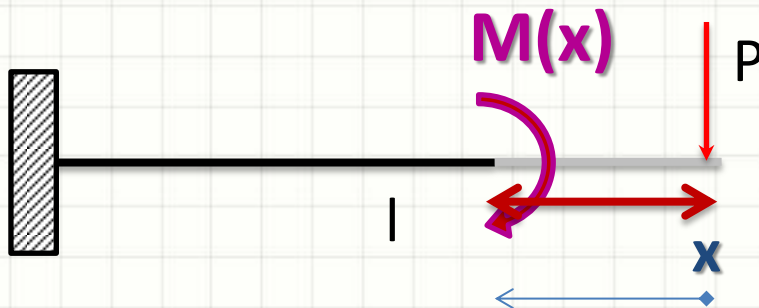


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?



X

O sinal vem do fato que traciona em cima!

$$M(x) = -P \cdot x$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

??

0



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

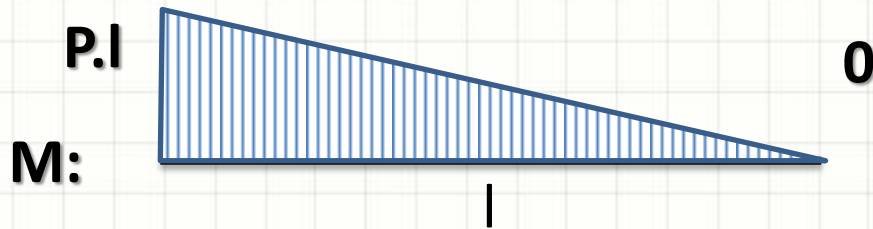
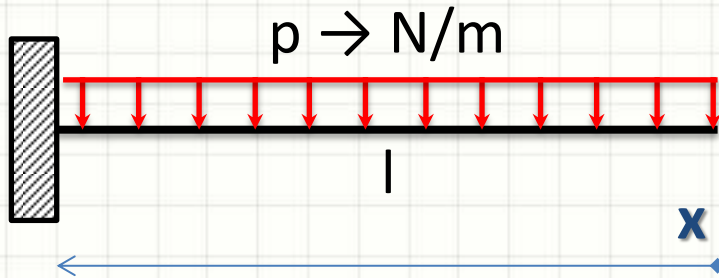
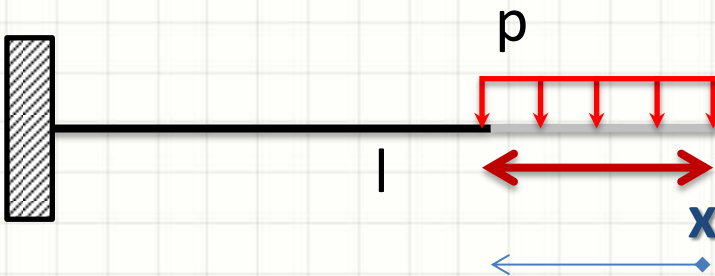


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



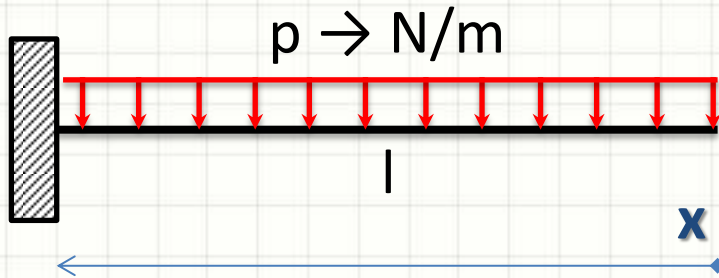
- Qual a força cortante total em “x”?



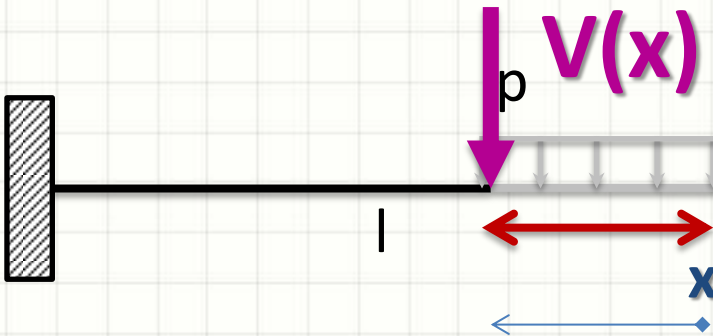
X

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?



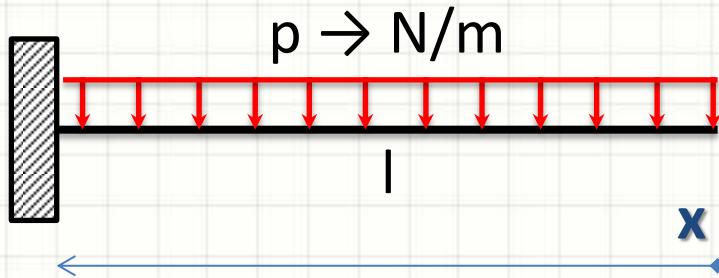
x

$$V(x) = p \cdot x$$

- Mas e o momento em “x”?

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “x”?

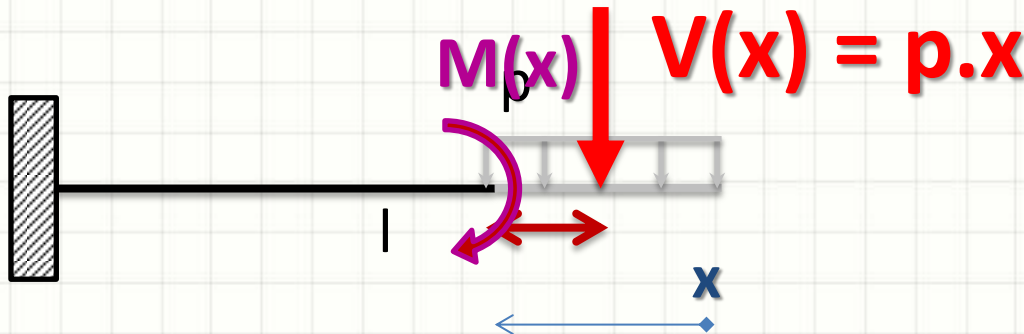
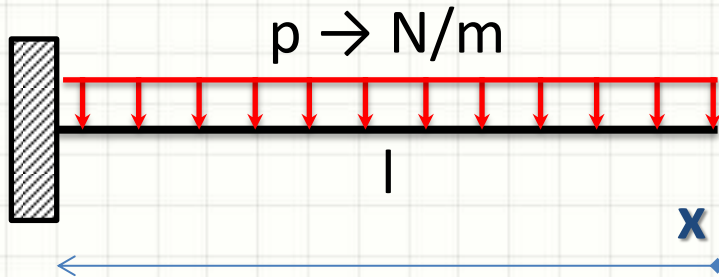
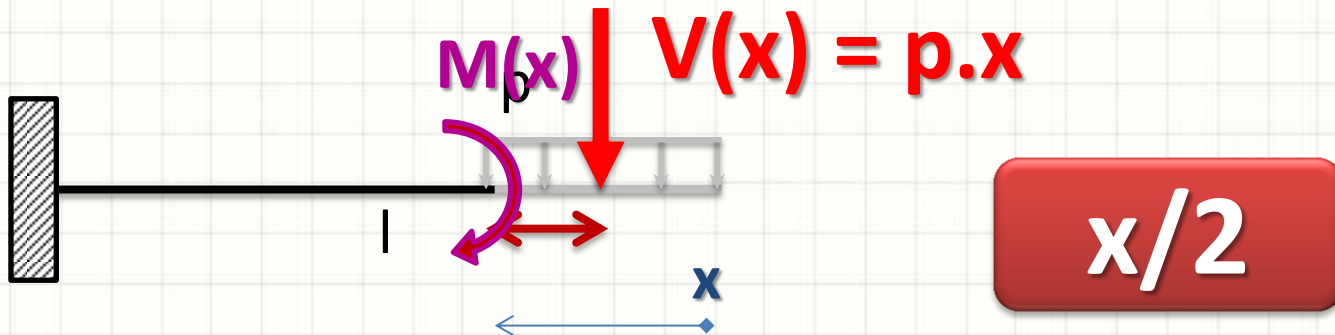


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



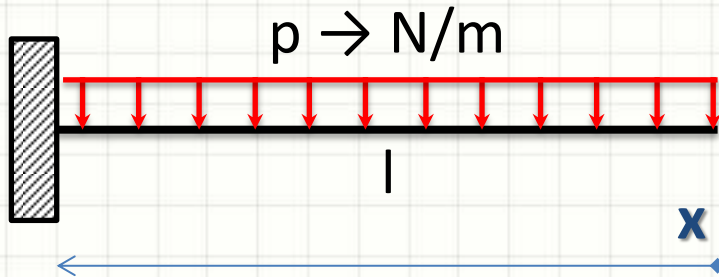
- Qual o momento em um ponto “ x ”?



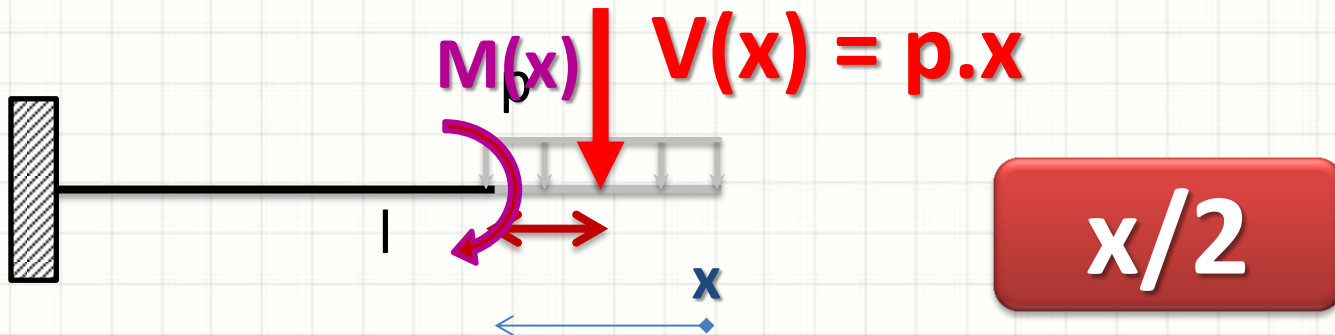
$$M(x) = -p \cdot x \cdot x/2$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



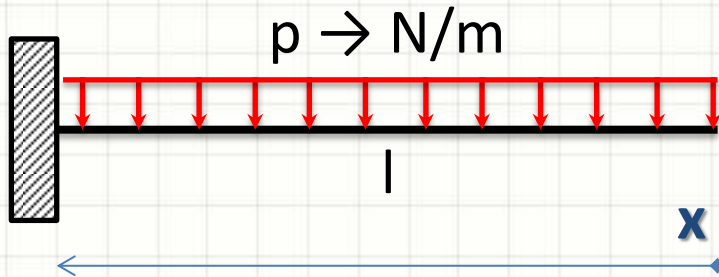
- Qual o momento em um ponto “x”?



$$M(x) = - [p \cdot x^2 / 2]$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



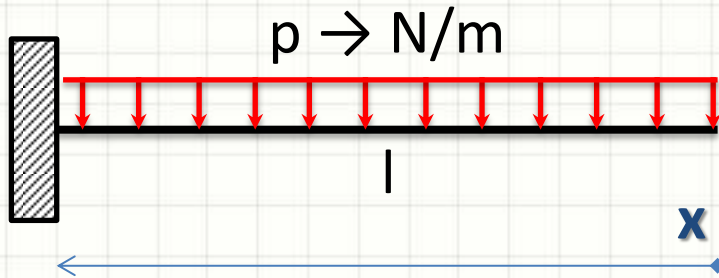
- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

M: _____
|

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

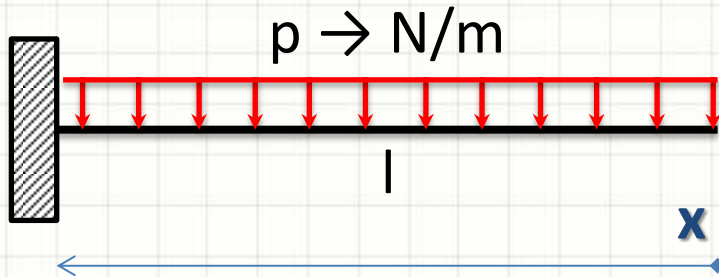
0

M:



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

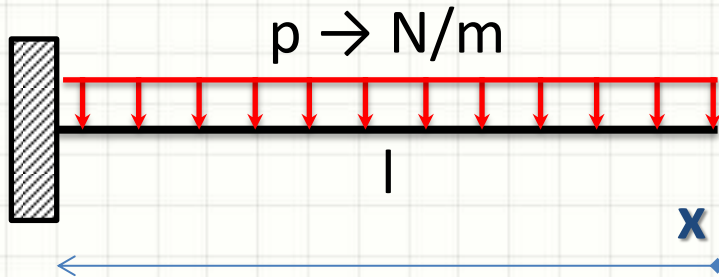


- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

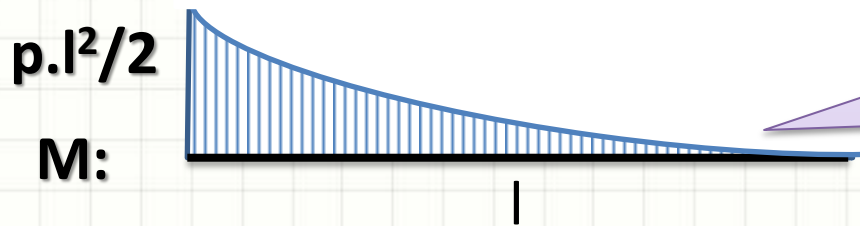


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



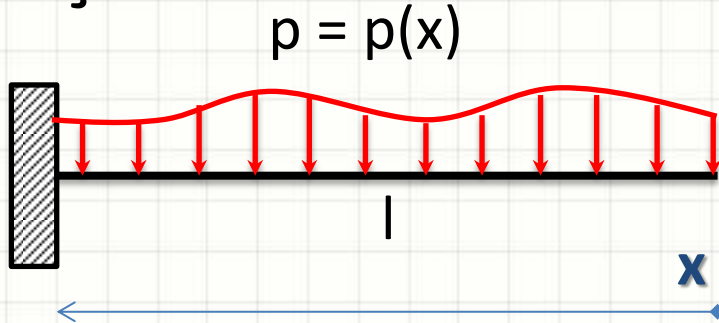
- $M(x) = - [p \cdot x^2 / 2] \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



“Boca para cima”
porque o sinal
de x^2 é positivo!

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual o momento de a até b ?

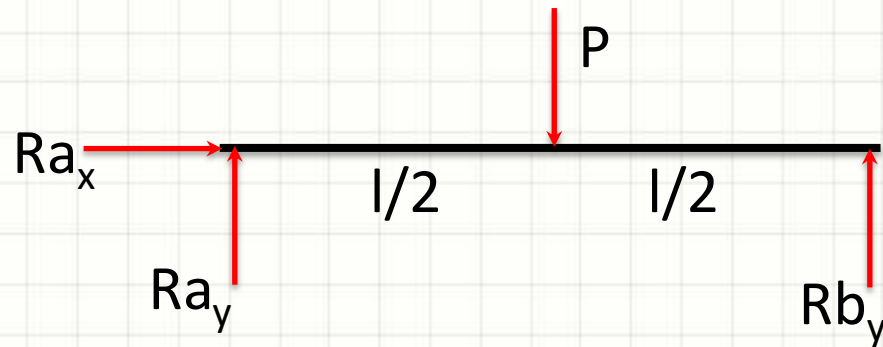
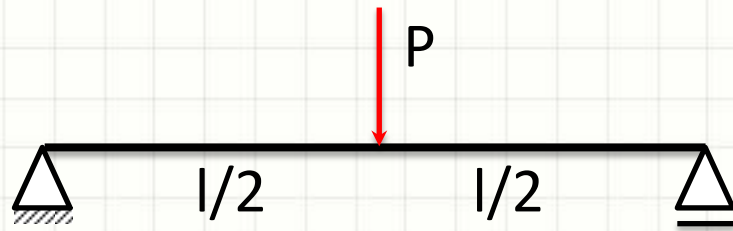
$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$

- Cuidado com o sinal!



DIAGRAMAS EM VIGAS BIAPOIADAS

Diagramas em Vigas – 1) Reações



$$Ra_y = Rb_y = \frac{P}{2}$$

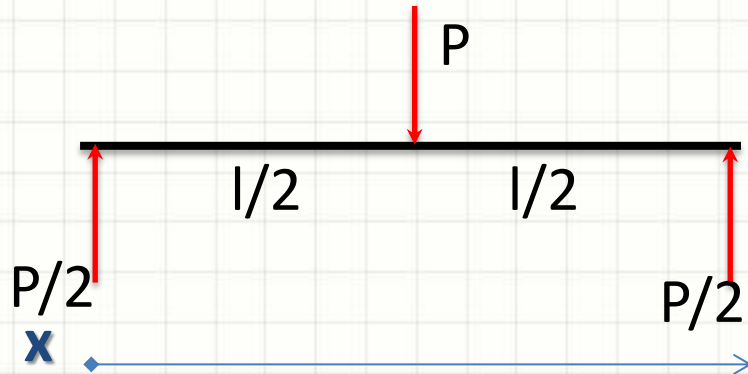
- $\sum F_x = 0$
- $\sum F_y = 0$
- $\sum M_a = 0$

$$\mathbf{Ra_x = 0}$$

$$P - Ra_y - Rb_y = 0$$

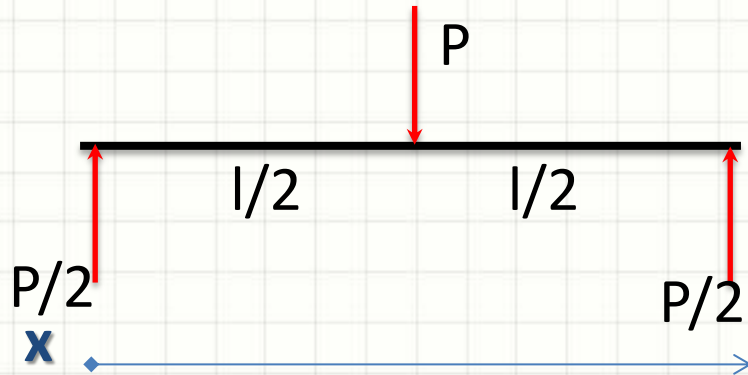
$$Rb_y \cdot l - P \cdot l/2 = 0$$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



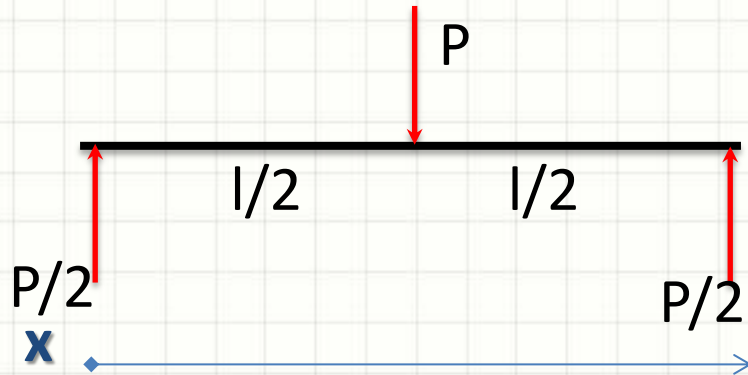
- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x - P \cdot (x - \frac{l}{2})$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



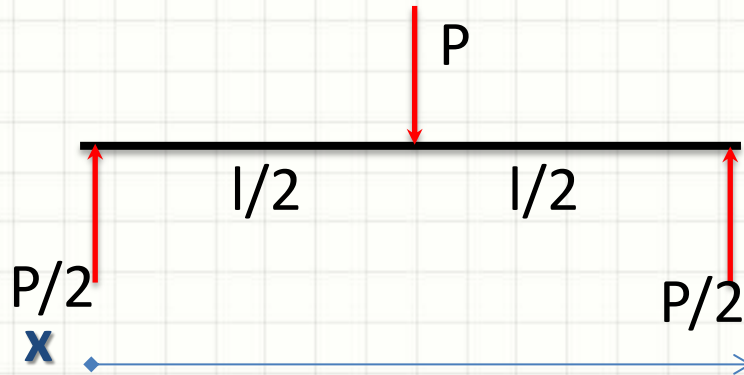
- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $M(x) = P \cdot \frac{x}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



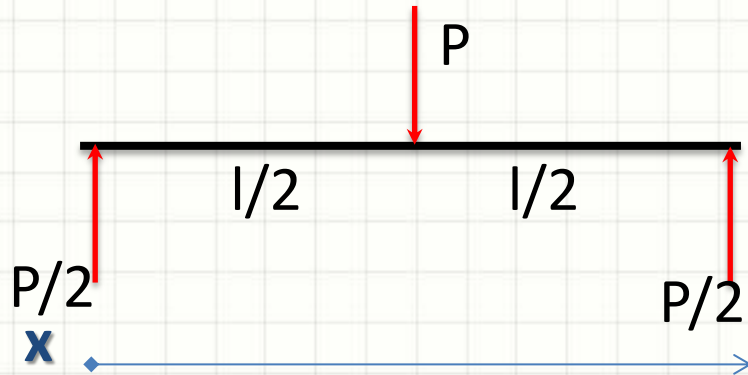
- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $M(x) = P \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{l}{2} - x \right)$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $V(x) = P/2$
- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$ $M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$
- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$ $M(x) = P \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)$

Diagramas em Vigas – 2) Equações



- $V(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$V(x) = P/2$$

- $V(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$V(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$$

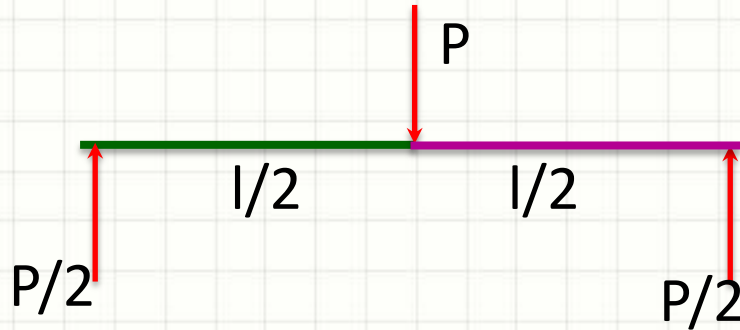
- $M(x) \mid 0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

- $M(x) \mid \frac{l}{2} < x \leq l$

$$M(x) = P \cdot \left(\frac{l-x}{2} \right)$$

Diagramas em Vigas – 3) Diagramas

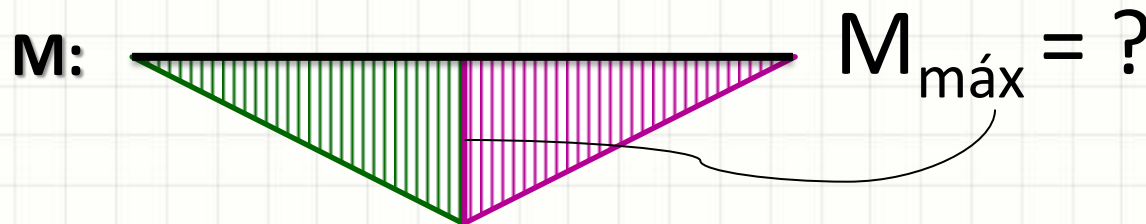
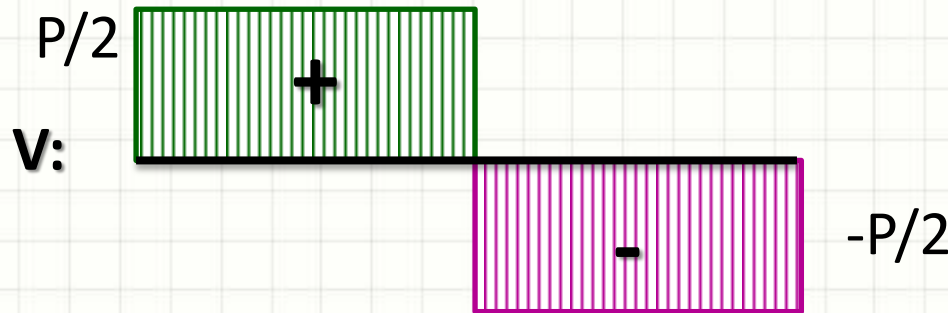


$$V(x) = P/2$$

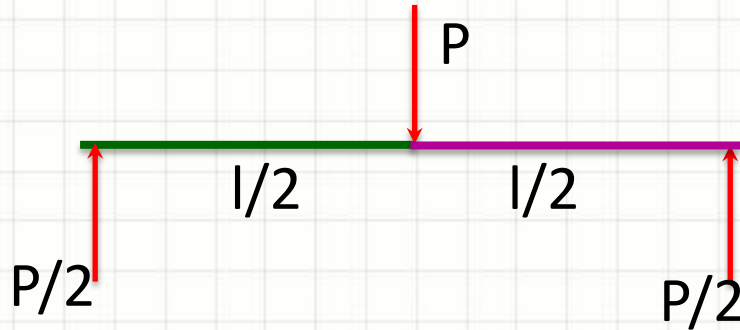
$$V(x) = -P/2$$

$$M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$



Diagramas em Vigas – 3) Diagramas

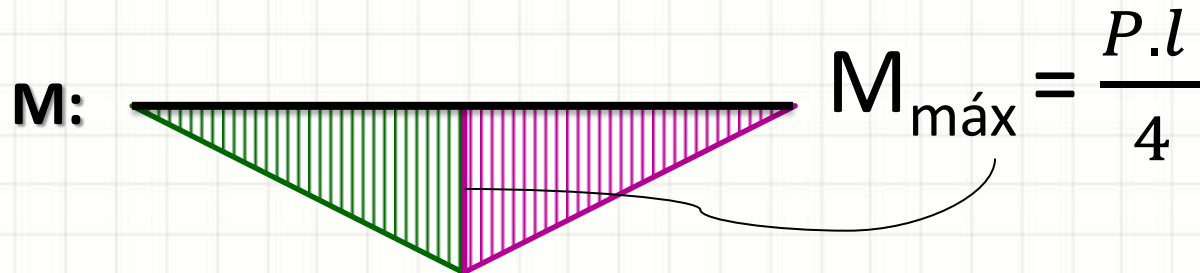
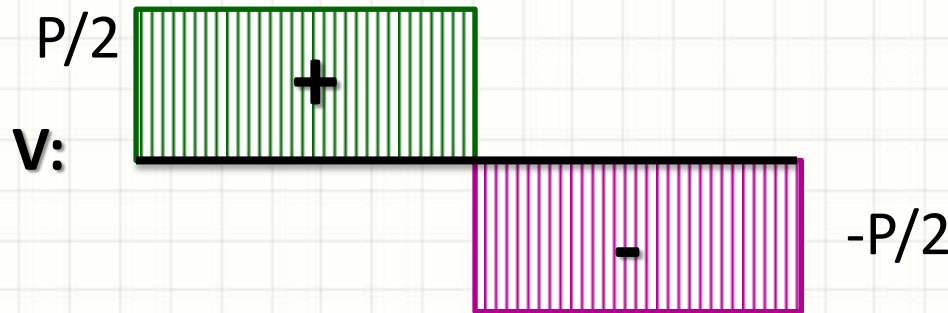



$$V(x) = P/2$$

$$V(x) = -P/2$$

$$M(x) = \frac{P \cdot x}{2}$$

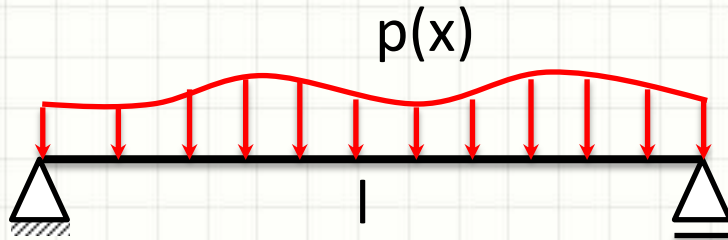
$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$





**RELAÇÃO ENTRE CARGA
DISTRIBUÍDA, CORTANTE E
MOMENTO EM VIGAS
BIAPOIADAS**

Equações: Carregamento Qualquer



Área sob a curva da carga distribuída

$$p(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = \int -p(x) \cdot dx$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$

$$M = \int V(x) \cdot dx$$

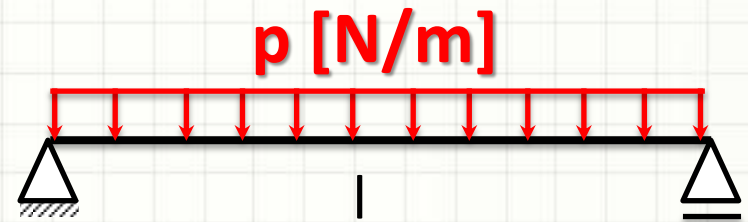
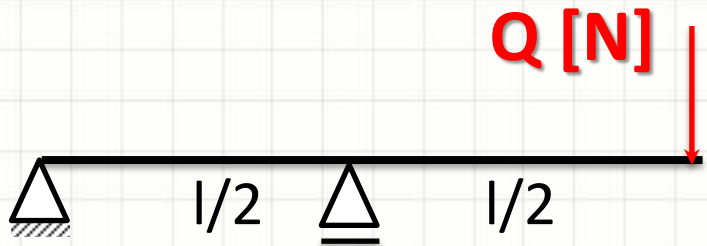
Área sob a curva do diagrama de cortante



EXEMPLOS

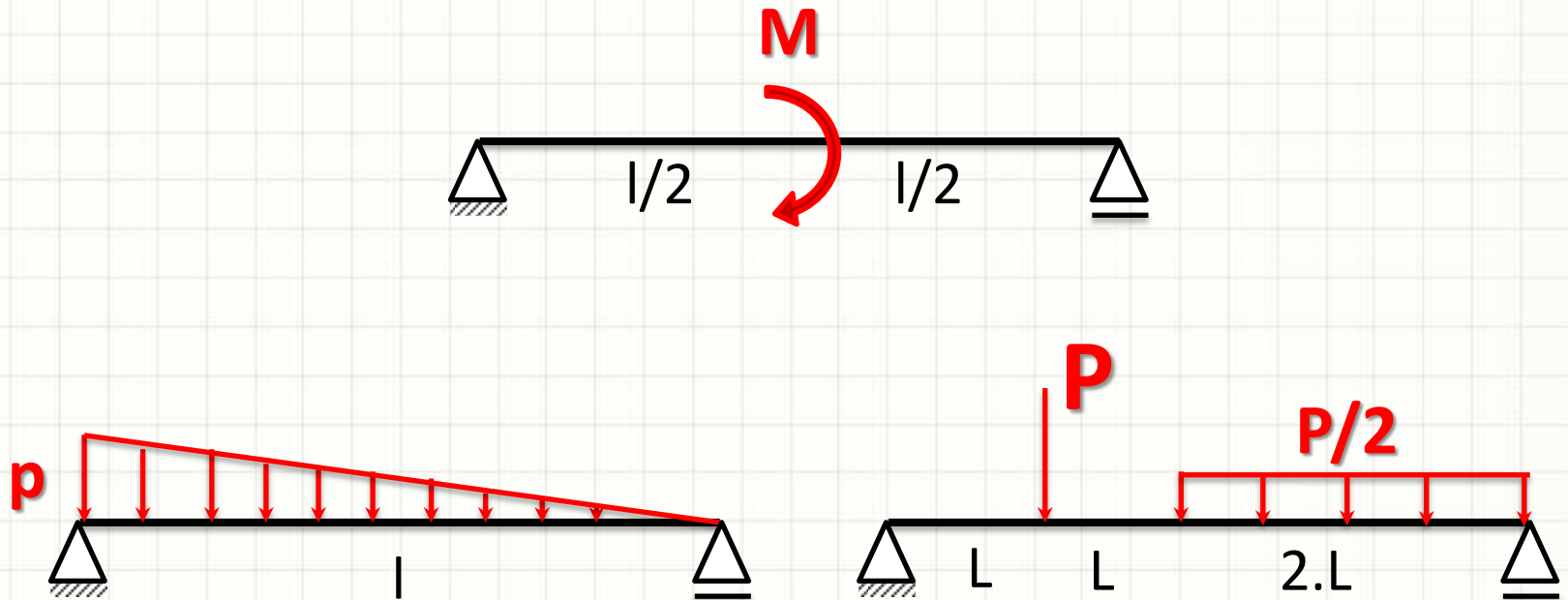
Exemplo

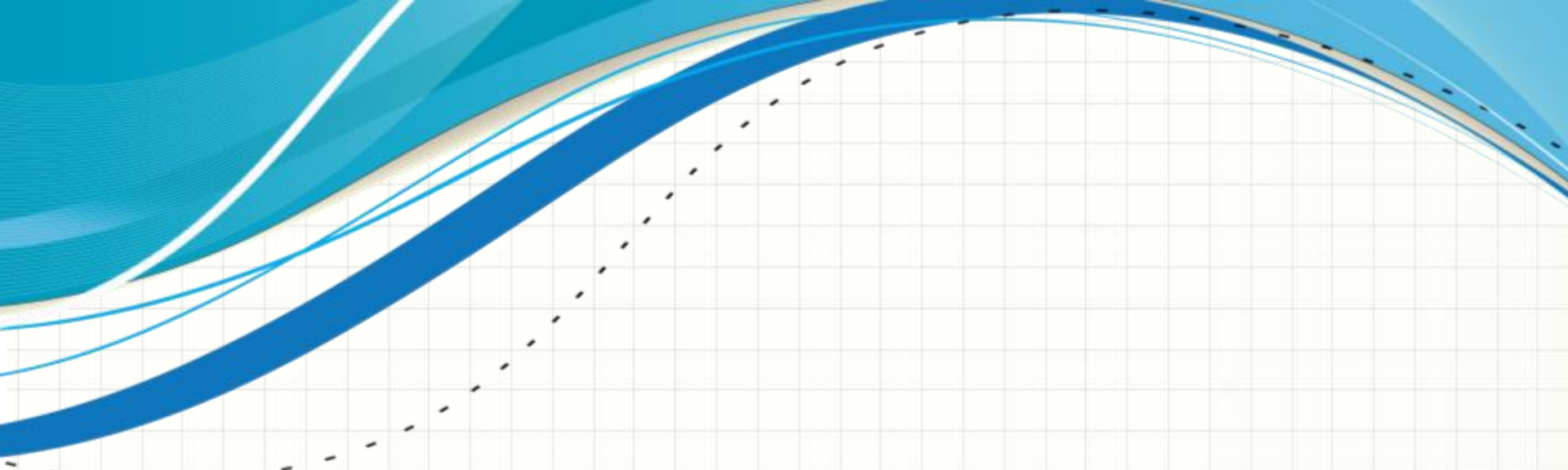
- Calcular, para $l = 2\text{m}$:



Exemplo

- Discutir intuitivamente diagramas de momento e cortante das vigas abaixo:

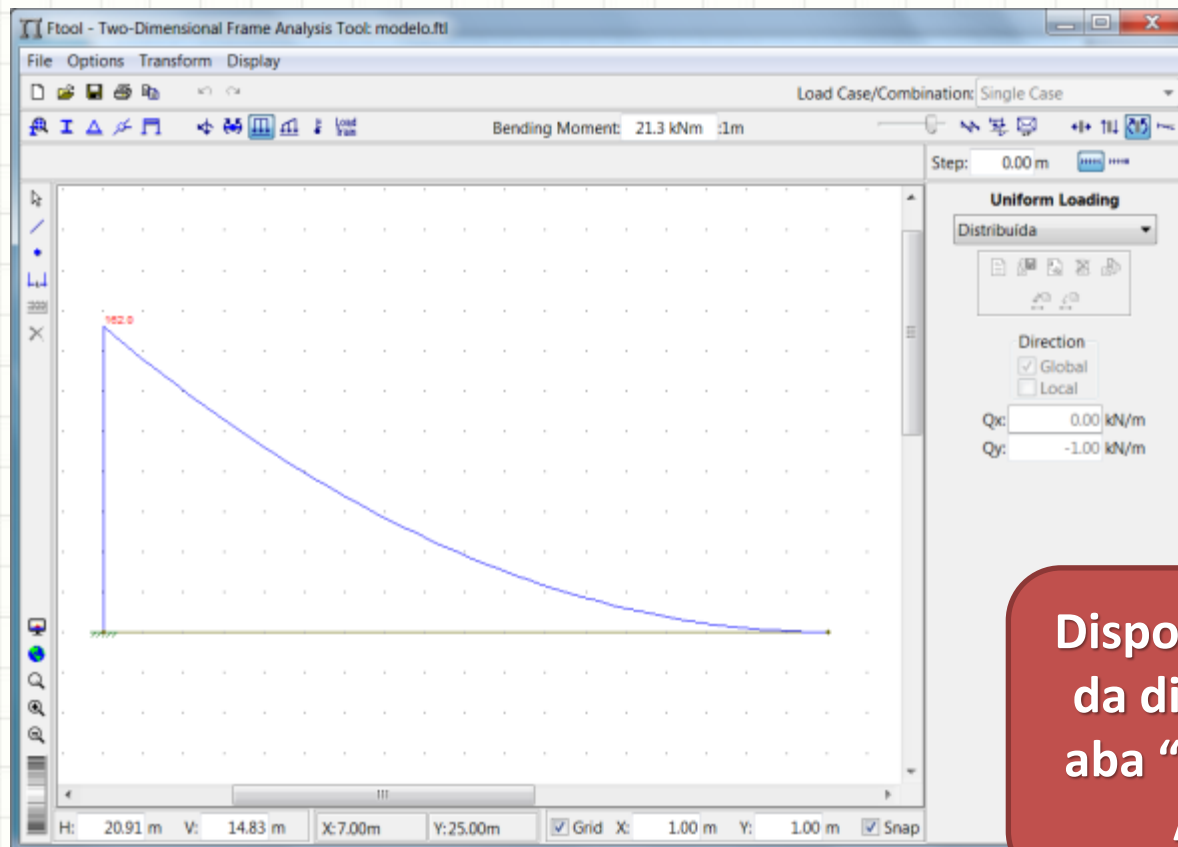




FTOOL

FTool

- Programa de auxílio no aprendizado
 - Construir estruturas simples e verificar diagramas



Disponível no site da disciplina, na aba "Material de Apoio"



PERGUNTAS?



CONCLUSÕES

Resumo

- A partir das cargas podemos determinar:
 - Cortante em qualquer ponto da viga
 - Momento em qualquer ponto da viga
- Os diagramas permitem encontrar facilmente
 - Pontos de maior solicitação
- **Exercitar: Hibbeler**

-
- Como é a deformação por momento fletor?
 - Como é a distribuição de tensões dentro da viga?



PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Hibbeler (Bib. Virtual), Pág. 216 a 221
- Mínimos:
 - Exercícios 6.1, 6.3, 6.14, 6.24
- Extras:
 - Exercícios 6.5, 6.17, 6.21, 6.27
- Adote essas conversões:
 - 1 ksi = 7MPa
 - 1 pol = 25mm
 - 1 lb = 4,5N
 - 1hp = 1000W
 - 1lb/pé = 15 N/m

Para Treinar em Casa

Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m ³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.



EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- Trace, intuitivamente os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo. Para estimar a magnitude, considere que:
 $P = 100\text{N}$, $p = 10\text{N/m}$ e $l = 3\text{m}$.

