



RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

MOMENTO DE INÉRCIA

Prof. Dr. Daniel Caetano

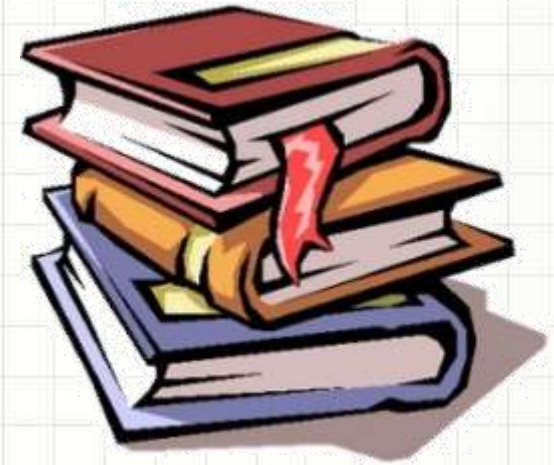
2018 - 1

Objetivos

- Apresentar os conceitos:
 - Momento de inércia
 - Momento polar de inércia
 - Produto de Inércia
 - Eixos Principais de Inércia
- Calcular propriedades geométricas (quaisquer eixos)
- Determinar os eixos principais e calcular os momentos principais de inércia



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Resistência dos Materiais II – Aula 2)

Material Didático

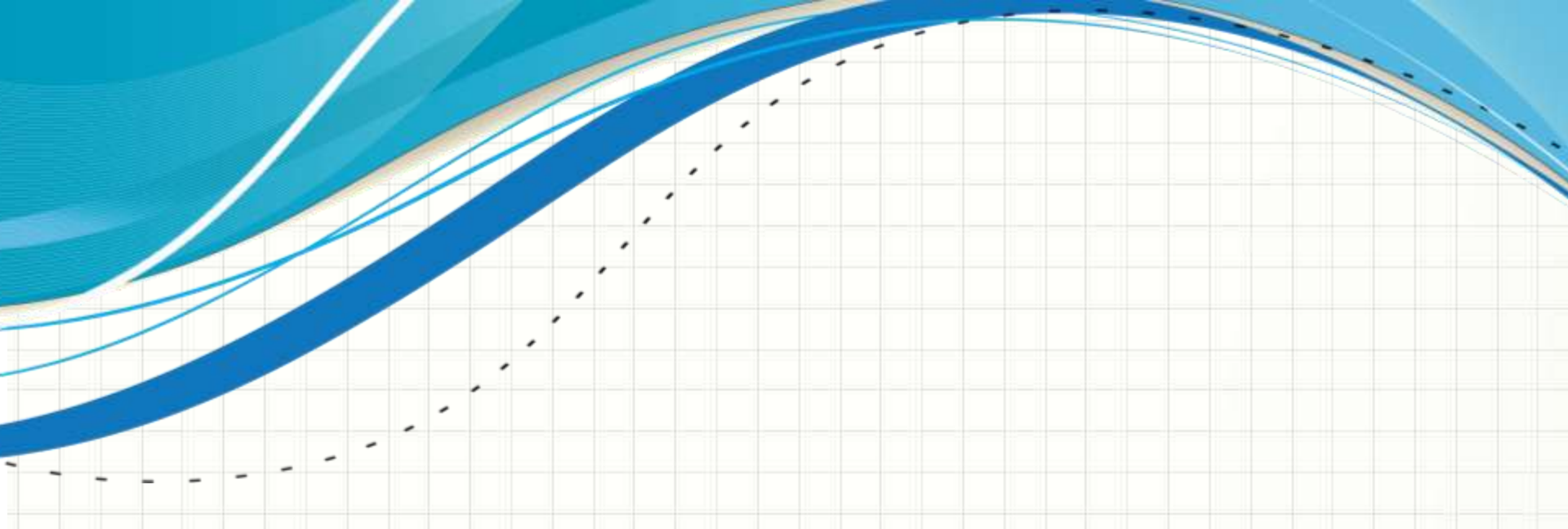
Resistência dos Materiais (Beer *et al.*), págs 728 a 732
Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 570-576

Aula Online

Aula 2

Biblioteca Virtual

“Resistência dos Materiais”

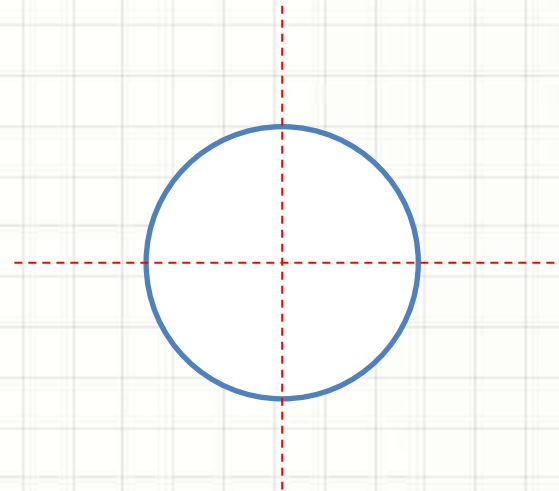
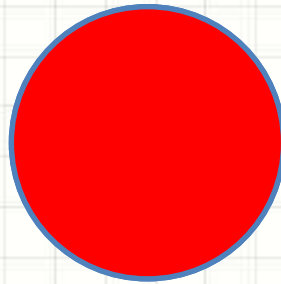
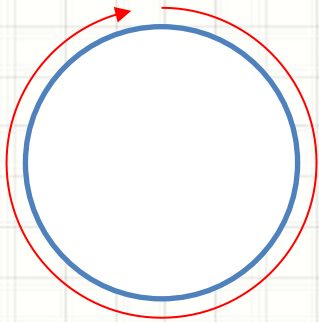


RELEMBRANDO:

“MEDINDO A FORMA”

Características das Figuras Planas

- Perímetro
- Área
- Momento Estático \rightarrow cálculo do centroide



Momento Estático

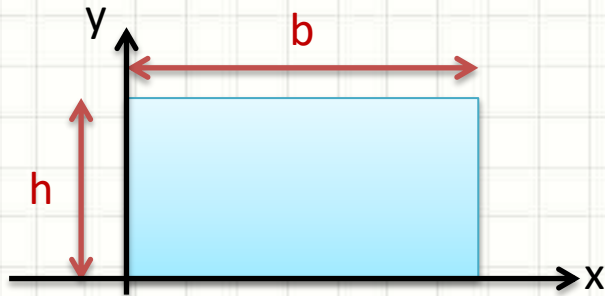
- Cálculo do Momento Estático

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

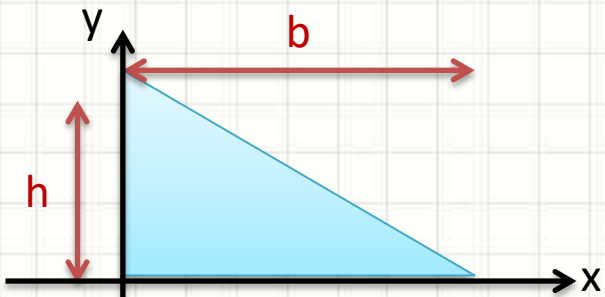
- Unidade $S = [L^3]$

Momentos Estáticos



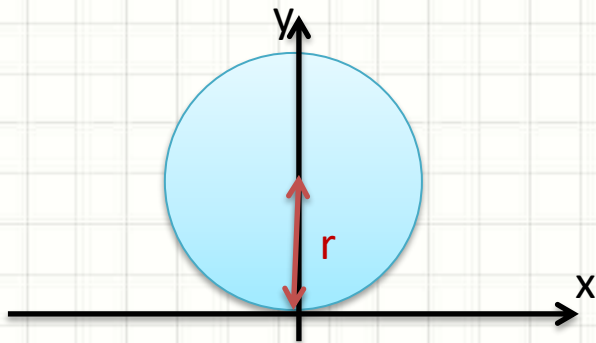
$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$



$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$$



$$S_x = \pi \cdot r^3$$

$$S_y = 0$$



MOMENTO DE INÉRCIA

Momento de Inércia

- Momento Estático (ou de 1ª Ordem)
 - $S = A \cdot d$
 - Mede ação da distribuição de massa de um corpo
- Momento de Inércia (ou de 2ª Ordem)
 - $I = A \cdot d^2$
 - O que mede?
 - A resposta tem a ver com a palavra **inércia**

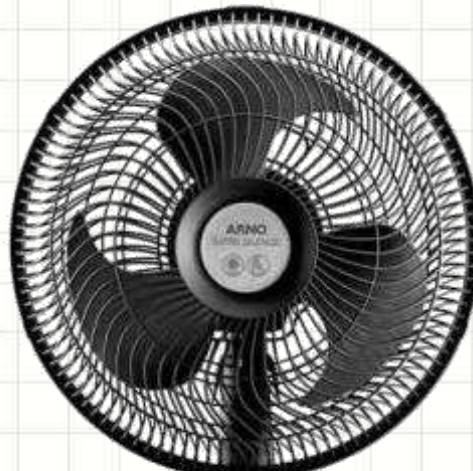
Momento de Inércia

- Inércia:
 - Tendência de manter estado de movimento
 - Massa Inercial
 - $F = m \cdot a$



Momento de Inércia

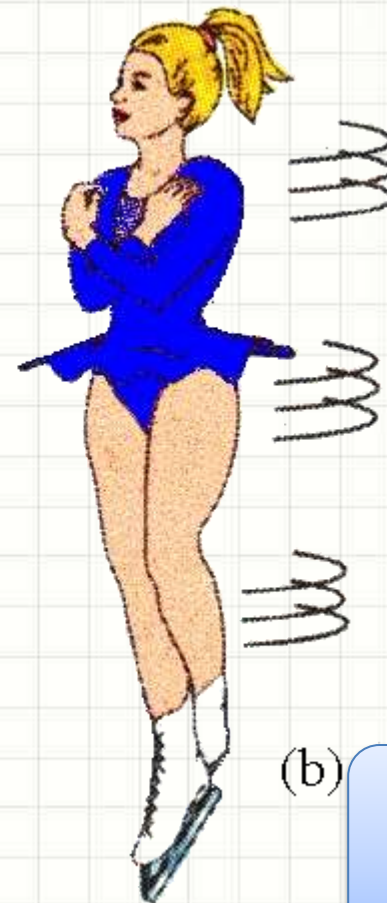
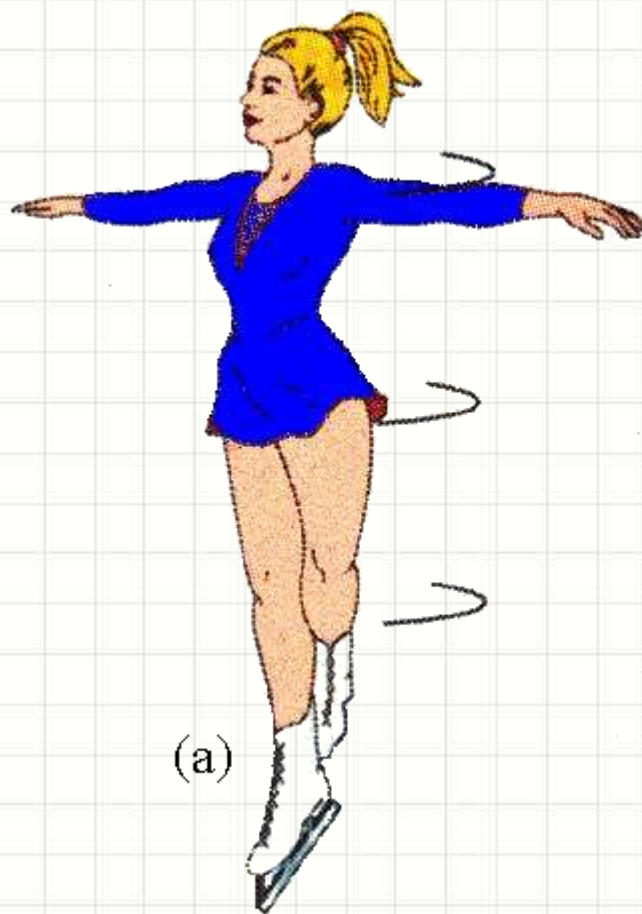
- Momento de Inércia
 - Inércia de um corpo ao giro
 - Resistência a alterar o movimento de giro
 - $I = A \cdot d^2$



Quanto maior o momento de inércia, mais esforço necessário para colocar em movimento de giro

Momento de Inércia

- Diferença no giro pelo Momento de Inércia



[Vídeo!](#)

Momento de Inércia

- Cálculo do Momento *Retangular* de Inércia

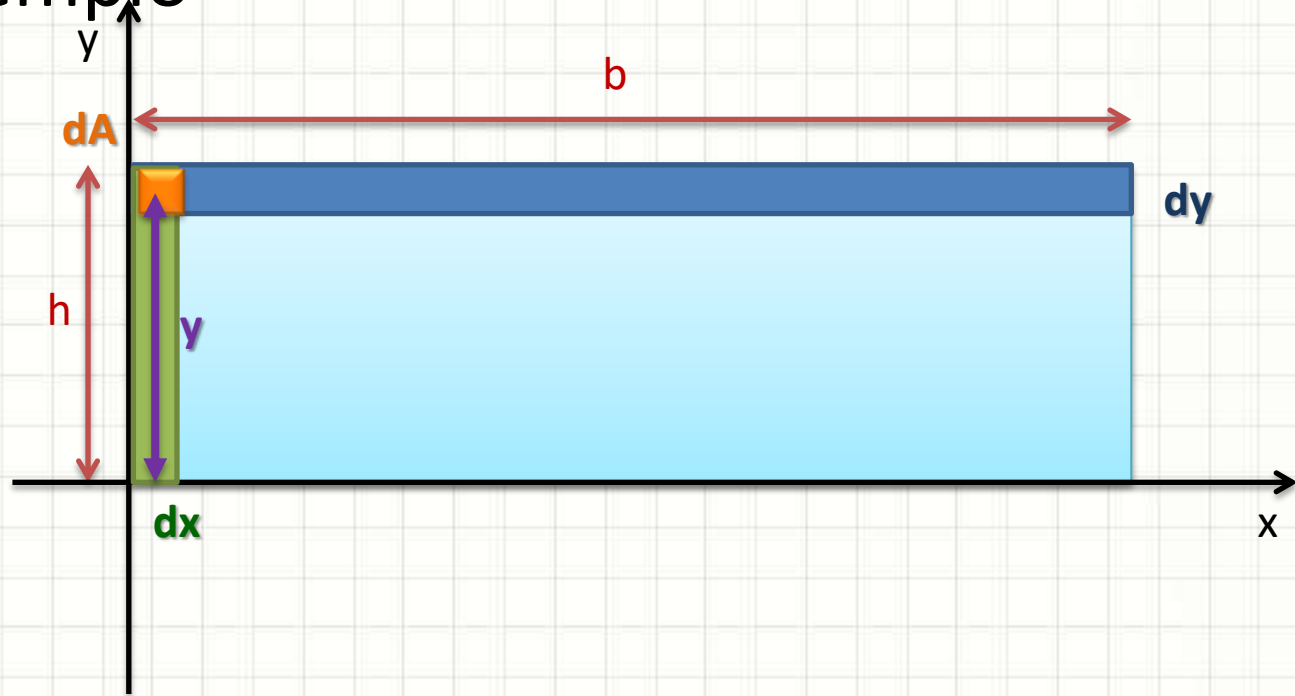
$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

- Sempre **positivos!** → Unidade $I = [L^4]$

Momento de Inércia

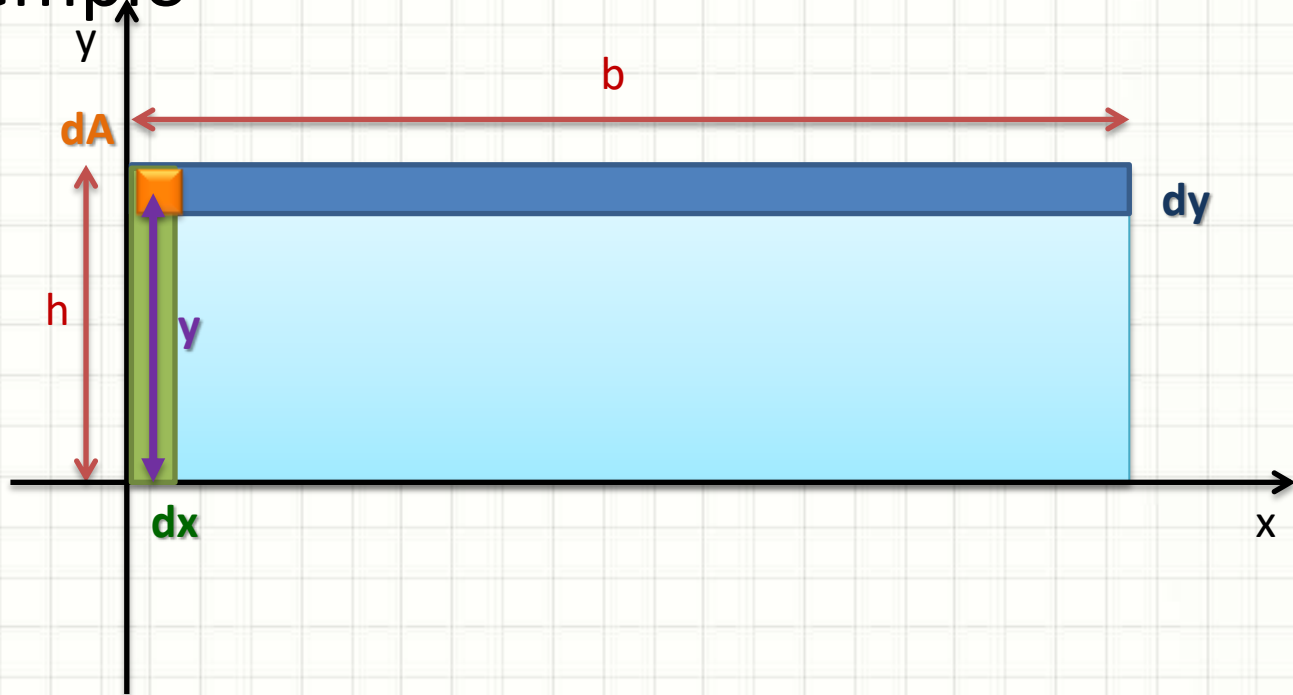
- Exemplo



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h \int_0^b y^2 \cdot dx \cdot dy =$$

Momento de Inércia

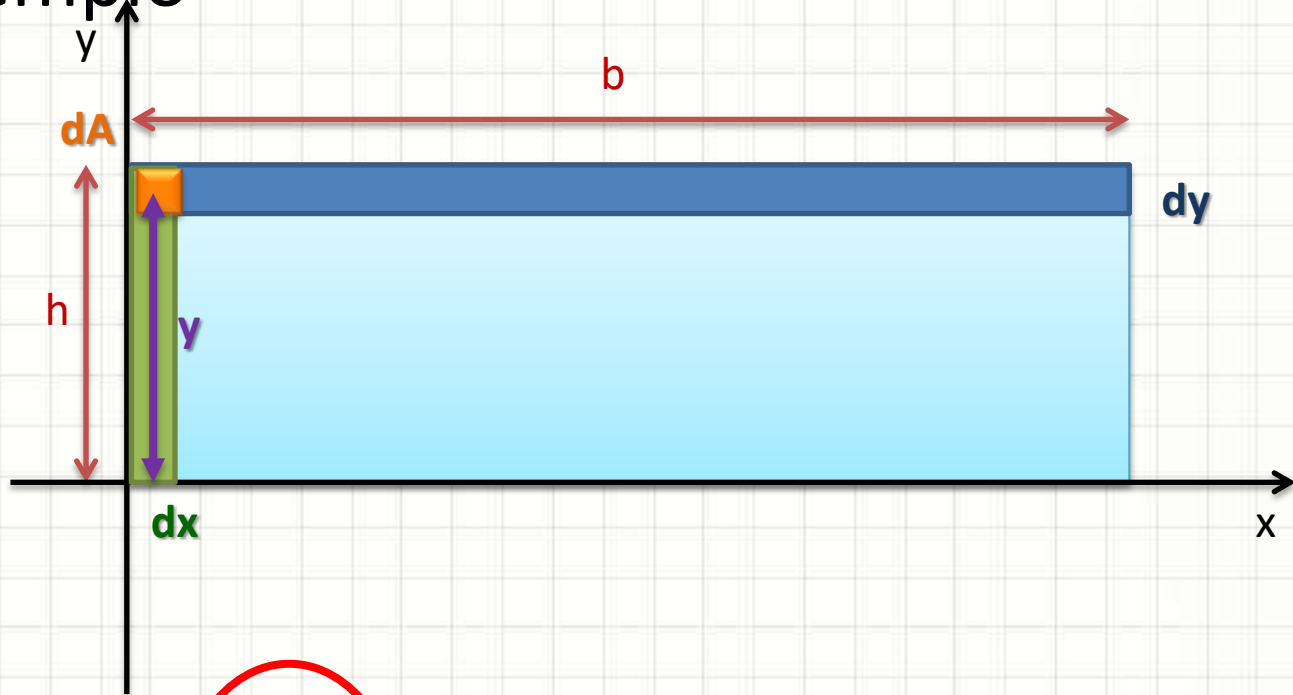
- Exemplo



$$I_x = \int_0^h \int_0^b y^2 \cdot dx \cdot dy = \int_0^h y^2 \cdot \int_0^b dx \cdot dy =$$

Momento de Inércia

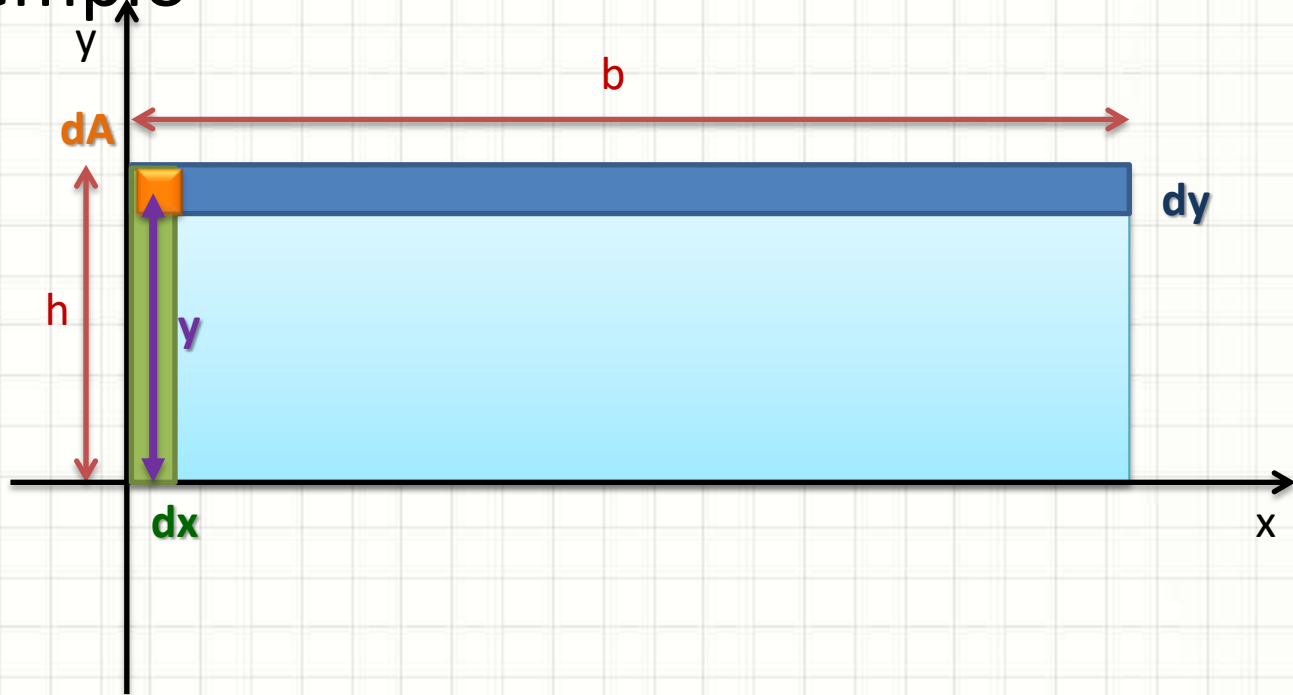
- Exemplo



$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \int_0^b dx \cdot dy = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy =$$

Momento de Inércia

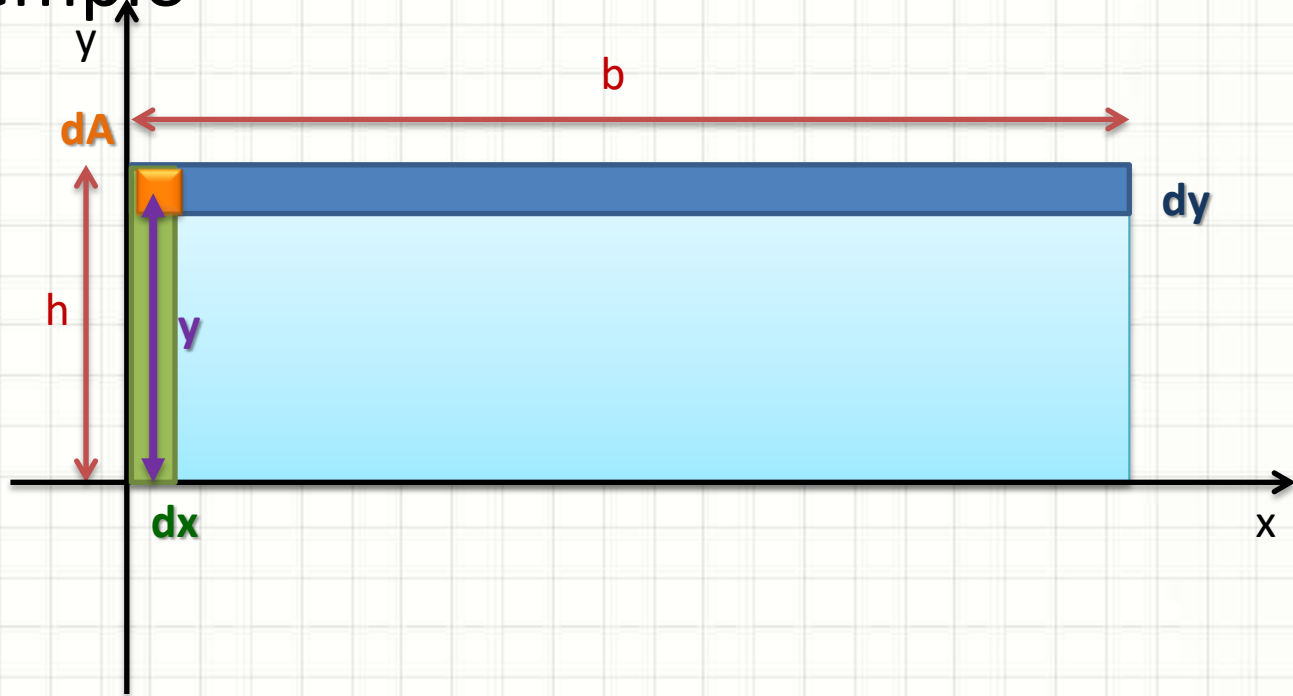
- Exemplo



$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy =$$

Momento de Inércia

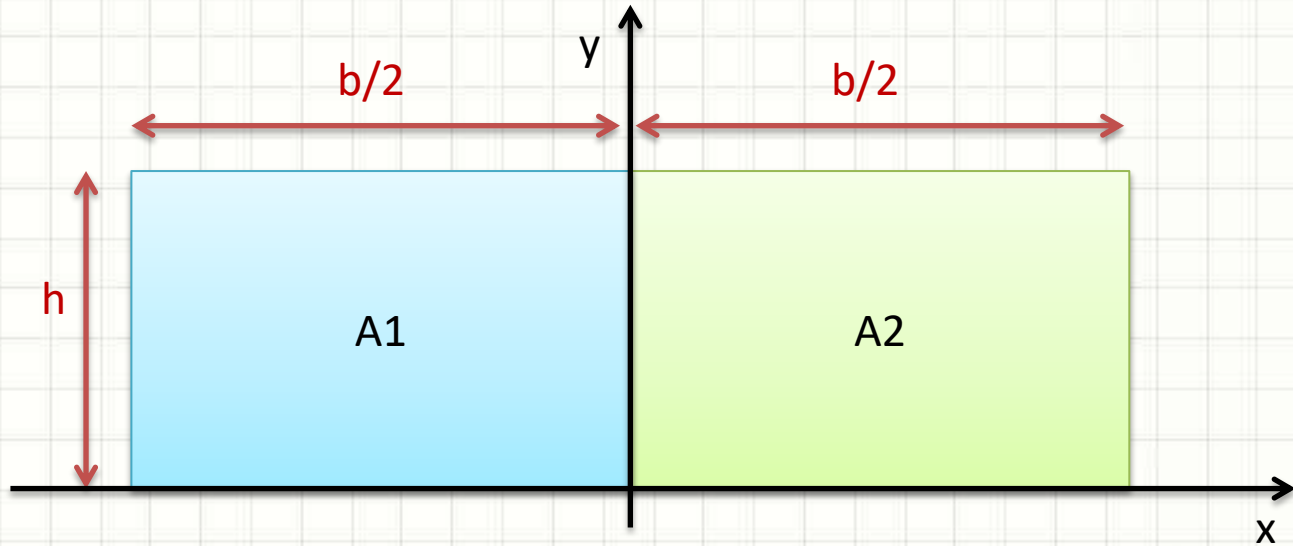
- Exemplo



$$I_x = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Momento de Inércia

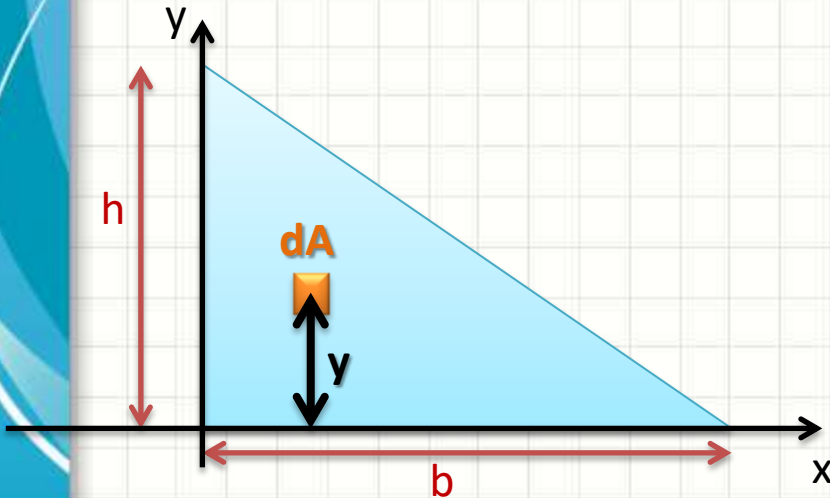
- Podemos calcular o M.I. por partes:



$$I_x = \int_{A_1} y^2 \cdot dA_1 + \int_{A_2} y^2 \cdot dA_2 = \frac{b \cdot h^3}{6} + \frac{b \cdot h^3}{6} = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Momento de Inércia

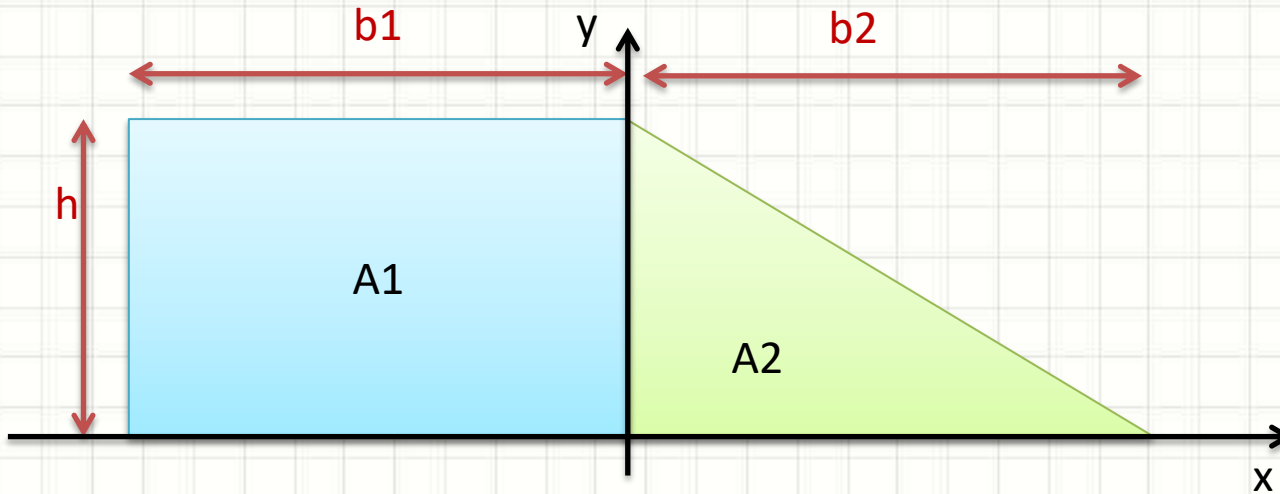
- Outro Exemplo



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Momento de Inércia

- E nesse outro caso?



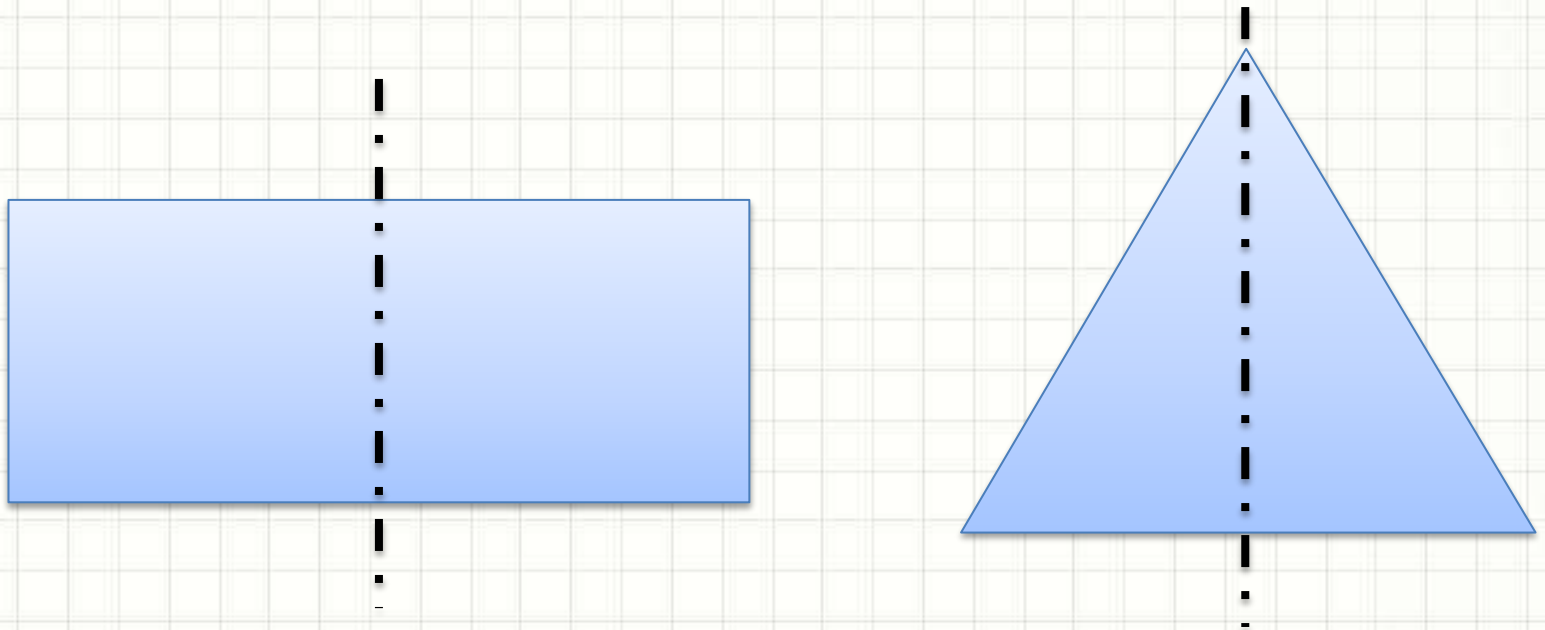
$$I_x = \int_{A1} y^2 \cdot dA_1 + \int_{A2} y^2 \cdot dA_2 = \frac{b1 \cdot h^3}{3} + \frac{b2 \cdot h^3}{12}$$



EIXO CENTRAL DE INÉRCIA

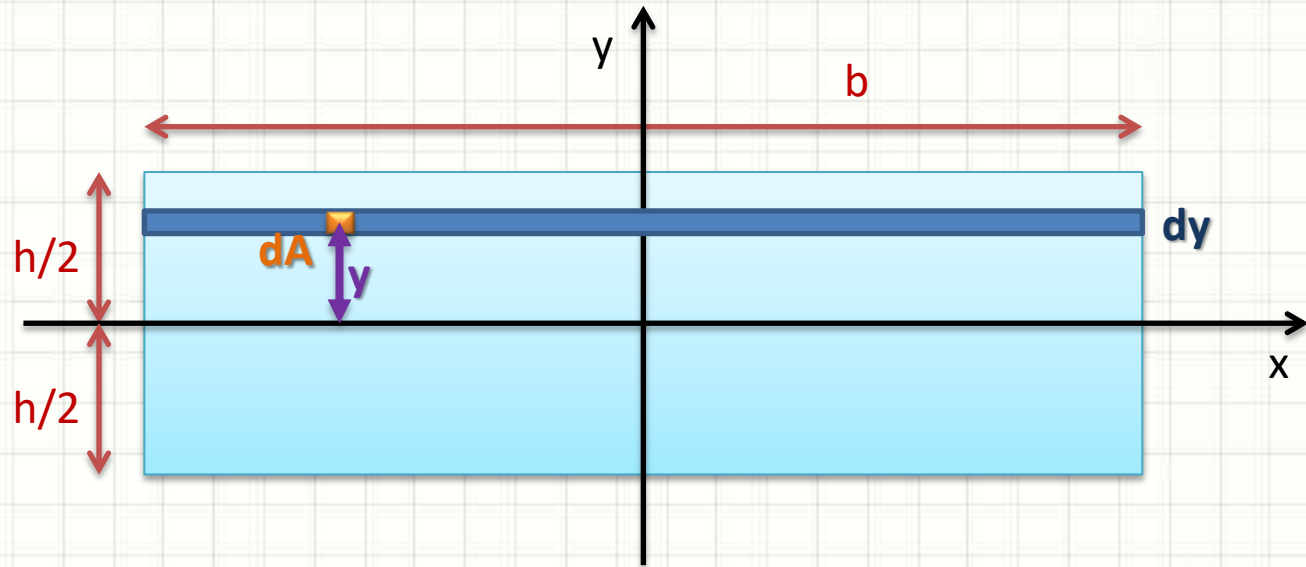
Eixo Central de Inércia

- Em engenharia?
 - Raramente usamos eixos das beiradas
- As coisas em geral giram por um eixo...
 - Que passa no centroide do corpo!



Eixo Central de Inércia

- Exemplo

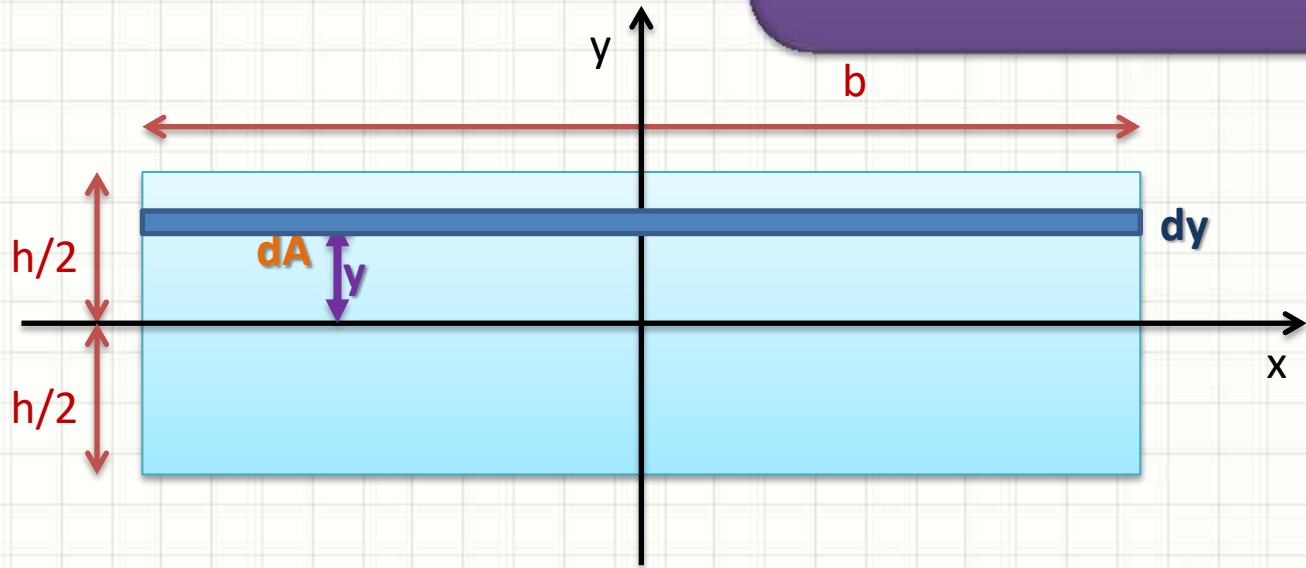


$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Eixo Central de Inércia

- Exemplo

O eixo central, dentre os paralelos a ele, é o eixo de menor inércia



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Eixo Central de Inércia

- Eixo Central
 - Menor inércia entre os paralelos a ele



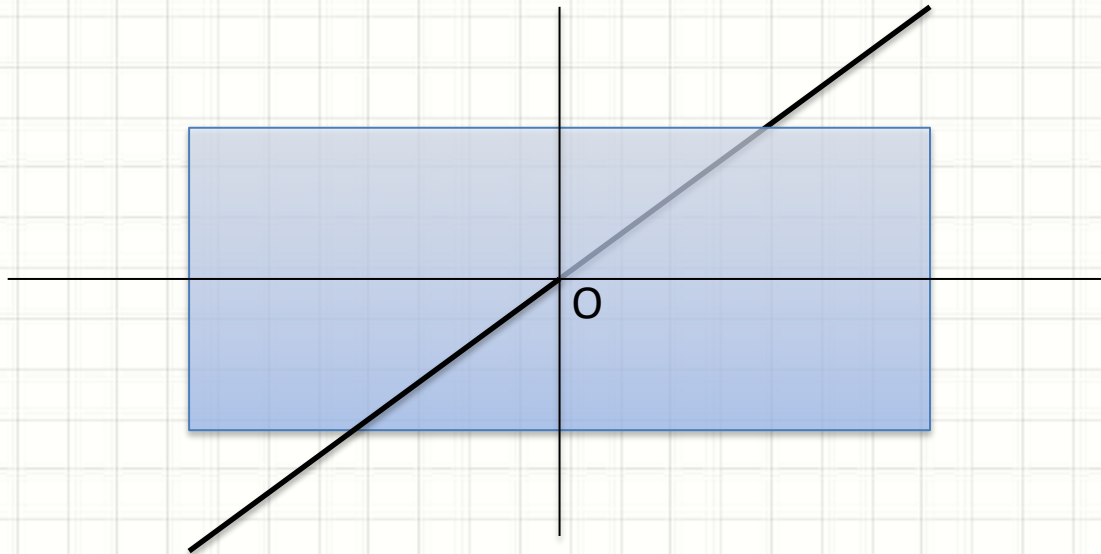
Ao afastar o eixo do centroide, o momento de inércia sobe



MOMENTO POLAR DE INÉRCIA

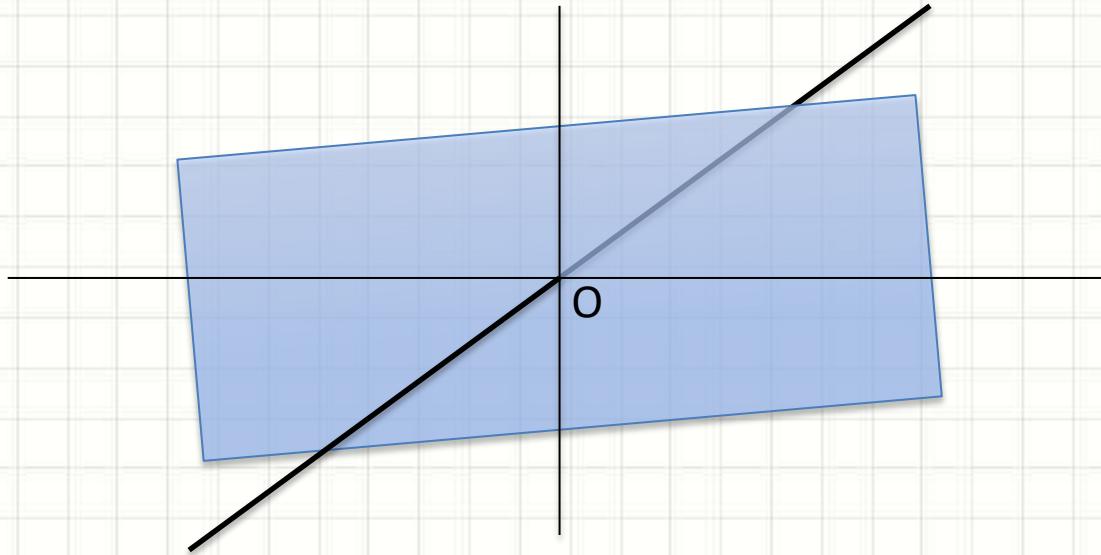
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que sai da tela



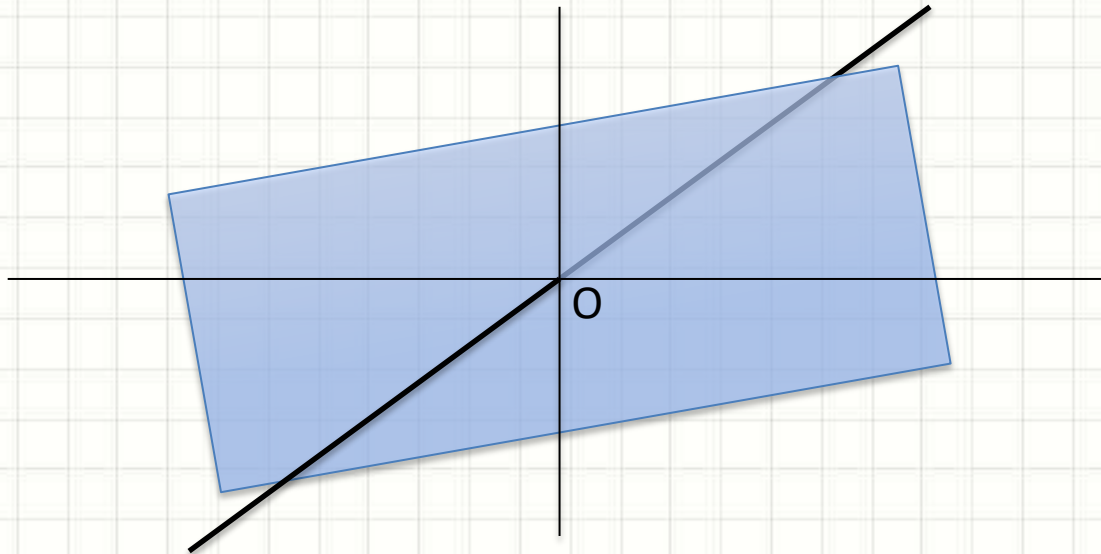
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que sai da tela



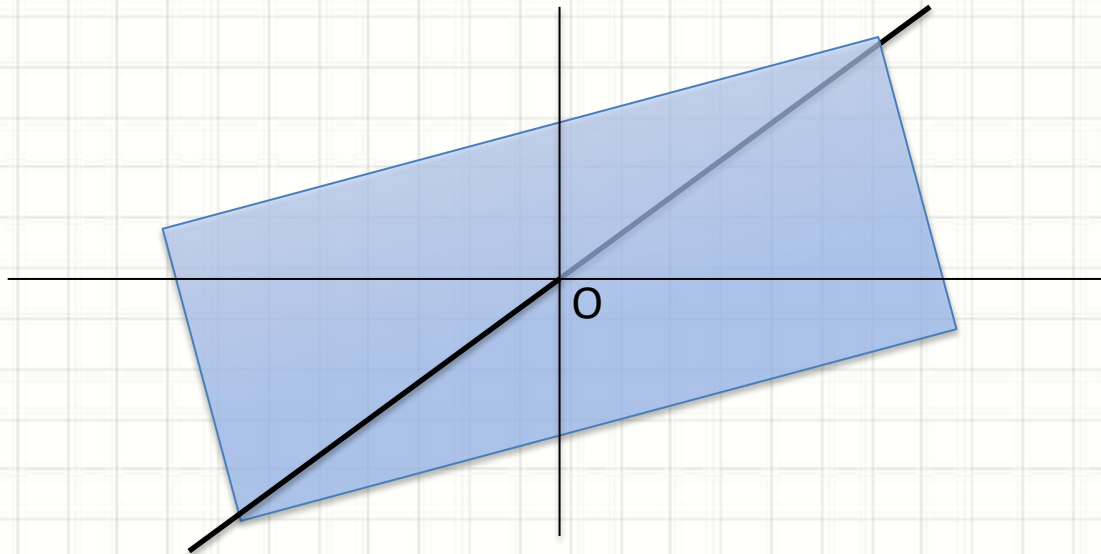
Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que sai da tela



Momento Polar de Inércia

- Rotação em torno de um eixo que sai da tela



Momento Polar de Inércia

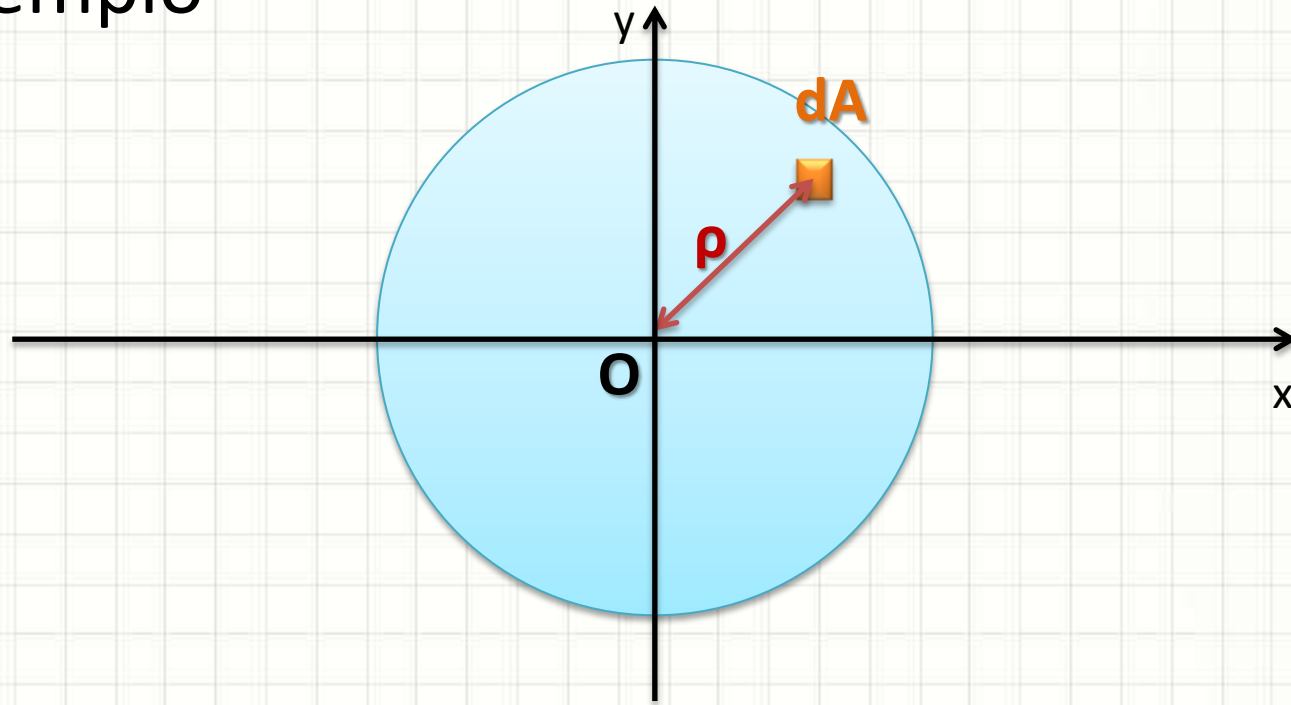
- Cálculo do Momento *Polar* de Inércia

$$J_o = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

- Inércia relativa a um ponto (eixo que “sai” por ele)
- Importante nas torções
- Sempre positivo! → Unidade $J = [L^4]$

Momento de Inércia

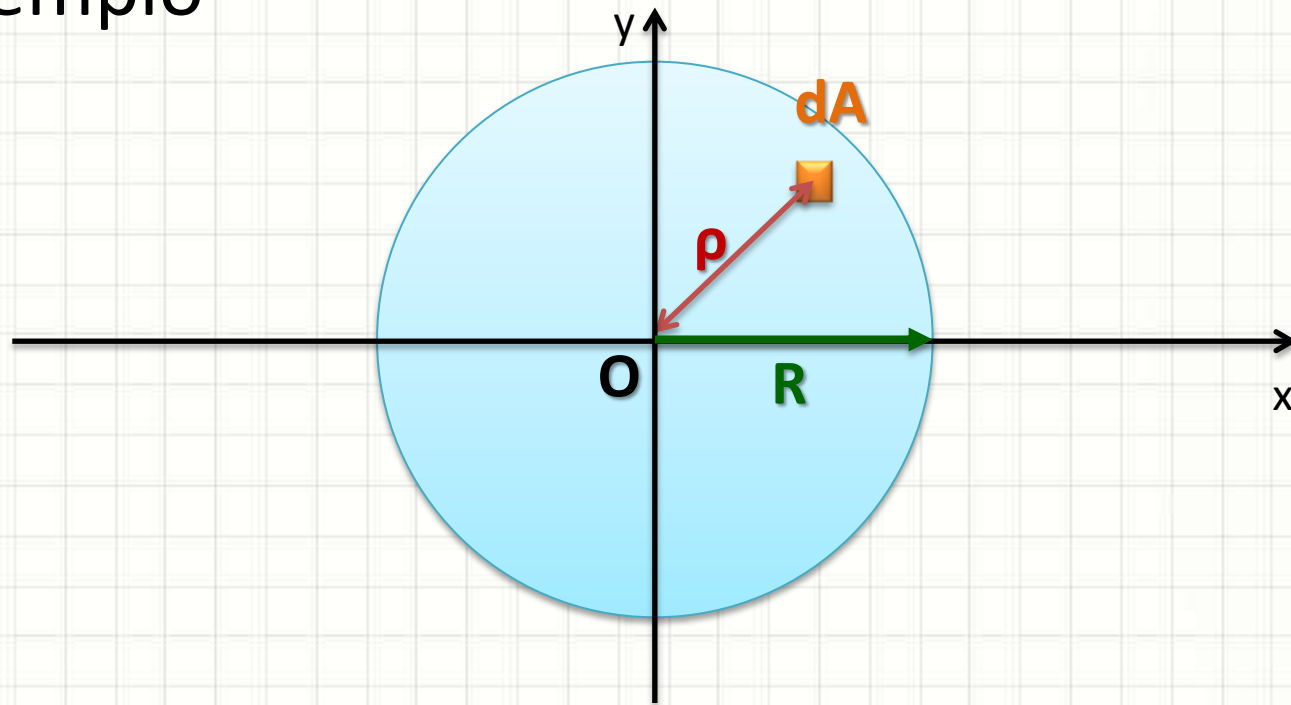
- Exemplo



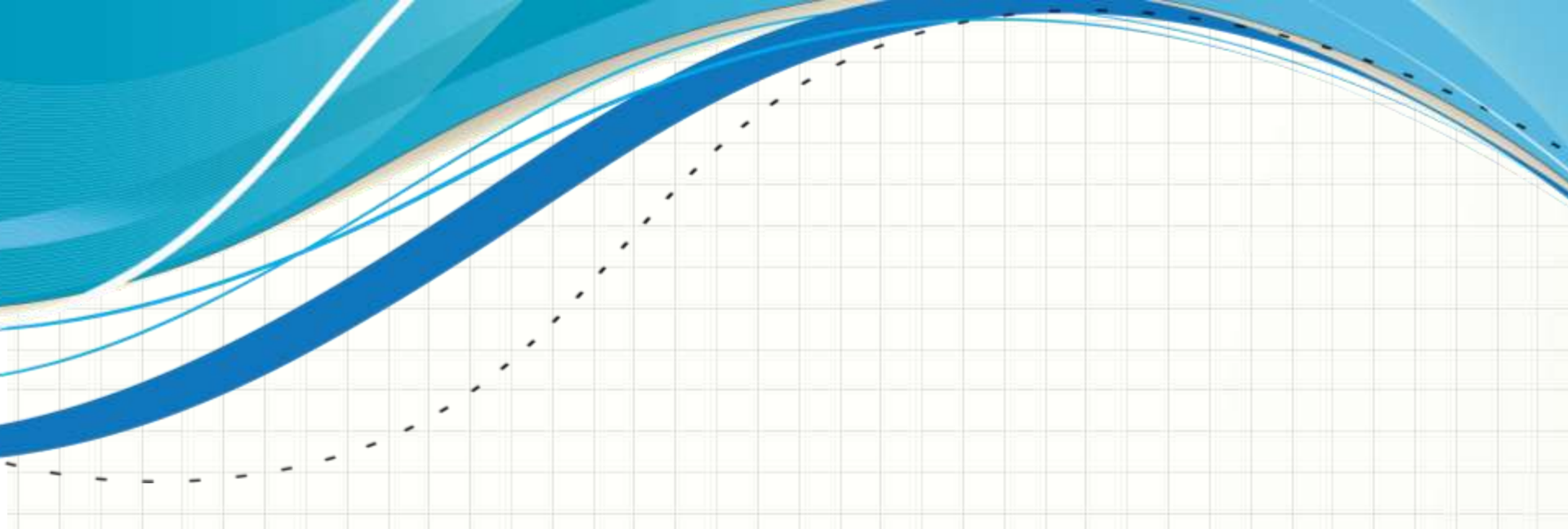
$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Momento de Inércia

- Exemplo



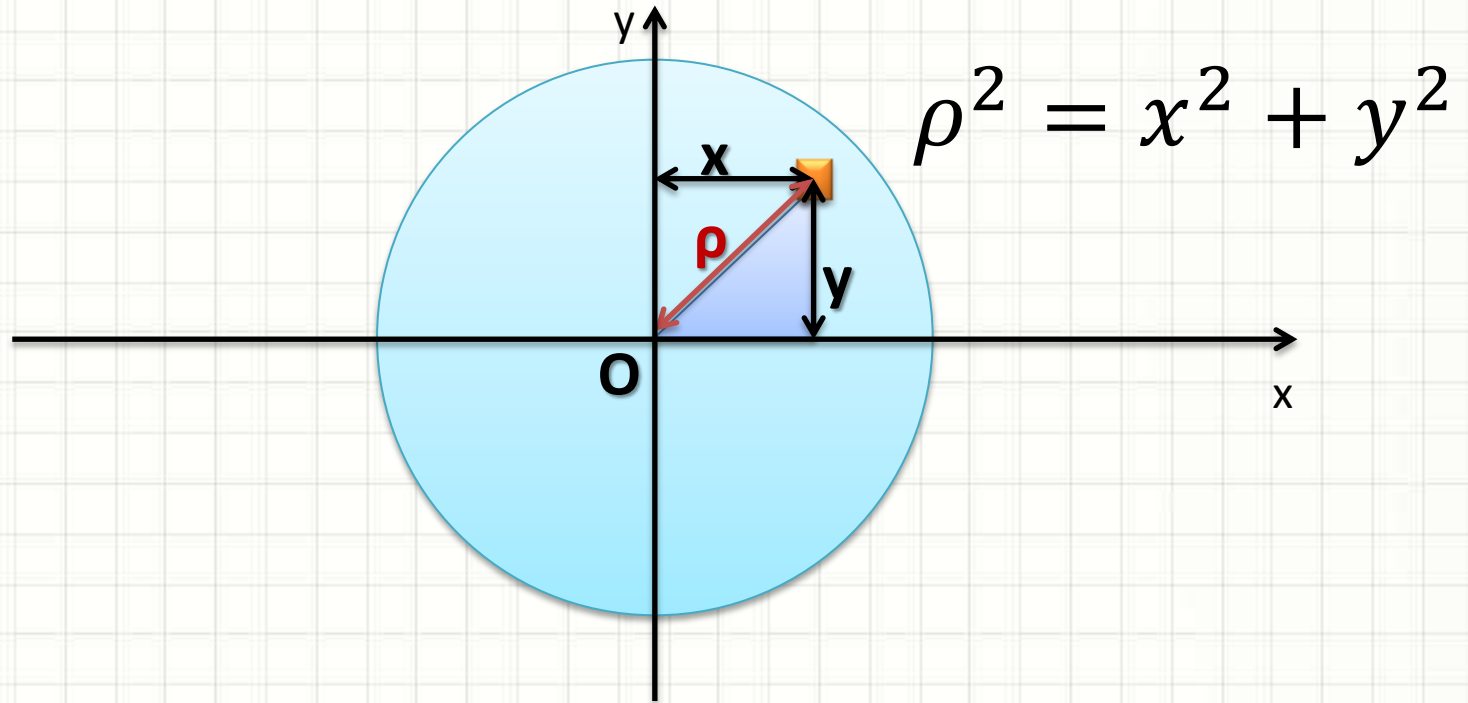
$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$



**MOMENTO POLAR DE INÉRCIA X
MOMENTO DE INÉRCIA**

Momento Polar de Inércia

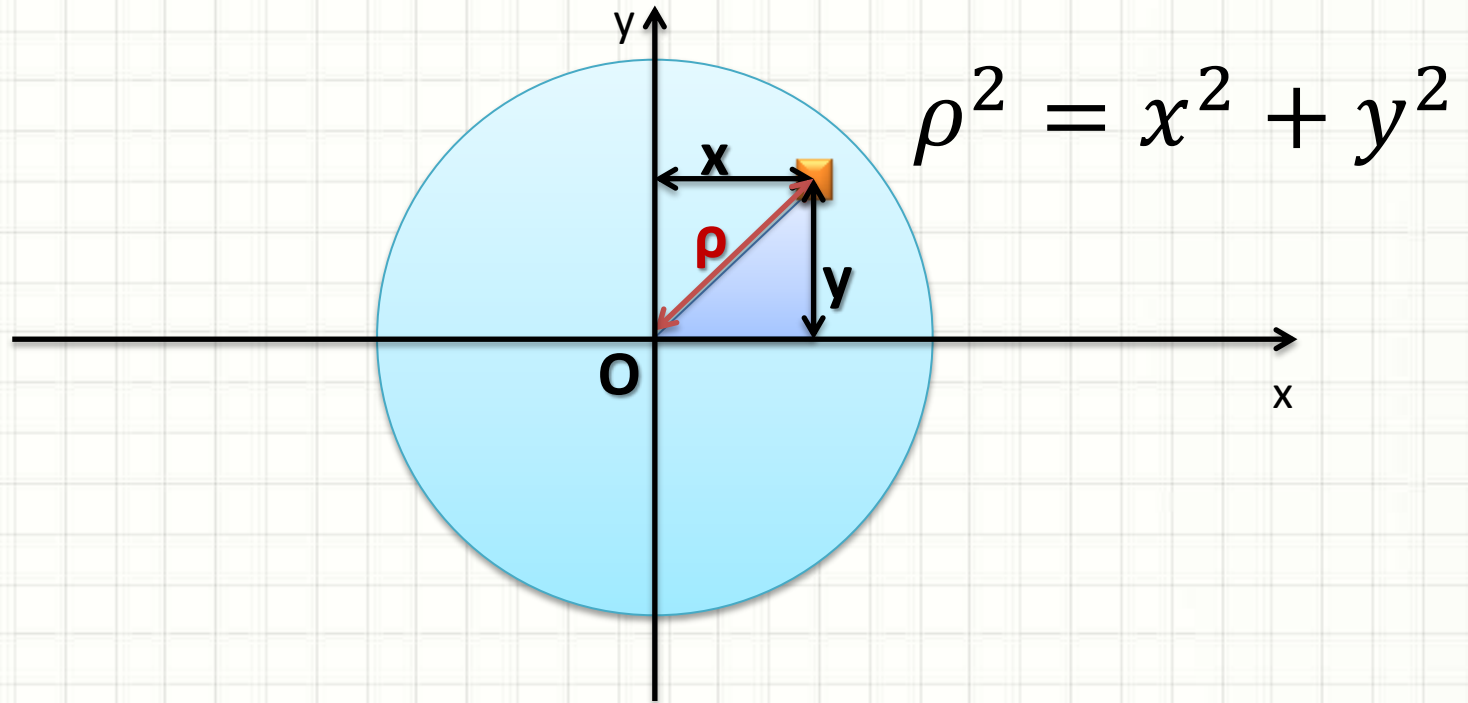
- Relação com Momento de Inércia



$$J_o = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia



$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA \Rightarrow J_O = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

Momento Polar de Inércia

- Relação com Momento de Inércia

$$J_o = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

$$J_o = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A x^2 \cdot dA$$

$$\mathbf{J_o = I_x + I_y}$$



A INÉRCIA “MISTERIOSA”

A Inércia Misteriosa

- Se esses são momentos de inércia...

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A y \cdot y \cdot dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_A x \cdot x \cdot dA$$

- O que seria isso?

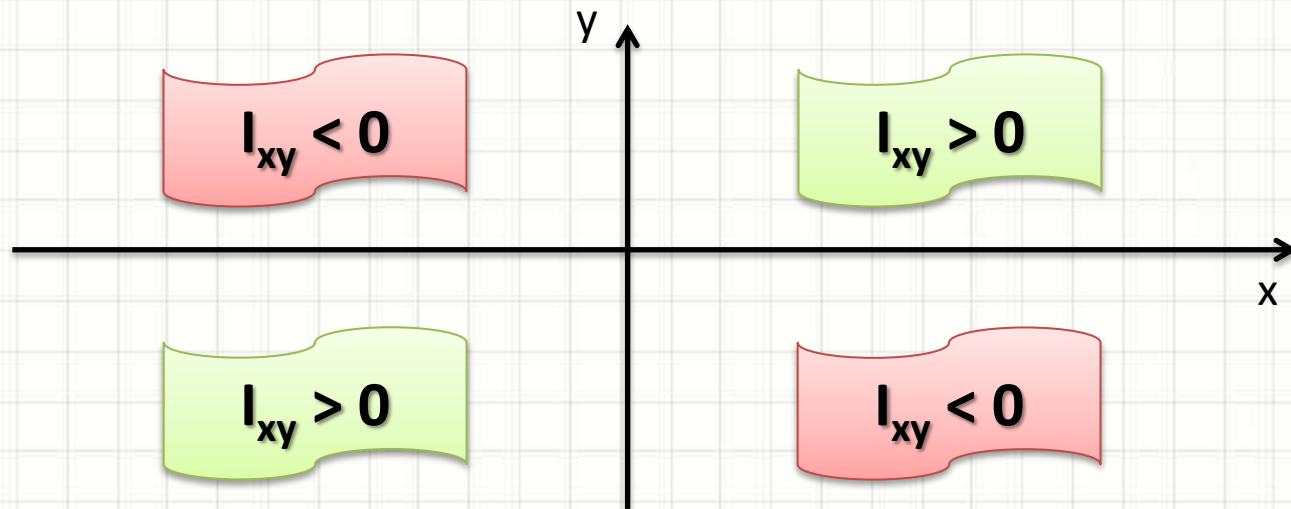
$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

Produto de Inércia

- Produto de Inércia: será usado depois

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo $\rightarrow [I_{xy}] = m^4$



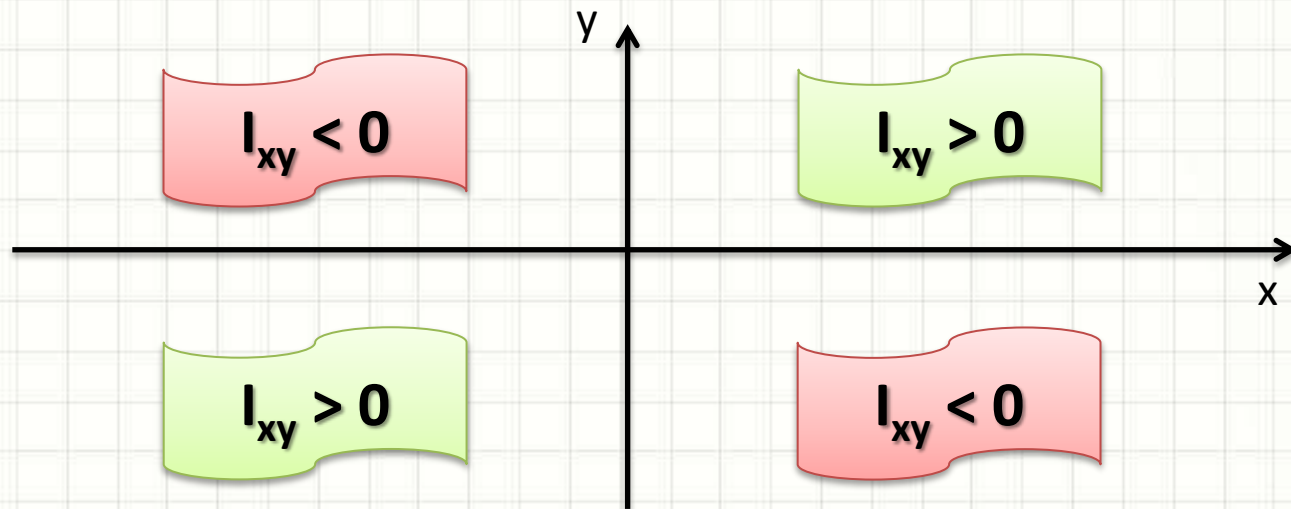
Produto de Inércia

Quando um dos eixos é de simetria, o produto de inércia será sempre **ZERO!**

- Produto de Inércia: será

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- Pode ser positivo ou negativo $\rightarrow [I_{xy}] = m^4$

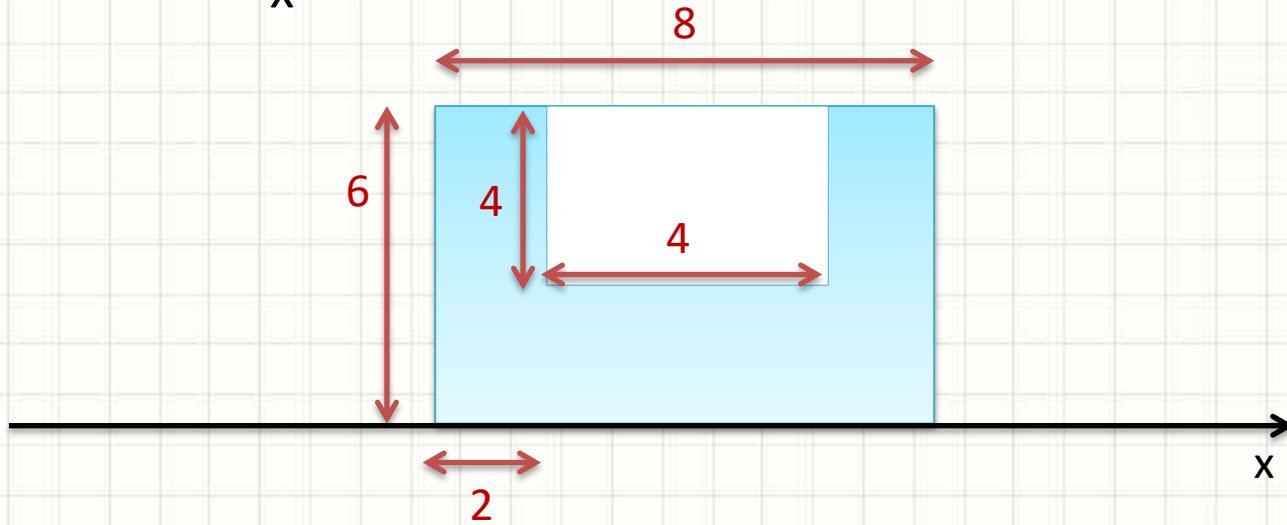




EXERCÍCIO

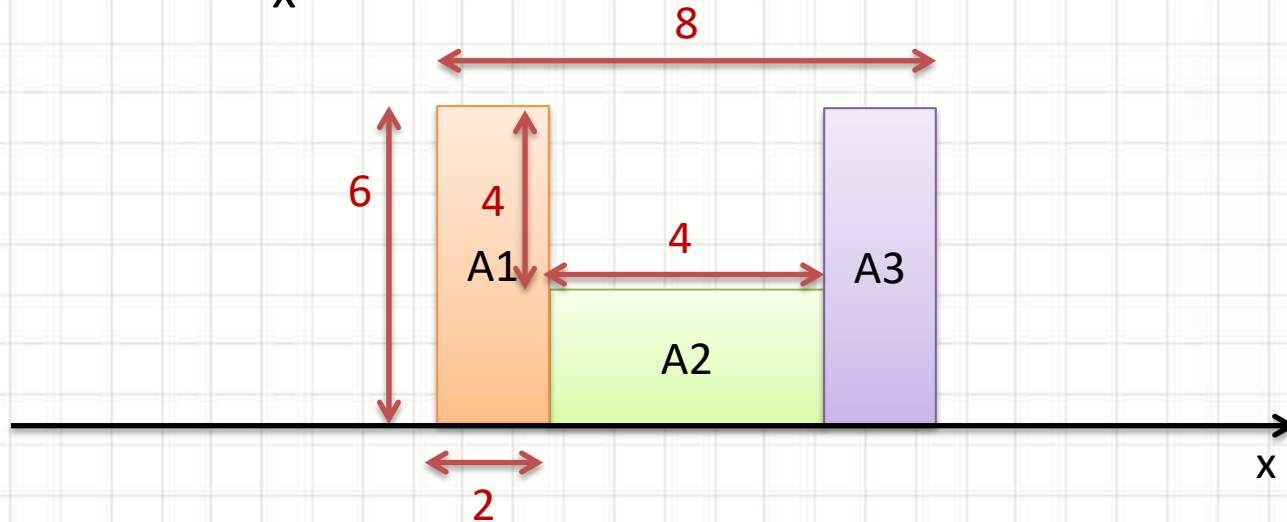
Exercício

- Calcular I_x



Exercício

- Calcular I_x



$$I_x = I_{A1x} + I_{A2x} + I_{A3x}$$

$$I_x = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{3} + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{3} + \frac{b_3 \cdot h_3^3}{3} = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + \frac{4 \cdot 2^3}{3} + \frac{2 \cdot 6^3}{3} =$$

$$I_x = 298.666... \text{ m}^4$$



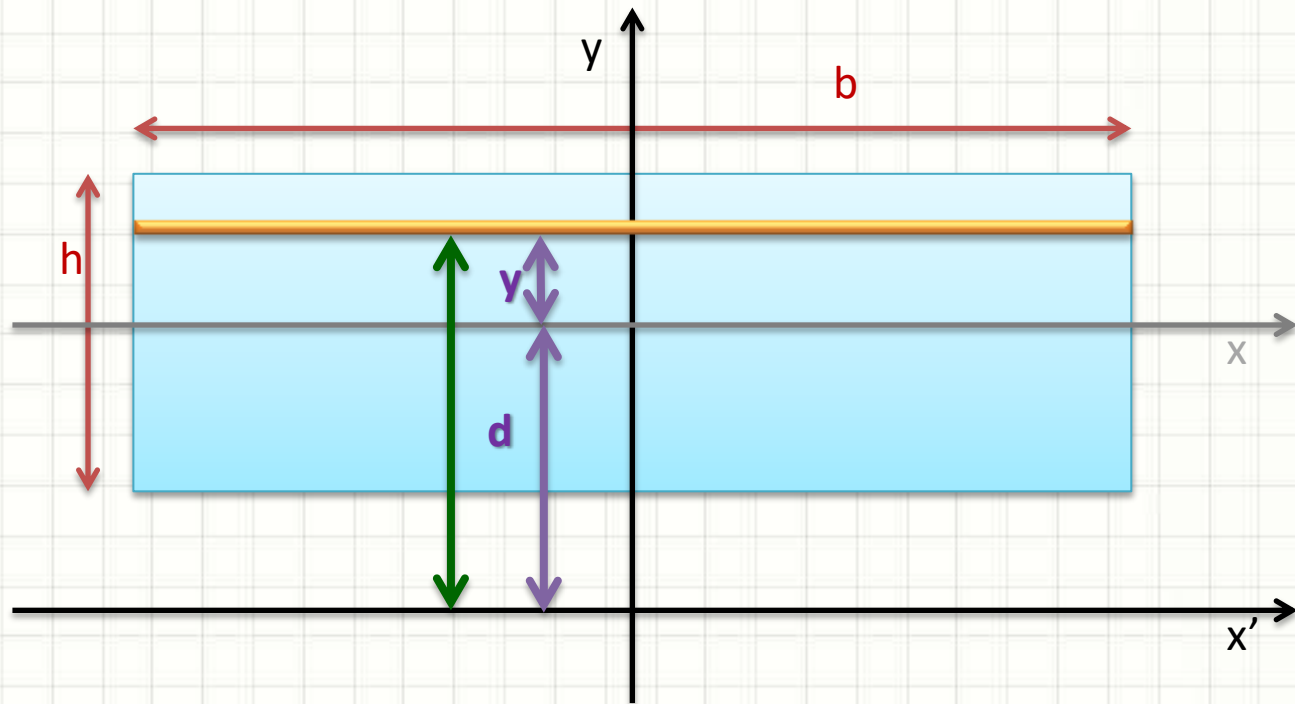
PAUSA PARA O CAFÉ!



TRANSLAÇÃO DE EIXO NO MOMENTO DE INÉRCIA

Translação de Eixos

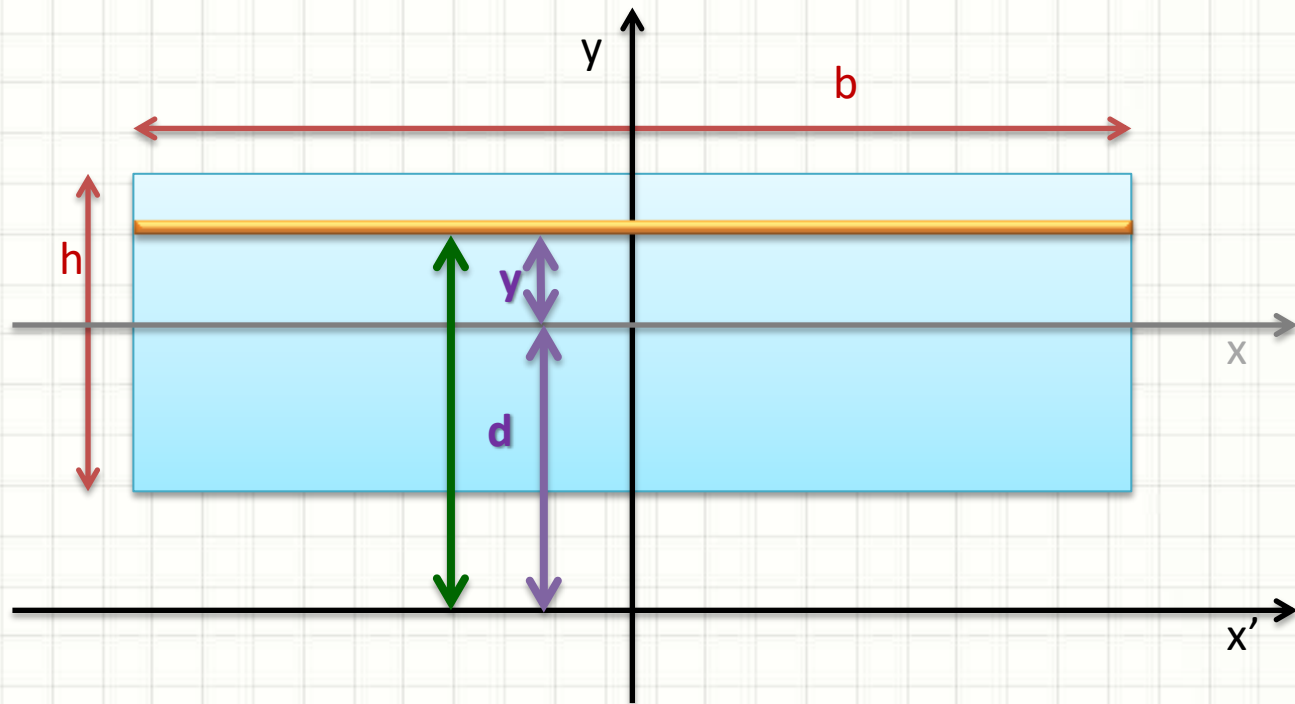
- Momento de Inércia (I_x conhecido)



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)



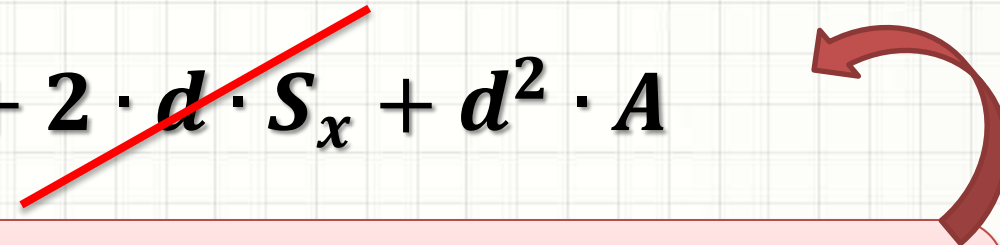
$$I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

Translação de Eixos

- Momento de Inércia (I_x conhecido)

$$I_{x'} = \int_A (y + d)^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot d \cdot y \cdot dA + \int_A d^2 \cdot dA$$

$$I_{x'} = I_x + \cancel{2 \cdot d \cdot S_x} + d^2 \cdot A$$


- Se x é o eixo que passa pelo centroide... $S_x = 0$

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$

Translação de Eixos

- Analogamente, para x e y originais passando pelo centroide:

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$

$$I_{y'} = I_y + A \cdot d^2$$

- Como I_x e $I_y \rightarrow$ eixos centrais, $d \rightarrow$ positivo
- E também... se O é o centroide...

$$J_{O'} = J_O + A \cdot d^2$$

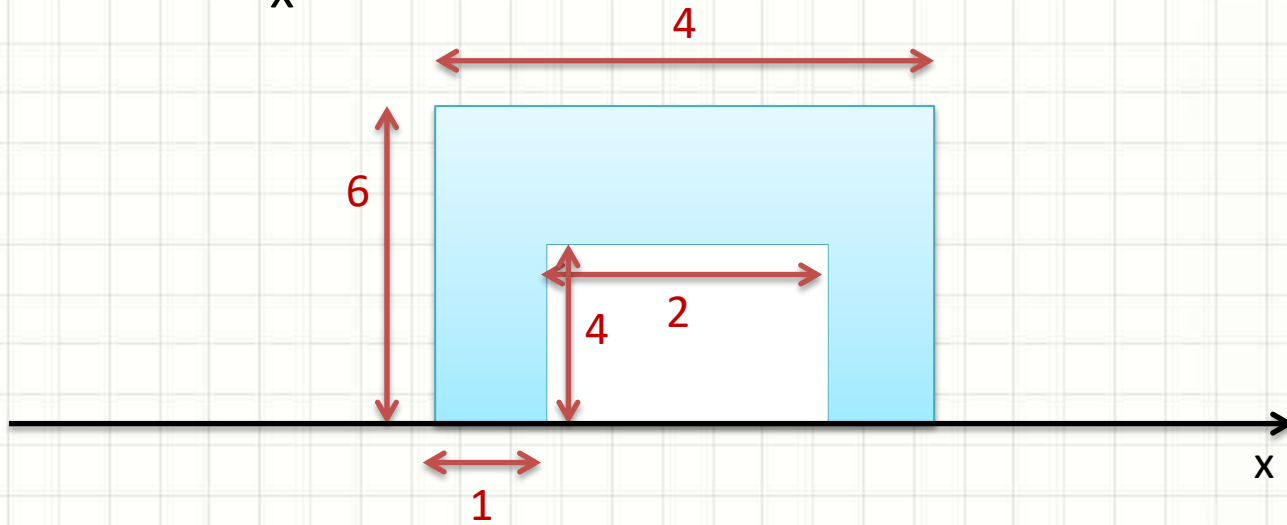
Translação de Eixos

- PRIMEIRO MANDAMENTO

**“Não transladarás eixo
que não seja central!”**

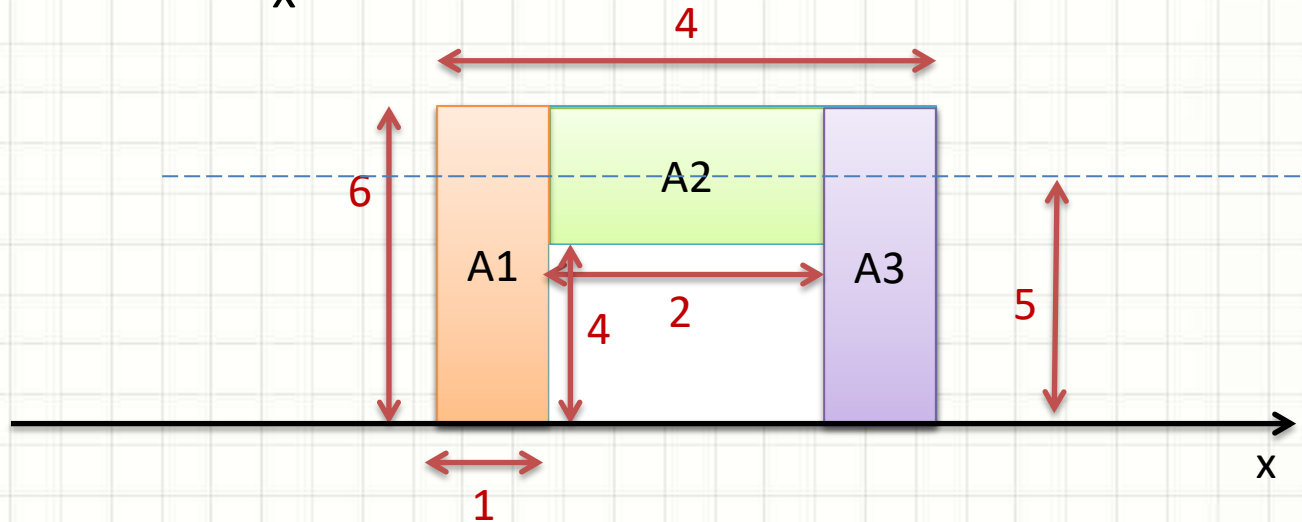
Exercício

- Calcular I_x



Exercício

- Calcular I_x - medidas em metros



$$I_x = I_{A1x} + I_{A2x} + I_{A3x}$$

$$I_x = \frac{b1 \cdot h1^3}{3} + \left(\frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d^2 \right) + \frac{b3 \cdot h3^3}{3}$$

$$I_x = \frac{1 \cdot 6^3}{3} + \left(\frac{2 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 2 \cdot 5^2 \right) + \frac{1 \cdot 6^3}{3} = 245.333... \text{ m}^4$$



TRANSLAÇÃO DE EIXO NO PRODUTO DE INÉRCIA

Translação de Eixos

- Pode-se demonstrar que se os eixos passam pelo centroide, isso é válido...

$$I_{x'} = I_x + A \cdot d^2$$

$$I_{y'} = I_y + A \cdot d^2$$

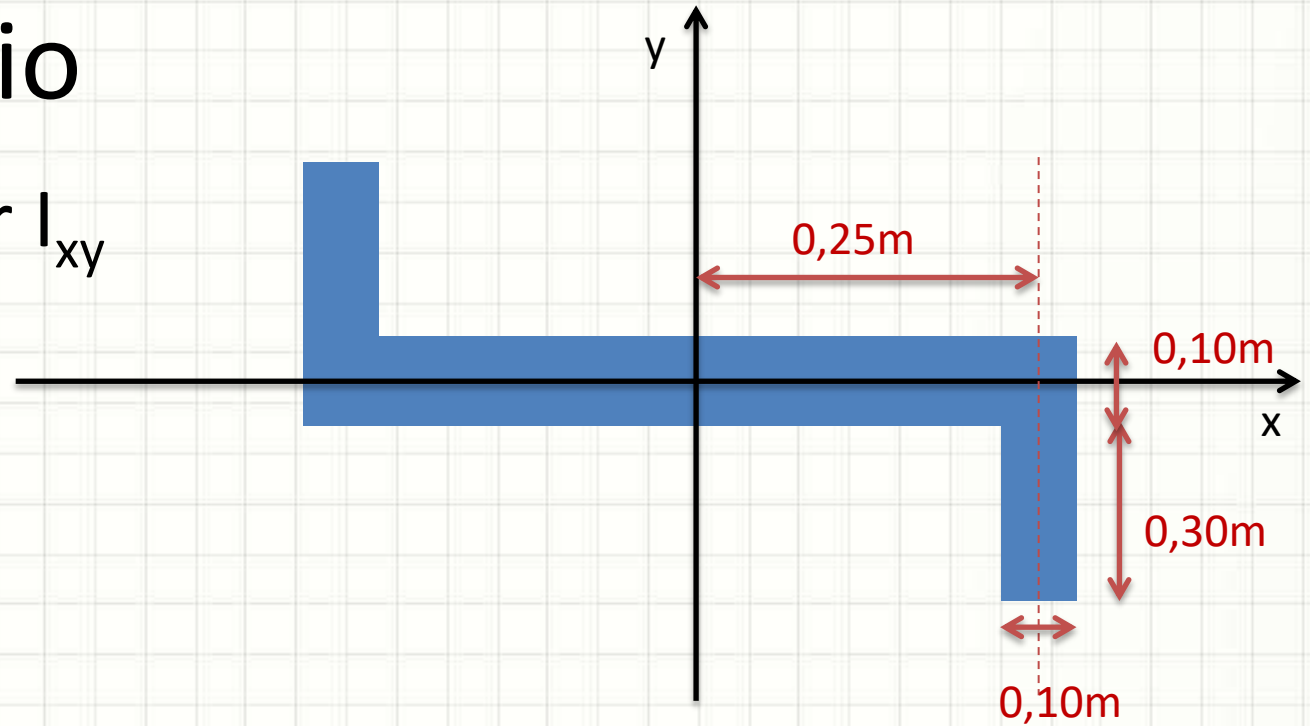
- Da mesma forma deduz-se que...

$$I_{xy'} = I_{xy} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

- Referência xy: (dx,dy) – coordenada de x'y'
 - Leitura de coordenadas: eixos do centroide!
 - Sinal!

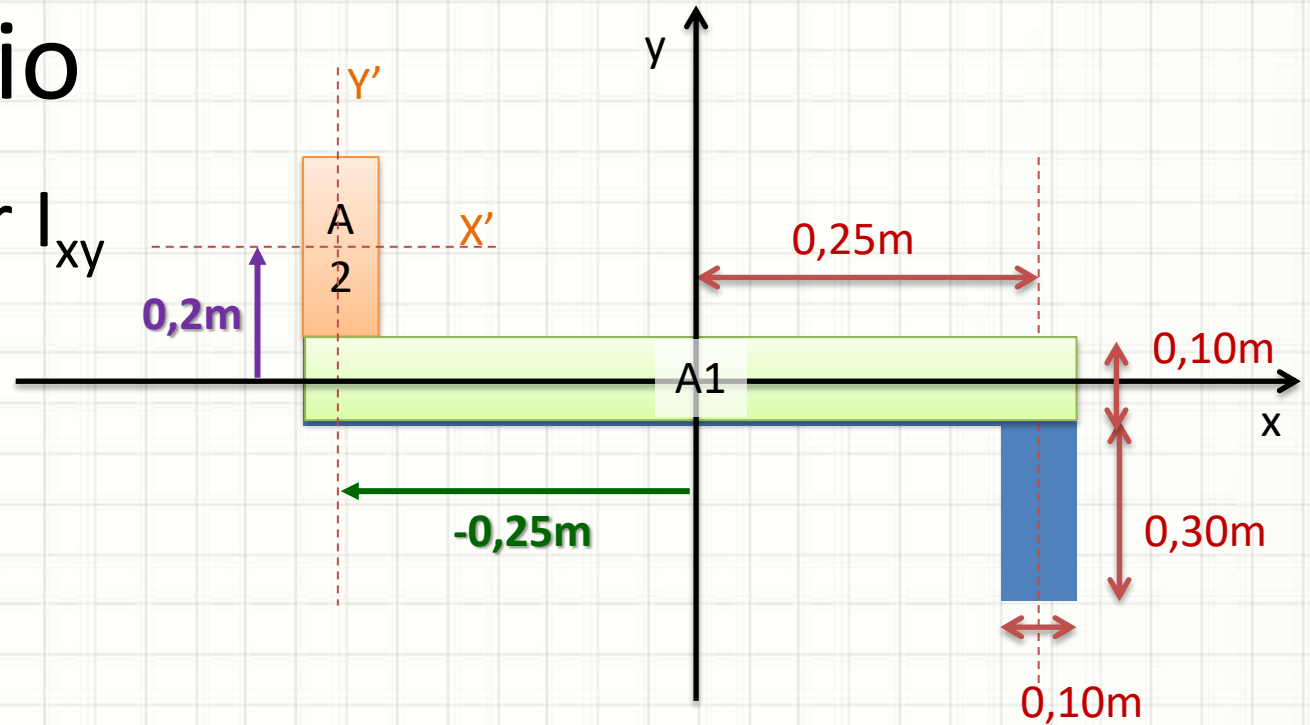
Exercício

- Calcular I_{xy}



Exercício

- Calcular I_{xy}



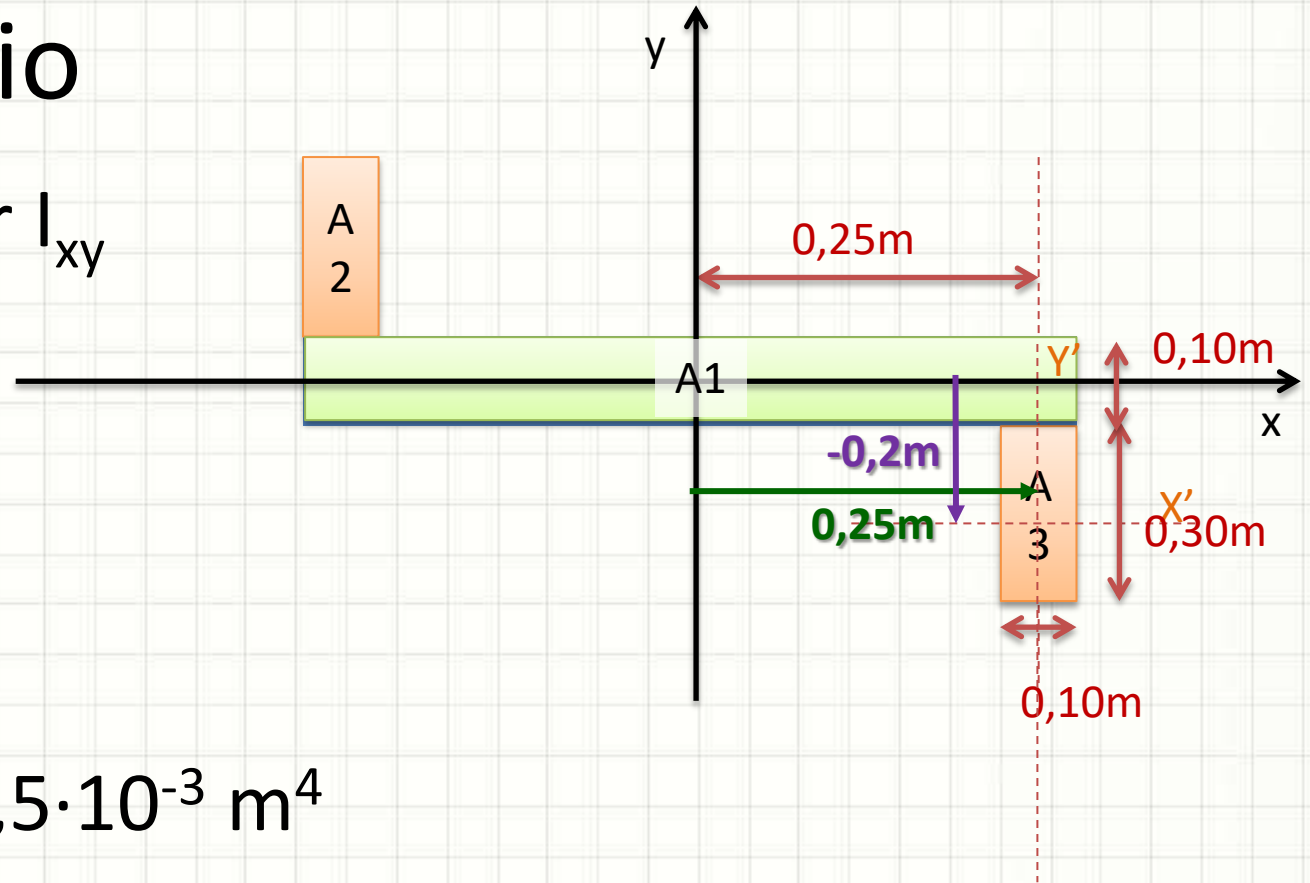
$$I_{A1xy} = 0 \text{ m}^4$$

$$I_{A2xy} = I_{A2x'y'} + A_2 \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{A2xy} = 0 + 0,3 \cdot 0,1 \cdot (-0,25) \cdot 0,2 = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Exercício

- Calcular I_{xy}



$$I_{A1xy} = 0$$

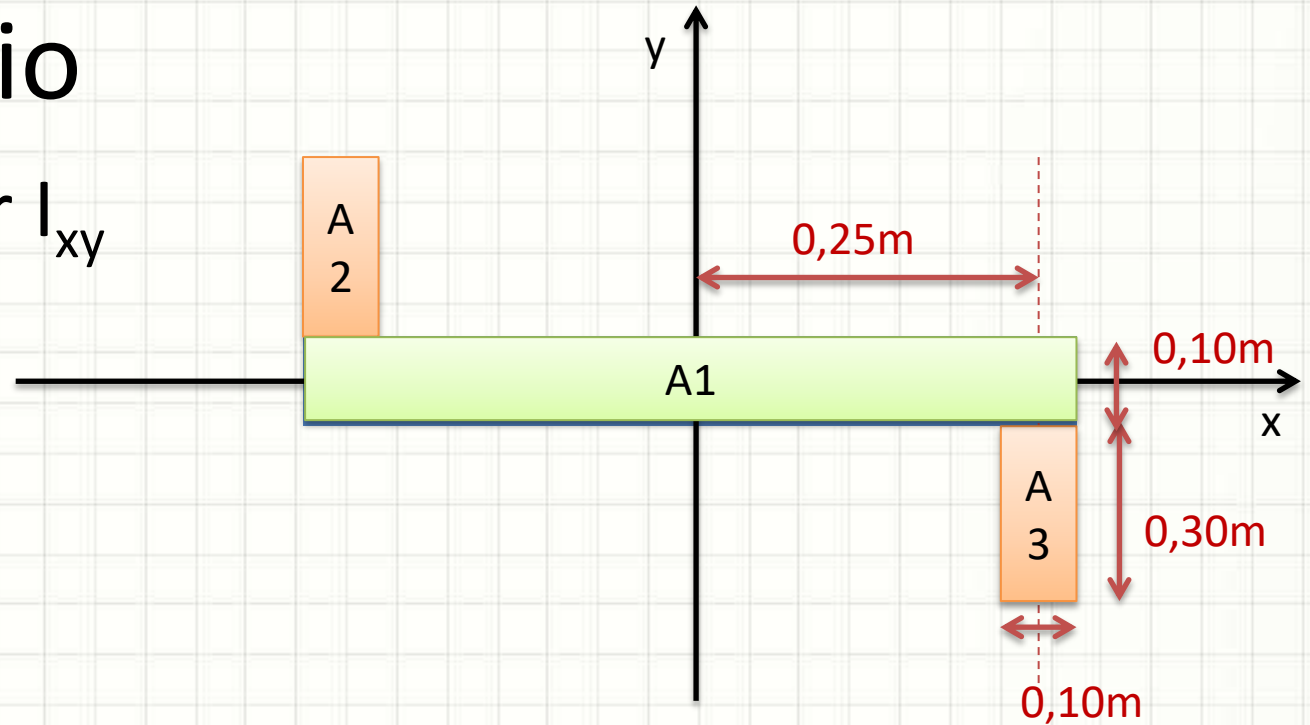
$$I_{A2xy} = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_{A3xy} = I_{A3x'y'} + A_3 \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{A3xy} = 0 + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,25 \cdot -(0,2) = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Exercício

- Calcular I_{xy}



$$I_{A1xy} = 0$$

$$I_{A2xy} = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_{A3xy} = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

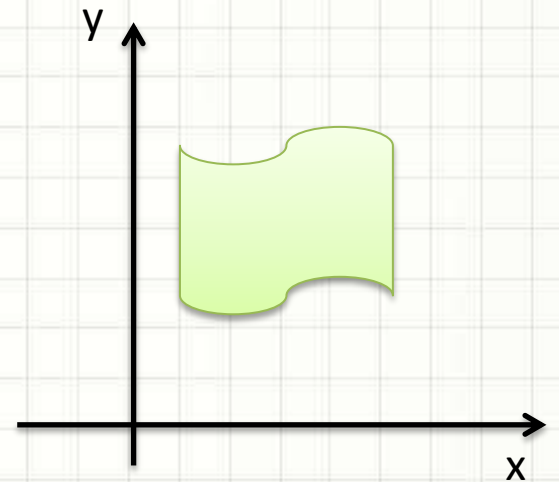
- $I_{xy} = I_{A1xy} + I_{A2xy} + I_{A3xy} =$
 $= 0 - 1,5 \cdot 10^{-3} - 1,5 \cdot 10^{-3} = -3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$



ROTAÇÃO DE EIXOS DE INÉRCIA

Rotação de Eixos

- Conhecidos I_x , I_y e I_{xy}

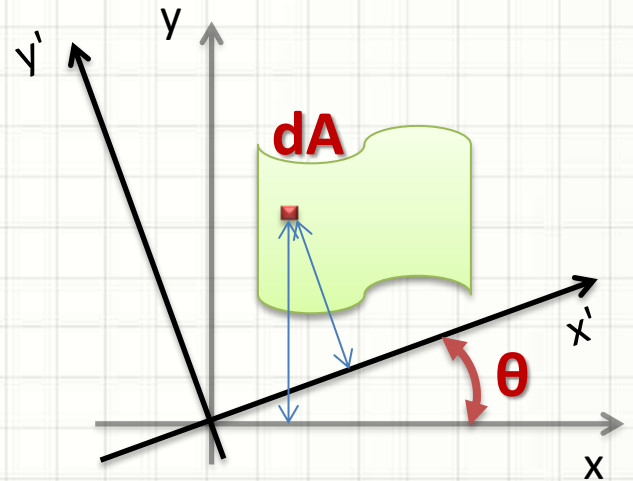


Rotação de Eixos

- Conhecidos I_x , I_y e I_{xy}
- Como calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$?

$$I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA$$

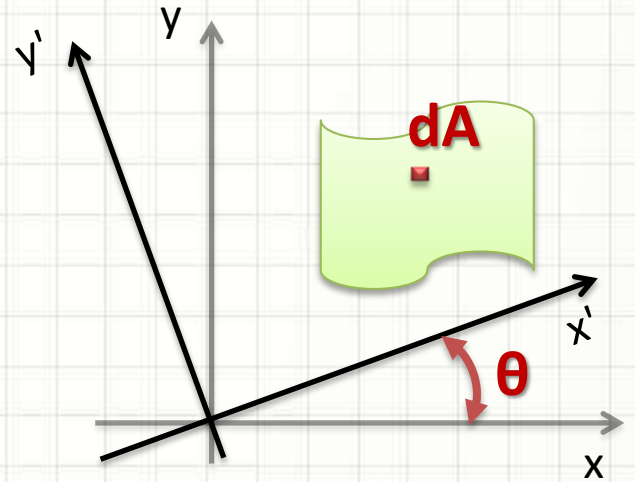
$$I_{y'} = \int_A x'^2 \cdot dA$$



- $x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$
- $y' = y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta$
- Realizando a integral de I_x e I_y ...

Rotação de Eixos

- Relações:



$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta + I_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

J_o permanece o mesmo!

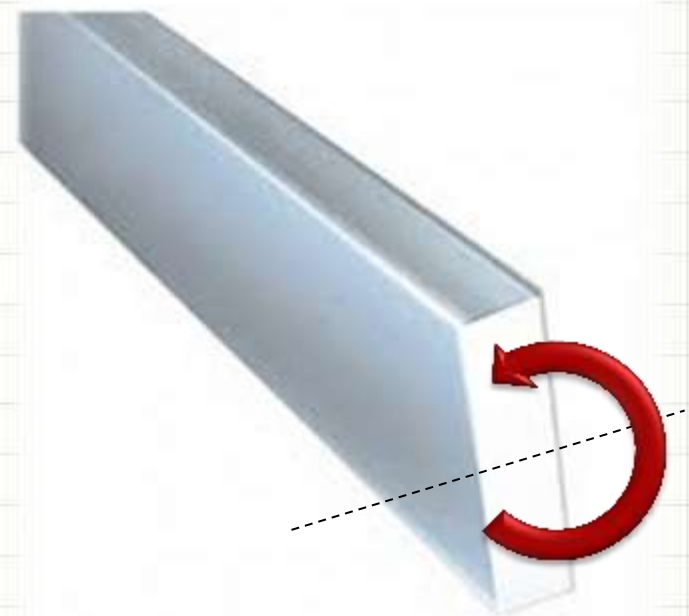
Por quê?



**ENCONTRANDO EIXOS DE
MAIOR E MENOR INÉRCIA**

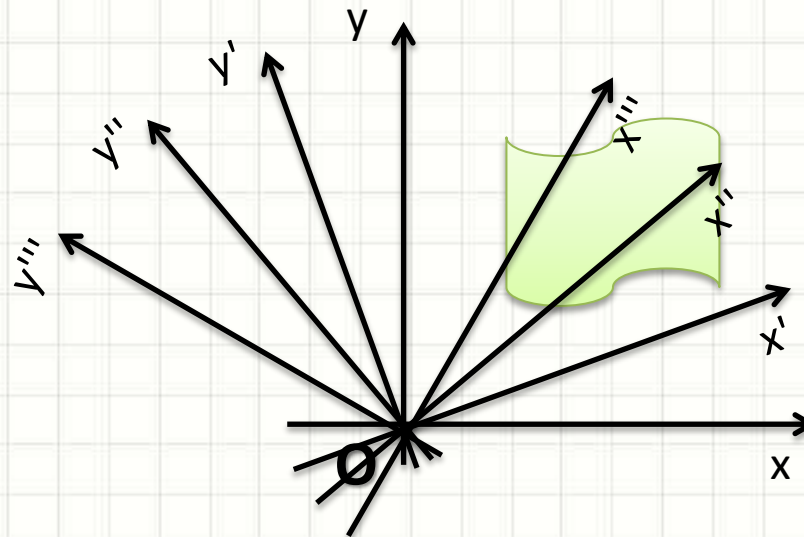
Eixos de Maior e Menor Inércia

- Maior momento de inércia: maior resistência
 - Máximo I , máxima resistência à flexão



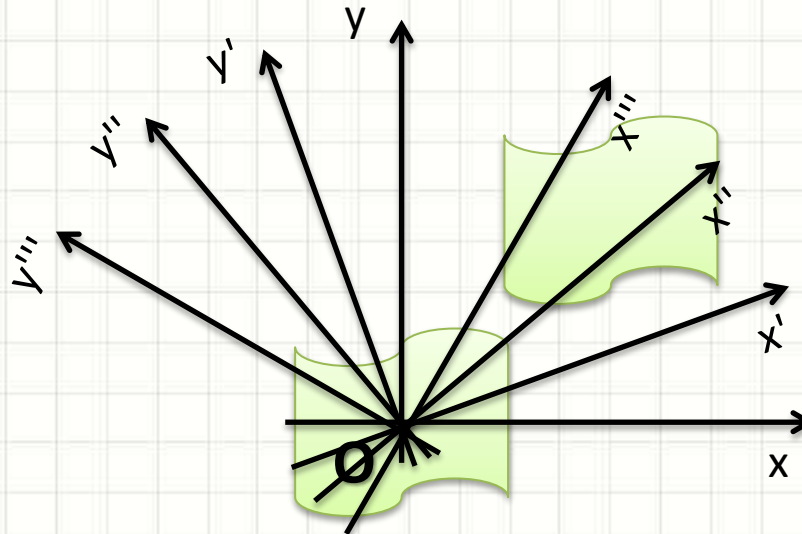
Eixos de Maior e Menor Inércia

- Para um dado centro de inércia O ...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y



Eixos de Maior e Menor Inércia

- Para um dado centro de inércia O ...
- ...existem infinitos pares de eixos
- Um deles: máximo e mínimo momentos I_x e I_y
- ***Em geral***: considera-se o O no centróide



Eixos de Maior e Menor Inércia

- Um desses pares: momento máximo x mínimo
 - Como encontrá-los?
 - a) Calcula-se I_x , I_y e I_{xy} para os eixos dados
 - b) Verifica-se este ângulo:

$$\theta_p = \frac{\mathit{atan}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

- Se θ_p for 0, são eixos de máximo e mínimo
- São conhecidos como **eixos principais**

Eixos de Maior e Menor Inércia

- Se θ_p **não** for 0, θ_p indica a rotação necessária
- Calcula-se os valores de I_x , I_y e I_{xy} novos
- Se só novos máximo e mínimos necessários:

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Eixos Principais

- Se os eixos são centrais e a figura é simétrica...

$$I_{xy} = 0$$

- Qual o valor θ_p de, nesse caso?

$$\theta_p = \frac{\text{atan}\left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}\right)}{2}$$

**Nesse caso:
eixos centrais \equiv eixos principais!**



CONCLUSÕES

Resumo

- Momento de Inércia e Momento Polar de Inércia
 - Produto de Inércia
 - Eixos Centrais de Inércia
 - Translação e Rotação de Eixos
 - Eixos Principais de Inércia
 - **Exercitar: Exercícios Hibbeler / Mat. Didático**
-
- Onde entra a resistência?
 - Vamos começar pelos **esforços axiais**
 - Tração e Compressão



PERGUNTAS?



PARA TREINAR

Para Treinar em Casa

- Mínimos:
 - Exercícios A.2 a A.6 (5ª A.3 a A.6)
 - Exercício A.11 (5ª A.10)



EXERCÍCIO

Exercício – Entrega Individual

- Calcule o I_x , o I_y e o I_{xy} no centroide
- Verifique se esses já são os eixos principais
- Se não forem, determine-os e seus I_x , I_y e I_{xy} .

