Resistência dos Materiais II

Momento Estático

Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 1

Objetivos

- Conhecer a influência da forma na Resistência dos Materiais
- Compreender o conceito de Momento Estático
- Calcular Momento Estático

Antes de Mais Nada...

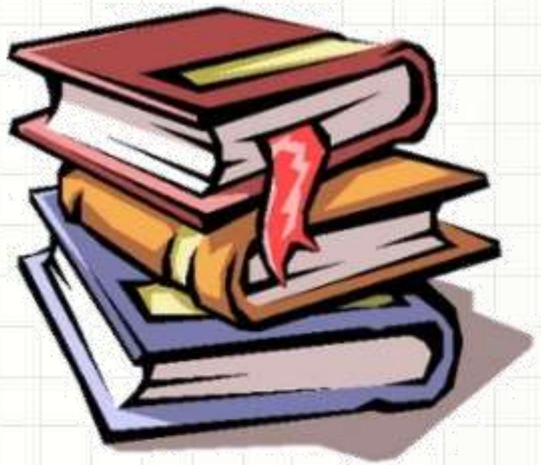
Para quem faltou...

Professor	Informações de Contato
Daniel Caetano	prof@caetano.eng.br

- Datas/critérios, apresent., exercícios, bibliog...

http://www.caetano.eng.br/

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 1)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Hibbeler) – Págs 568-570
Aula Online	Aula 1
Biblioteca Virtual	“Resistência dos Materiais”

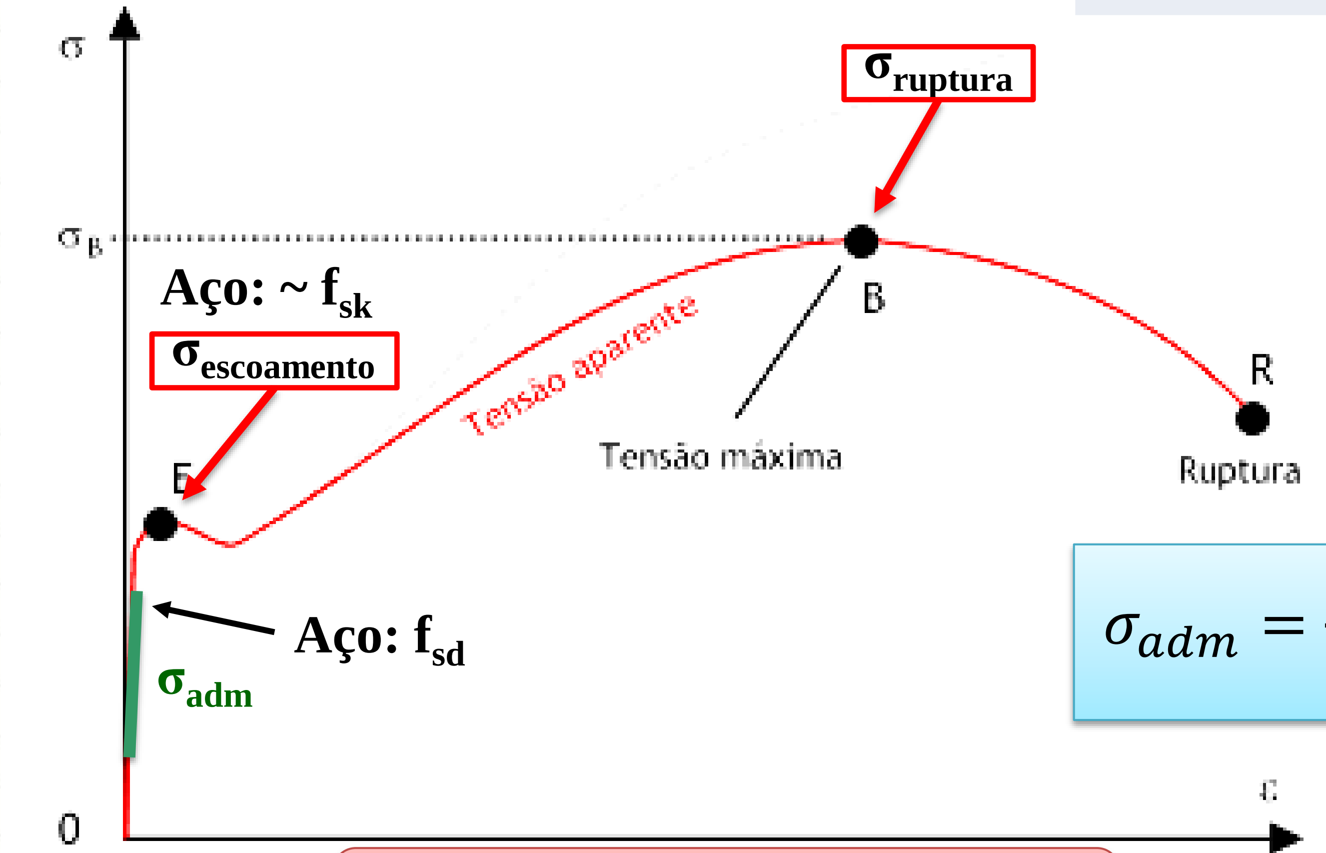
Retomando:

Resistência e Rigidez

Resistência e Rigidez

- Tensão x Deformação

Material	ν_{seg}
Aço	1,5 a 2
Ferro Fundido	4 a 8
Madeira	2,5 a 7,5
Alvenaria	5 a 20

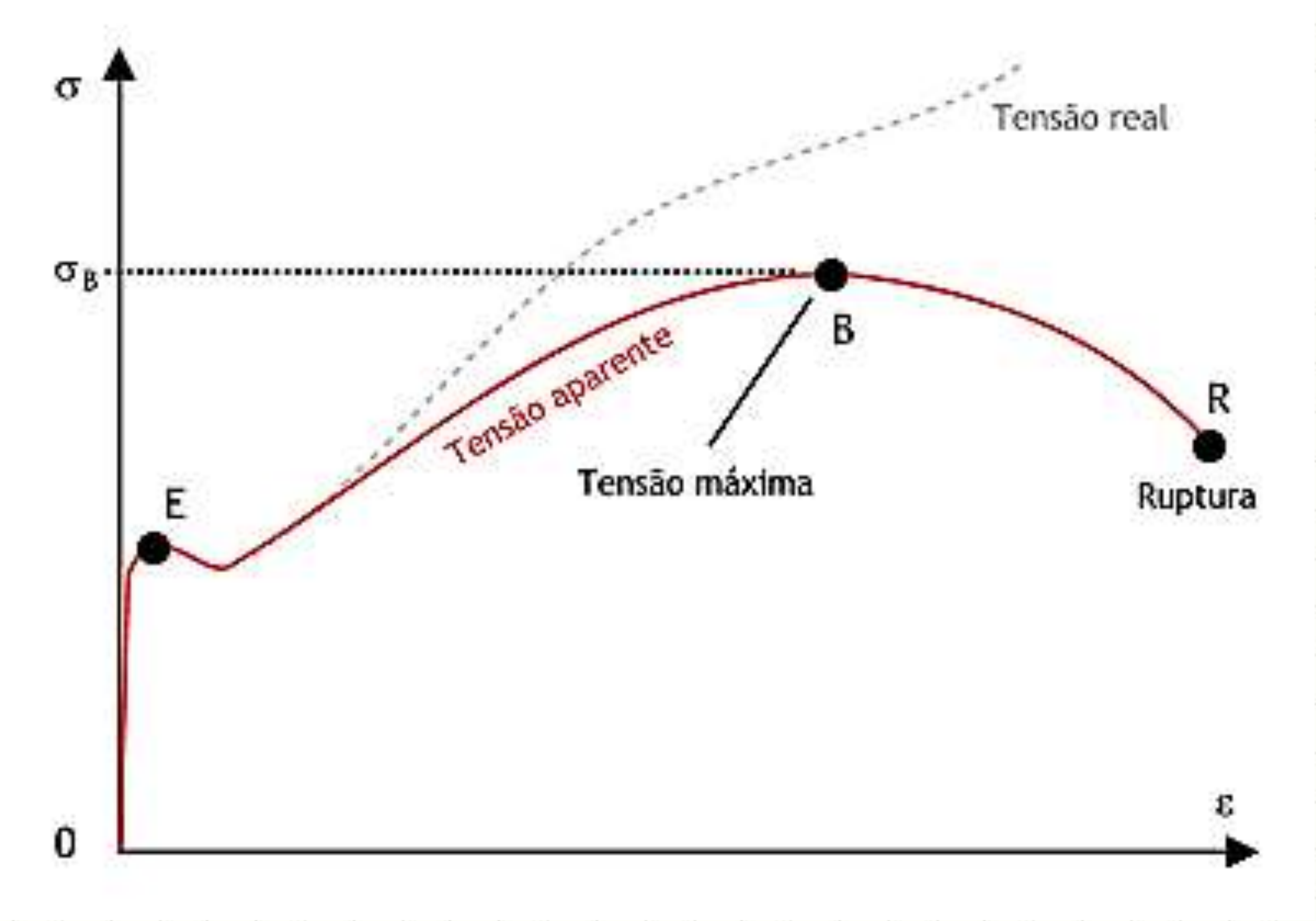


$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{ruptura}}{\nu_{seg}}$$

Os gráficos e limites para tração são diferentes dos da compressão!

Resistência e Rigidez

- Tensão x Deformação



Resistência e Rigidez

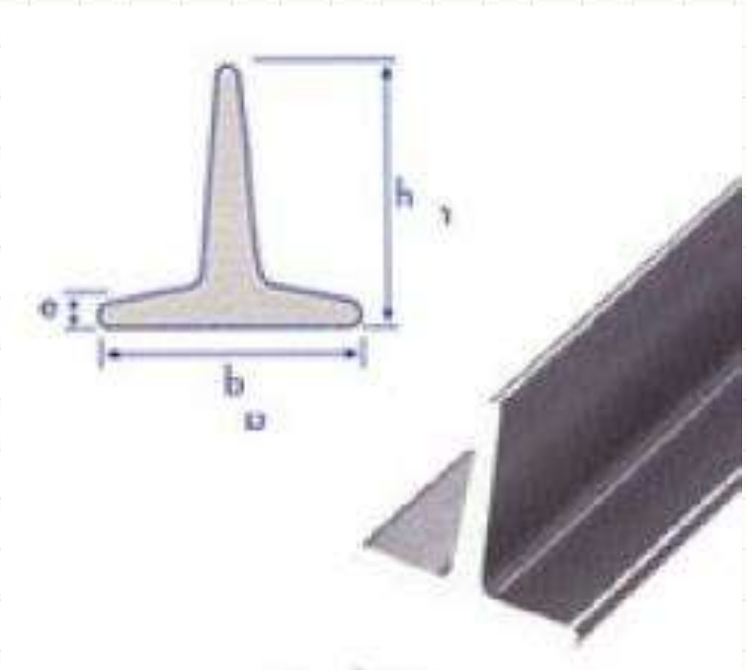
- Resistência x Rigidez

Forma x Resistência e Rigidez

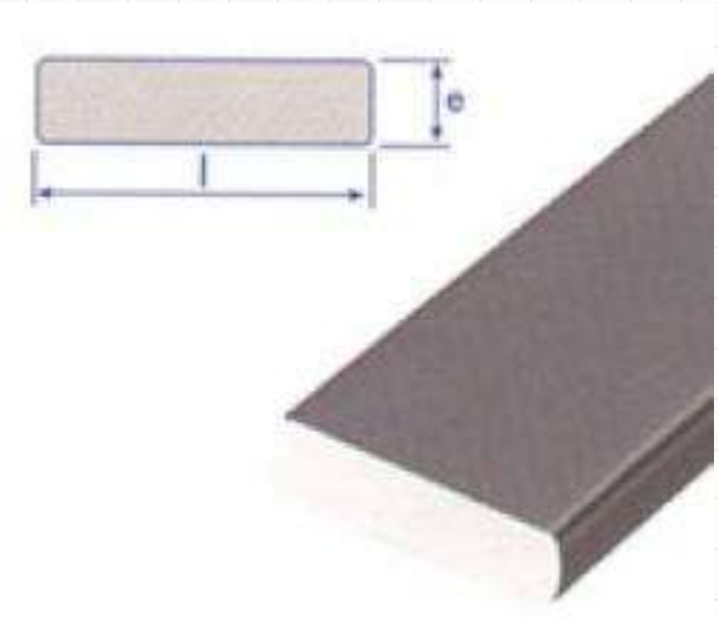
- Tensão x Deformação

Forma x Resistência e Rigidez

- Formas diferentes: resistências diferentes



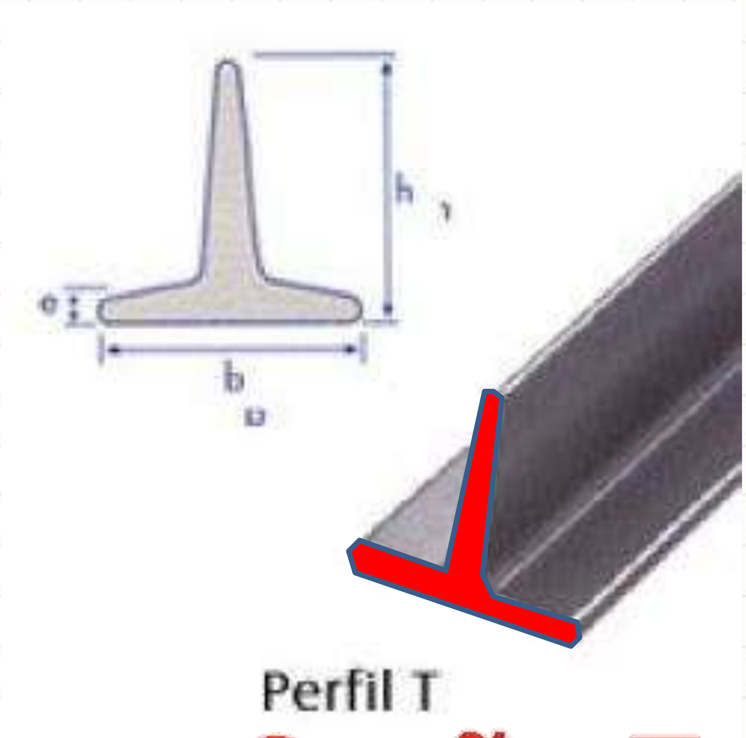
Perfil T

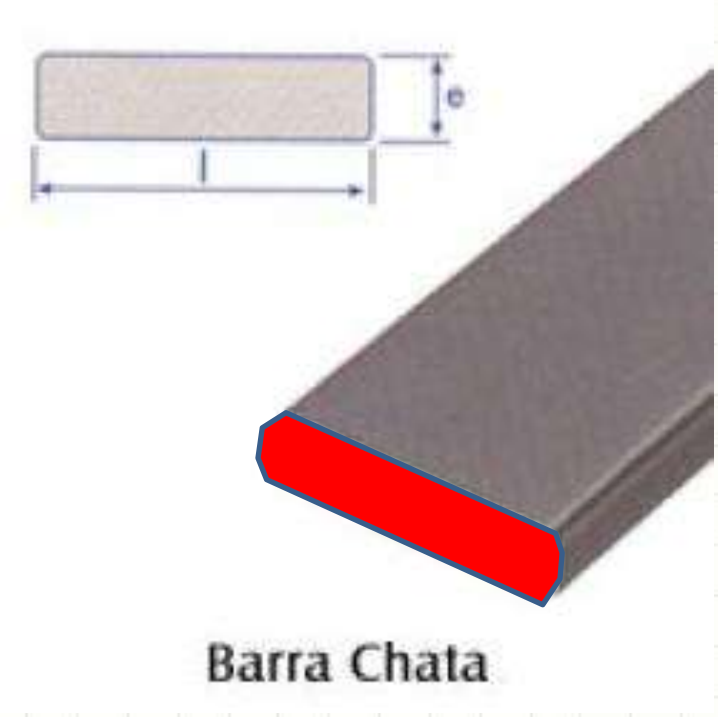


Barra Chata

Forma x Resistência e Rigidez

- Formas diferentes: resistências diferentes



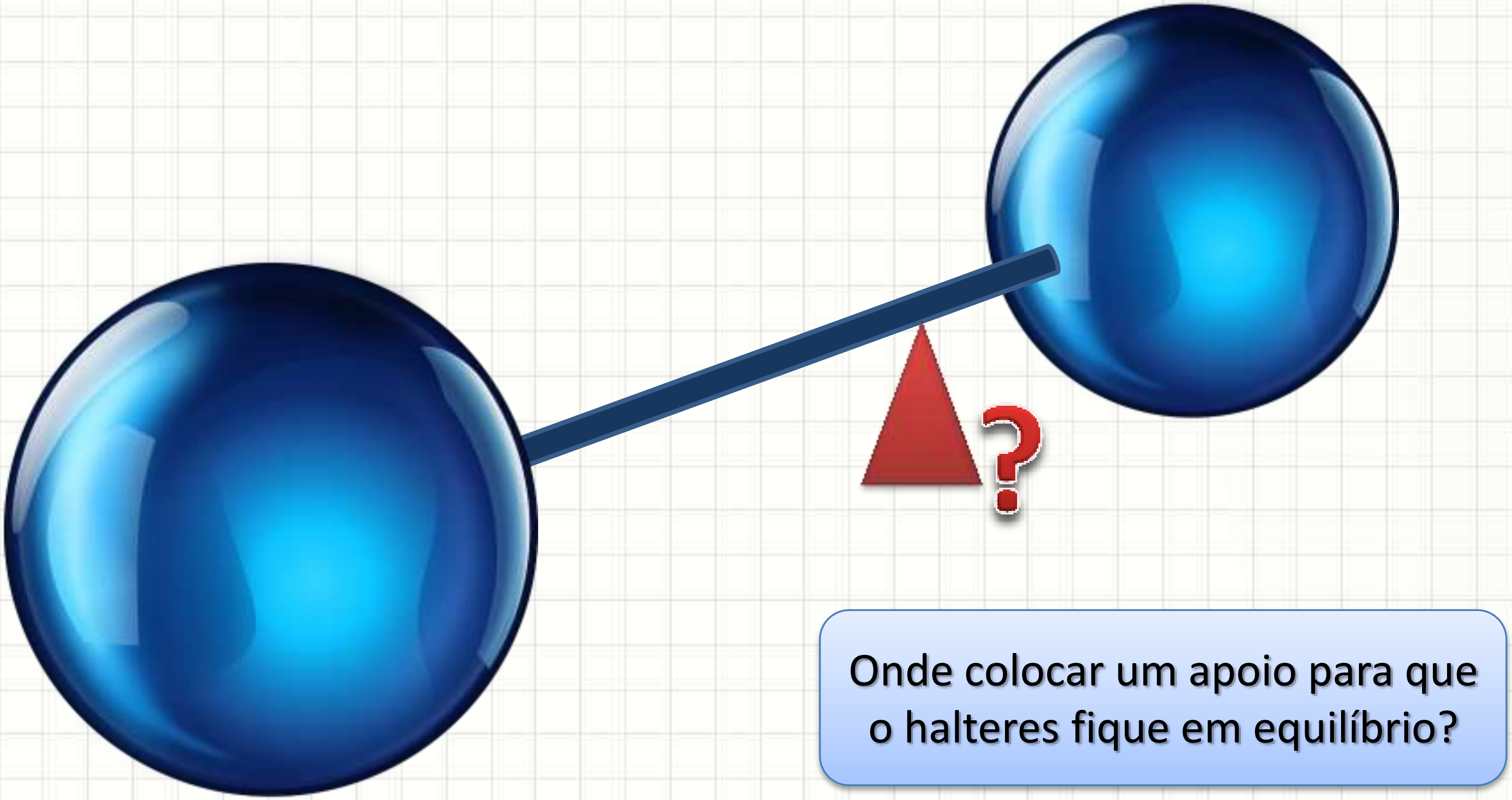


Seção Transversal

Verificando o Equilíbrio

Verificando o Equilíbrio

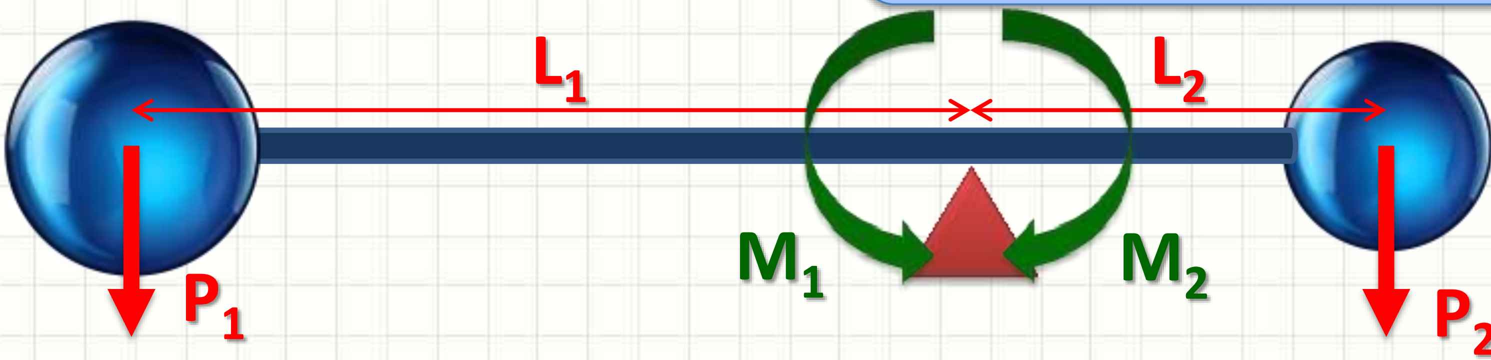
- Considere o seguinte elemento:



Verificando o Equilíbrio

- Visualizando em 2D:

Onde colocar um apoio para que o halteres fique em equilíbrio?



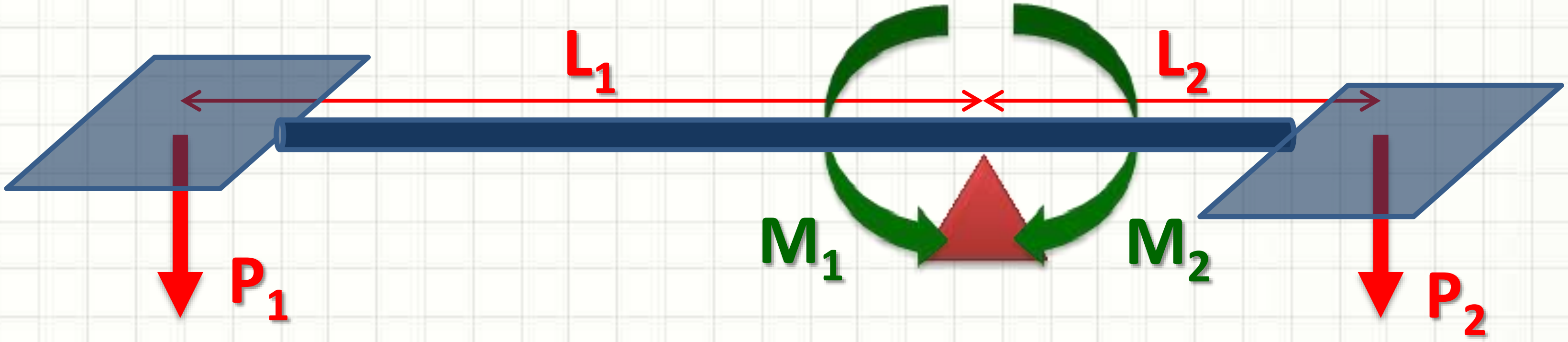
- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 \cdot L_1 = P_2 \cdot L_2$

<u>Mas</u>

$M_1 = P_1 \cdot L_1$
$M_2 = P_2 \cdot L_2$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 . L_1 = P_2 . L_2$

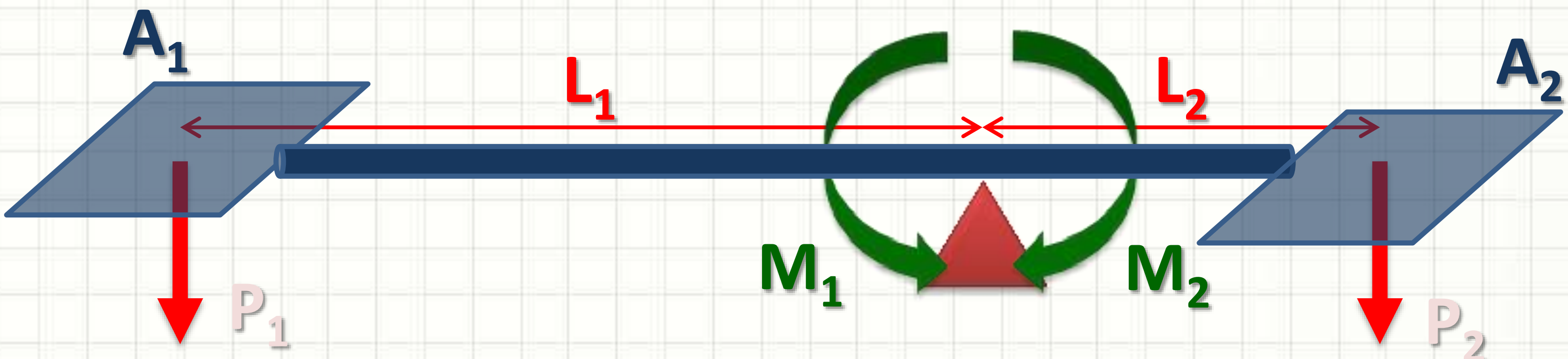
Mas

$M_1 = P_1 . L_1$

$M_2 = P_2 . L_2$

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $M_1 = M_2$
- Logo... $P_1 . L_1 = P_2 . L_2$
- Ou... $A_1 . \cancel{\delta} . L_1 = A_2 . \cancel{\delta} . L_2$
- Finalmente... $A_1 . L_1 = A_2 . L_2$

Mas

$$P_1 = A_1 . \delta$$
$$P_2 = A_2 . \delta$$

Densidade Superficial (em N/m^2)

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?

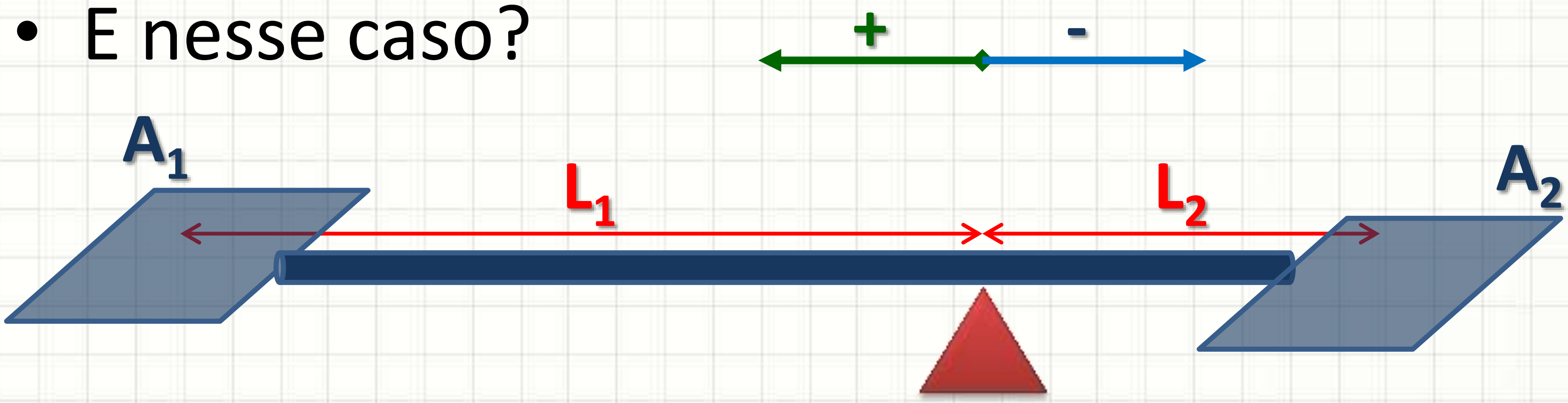
- Para equilíbrio: $A_1 \,.\, L_1 = A_2 \,.\, L_2$
- Vamos chamar $A \,.\, L$ de S (momento estático)
- Assim, para equilíbrio: $S_1 = S_2$
- Ou...

$$S_1 - S_2 = 0$$

O segredo para achar o ponto de equilíbrio está no tal momento estático!

Verificando o Equilíbrio

- E nesse caso?



- Para equilíbrio: $A_1 . L_1 = A_2 . L_2$
- Vamos chamar $A . L$ de S (momento estático)
- Assim, para equilíbrio: $S_1 = S_2$
- Ou...

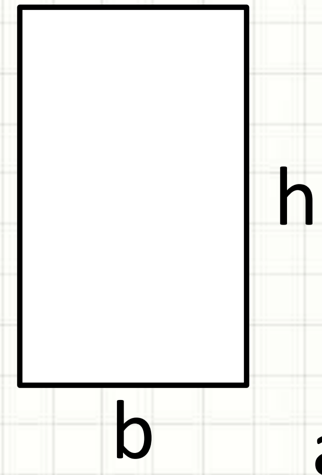
$$S_1 - S_2 = 0$$

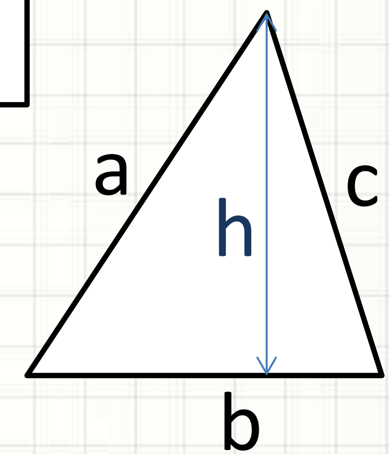
$$\mathbf{S_{total} = S_1 - S_2}$$

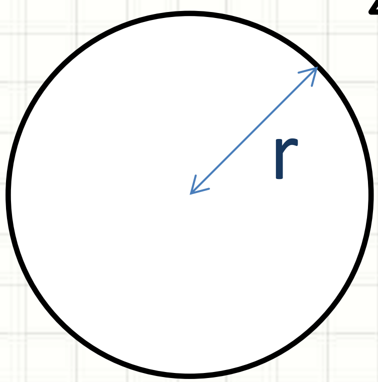
"Medindo" a Forma

Caracterizando uma Forma Plana

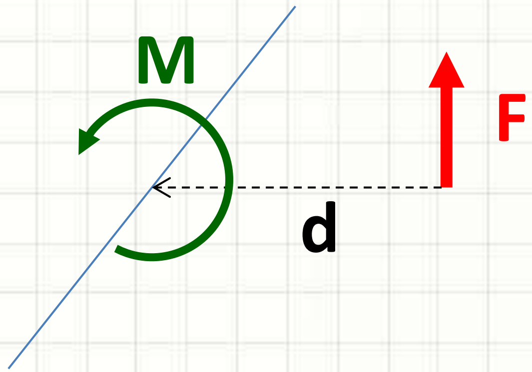
- Perímetro
  - Retângulo: $2 \cdot b + 2 \cdot h$
  - Triângulo: $a + b + c$
  - Círculo: $2 \cdot \pi \cdot r$
- Área
  - Retângulo: $b \cdot h$
  - Triângulo: $b \cdot h / 2$
  - Círculo: $\pi \cdot r^2$
- Só isso?





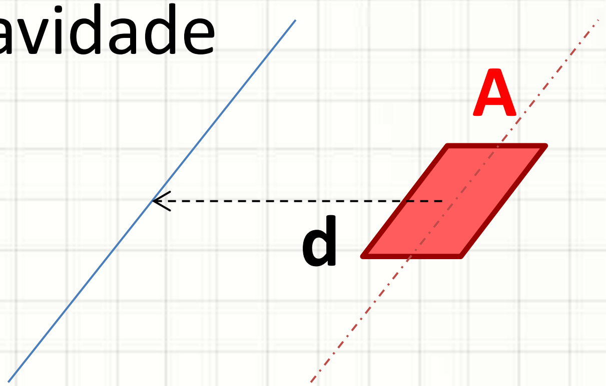


Momento Estático



- Momento de uma Força
  - $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$
- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)
  - S = A · d
  - d: a partir do centro de gravidade

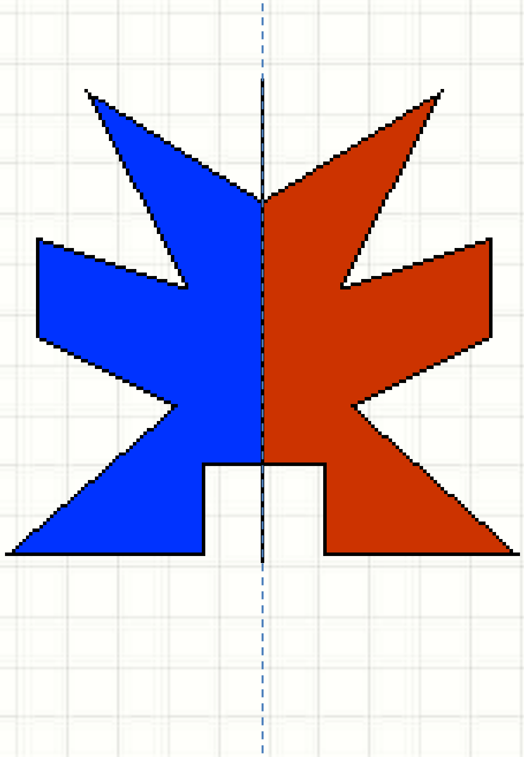
Informação sobre a distribuição de uma área com relação a um eixo de interesse!



- Maior simetria / antissimetria → menor S

Momento Estático

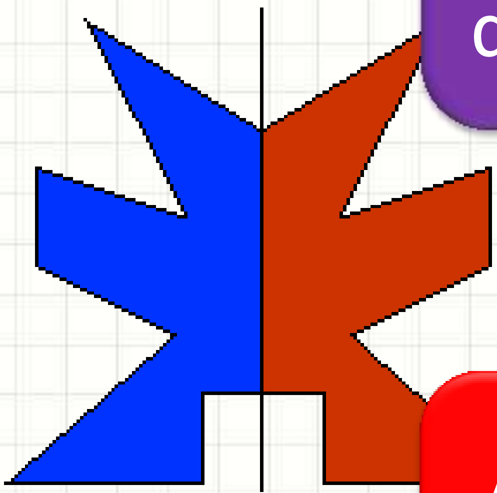
- Simetria - distribuição idêntica da área, relativamente a um eixo

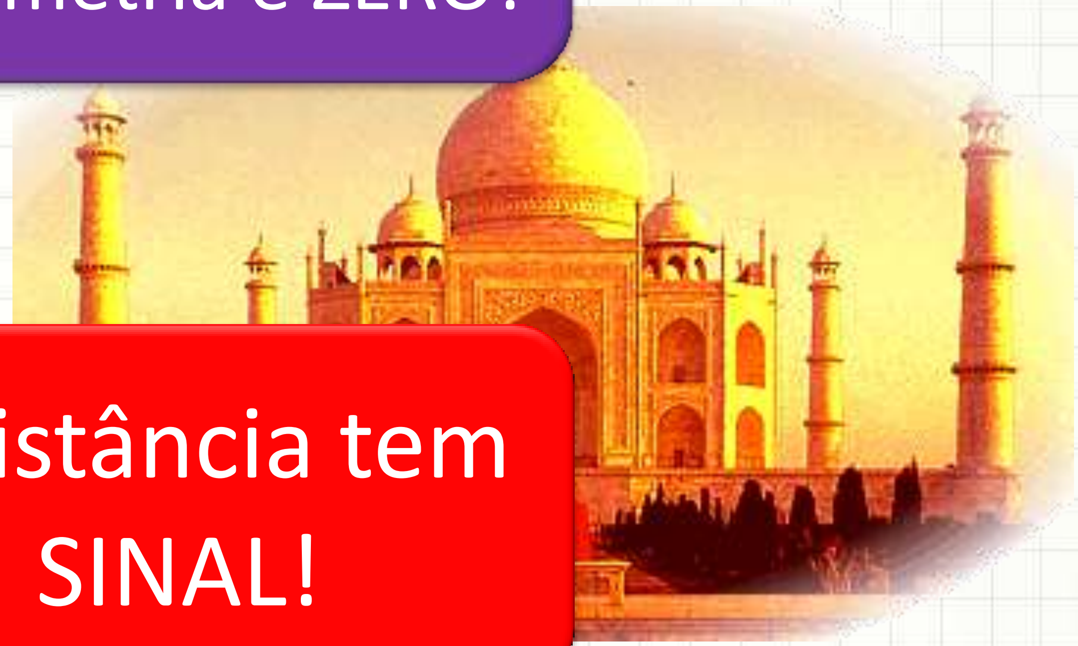


Momento Estático

- Simetria - d... a área, relativame...

Momento Estático em Relação ao Eixo de Simetria é ZERO!

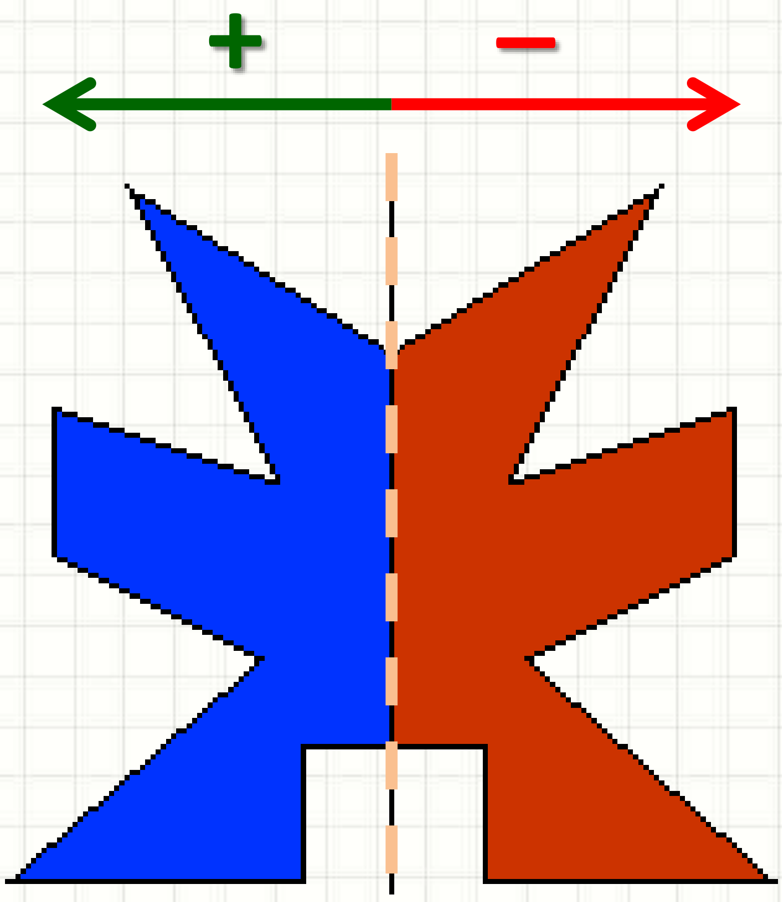




A distância tem SINAL!

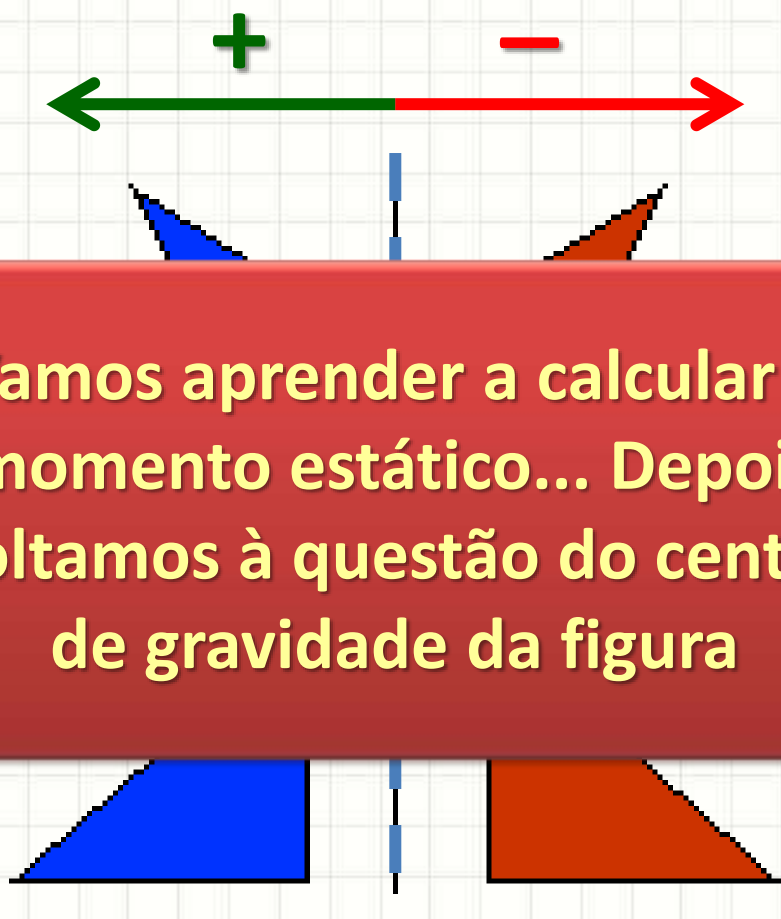
Sinal da Distância

- Há convenção de sinais... (veremos depois!)



Sinal da Distância

- Há convenção de sinais... (veremos depois!)

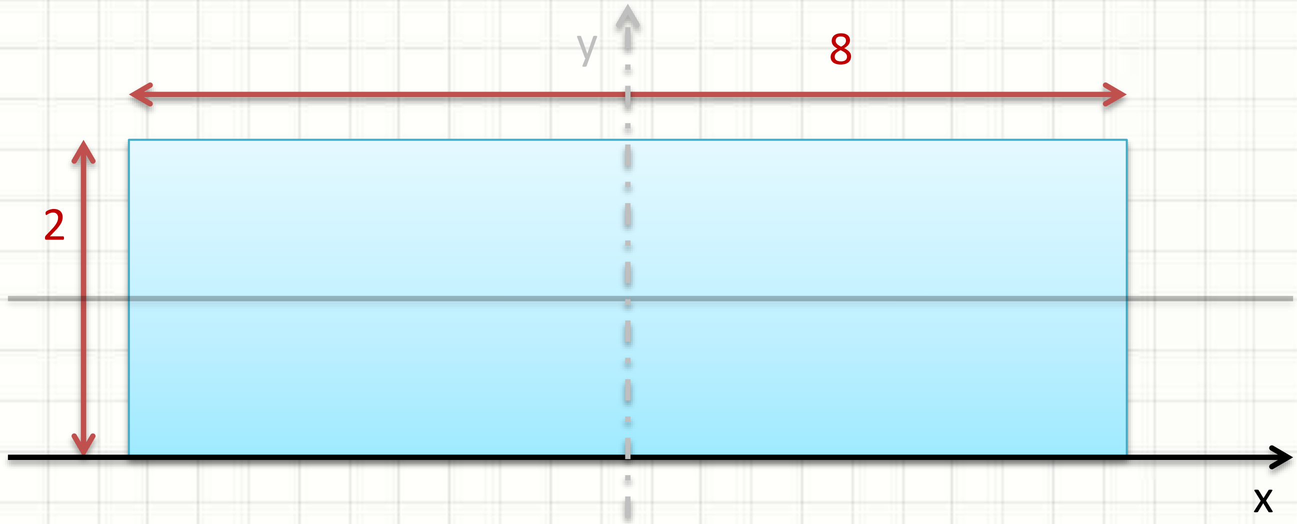


Vamos aprender a calcular o momento estático... Depois voltamos à questão do centro de gravidade da figura

Cálculo do Momento Estático

Momento Estático

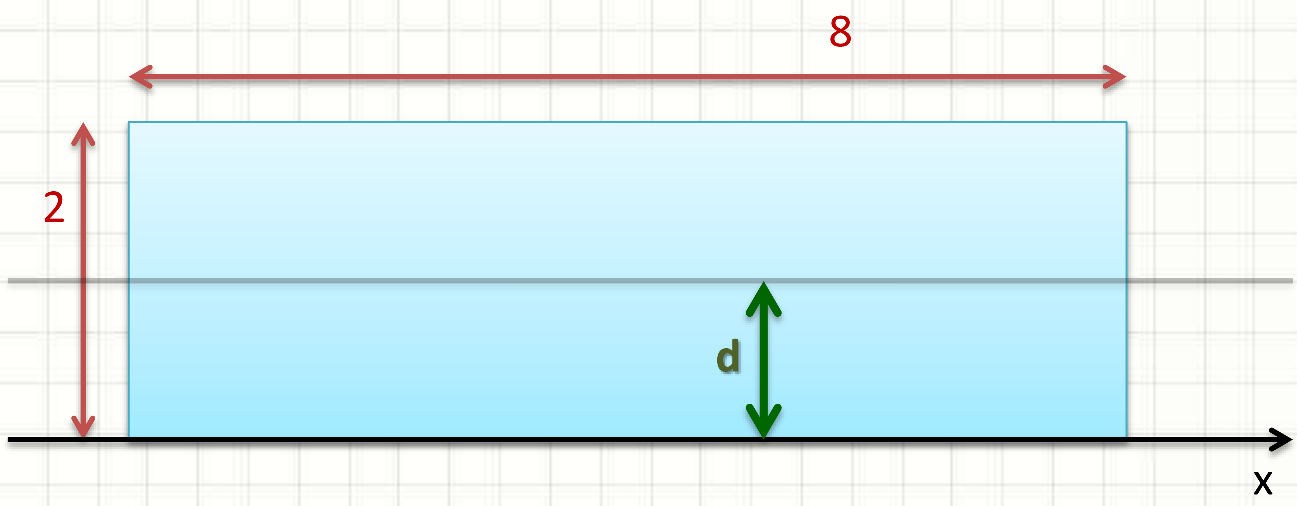
- Exemplo



- Simétrico a Y? → $\mathbf{S_y = 0}$
- Simétrico a X? → **Não!**

Momento Estático

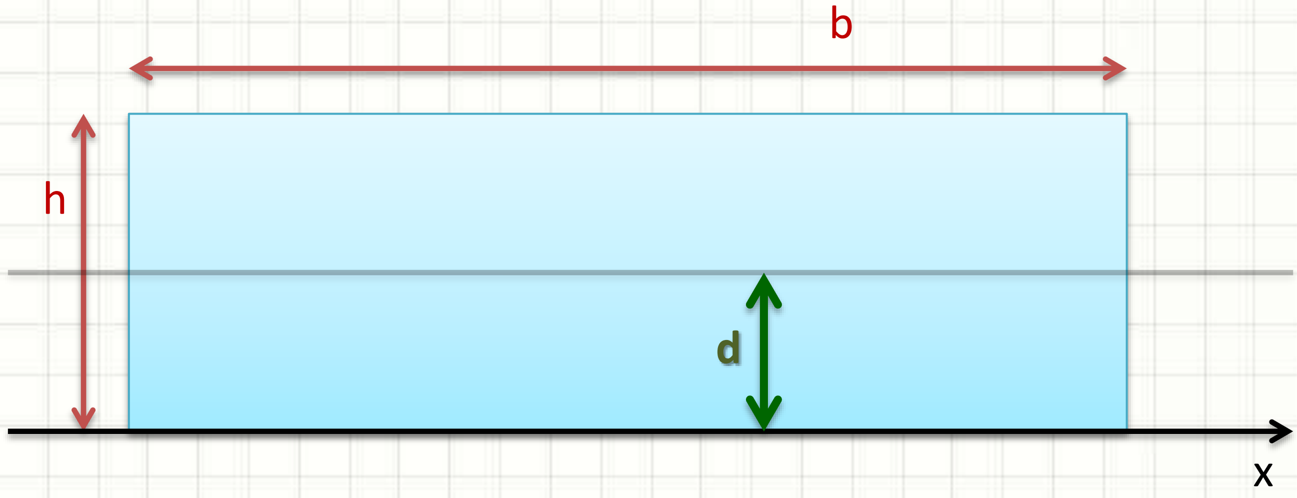
- Exemplo



- **S_x = ?**
- $S_x = A \cdot d = (2 \cdot 8) \cdot 1 = 16$

Momento Estático

- Exemplo Genérico



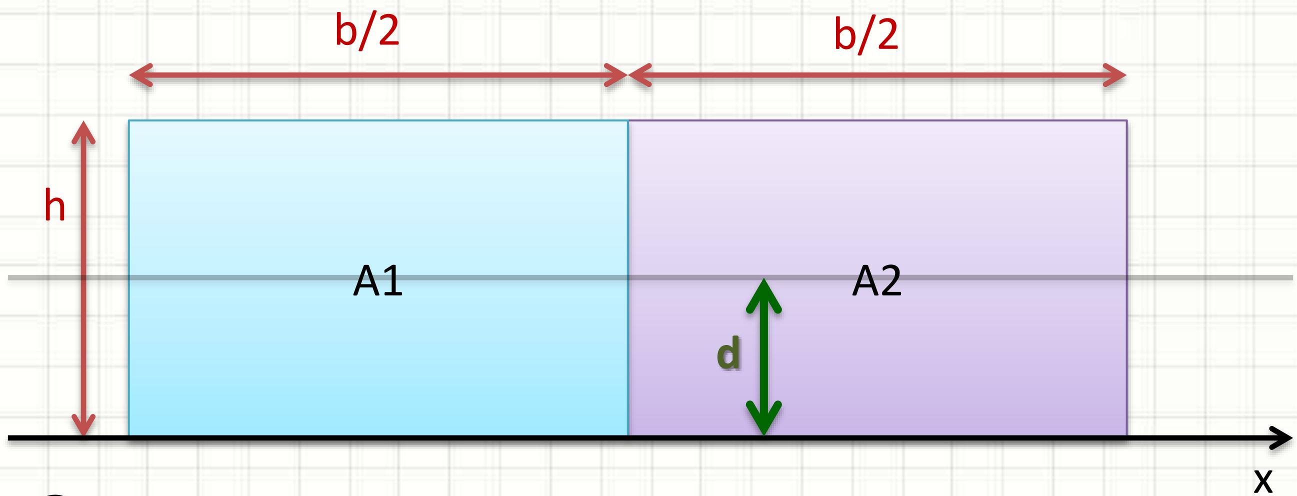
- **S_x = ?**
- $S_x = A.d =$
- $S_x = (b.h).\frac{h}{2} =$

$$S_x = \frac{b.h^2}{2}$$

Anotem!

Momento Estático

- E se a área for considerada em duas partes?



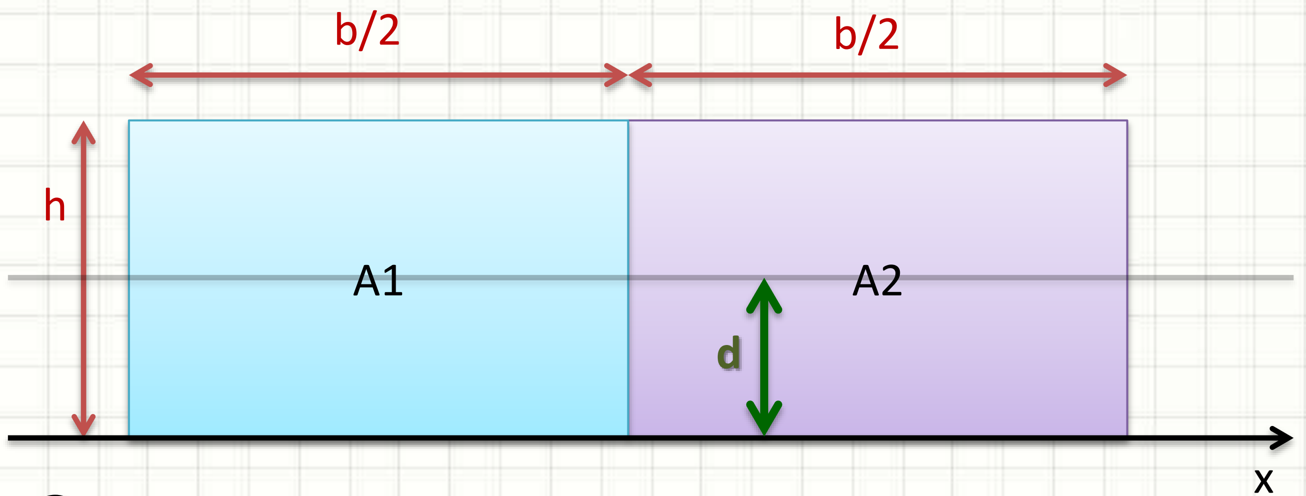
- **S_x = ?**

S_x = A1 · d + A2 · d =

$$S_x = \left(\frac{b}{2}.h\right).\frac{h}{2} + \left(\frac{b}{2}.h\right).\frac{h}{2} \Rightarrow \quad S_x = \left(\frac{b}{4}.h^2\right) + \left(\frac{b}{4}.h^2\right) =$$

Momento Estático

- E se a área for considerada em duas partes?



- **S_x = ?**

$$S_x = \left(\frac{b}{4}.h^2\right) + \left(\frac{b}{4}.h^2\right) \Rightarrow$$

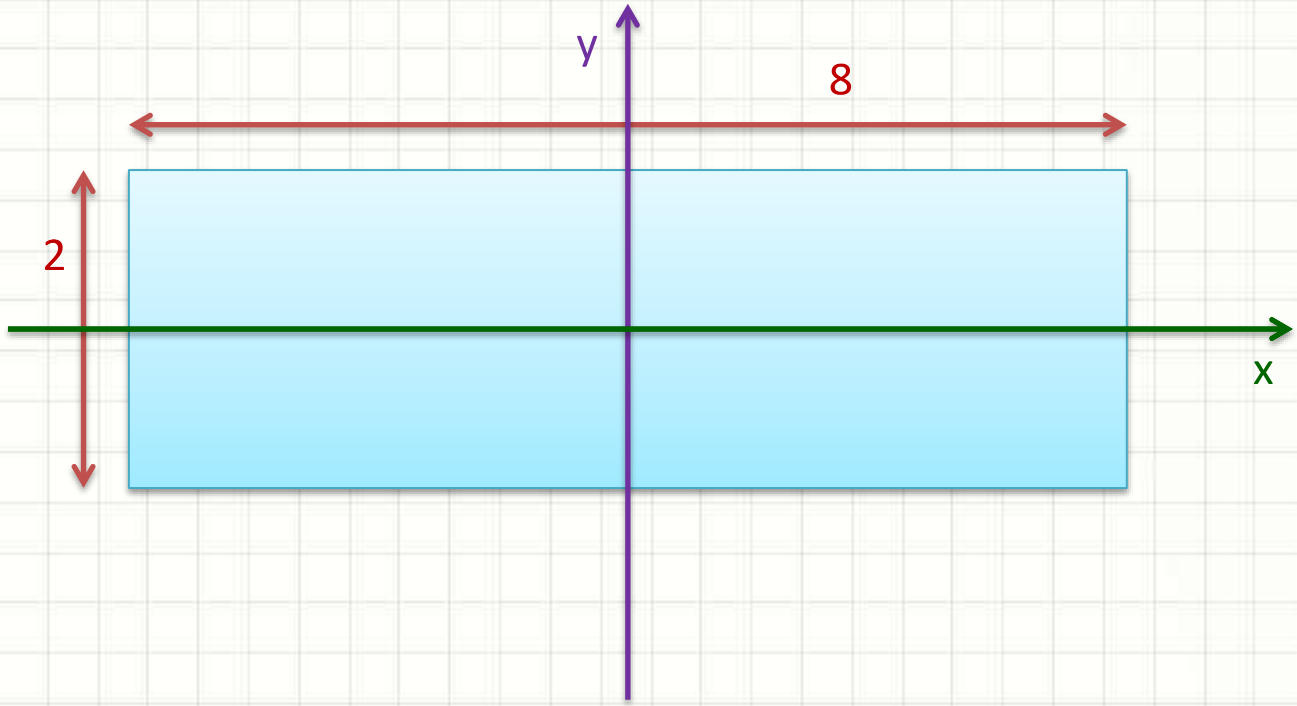
$$S_x = 2.\left(\frac{b}{4}.h^2\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S_x = \frac{b.h^2}{2}}$$

Comparem!

Momento Estático

- E quando há simetria?

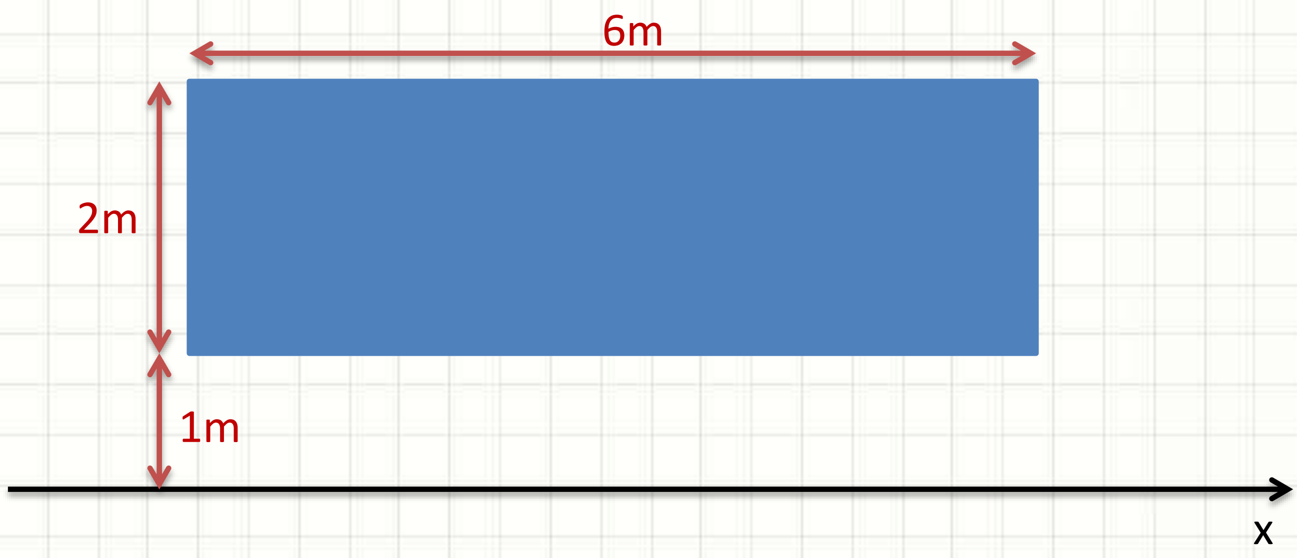


- Simétrico a X? → $\mathbf{S_x = 0}$
- Simétrico a Y? → $\mathbf{S_y = 0}$

Exercício

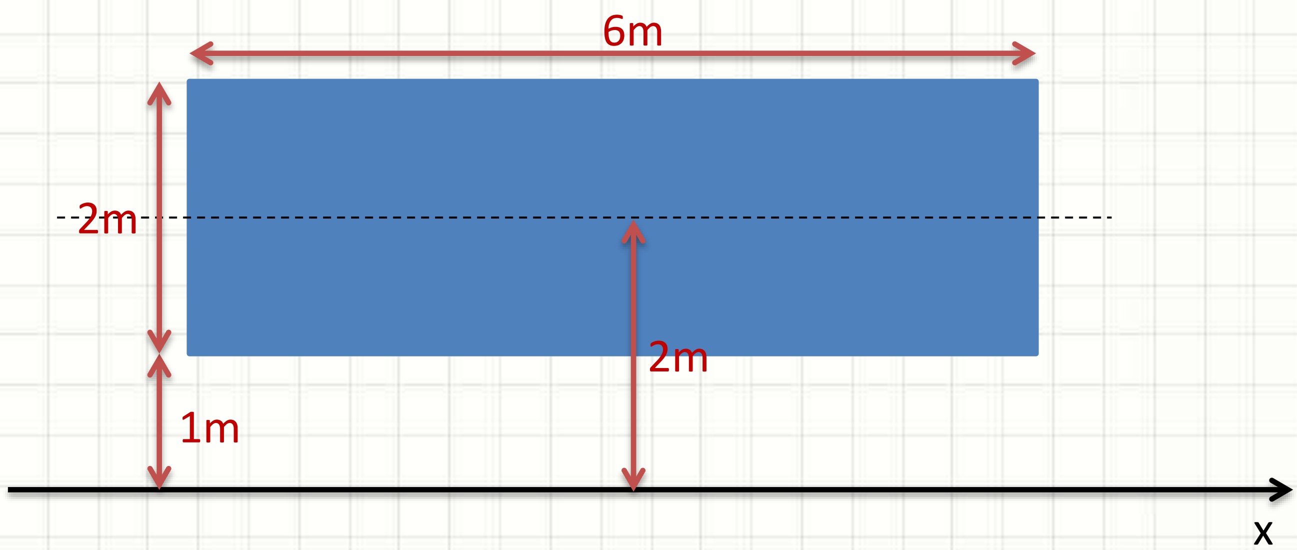
Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo



Exercício

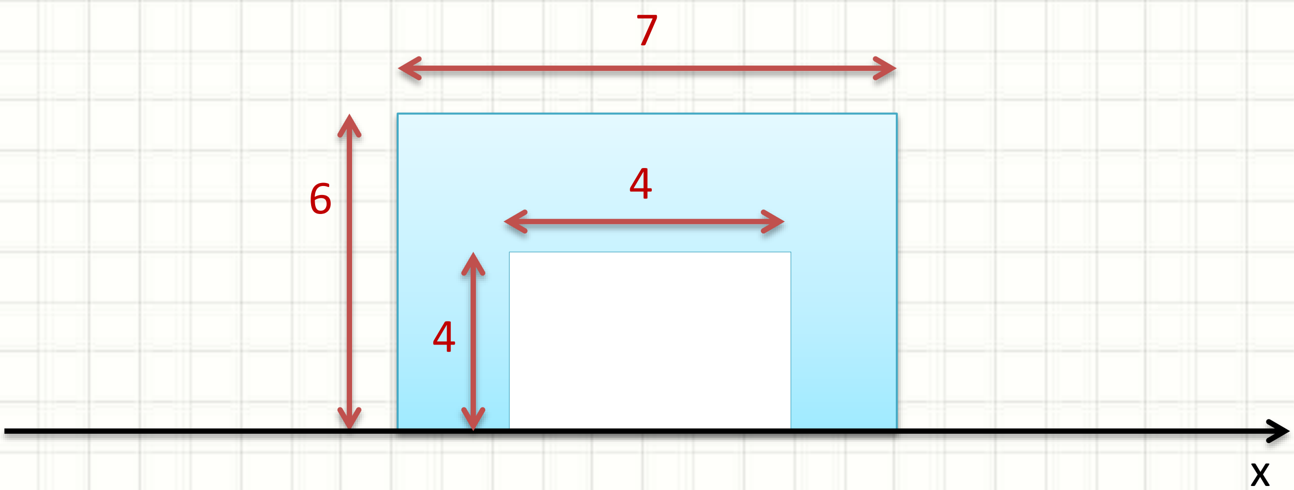
- Calcule o momento estático da figura abaixo



Momento Estático Calculado por Partes

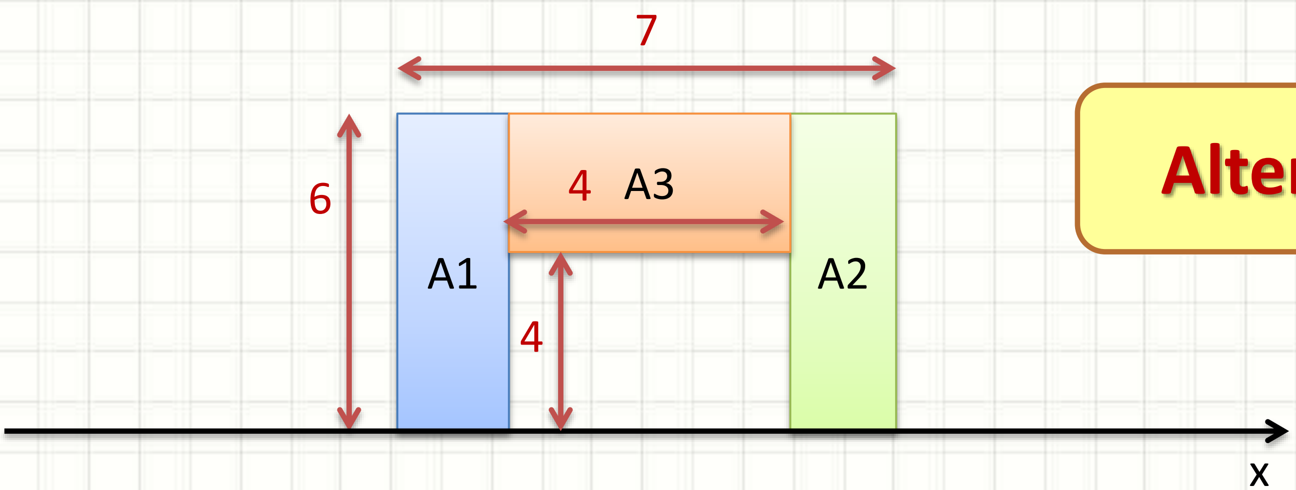
Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul



Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul

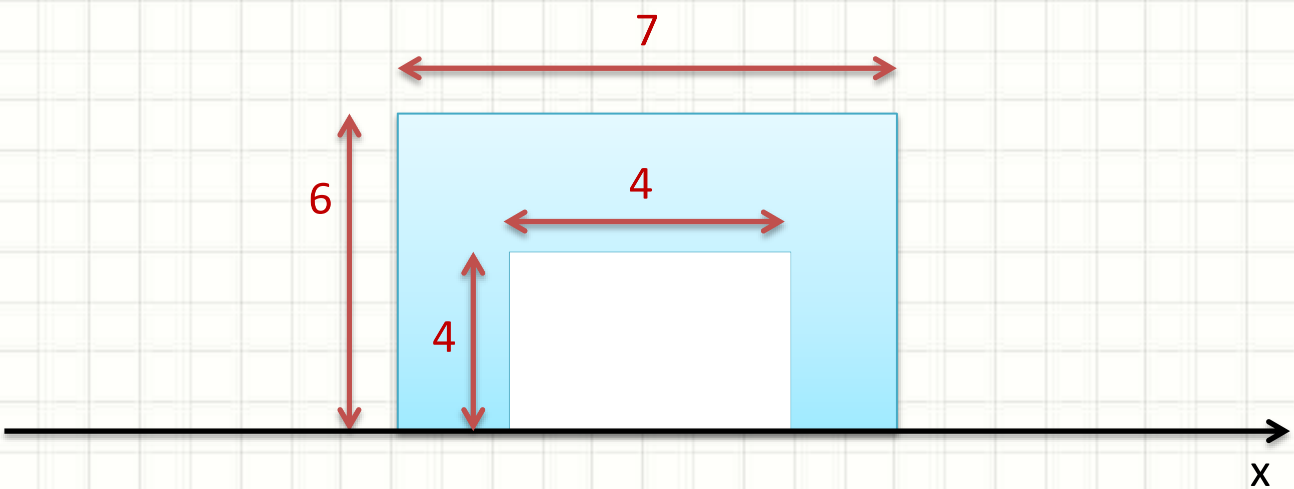


Alternativa?

- $S_{xAzul} = SxA_1 + Sx_{A2} + SxA_3$

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x da área Azul

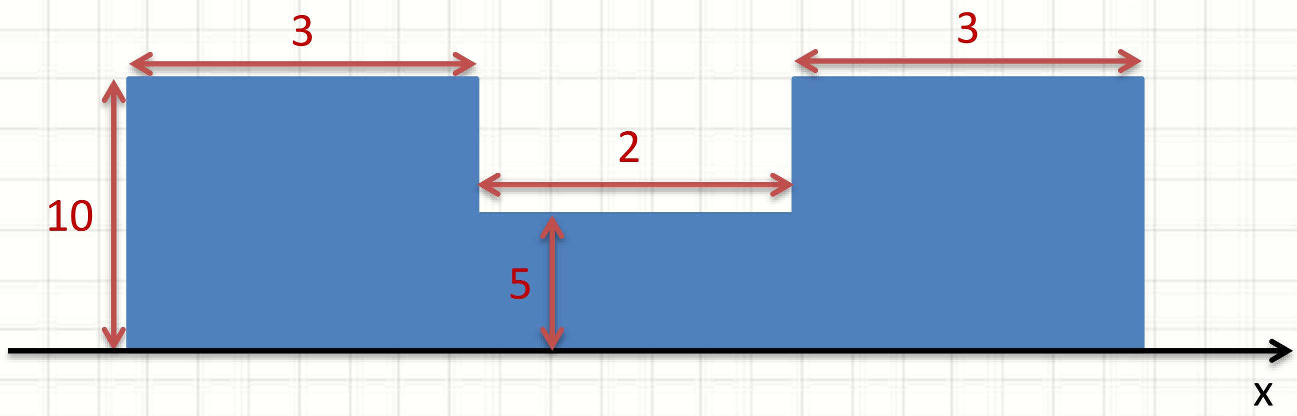


- $S_{xAzul} = SxRetAzul - S_{xRetBranco}$
- $S_{xAzul} = \frac{b1 \cdot h1^2}{2} - \frac{b2 \cdot h2^2}{2} =$
- $\boldsymbol{S_{xAzul} = \frac{7 \cdot 36}{2} - \frac{4 \cdot 16}{2} =}$ 126 – 32 = **94**

Exercícios

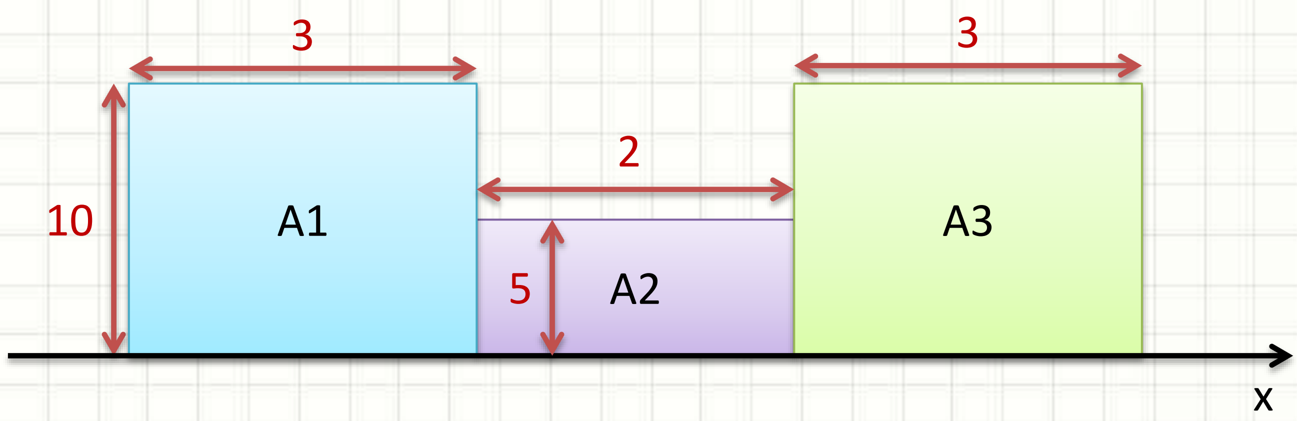
Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo



Exercício

- Calcule o momento estático da figura abaixo

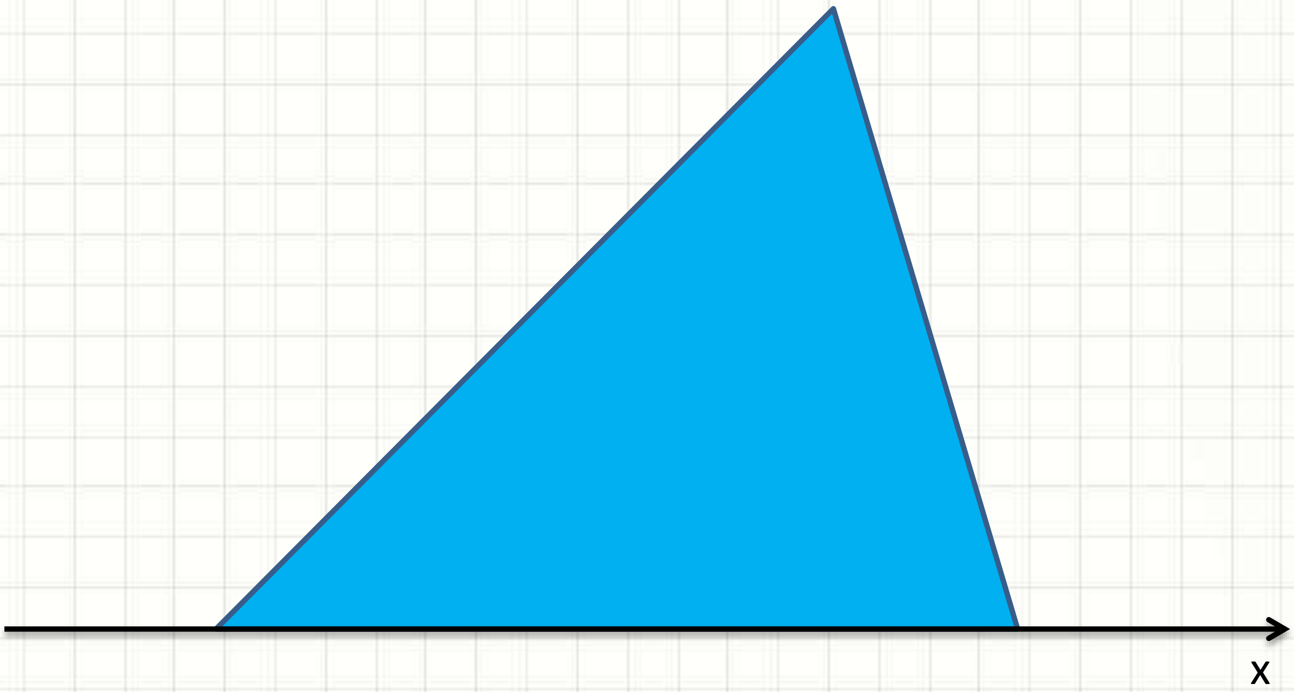


- $S_x = S_{xA1} + S_{xA2} + S_{xA3}$

Momento Estático em Regiões Planas Genéricas

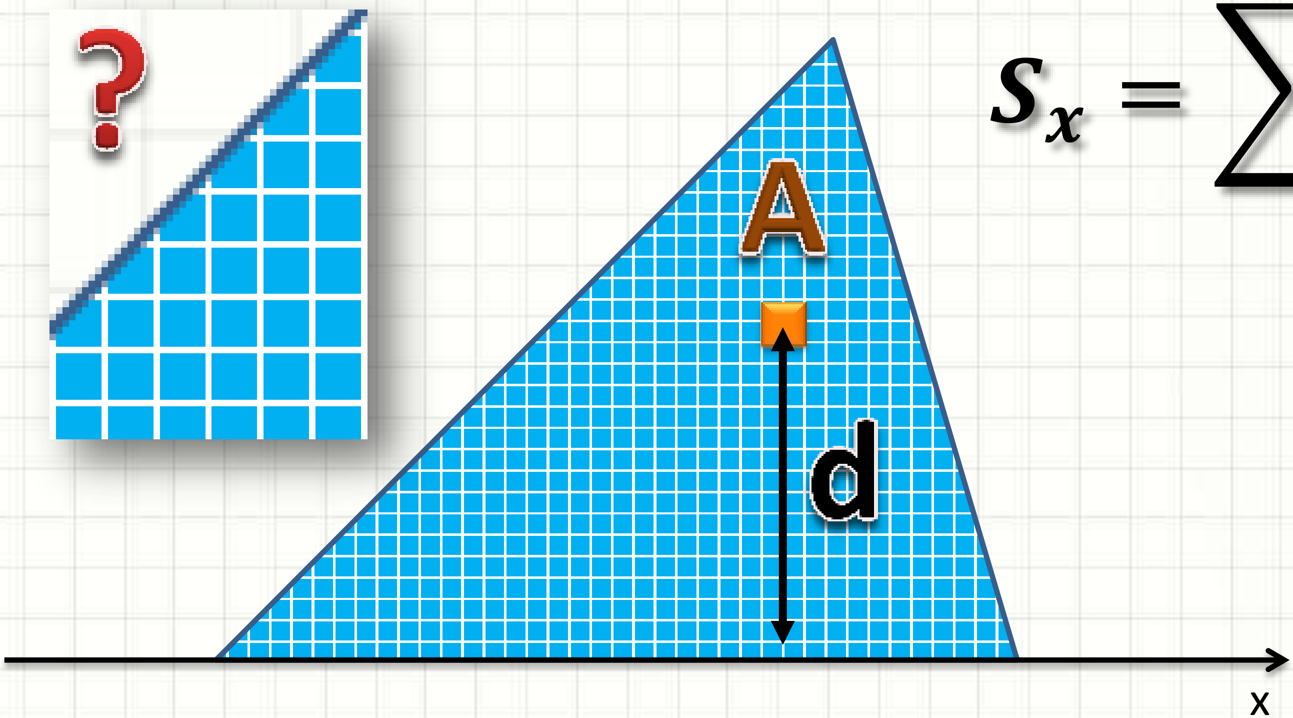
Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?

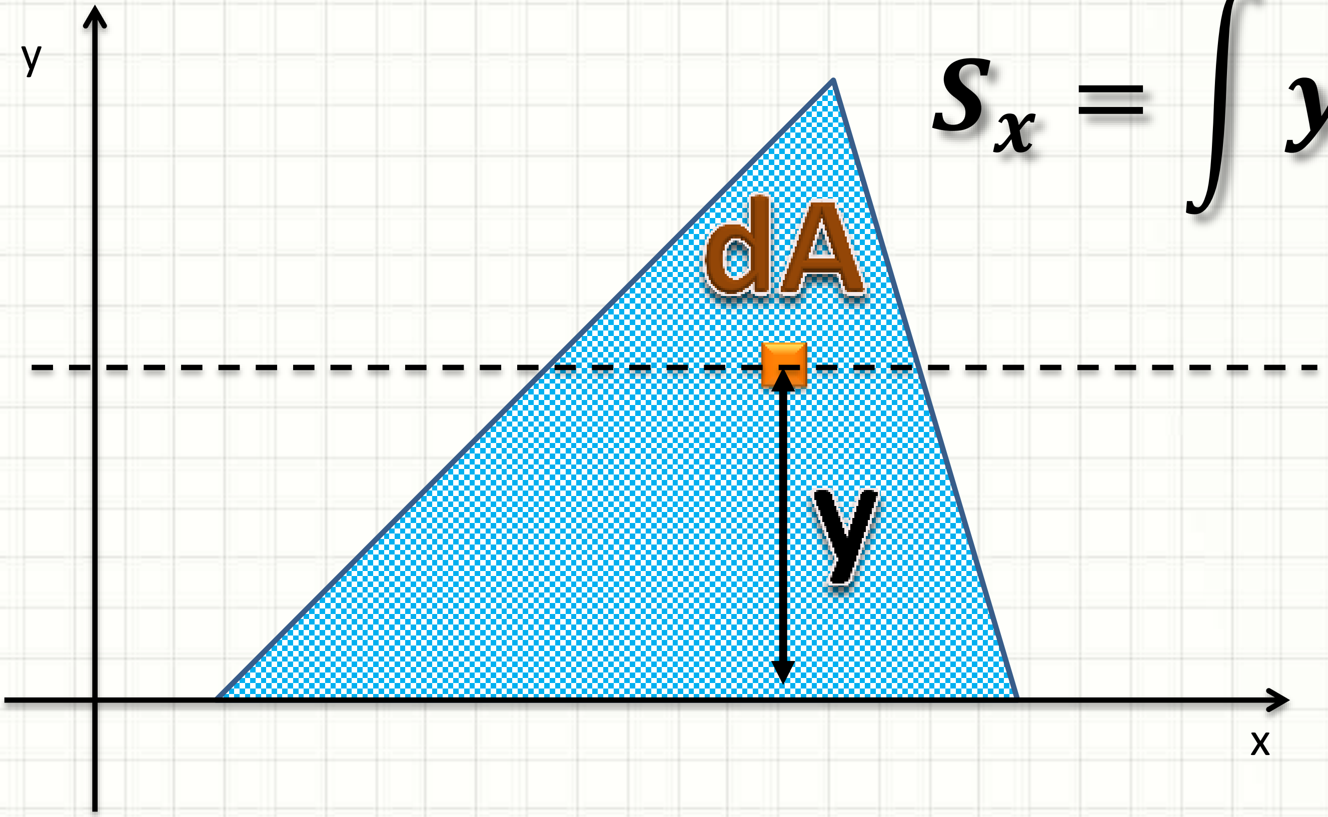


$$S_x = \sum d.A$$

Momento Estático

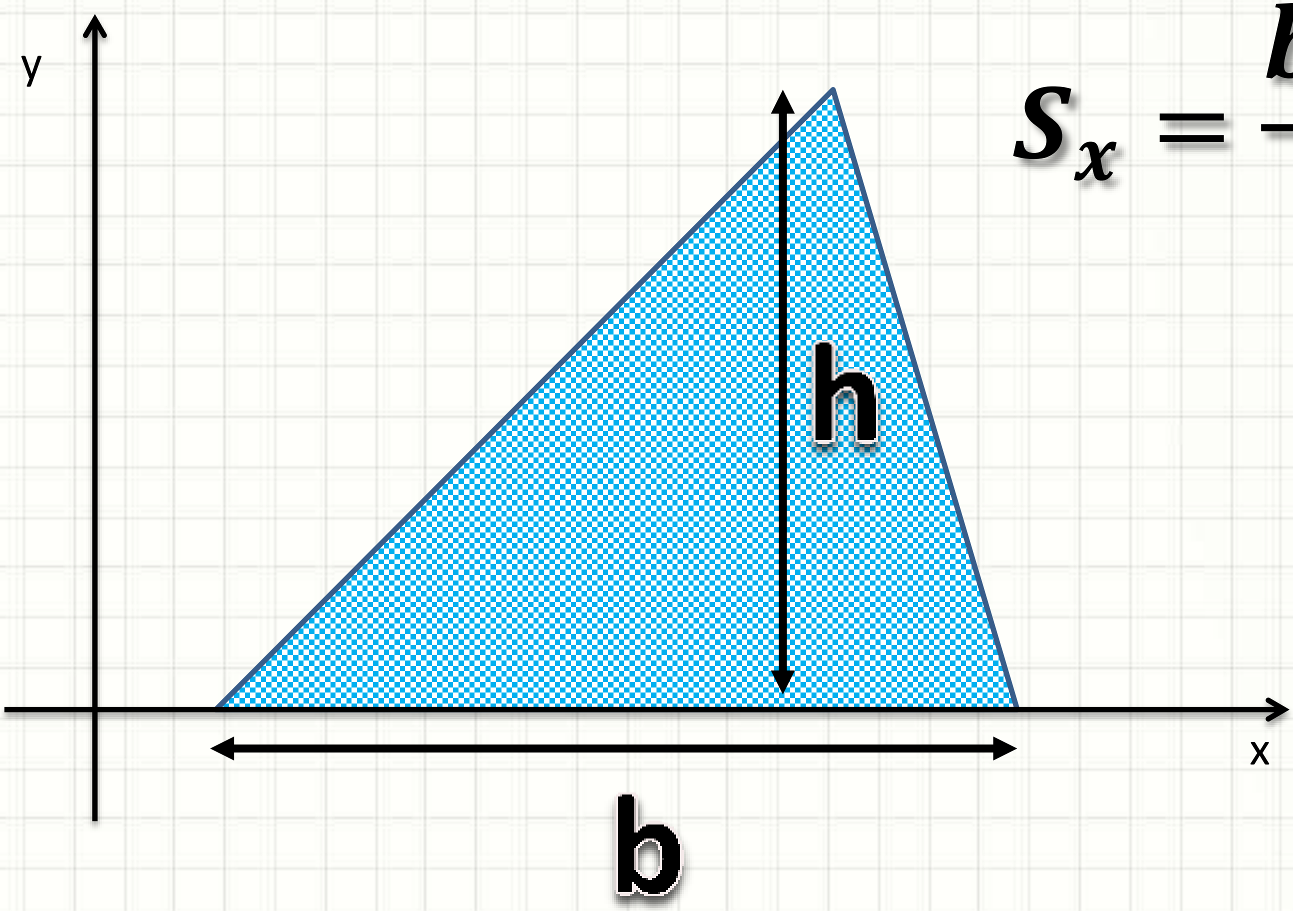
- E se a figura não tiver simetria?

$$S_x = \int y.dA$$



Momento Estático

- E se a figura não tiver simetria?



$$S_x = \frac{b.h^2}{6}$$

Momento Estático

- Cálculo genérico

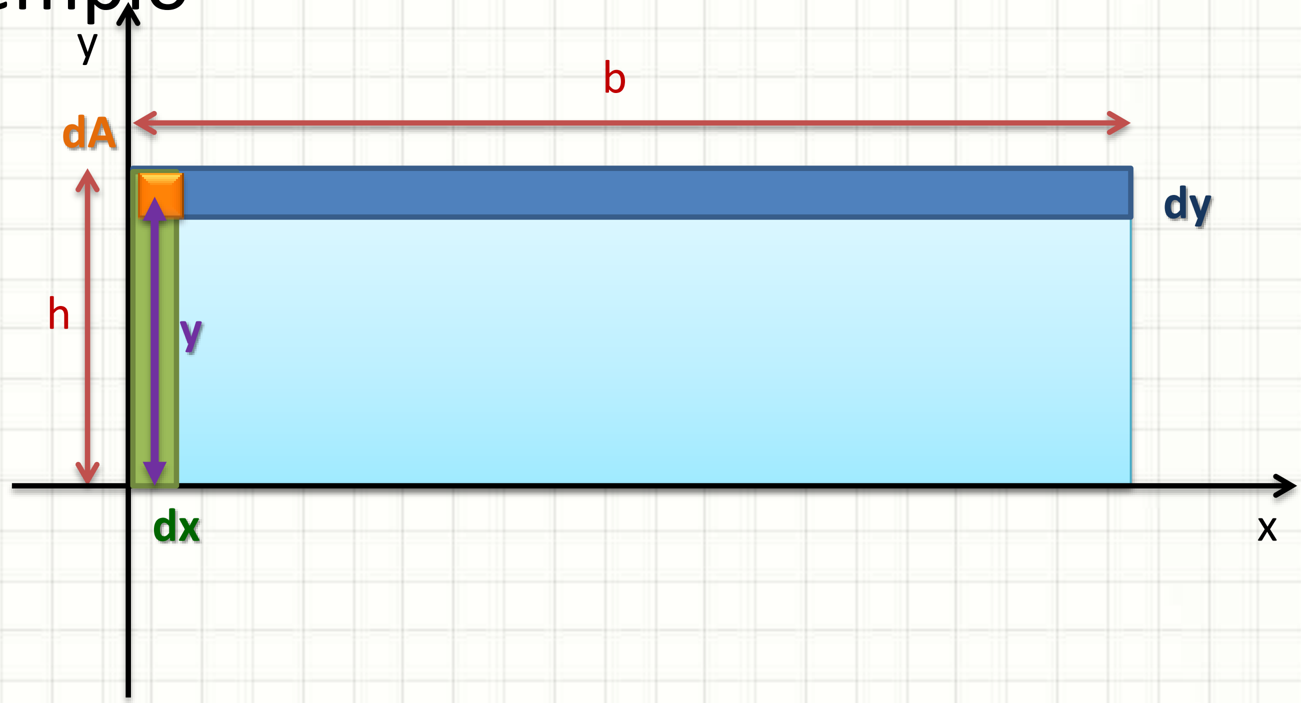
$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

- Unidade S = $[L^3]$

Momento Estático

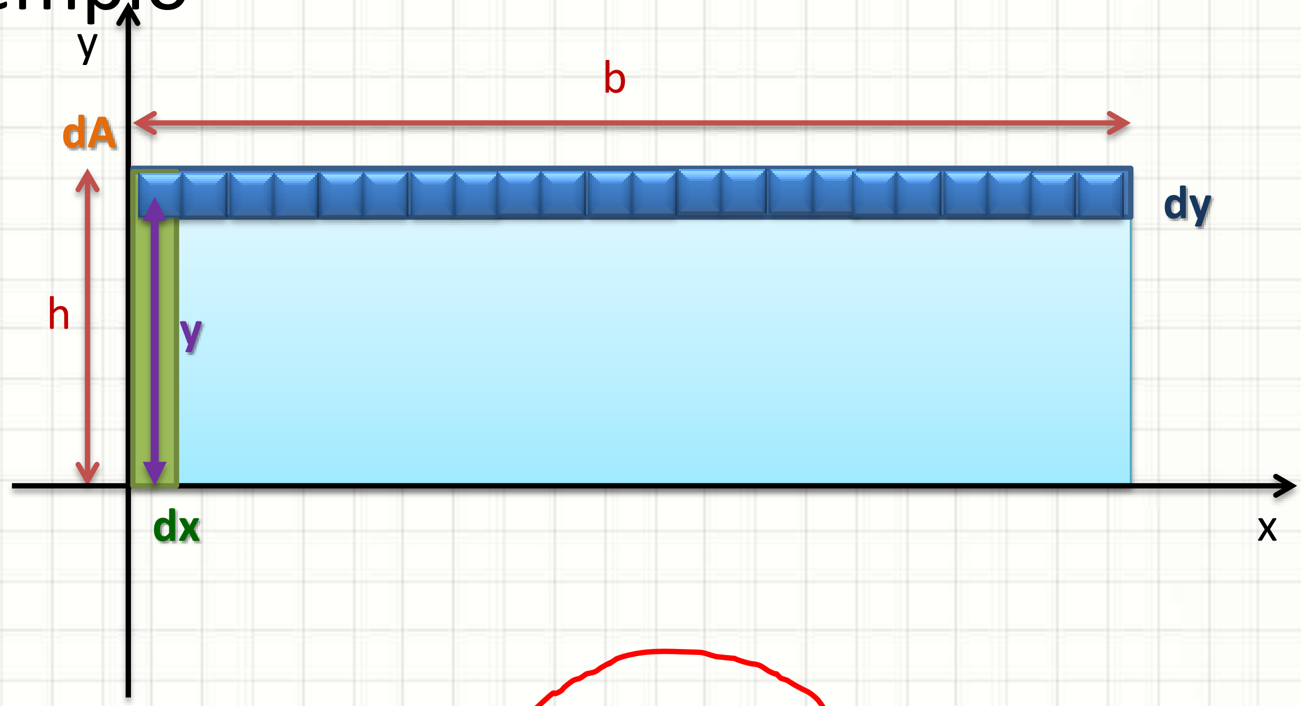
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx . dy =$$

Momento Estático

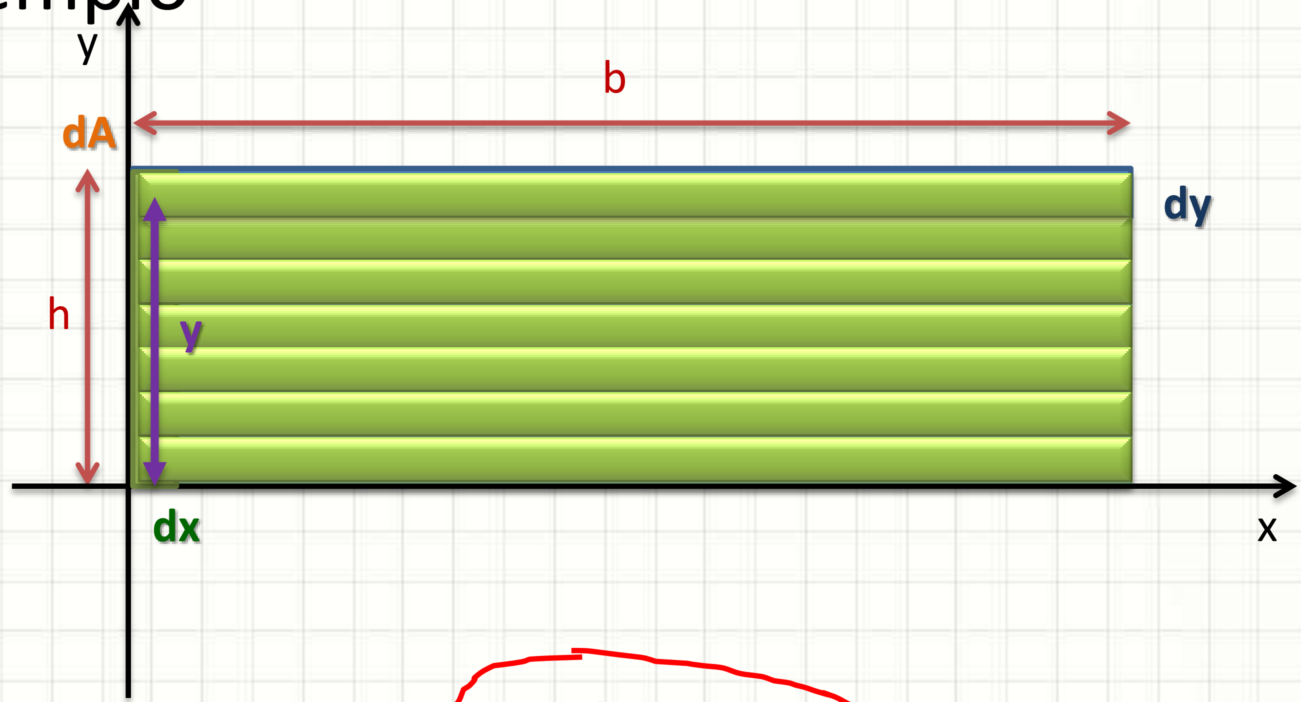
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx.dy =$$

Momento Estático

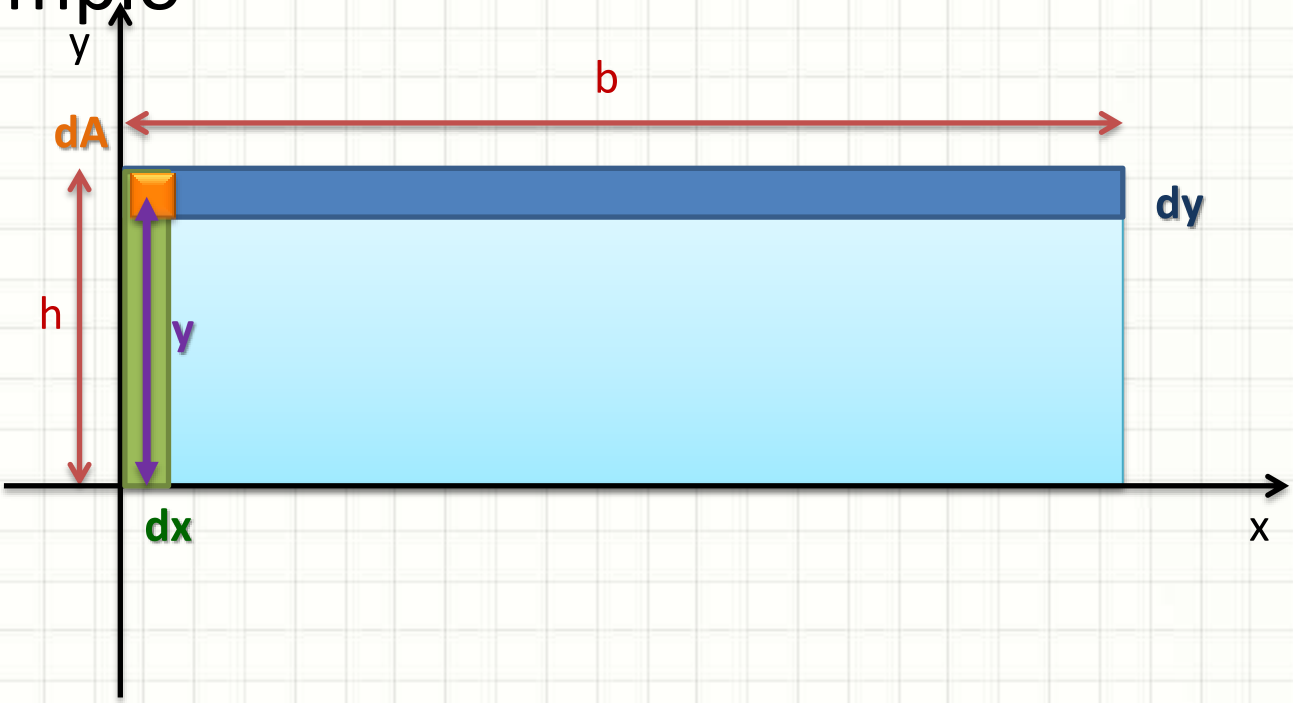
- Exemplo



$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx . dy =$$

Momento Estático

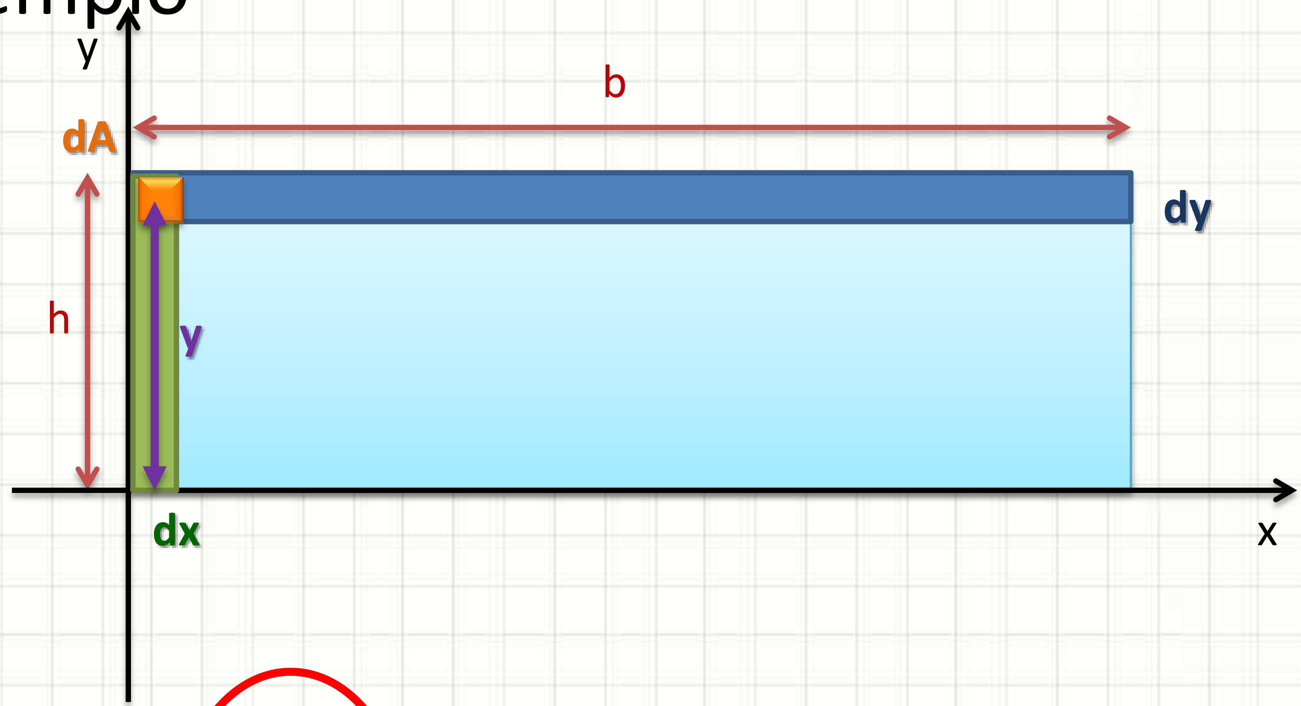
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h \int_0^b y \cdot dx.dy = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx.dy =$$

Momento Estático

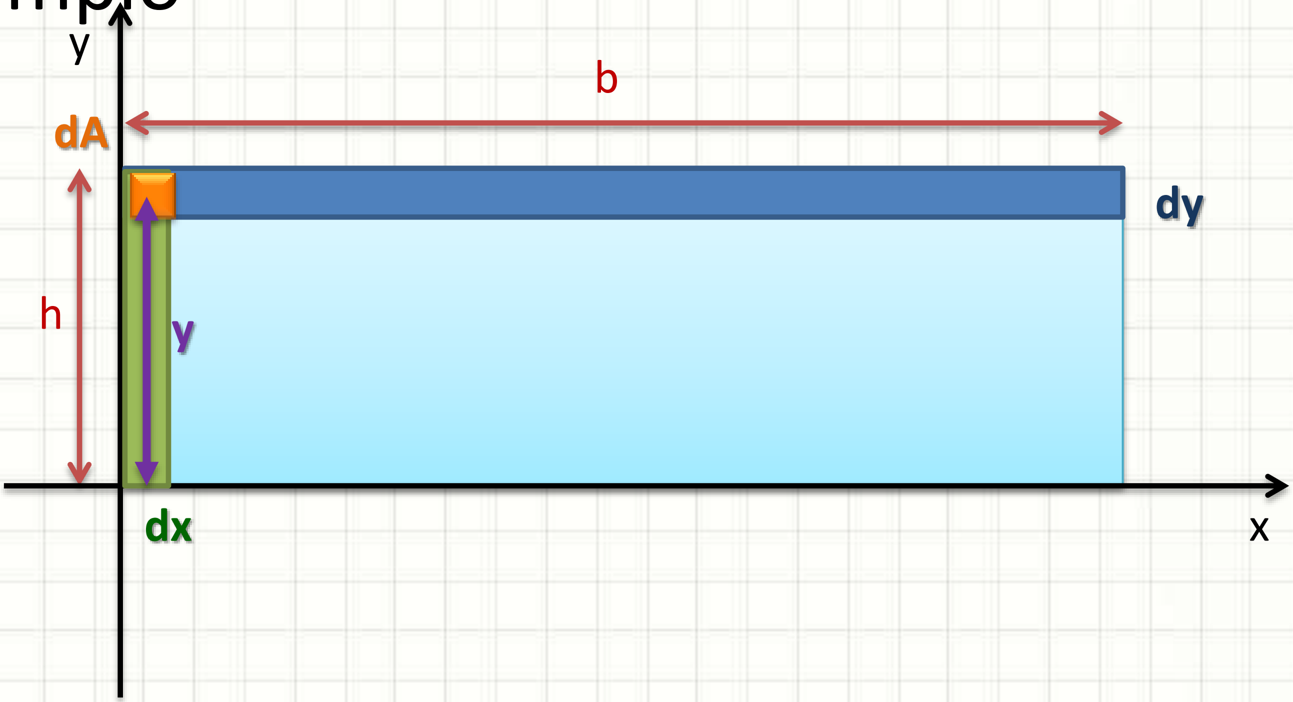
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot \int_0^b dx . dy = \int_0^h y \cdot b \cdot dy =$$

Momento Estático

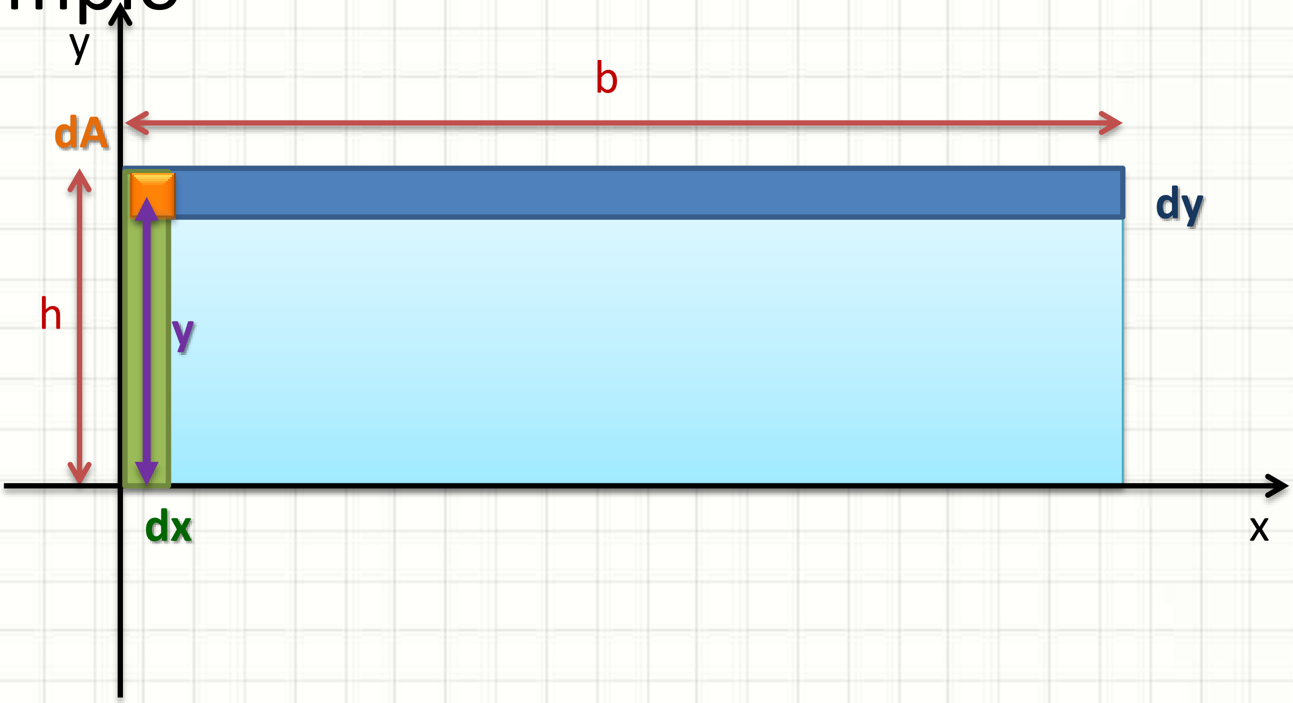
- Exemplo



$$S_x = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = \; b \cdot \int_0^h y \cdot dy =$$

Momento Estático

- Exemplo

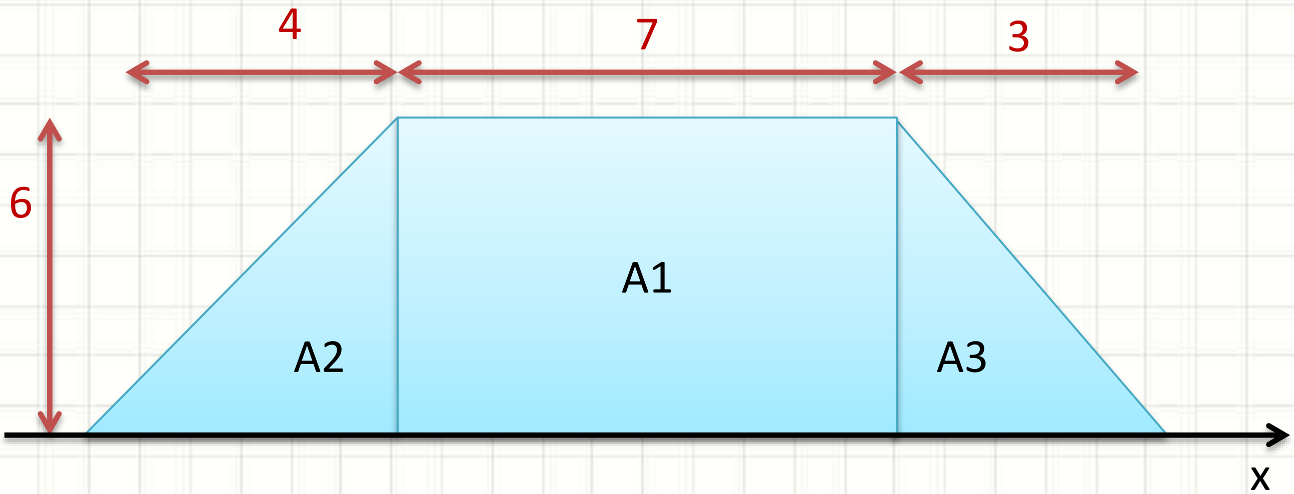


$$S_x = b \cdot \int_0^h y \cdot dy = b \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Momento Estático Calculado por Partes

Momento Estático

- Calcule o Momento Estático S_x:



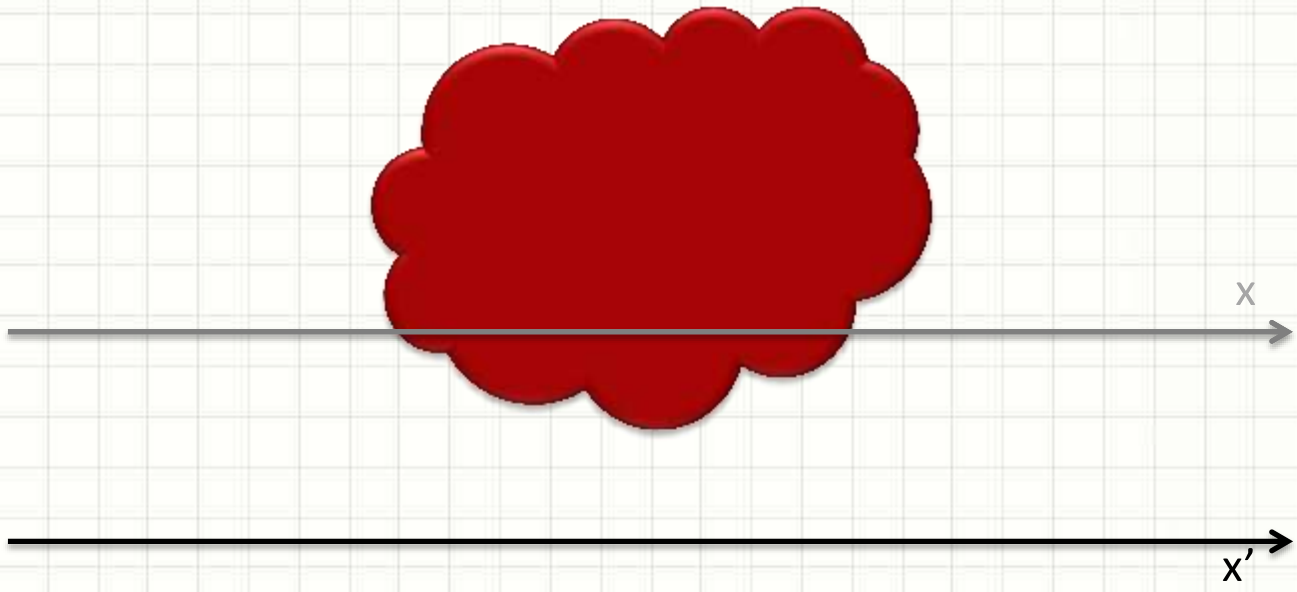
- $S_x = SxA_1 + Sx_{A2} + SxA_3$
- $S_x = \frac{b_1 \cdot h^2}{2} + \frac{b_2 \cdot h^2}{6} + \frac{b_3 \cdot h^2}{6} = \frac{(3 \cdot b_1 + b_2 + b_3) \cdot h^2}{6}$
- $S_x = \frac{(3 \cdot 7 + 4 + 3) \cdot 36}{6} = 168$

Pausa para o Café!

Translação de Eixo no Momento Estático

Mudando o Eixo de Referência

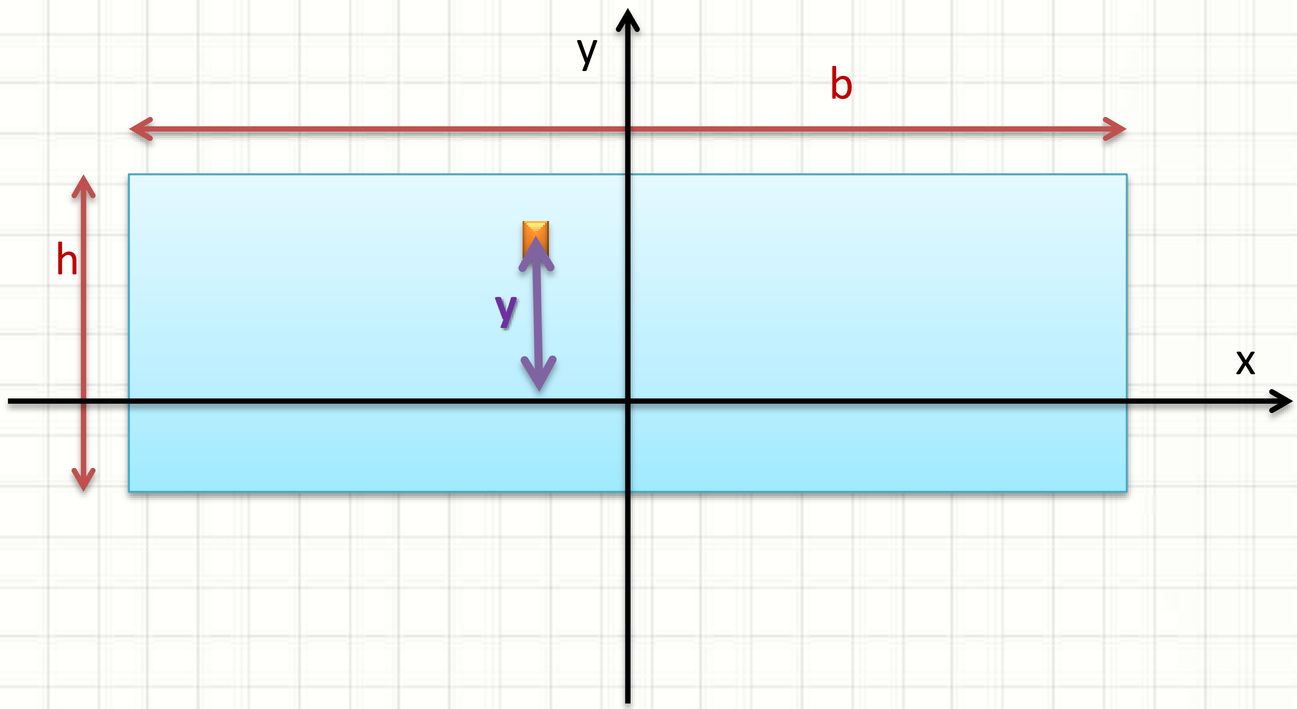
- Como calcular $S_{x'}$?



- Integral?
- Será que conhecer S_x ajuda?

Translação de Eixos

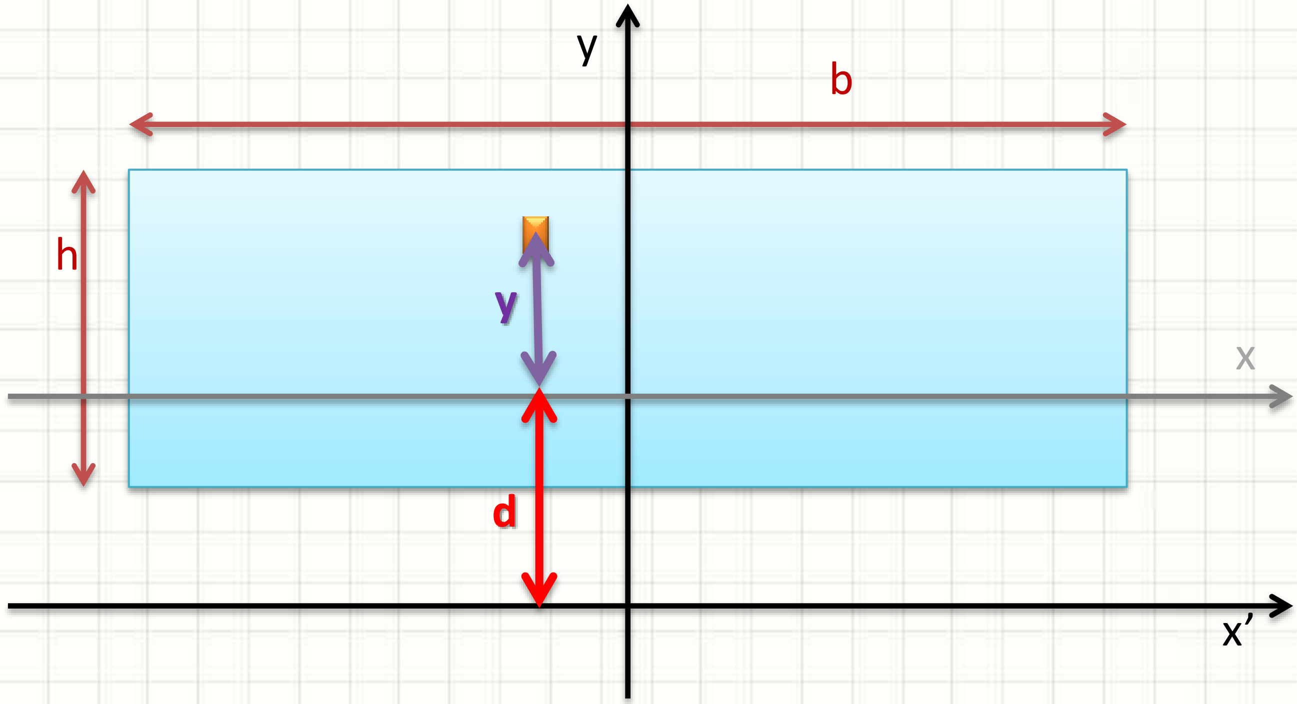
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

Translação de Eixos

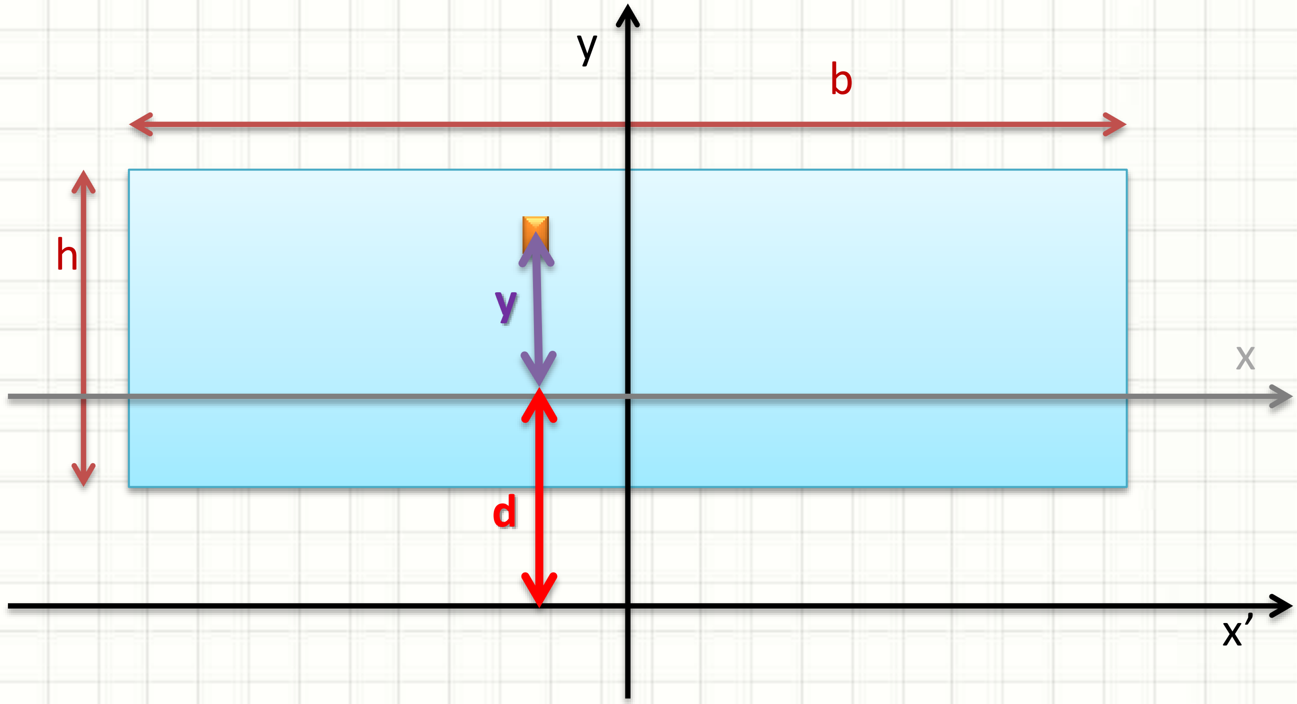
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_x = \int_A y \cdot dA \qquad S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA$$

Translação de Eixos

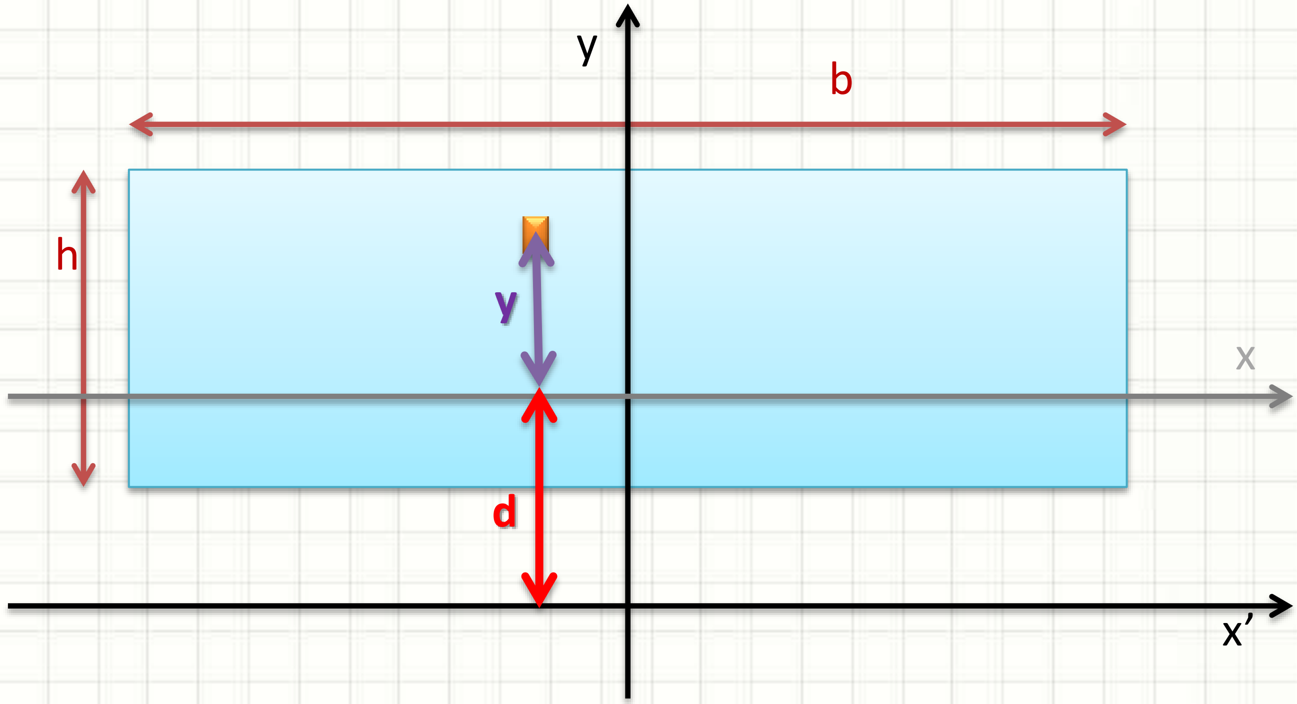
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_{x'} = \int_A (y + d) \cdot dA = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA$$

Translação de Eixos

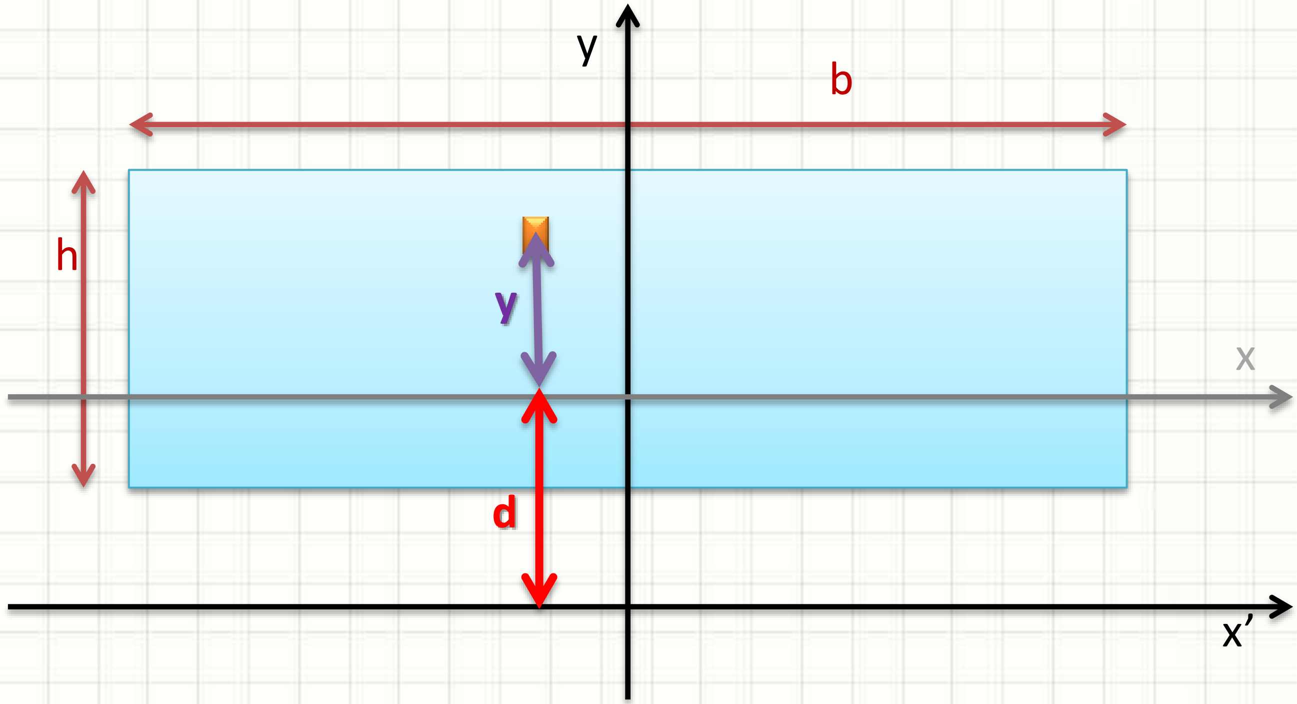
- Momento Estático   (S_x **conhecido**)



$$S_{x'} = \int_A y \cdot dA + \int_A d \cdot dA = \int_A y \cdot dA + d. \int_A dA$$

Translação de Eixos

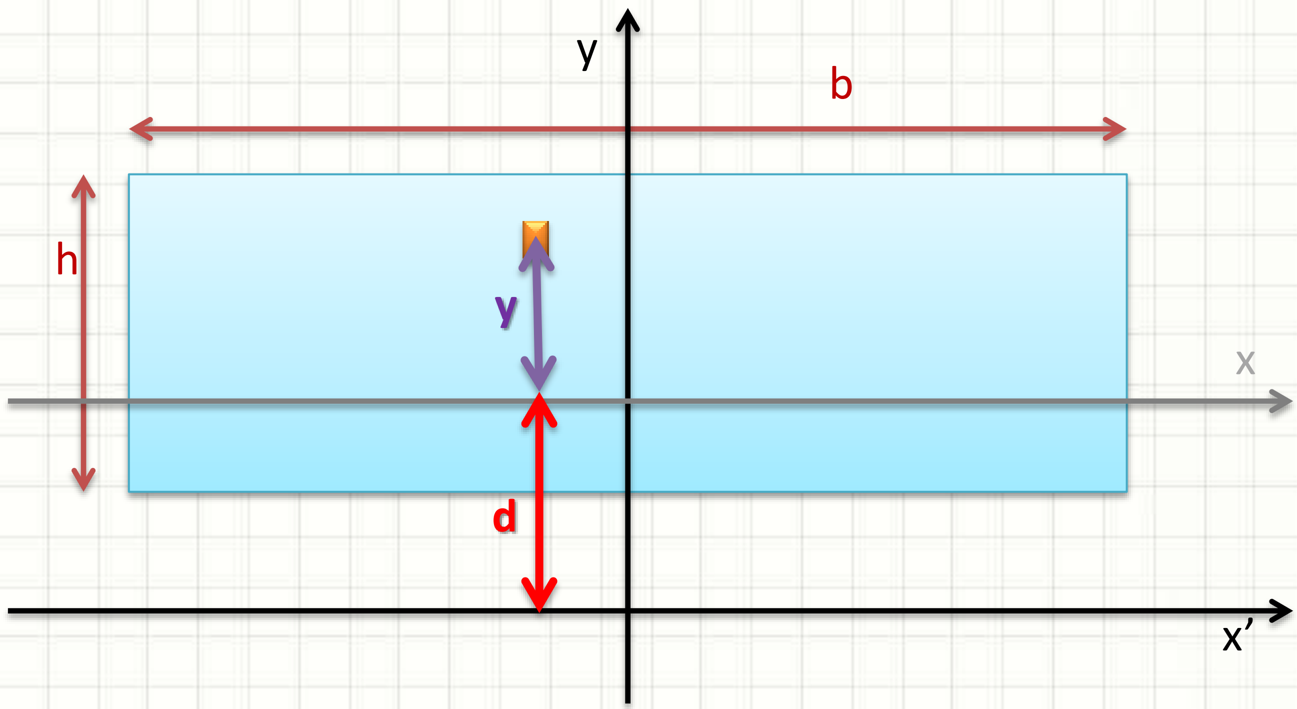
- Momento Estático (**S_x conhecido**)



$$S_{x'} = \boxed{\int_A y \cdot dA} + \boxed{d.\int_A dA}$$

Translação de Eixos

- Momento Estático (**S_x conhecido**)

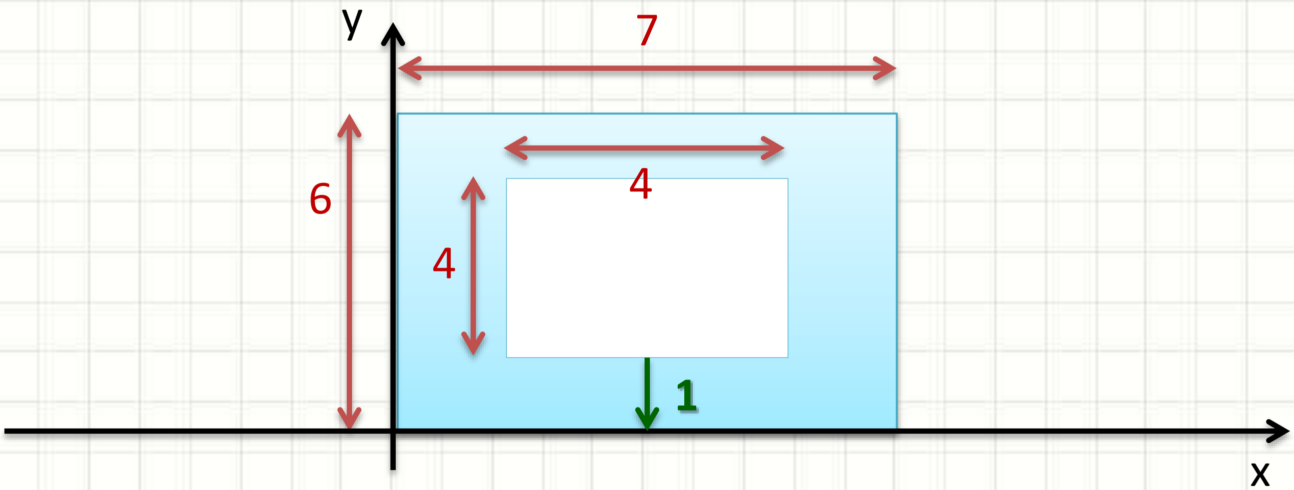


$$S_{x'} = S_x + d.A$$

ΔS

Translação de Eixo - Exemplo

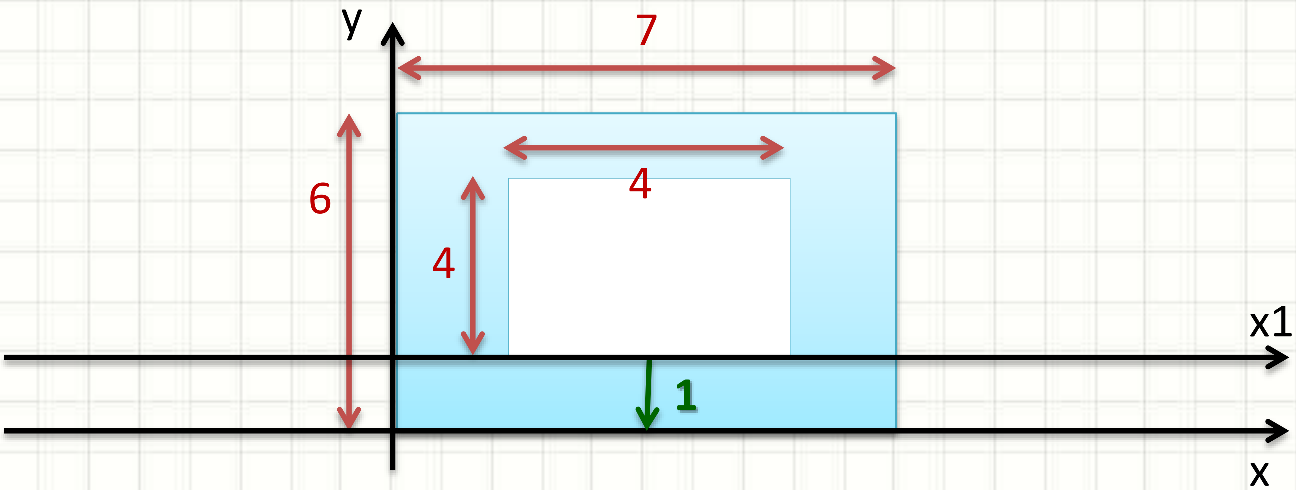
- Como calcular esse momento estático?



- $S_{xAzul} = S_{xRA} - S_{xRB}$
- Só que $\boldsymbol{S_{x_{RB}}} \neq \frac{\boldsymbol{b \cdot h^2}}{\boldsymbol{2}}$

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?

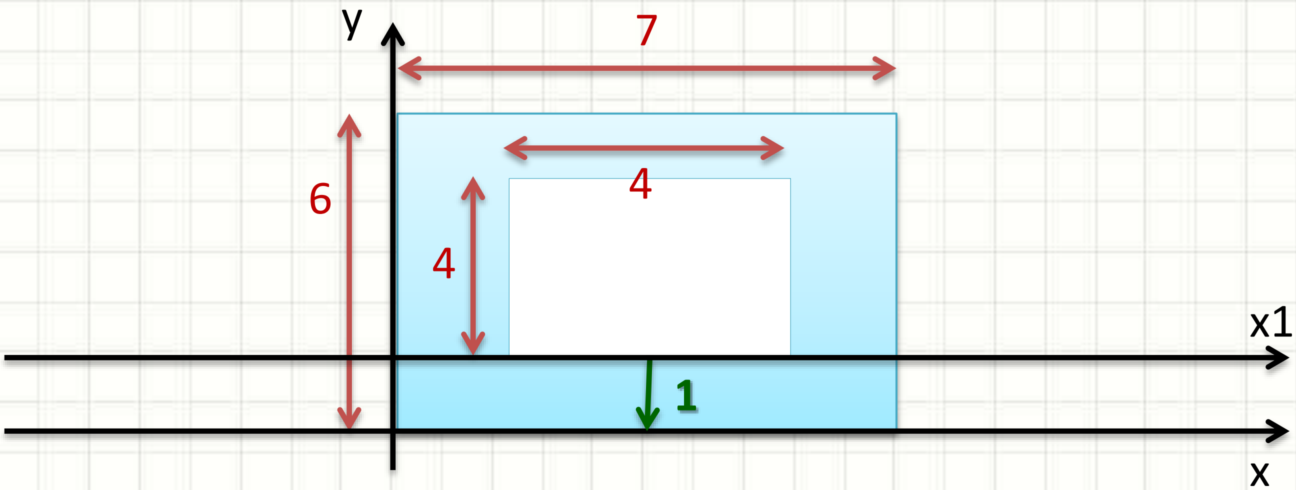


- Se temos o momento estático de um eixo, podemos calcular em outro
- $S_x = S_{x1} + d.A$
- d → Sinal?

d → ↑S se distanciando do centro
d → ↓S se aproximando do centro

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



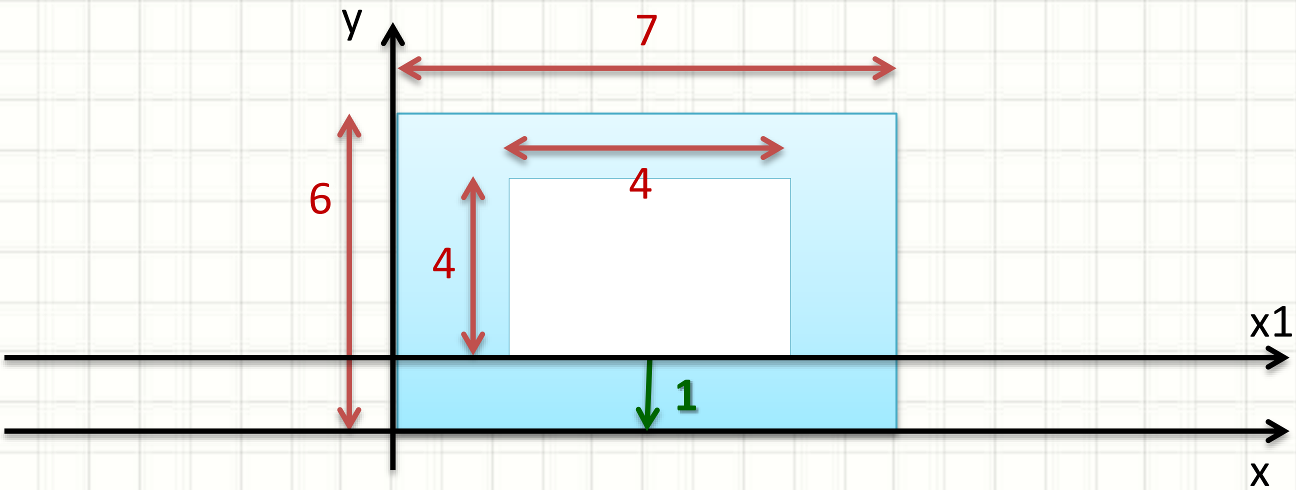
- Se temos o momento estático de um eixo, podemos calcular em outro
- $S_{xRB} = S_{x1RB} + d \cdot A$
- $\Delta S = \Delta y \cdot A = 1 \cdot 16 = 16$

Sinal S_{xRB} = ?

Sinal ΔS = ?

Translação de Eixo - Exemplo

- Como calcular esse momento estático?



- Logo...

$$S_{xRB} = S_{x1RB} + d.\,A = \frac{b \cdot h^2}{2} + 16 = \frac{4 \cdot 16}{2} + 16 = \mathbf{48}$$

$$S_{xAzul} = S_{xRA} - S_{xRB} = 126 - 48 = \mathbf{78}$$

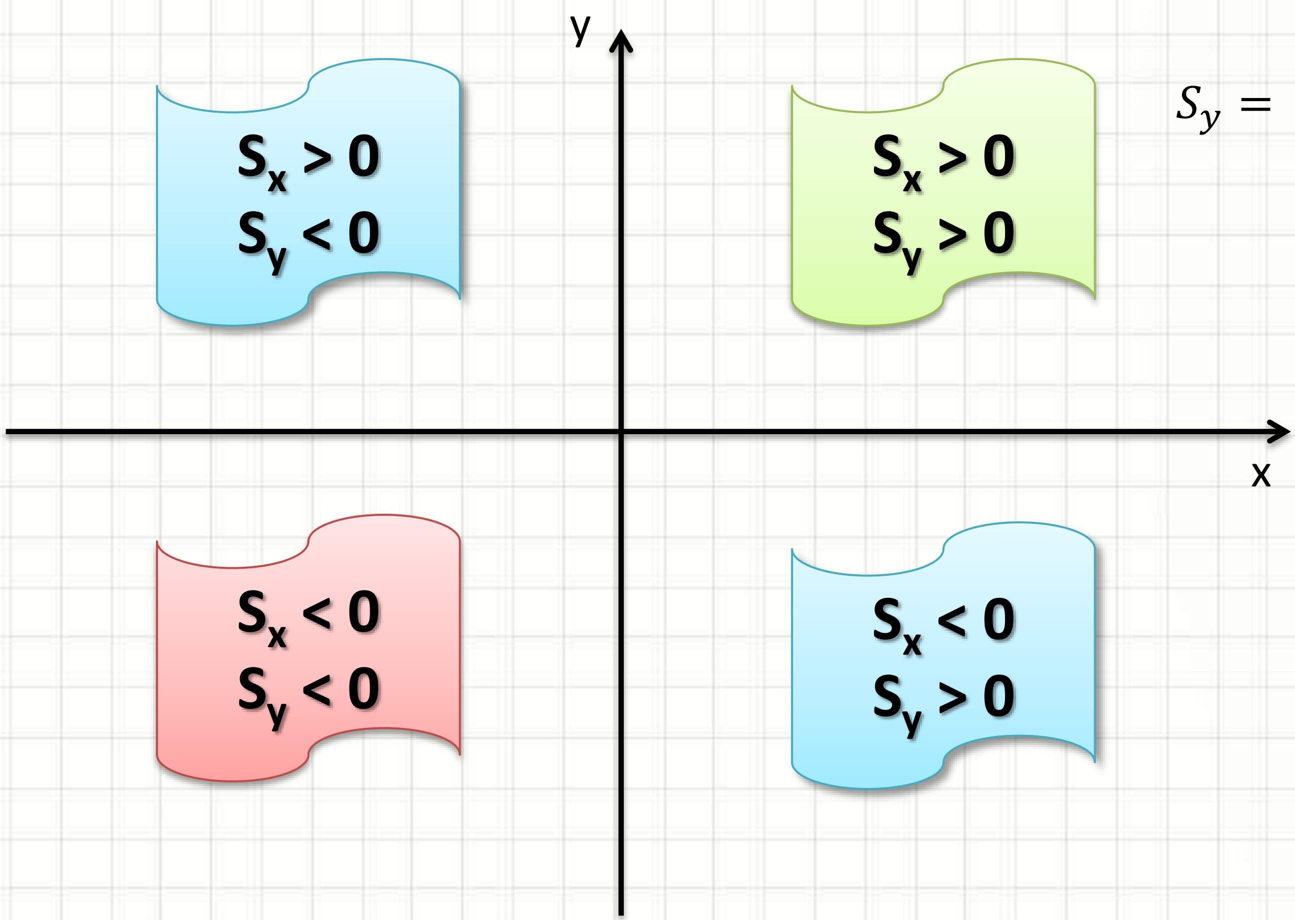
Sinal do Momento Estático

Sinal do Momento Estático

- Depende do "quadrante" da área

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

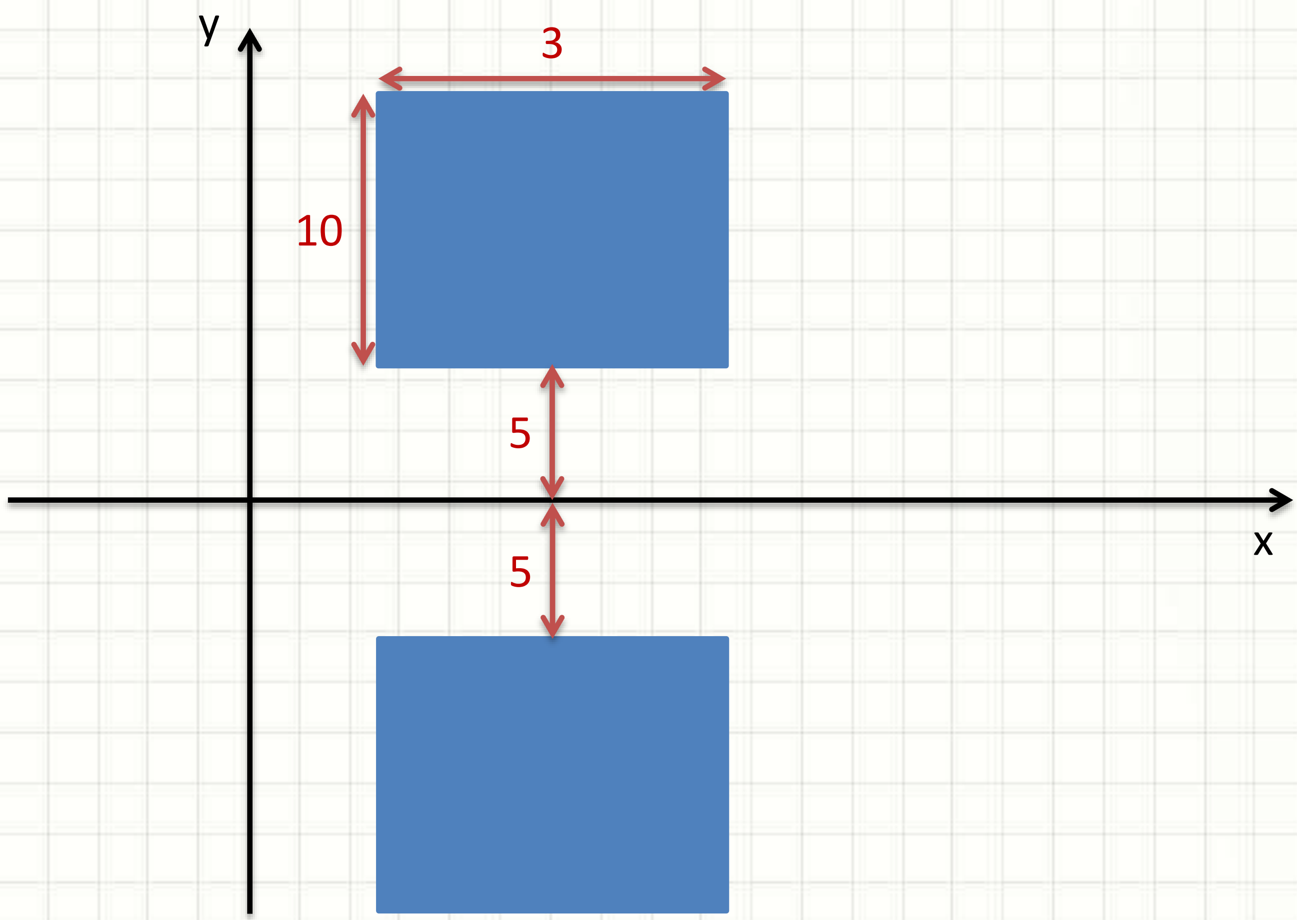
$$S_y = \int_A x \cdot dA$$



Exercícios

Exercício

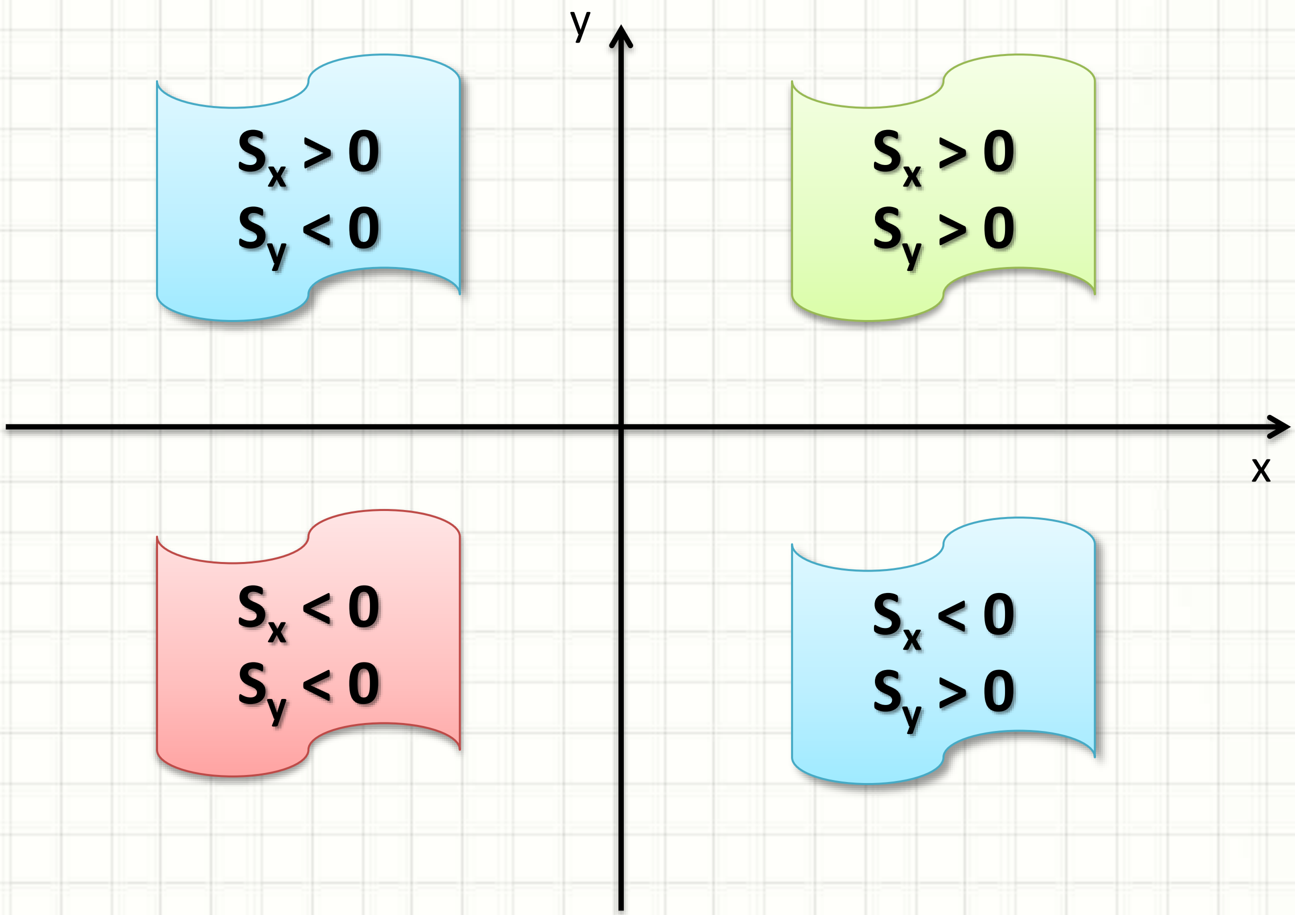
- Calcule o momento estático S_x da figura:



Consequências do Sinal do Momento Estático

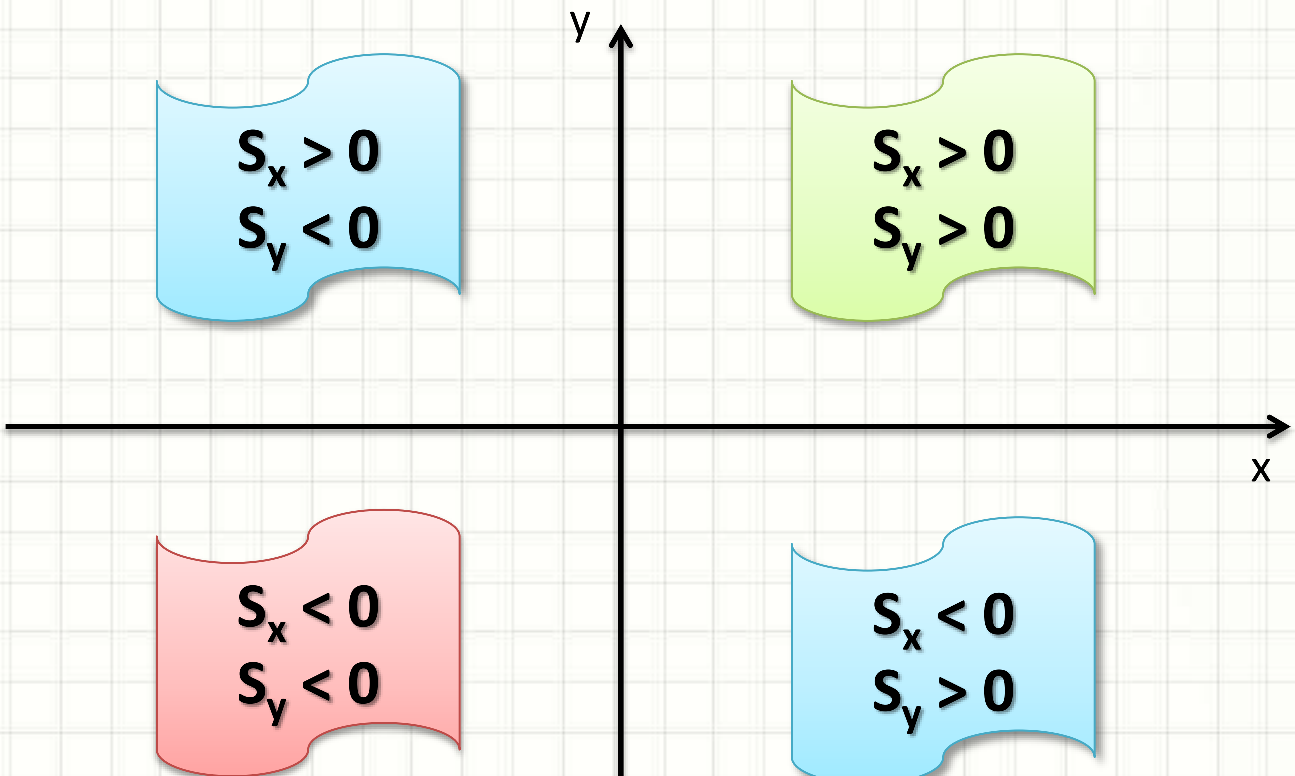
Consequências do Sinal no M.E.

- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Consequências do Sinal no M.E.

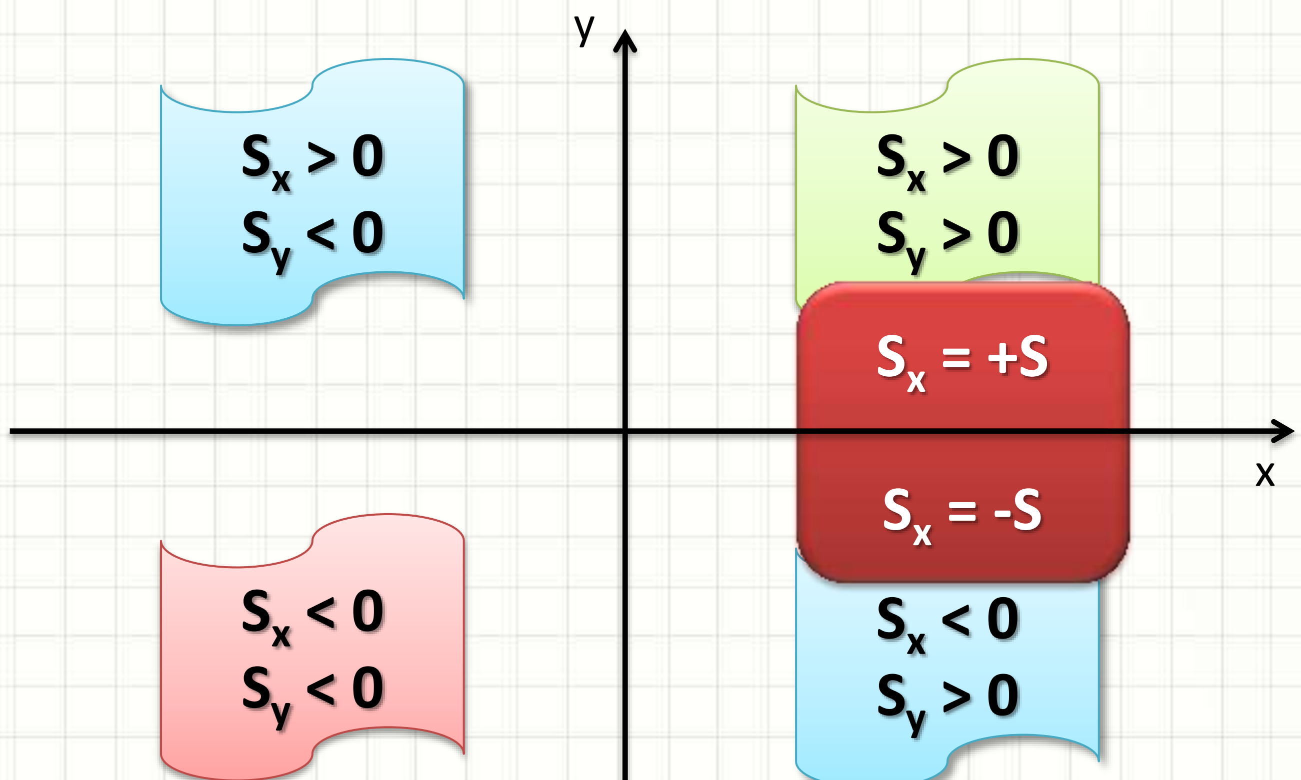
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Por isso a simetria leva a momento estático igual a zero!

Consequências do Sinal no M.E.

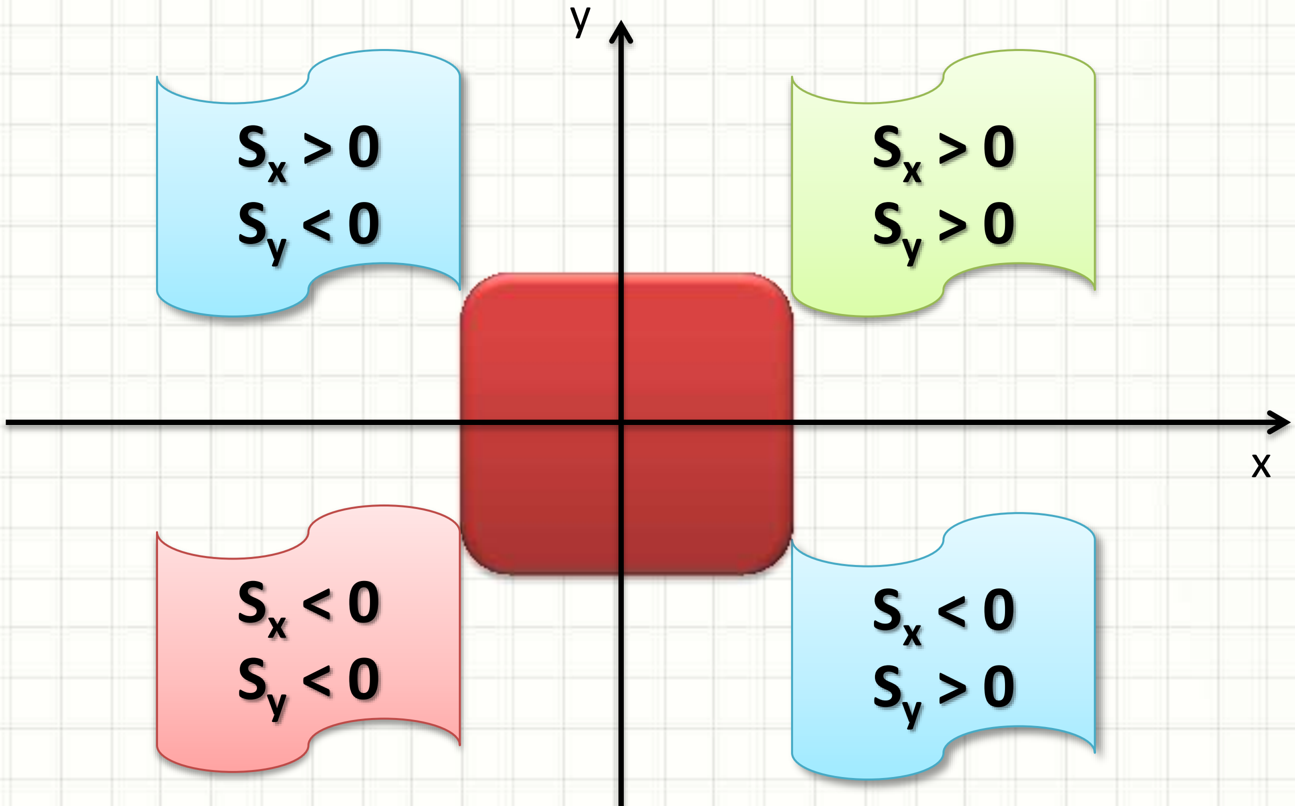
- Como vimos... O sinal depende do quadrante:



Por isso a simetria leva a momento estático igual a zero!

Consequências do Sinal no M.E.

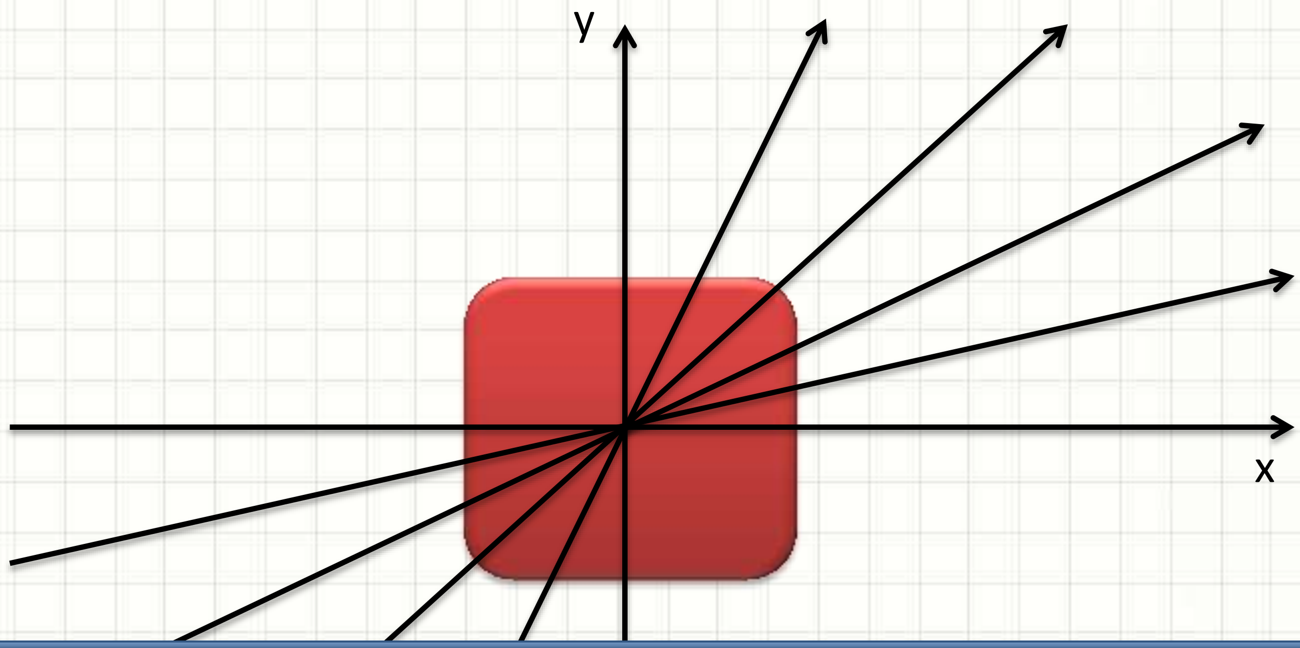
- O ponto em que Sx e Sy da área são zero...



É o centro da área: centroide

Consequências do Sinal no M.E.

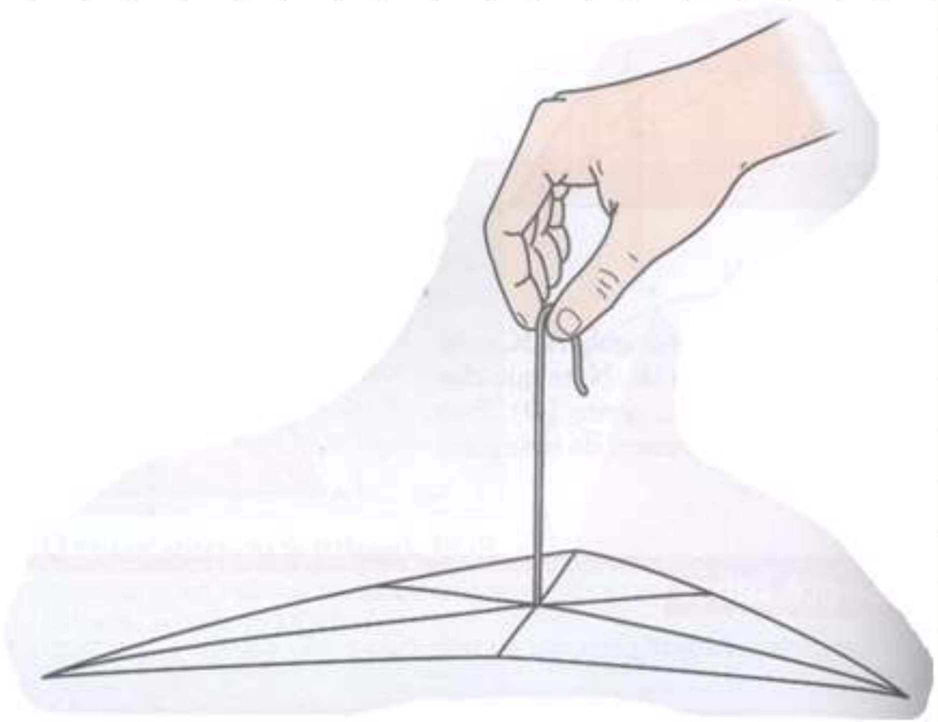
- O ponto em que Sx e Sy da área são zero...



O Momento Estático da região será zero com relação a qualquer eixo que passe por esse ponto

Centroide x Baricentro

- Distribuição Idêntica da Área / Massa

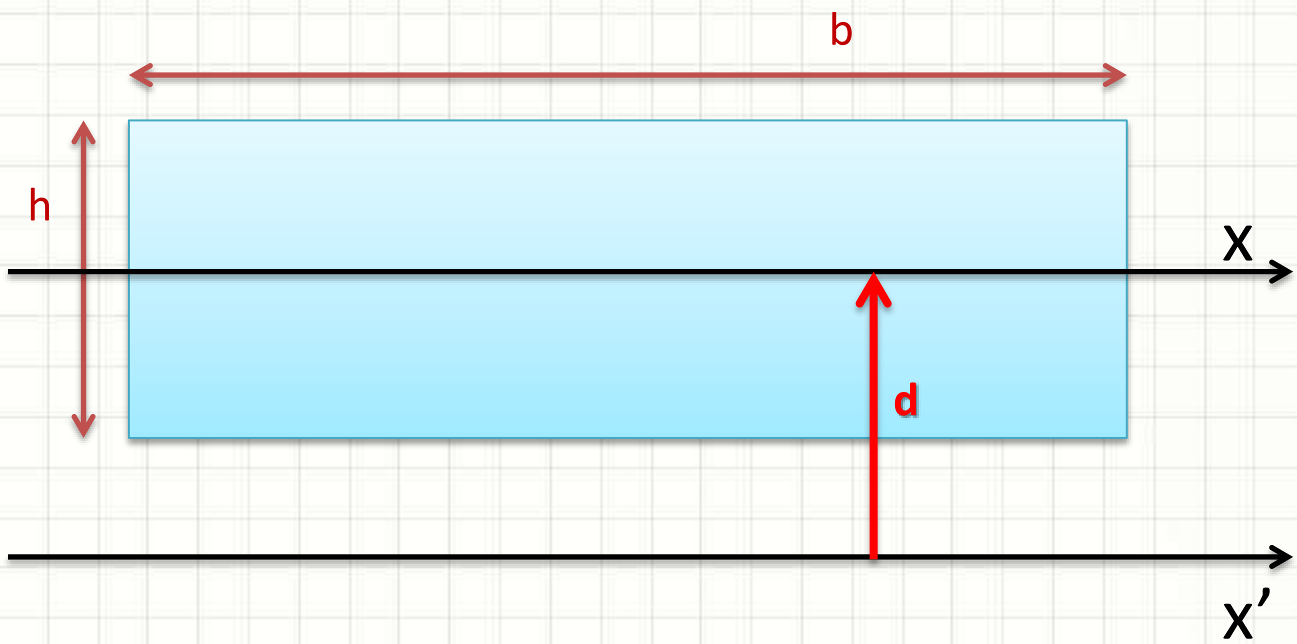


- Baricentro = Centro de Massa
  - Densidade uniforme: centroide = baricentro

Encontrando o Centroide/Baricentro

Baricentro de Figuras Planas

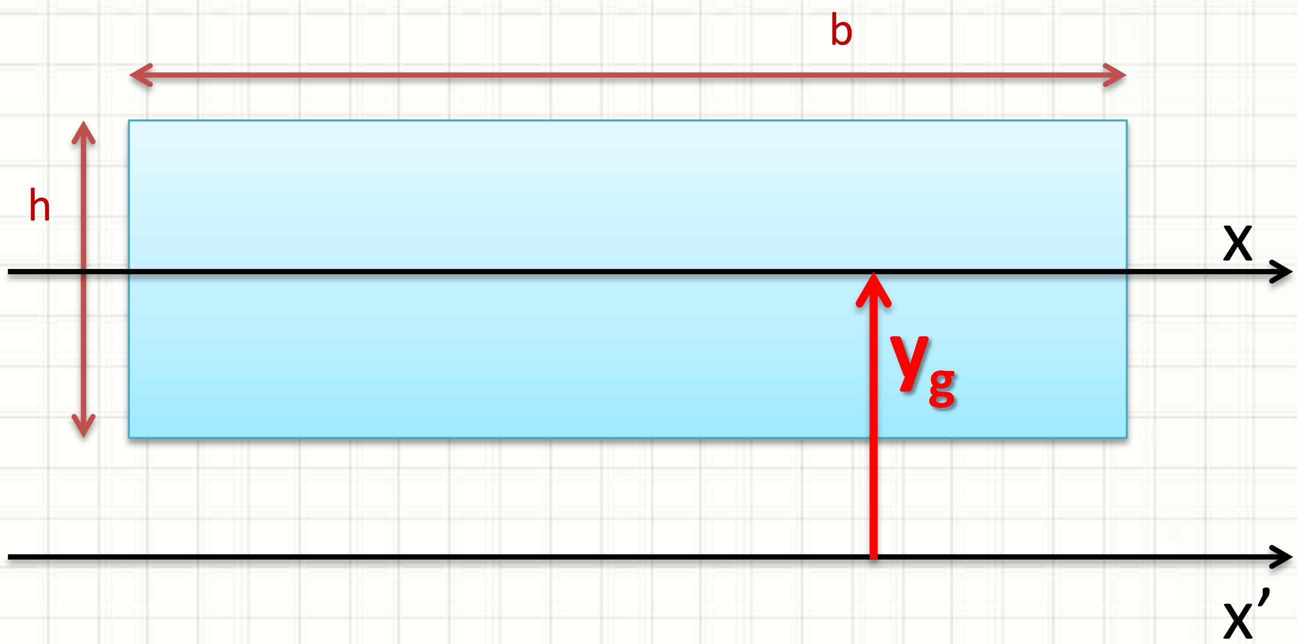
- Dados Sx’ e Sy’; baricentro → Sx = 0 e Sy = 0



$$S_x = S_{x'} - d.A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

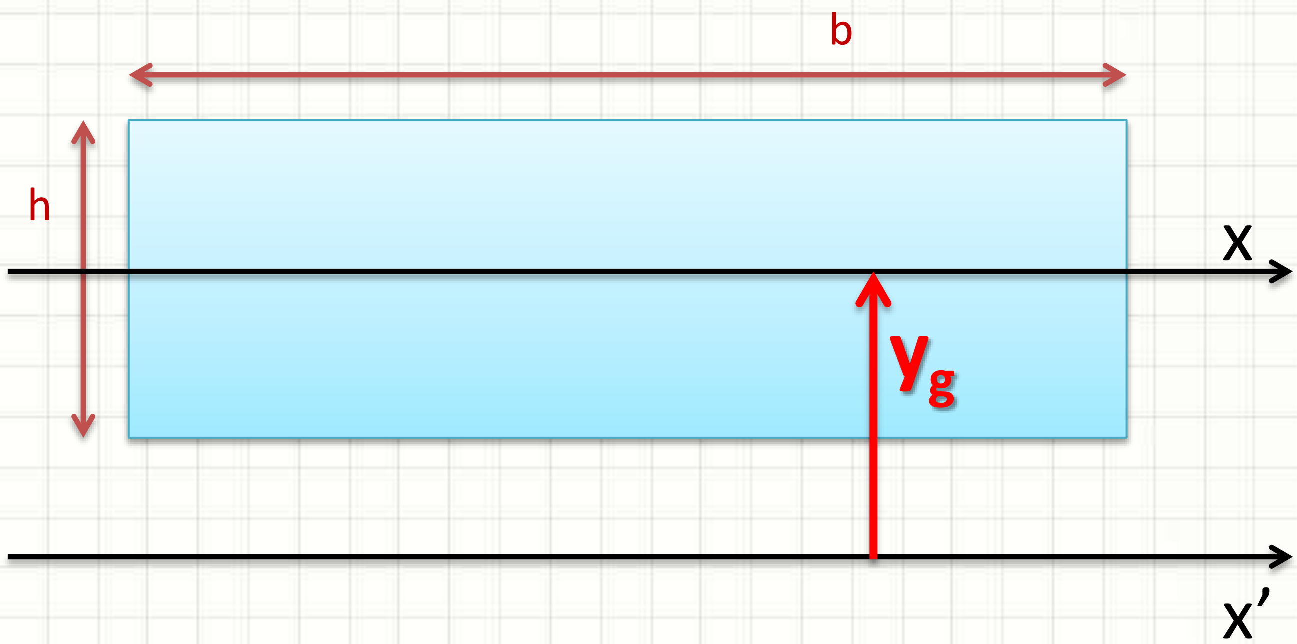
- Dados Sx' e Sy'; baricentro → Sx = 0 e Sy = 0



$$S_x = S_{x'} - y_g . A = 0$$

Baricentro de Figuras Planas

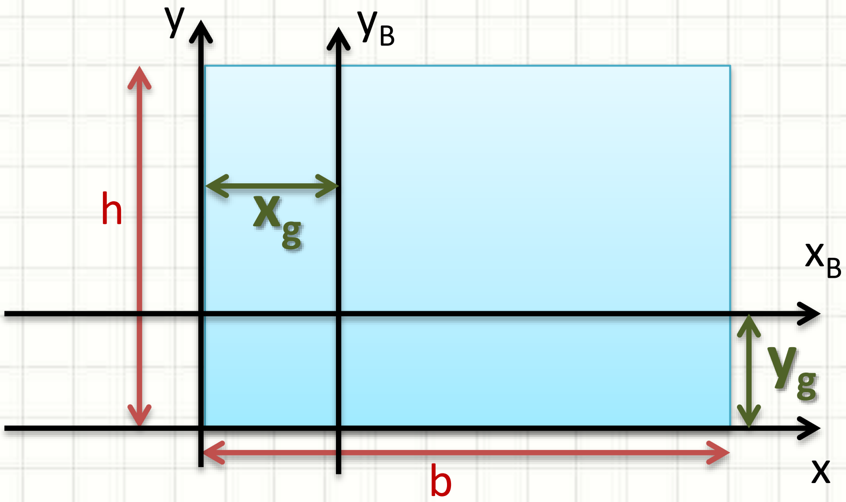
- Dados Sx' e Sy'; baricentro → Sx = 0 e Sy = 0



$$S_{x'} - y_g . A = 0 \quad \rightarrow \quad y_g = \frac{S_{x'}}{A}$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Retângulo

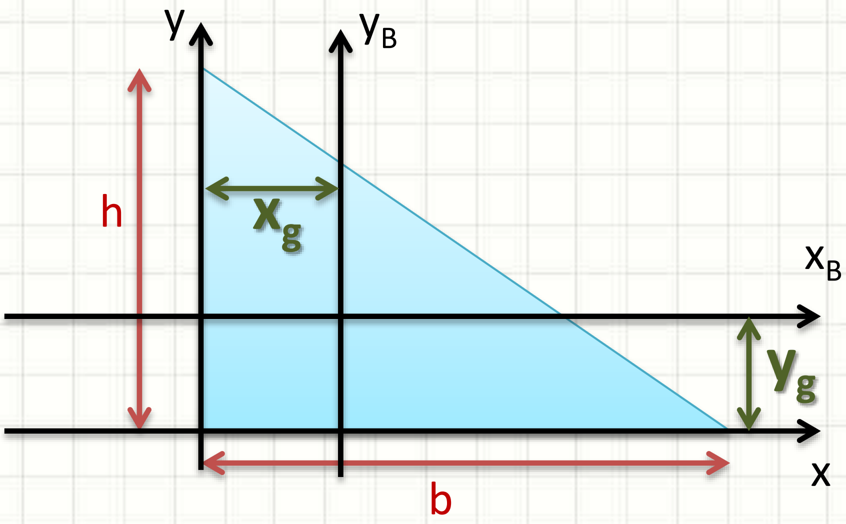


$$\boldsymbol{y_g = \frac{S_x}{A}} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = h/2$$

$$\boldsymbol{x_g = \frac{S_y}{A}} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} = b/2$$

Baricentro de Figuras Planas

- Baricentro do Triângulo

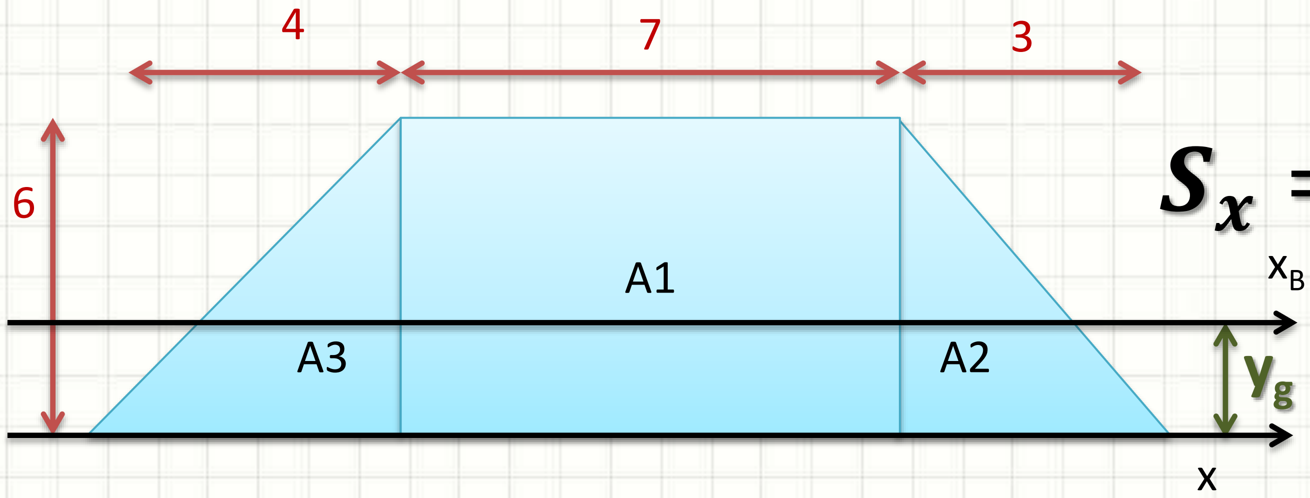


$$y_g = \frac{S_x}{A} = S_x \cdot \frac{1}{A} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = h/3$$

$$x_g = \frac{S_y}{A} = S_y \cdot \frac{1}{A} = \frac{h \cdot b^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = b/3$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o $\bar{y}$ do baricentro da área abaixo



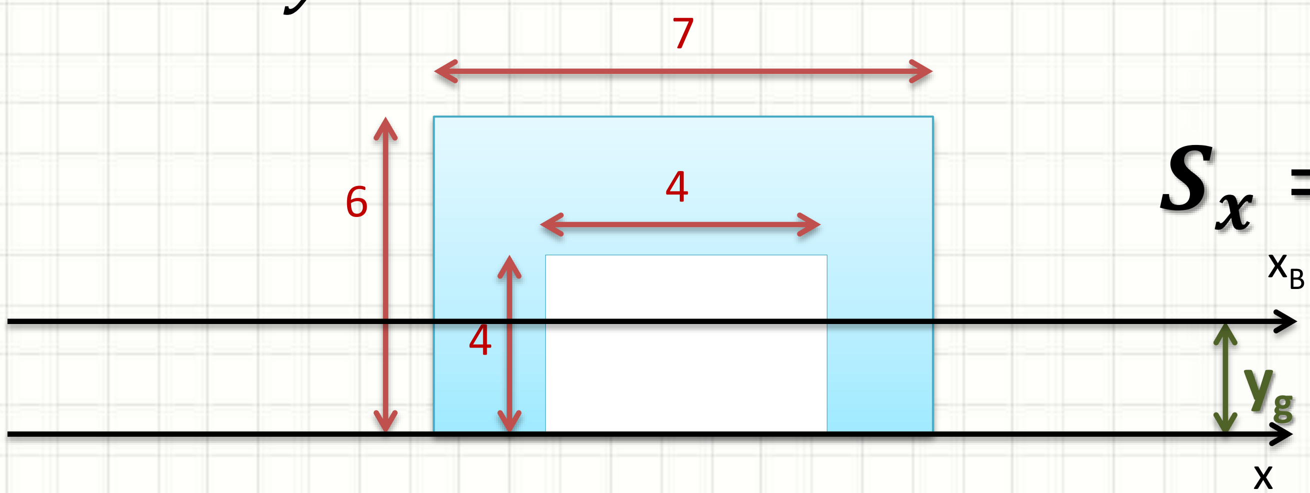
$$S_x = 168$$

$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A1 + A2 + A3} = \frac{168}{7 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2}} =$$

$$y_g = 2,67$$

Baricentro de Figuras Planas

- Calcule o $\bar{y}$ do baricentro da área abaixo



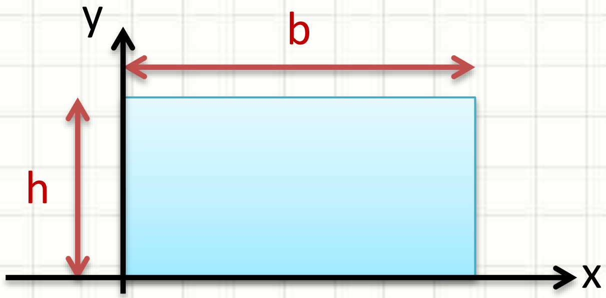
$$S_x = 94$$

$$y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x}{A_{ATotal} - A_B} = \frac{94}{7 \cdot 6 - 4 \cdot 4} =$$

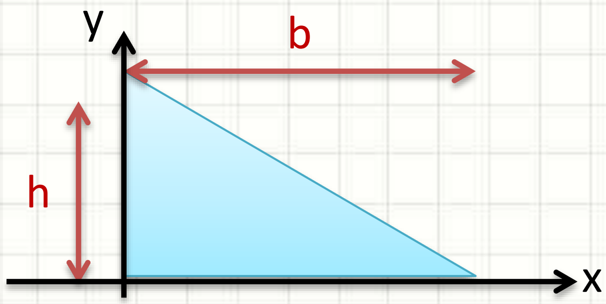
y_g =3,62

Resultados Importantes

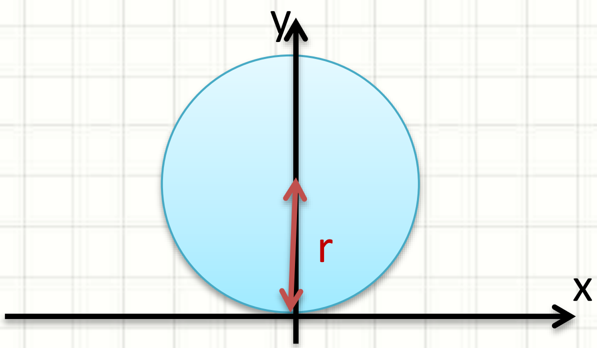
Momentos Estáticos



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2} \qquad S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$

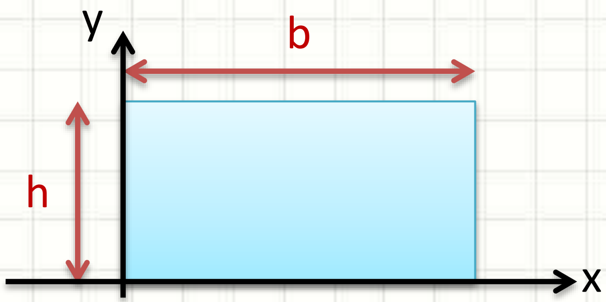


$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

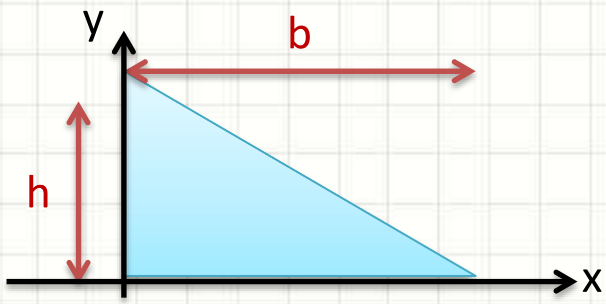


$$S_x = \pi \cdot r^3 \qquad S_y = 0$$

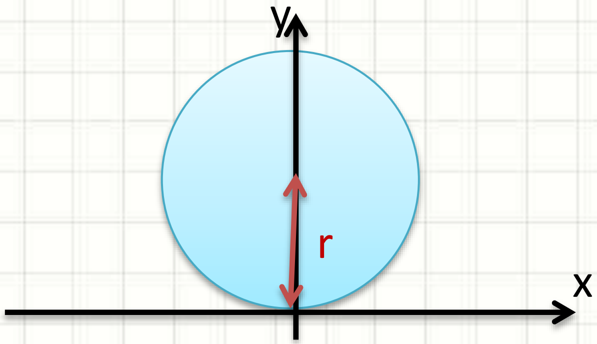
Distância ao Centro de Gravidade



$$y_g = \frac{h}{2} \qquad x_g = \frac{b}{2}$$

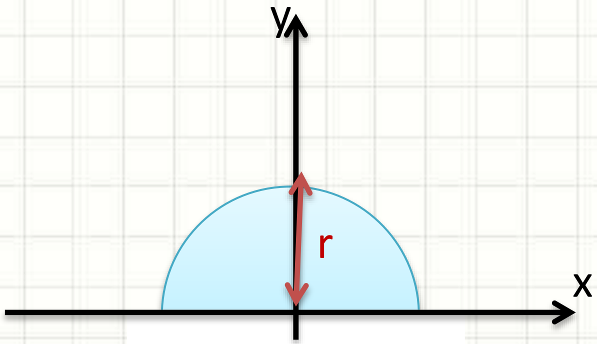


$$y_g = \frac{h}{3} \qquad x_g = \frac{b}{3}$$



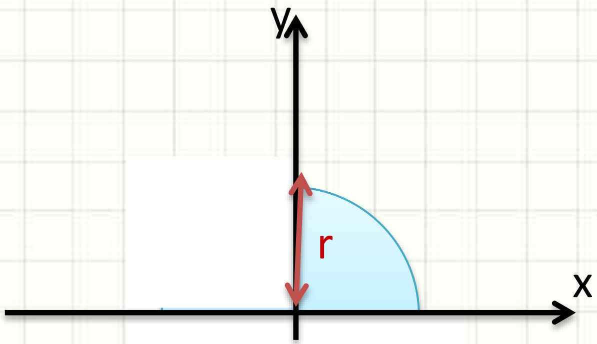
$$y_g = r \qquad x_g = 0$$

Distância ao Centro de Gravidade



$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_g = 0$$



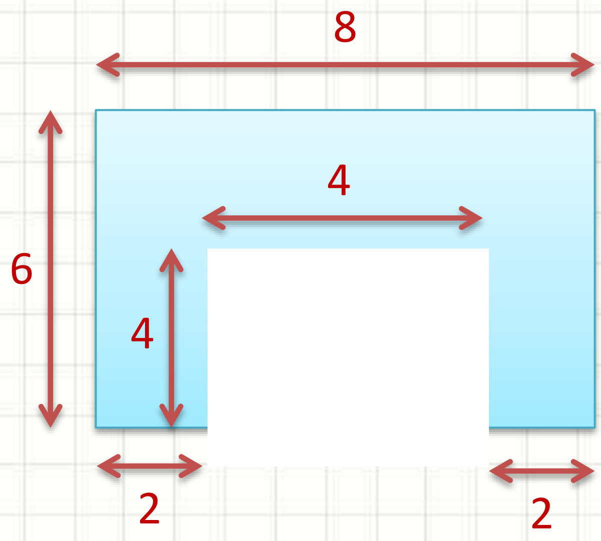
$$y_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_g = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

Exercício

Exercício – Entrega Individual

- Calcule a posição do centroide da área azul



Para Treinar

Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercício A.1
  - Exercícios A.2 a A.6 - **Só localização do centroide**
- Extras:
  - Exercícios A.7 a A.12 - **Só localização do centroide**

Conclusões

Resumo

- Importância da Forma na Resistência
- Propriedades das Áreas Planas
- Momento Estático
- Localização do Centroide
- **Exercitar: Material Didático**

- Momento de Inércia
  - Momento de Segunda Ordem
  - O que é isso?
  - Para quê serve?

Perguntas?