Resistência dos Materiais II

Carregamento Axial
Parte I

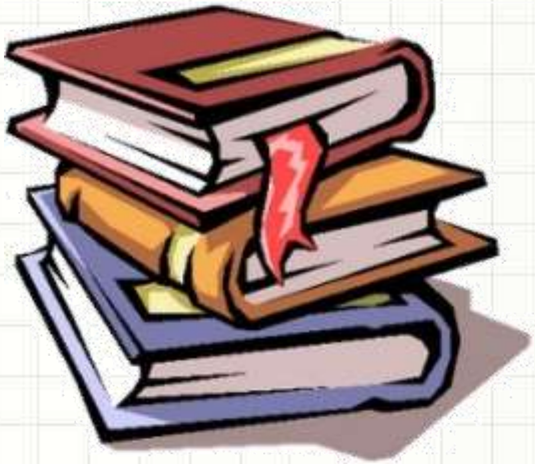
Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 1

Objetivos

- Conhecer o princípio de Saint-Venant
- Conhecer o princípio da superposição
- Calcular deformações em elementos submetidos a esforço normal
- Calcular reações em problemas estaticamente indeterminados simples

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 3)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 85-96
Aula Online	-
Biblioteca Virtual	"Resistência dos Materiais"

Relembrando:

Forma x Deformação

Características das Figuras Planas

- Perímetro, Área...
- Momento Estático → cálculo do centroide
- Momento de Inércia → resiste à variação ω

- Mas o que tem a ver isso com resistência?
- Vamos voltar um pouco...
  - Vamos começar com o Módulo de Elasticidade

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = F/A$$

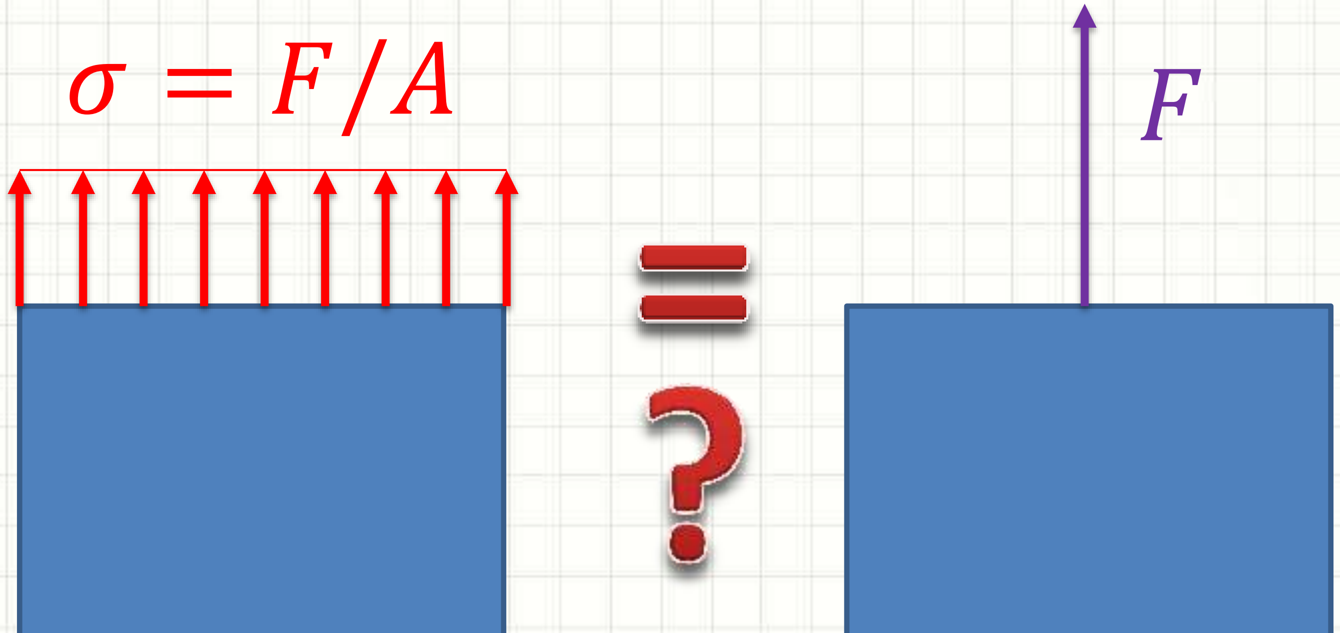
Pressuposto?

Cálculo de Tensão Média

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = F/A$$

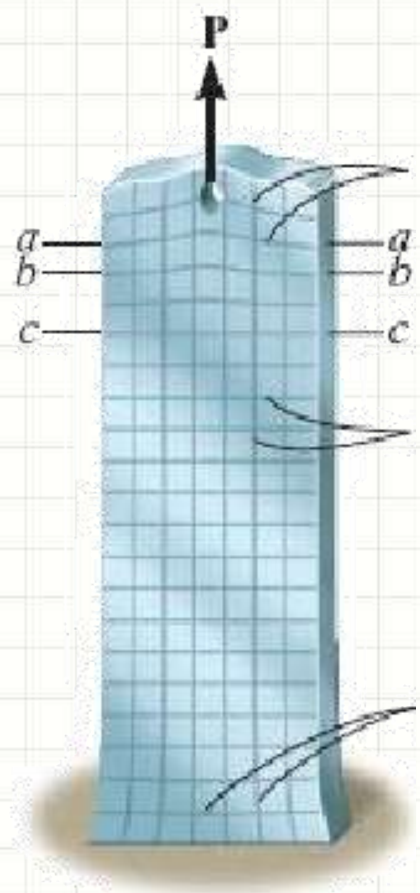
- O pressuposto é que a tensão é uniforme!
  - E gera uma deformação uniforme!



O Princípio de Saint-Venant

Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga

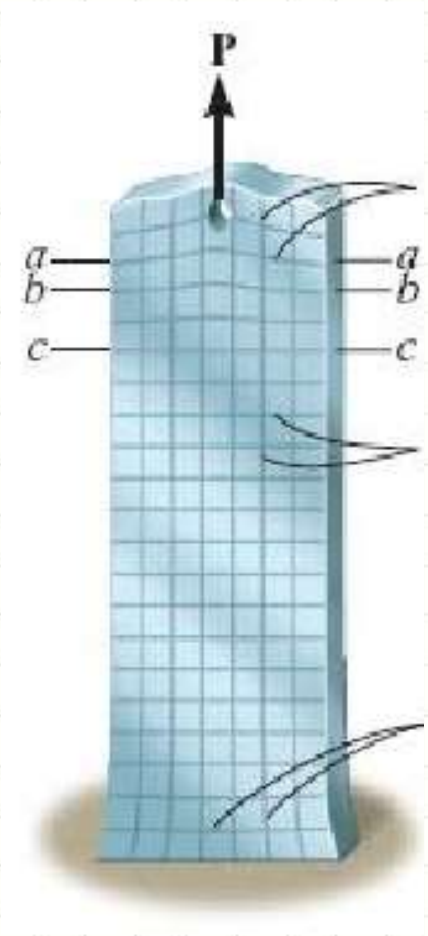


Distorção próxima à carga

Distorção próxima ao apoio (reação!)

Princípio de Saint-Venant

- Distorção na deformação: próxima à carga



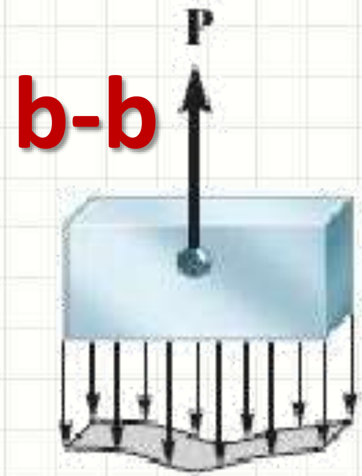
Distorção próxima à carga

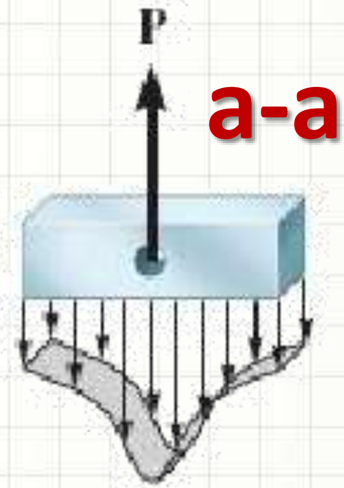
Longe das cargas e apoio...
Permanecem paralelas

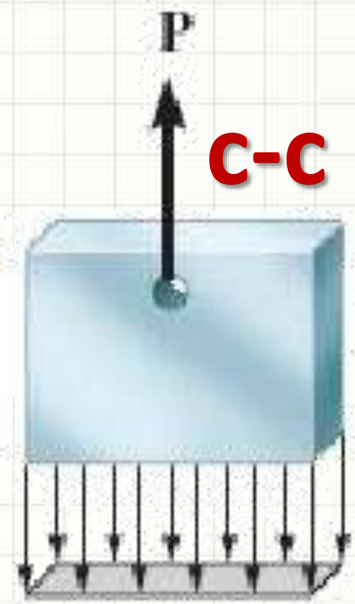
Distorção próxima ao apoio
(reação!)

Princípio de Saint-Venant

- A tensão é igual em **a-a**, **b-b** e **c-c**?
  - A tensão se uniformiza...



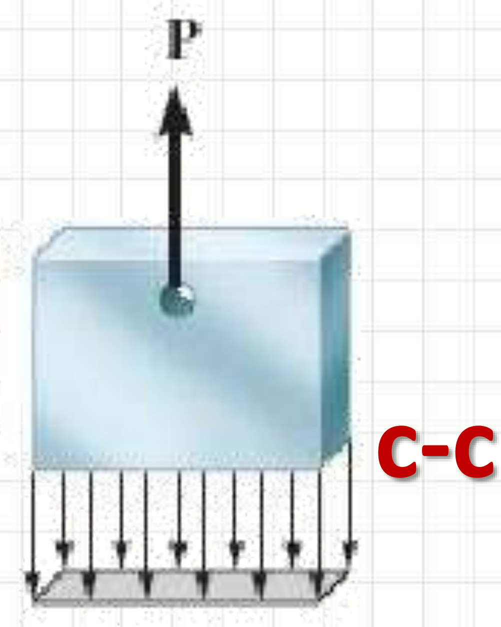




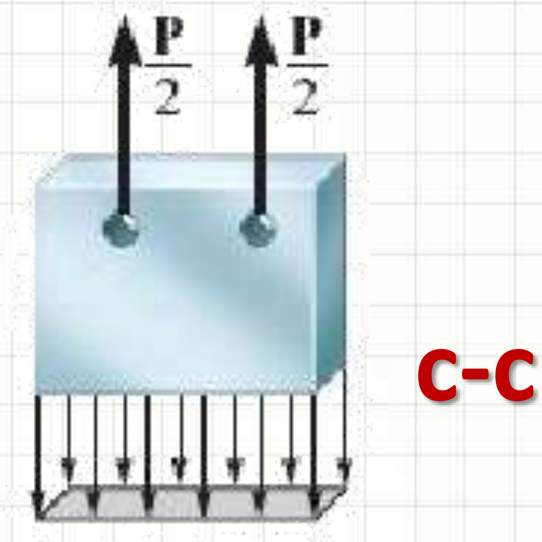
$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

Princípio de Saint-Venant

- Uniformização independe da distribuição da carga!
  - Depende da resultante!



$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$



$$\sigma_{méd} = \frac{P}{A}$$

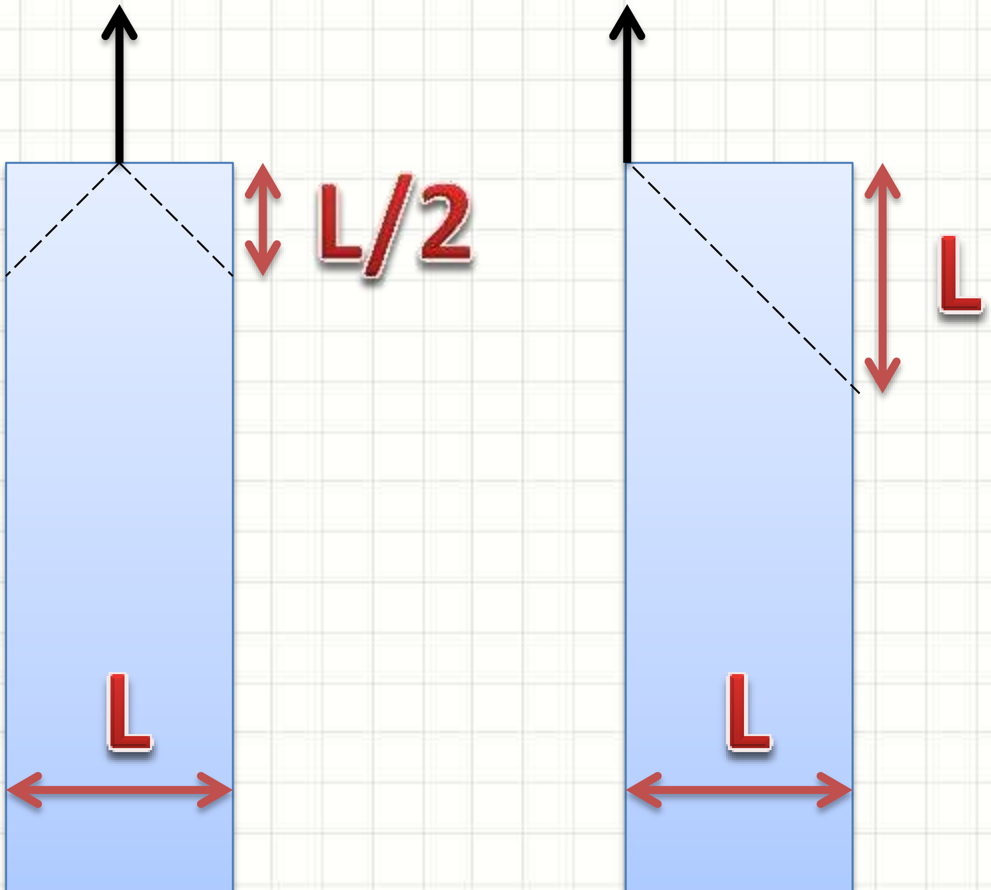
Princípio de Saint-Venant

- Quão longe da aplicação se uniformiza?

L por quê?

Princípio de Saint-Venant

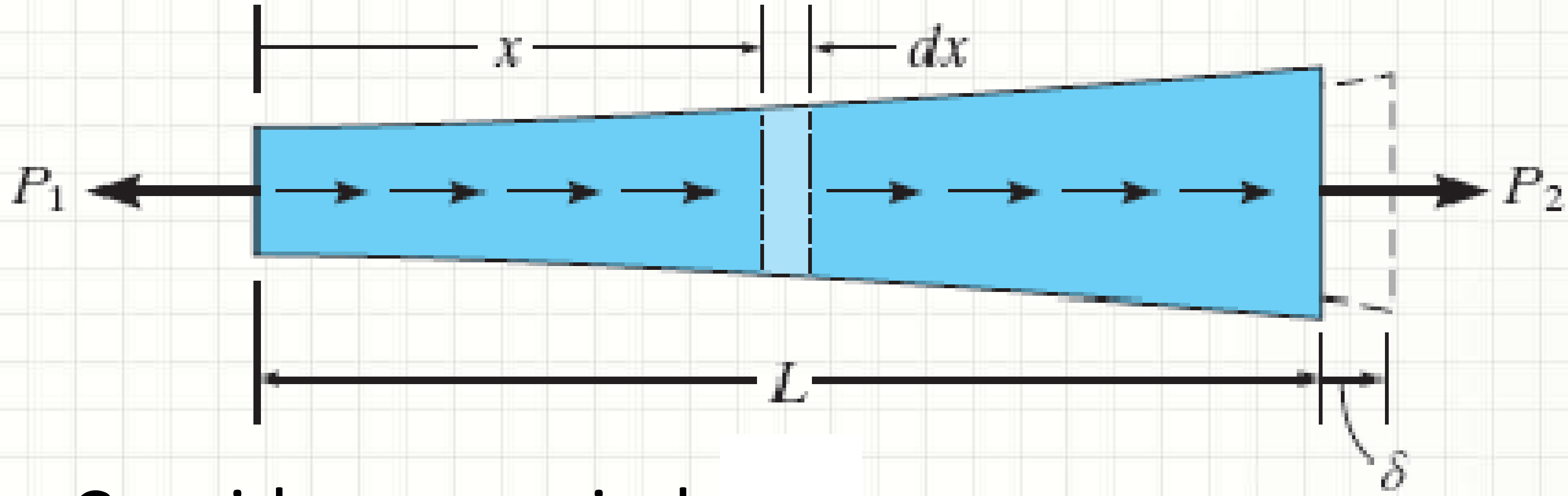
- O espraiamento é em 45º
- Mas não há pressuposição de posição!



Deformação Elástica de Corpo em Carga Axial

Deformação por Carga Axial

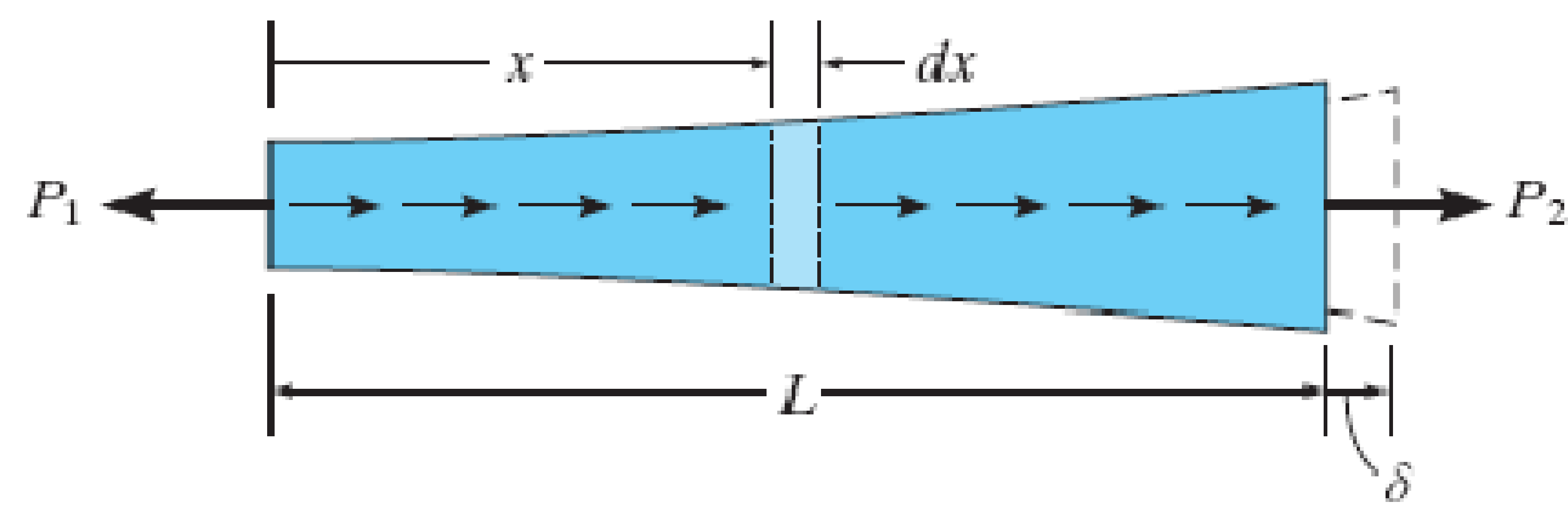
- Consideremos a viga genérica sob carga axial



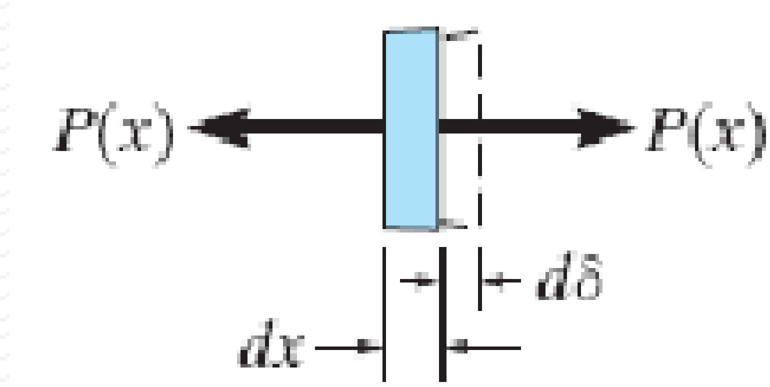
- Consideremos ainda:
  - Carga varia ao longo de x → P(x)
  - Área varia ao longo de x → A(x)
  - Elasticidade varia ao longo de x → E(x)
  - Tensão uniforme em cada seção (Saint-Venant)

Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial

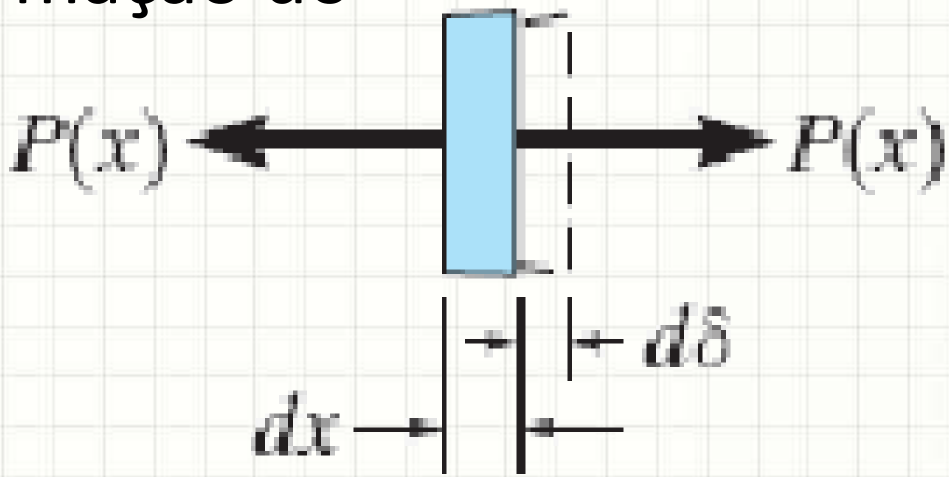


- Vamos calcular a deformação no elemento dx



Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação dδ



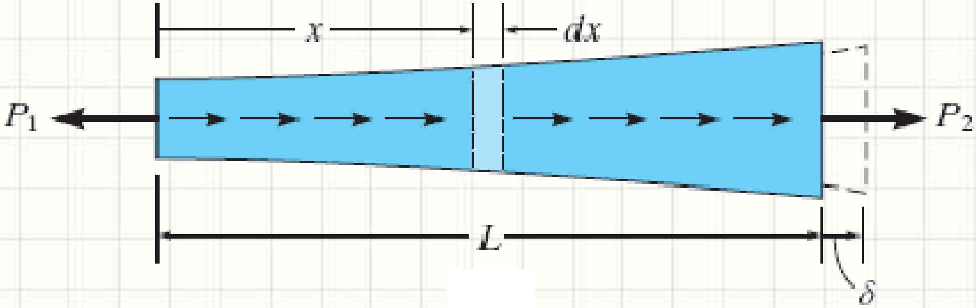
- $\sigma = E \cdot \epsilon$
- $\sigma = \frac{P}{A}$
- $\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$

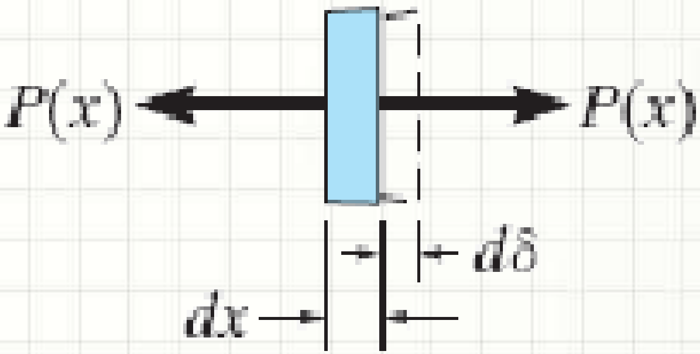
$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P \cdot dx}{E \cdot A}$$

Deformação por Carga Axial

- Cálculo da Deformação





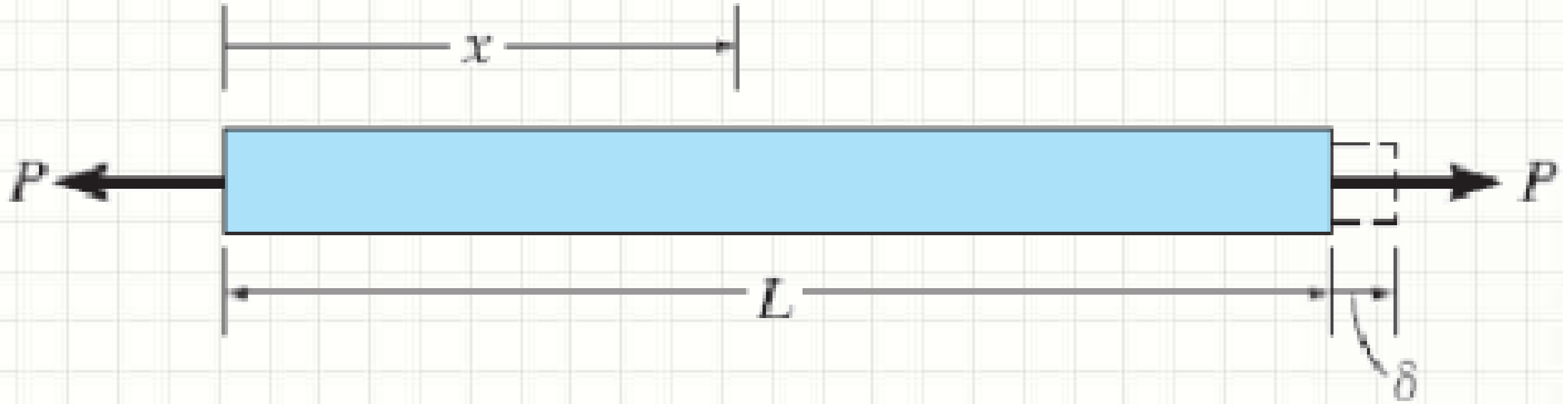
$$d\delta = \frac{P \cdot dx}{E \cdot A}$$

Deformação
Total na Barra?

$$\delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A}$$

Deformação por Carga Axial

- Deform.: Viga de **seção**/**carga**/**E** constantes

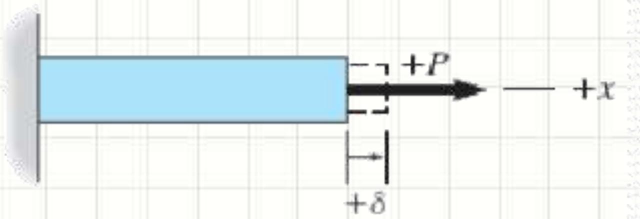


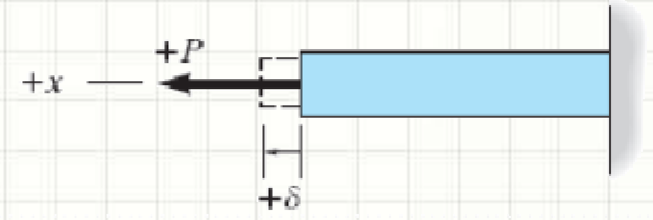
$$\delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{P}{E \cdot A} \cdot \int_0^L dx$$

$$\boldsymbol{\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}}$$

Deformação por Carga Axial

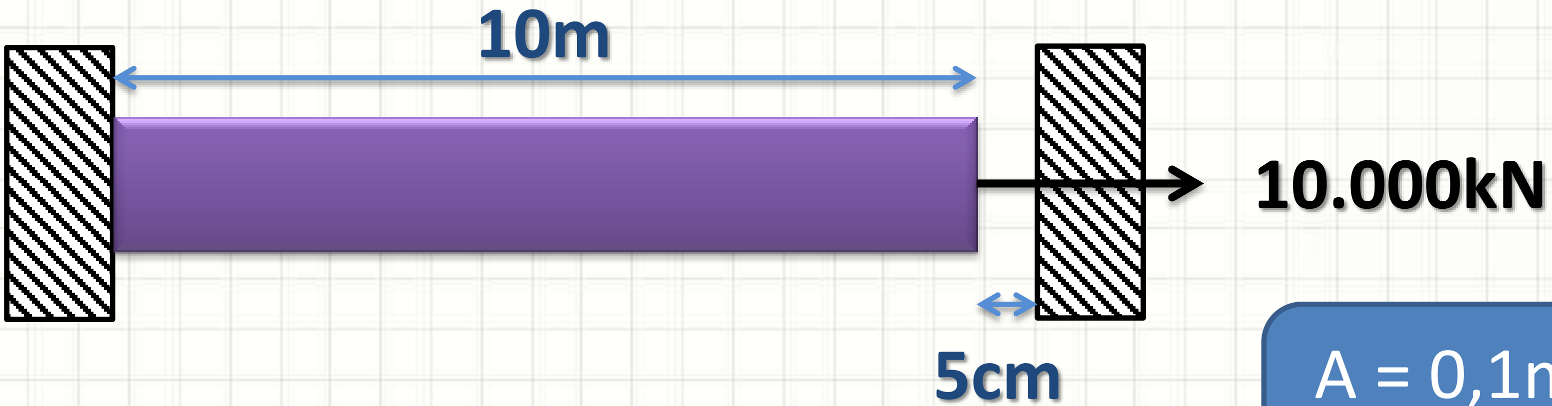
- Convenção de Sinais





- Trações → Alongamentos → +
- Compressões → Contrações → -

Exemplo – O vão é suficiente?



A = 0,1m²
E = 50GPa

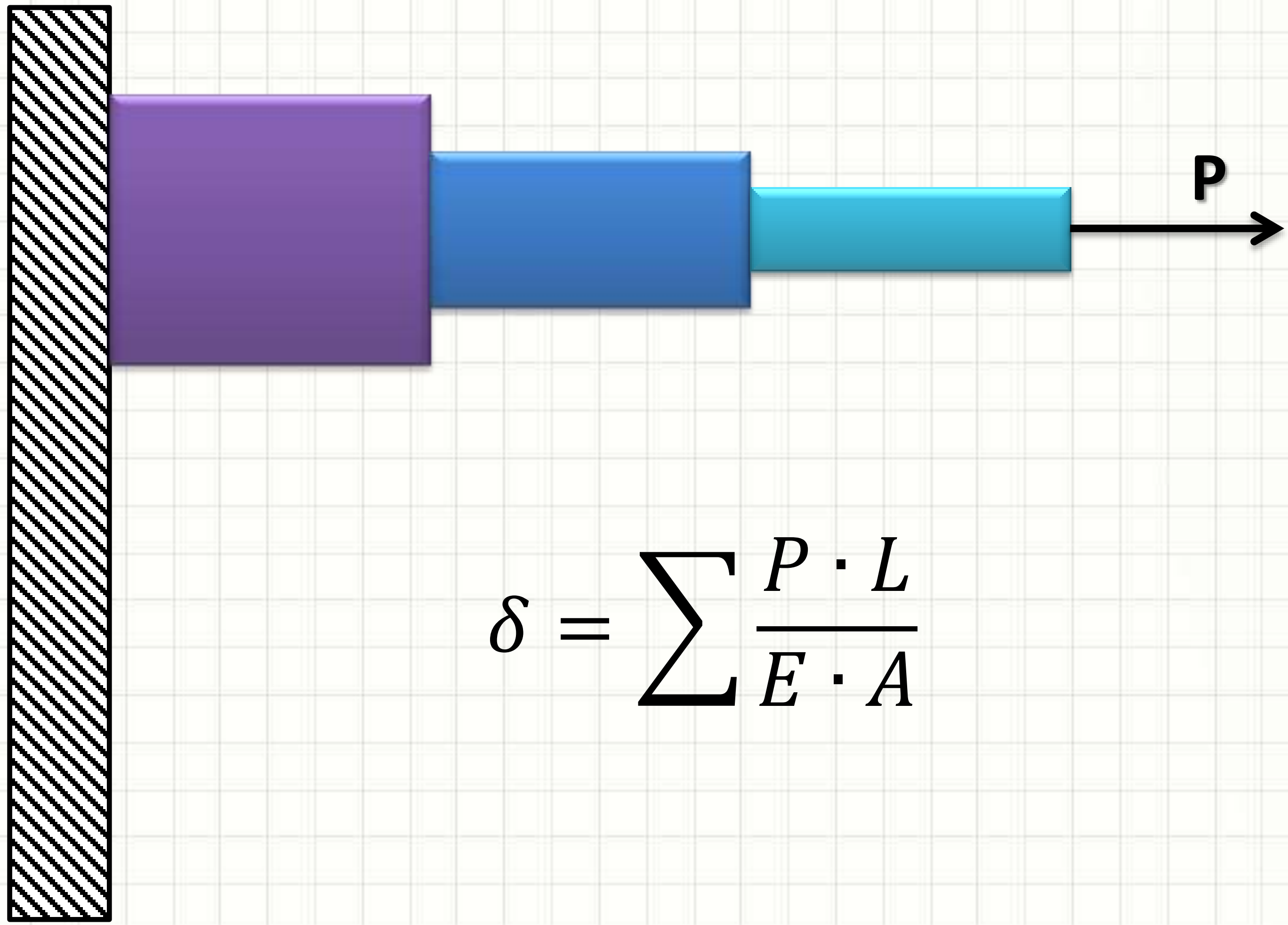
- Se o espaço for suficiente...

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{10^7 \cdot 10}{5.10^{10} \cdot 10^{-1}} = \frac{10^8}{5.10^9}$$

$$\boldsymbol{\delta = 2.10^{-2}\ \mathbf{m}}$$

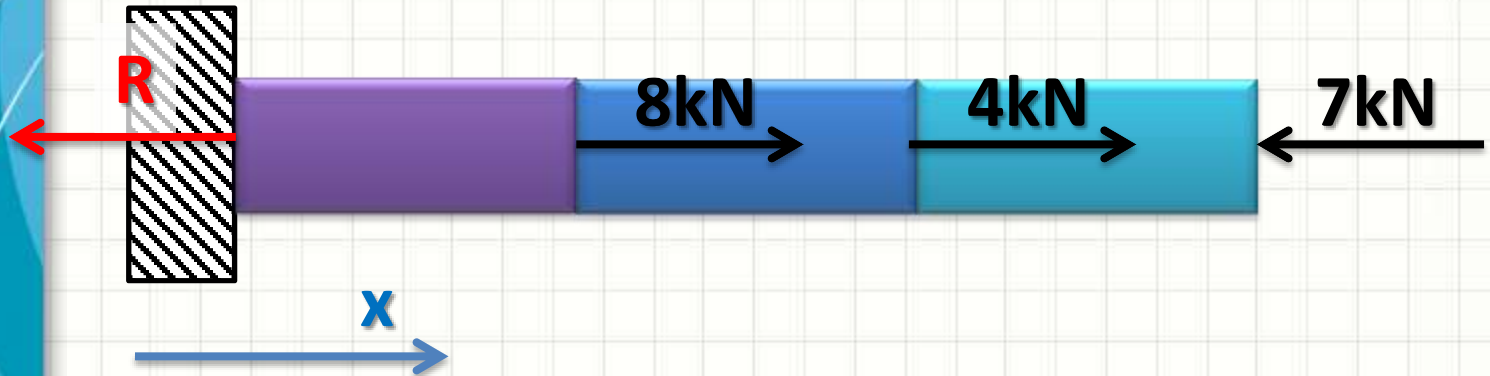
Deformação por Carga Axial

- Barras compostas de várias seções constantes



$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Deformação por Carga Axial



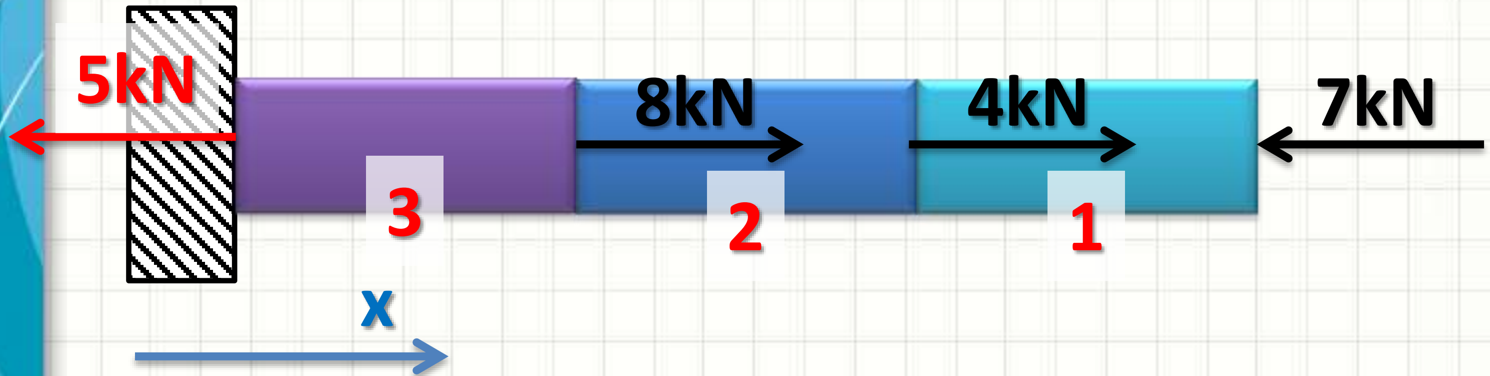
- A reação de apoio é...

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R + 8 + 4 - 7 = 0 \Rightarrow$$

R = 5kN

Deformação por Carga Axial

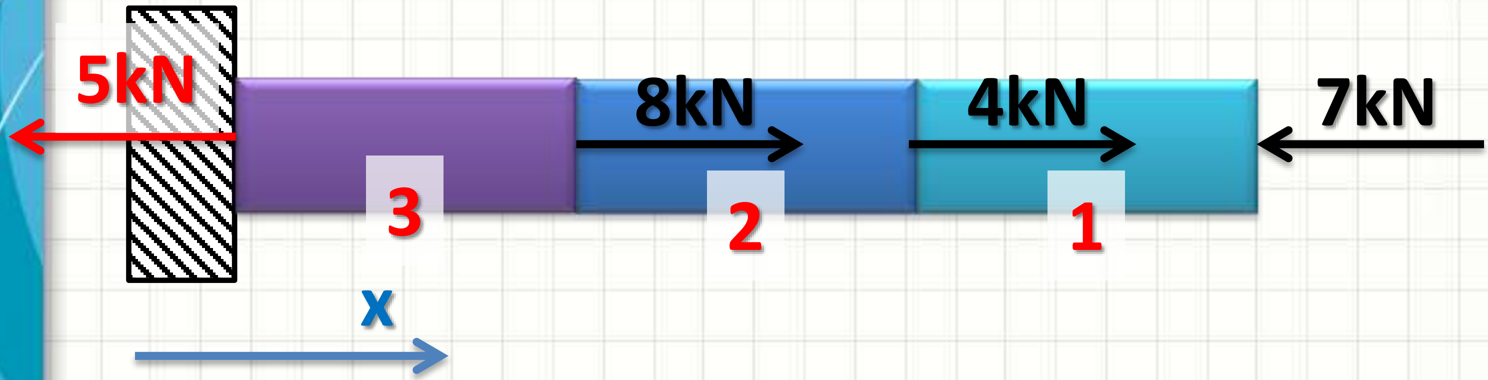


- O alongamento é...

$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$

Deformação por Carga Axial

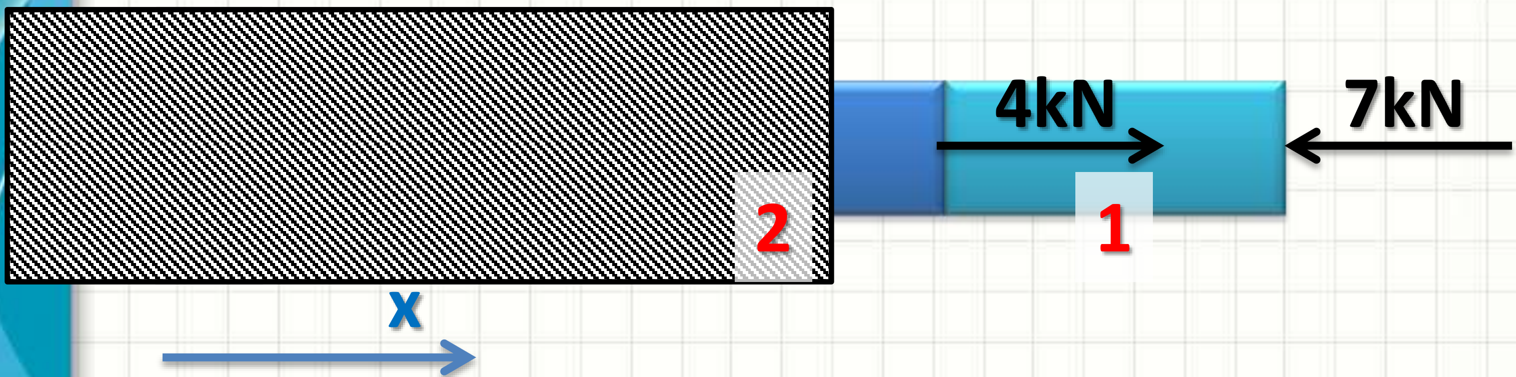


- Mas quanto valem P1, P2 e P3?

Deformação por Carga Axial

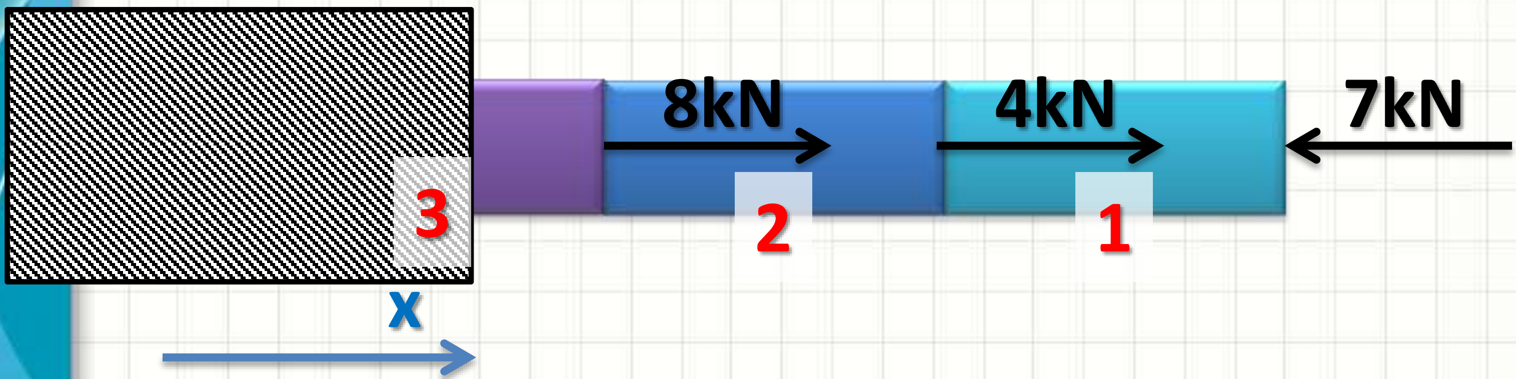
- Mas quanto valem P1, P2 e P3?
- Qual a única força atuando em 1?
- P1 = -7kN

Deformação por Carga Axial



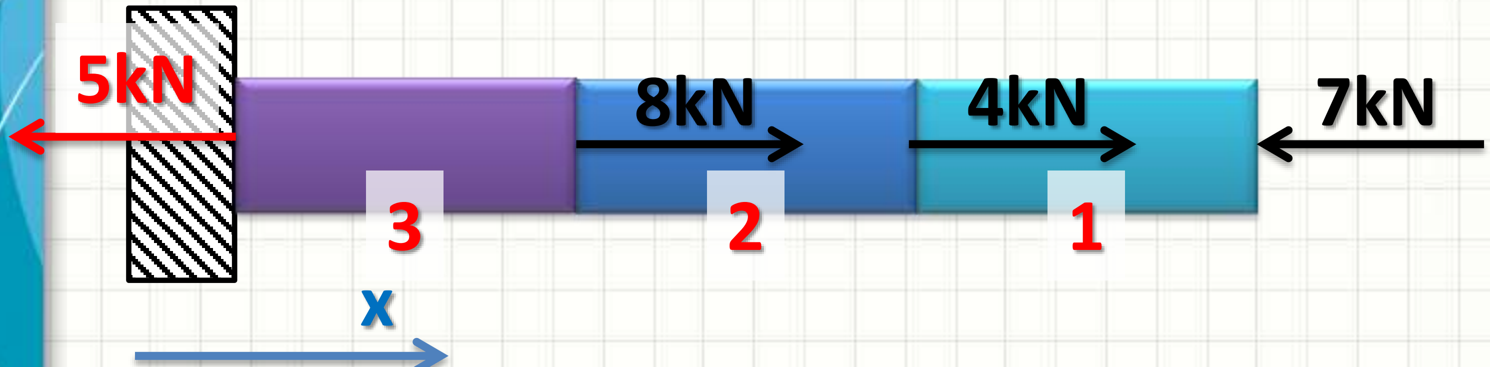
- Mas quanto valem P1, P2 e P3?
- Quais são as forças atuando em 2?
- P2 = -7kN + 4kN = -3kN

Deformação por Carga Axial

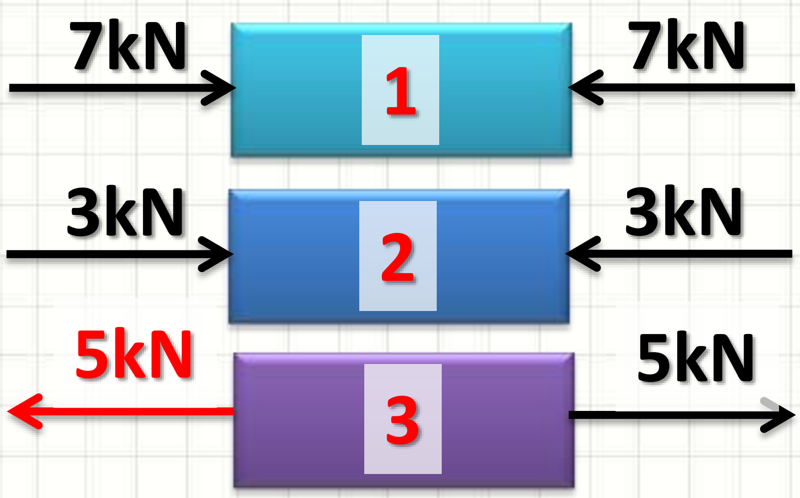


- Mas quanto valem P1, P2 e P3?
- Quais são as forças atuando em 3?
- P3 = -7kN + 4kN + 8kN = 5kN

Deformação por Carga Axial



$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3}$$



P1 = -7kN

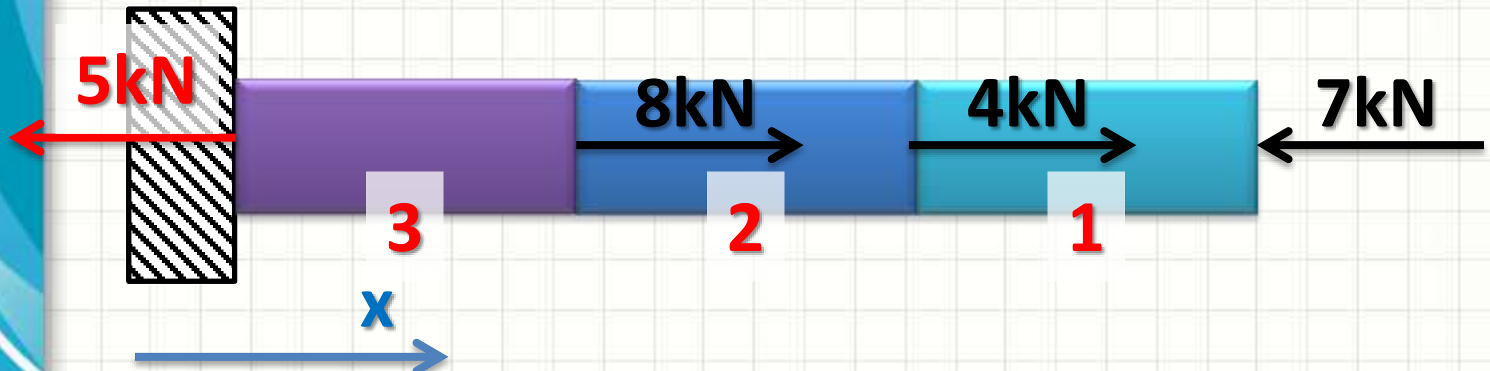
P2 = -3kN

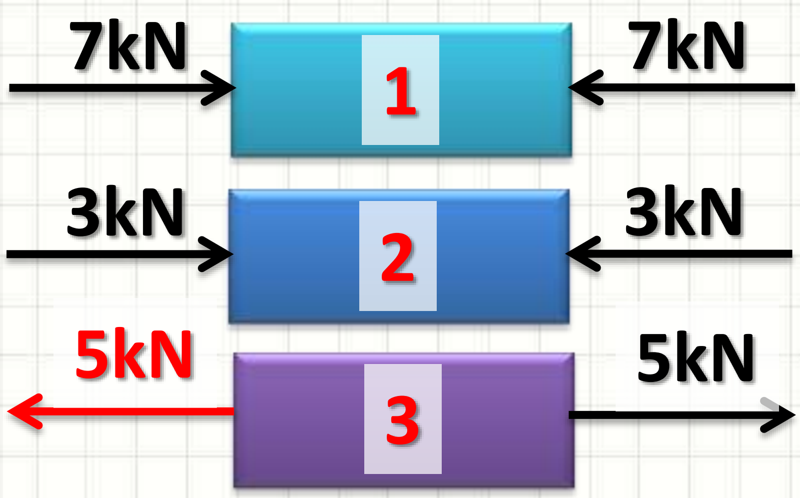
P3 = 5kN

Diagrama de Esforços Normais

Diagrama de Esforços Normais

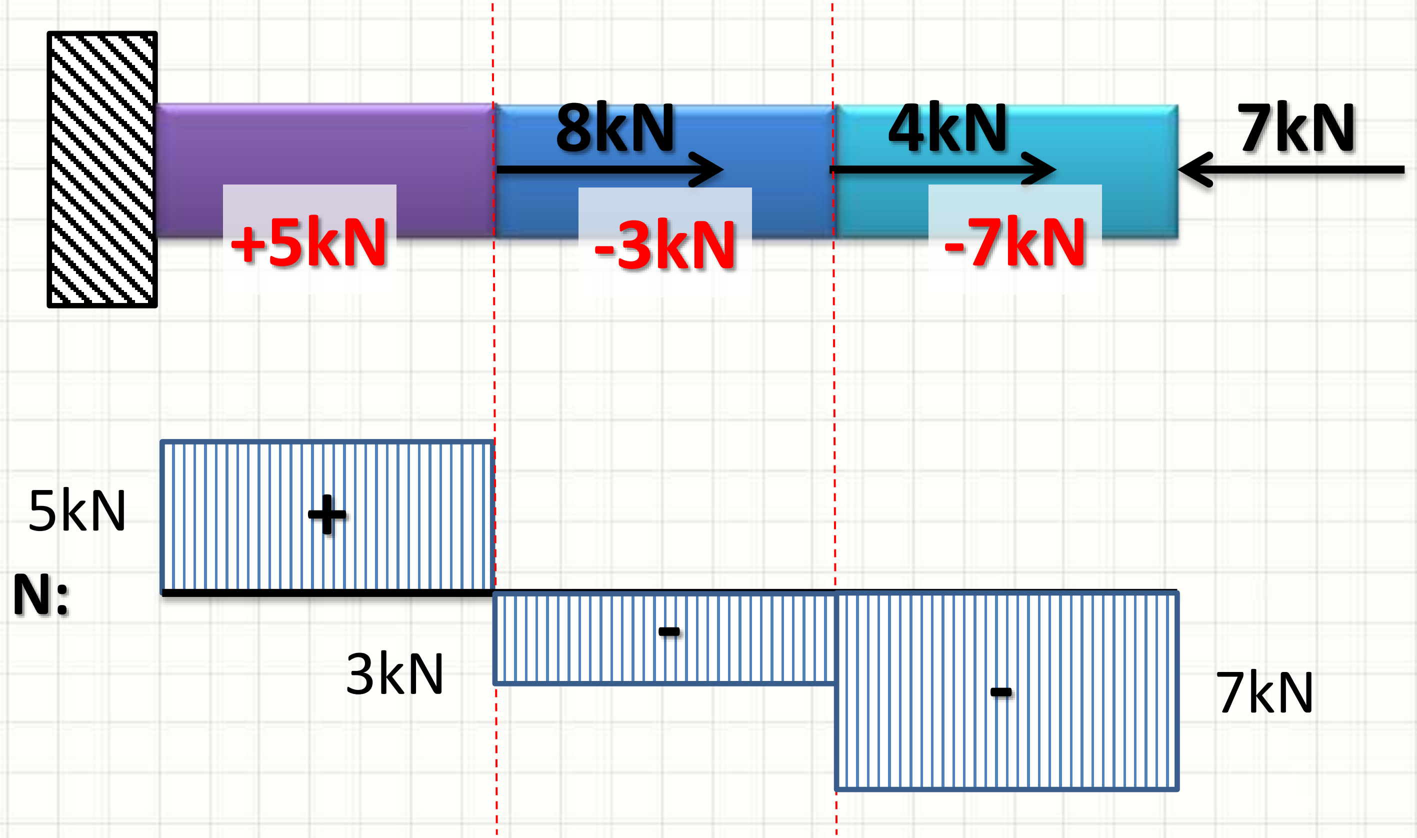
- No exercício anterior, vimos:





Será que não tem um jeito **simples** de indicar os esforços reais em cada trecho?

Diagrama de Esforços Normais



Pausa para o Café!

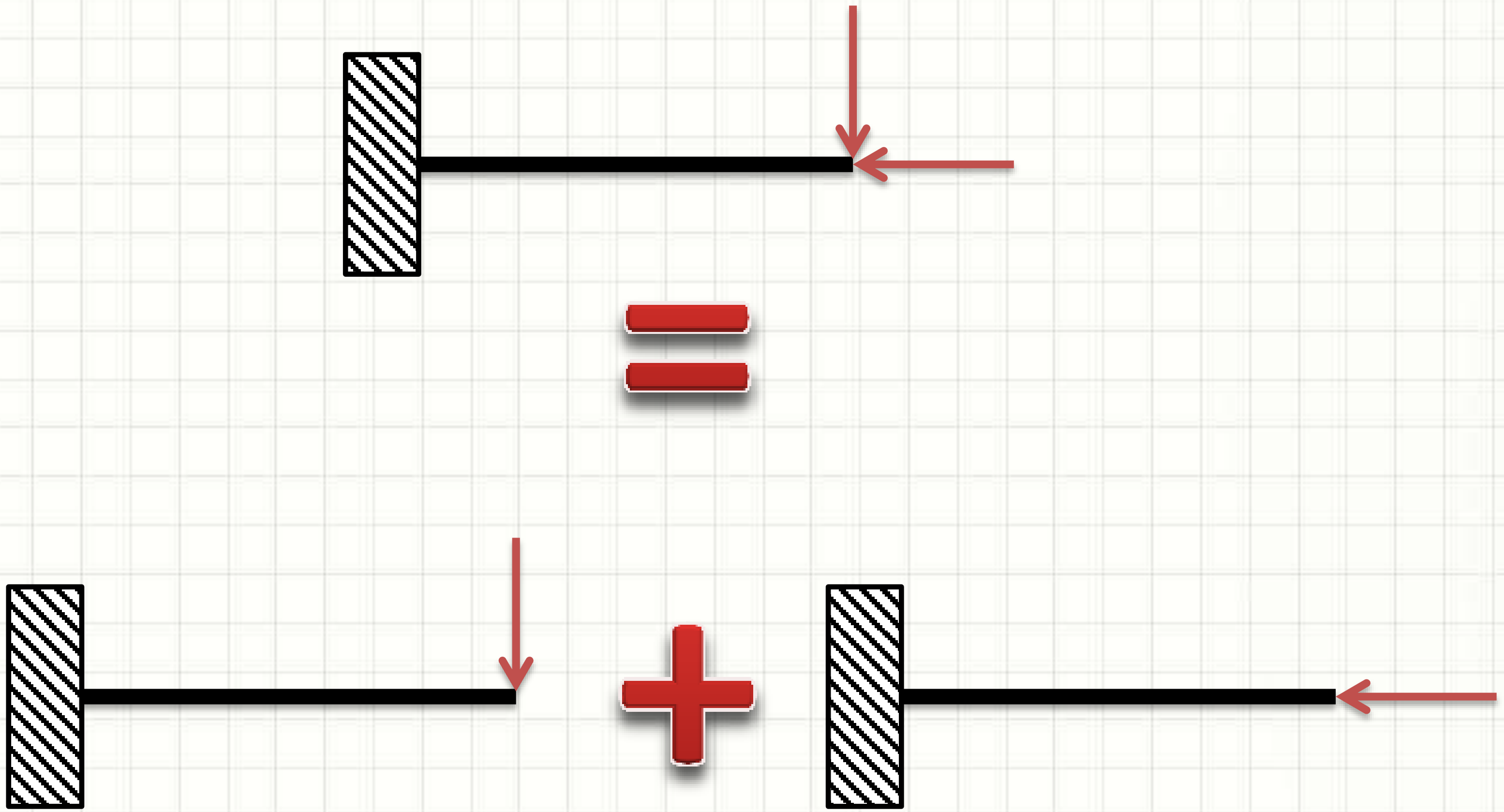
Superposição de Efeitos

Superposição de Efeitos

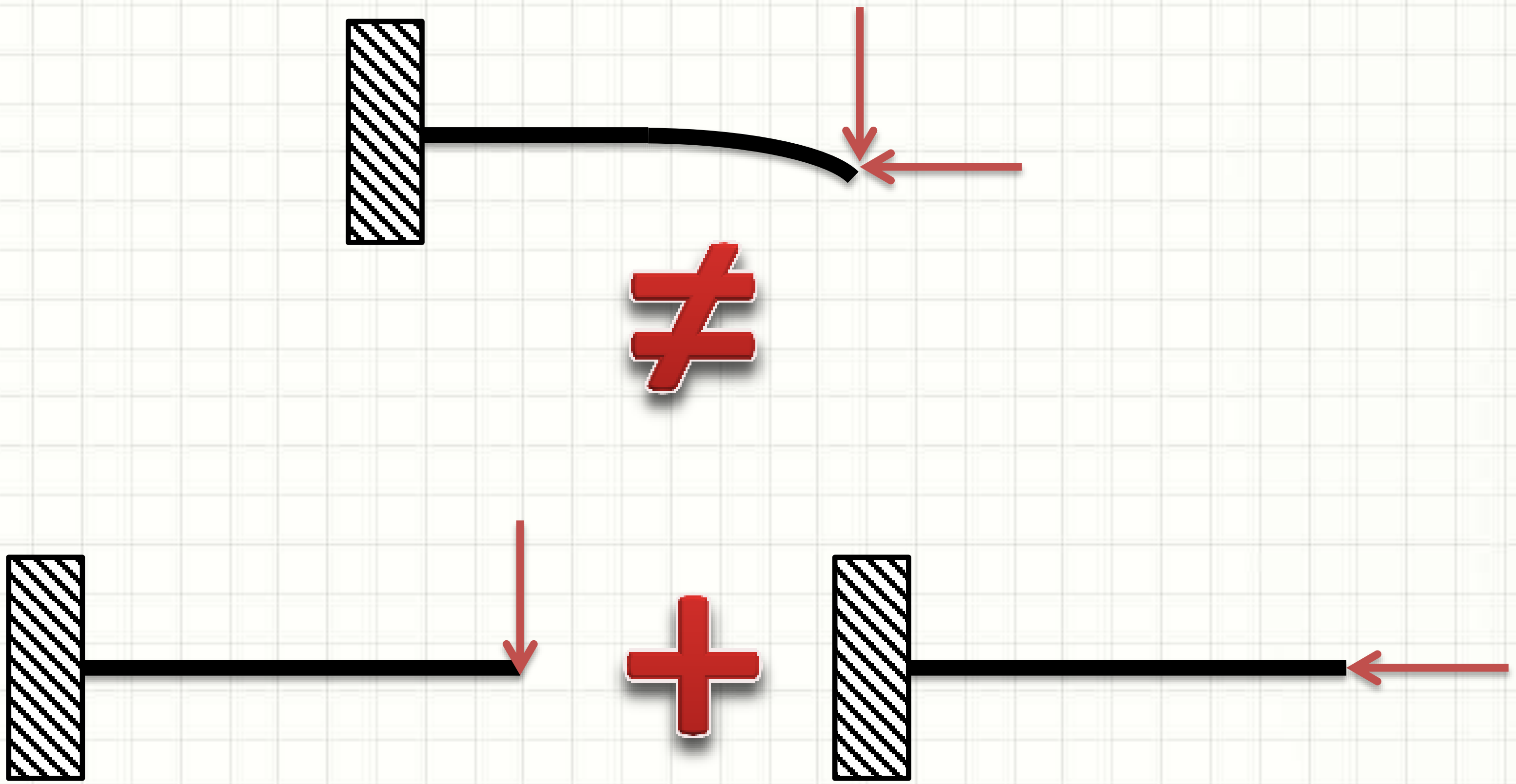
- Princípio da Superposição de Efeitos
  - Subdividir o carregamento em componentes
  - Calcular os efeitos em separado
  - Somar os resultados

- Carga relacionada linearmente com σ ou δ
  - Ex.: $\sigma = P/A$ ou $\delta = PL/EA$
  - Não pode alterar a geometria do elemento

Superposição de Efeitos

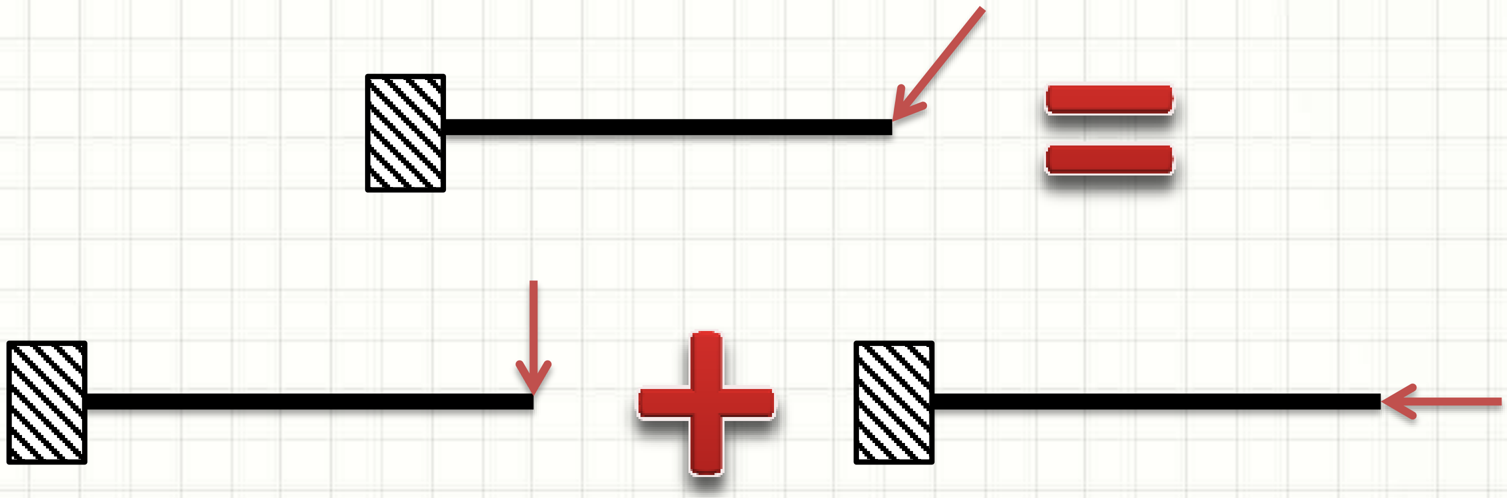


Superposição de Efeitos



Superposição de Efeitos

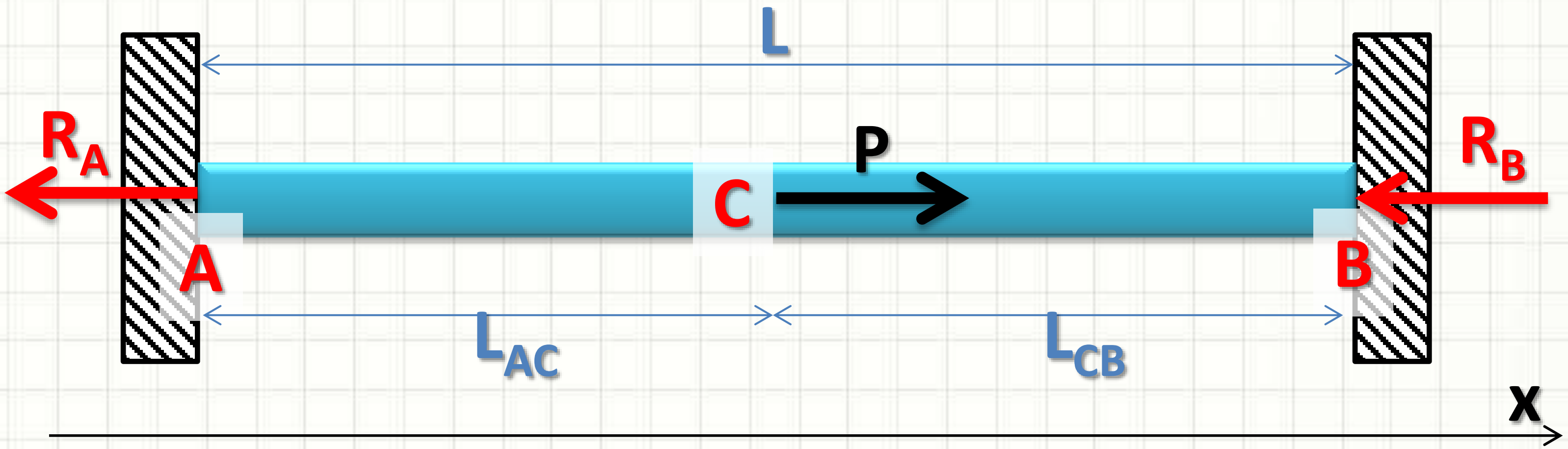
- Neste curso...
  - Pouca deformação
  - Cargas proporcionais a σ ou δ
- A menos que especificado diferentemente!
- Em geral, valerá a superposição!



Elementos Estaticamente Indeterminados sob Carga Axial

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



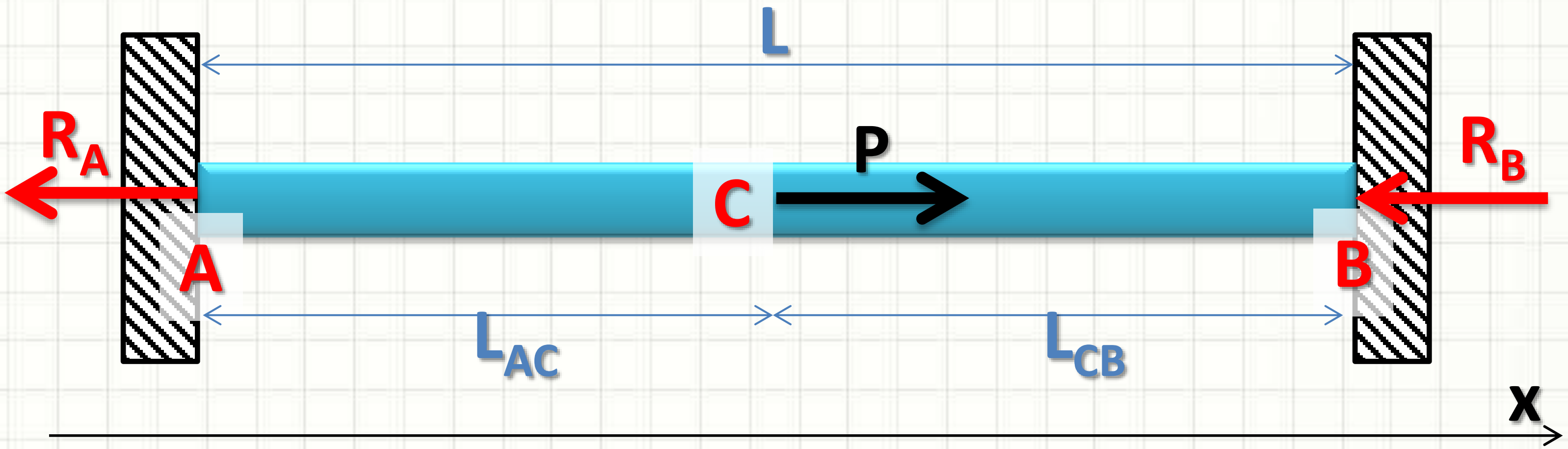
- Reações R_A e R_B ... ?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Considere a viga abaixo



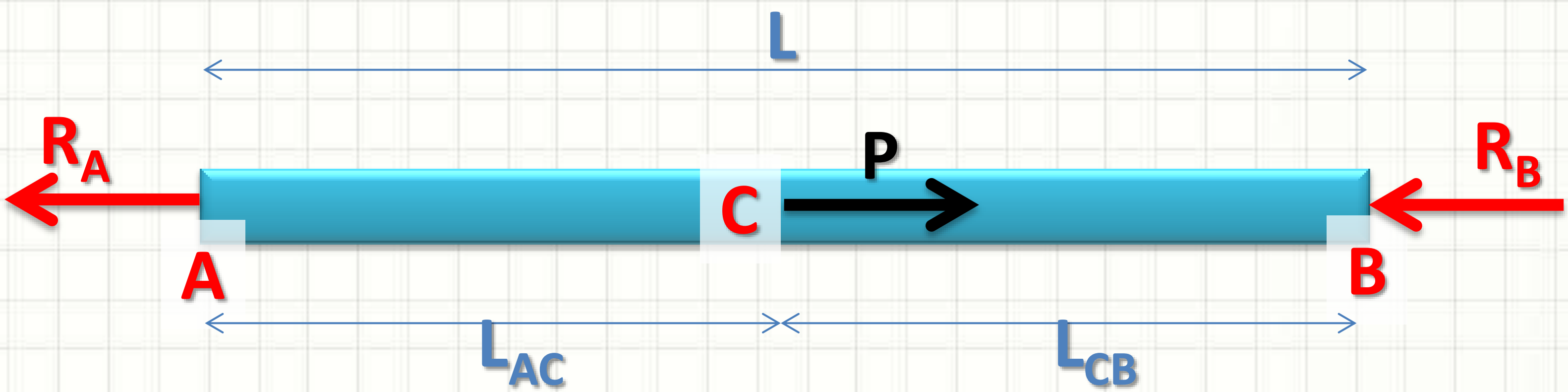
- Reações R

Viga Estaticamente Indeterminada

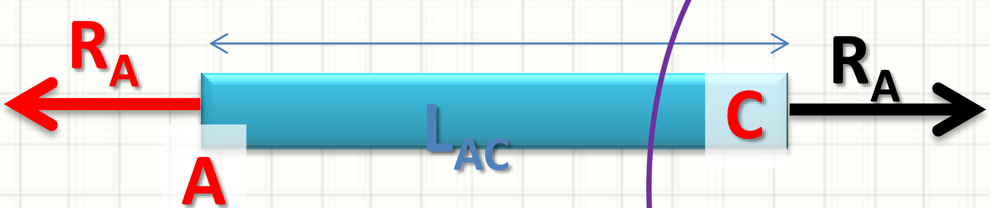
$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

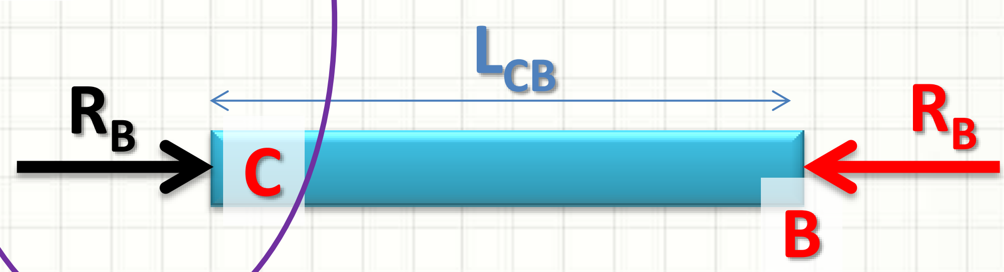
- Considere a viga abaixo



- Podemos enxergar essa viga de outro modo...



$$R_A + R_B = P$$

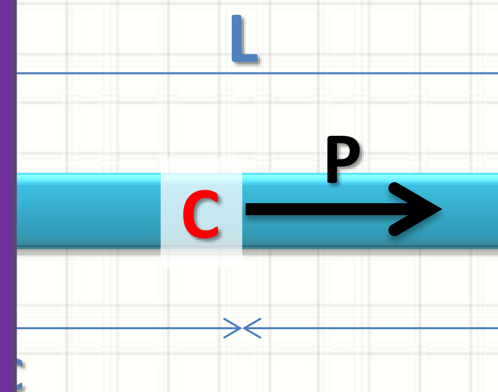


$$\delta_{A,C} + \delta_{C,B} = 0$$

A soma da variação de tamanho de cada trecho tem que ser igual à variação total!

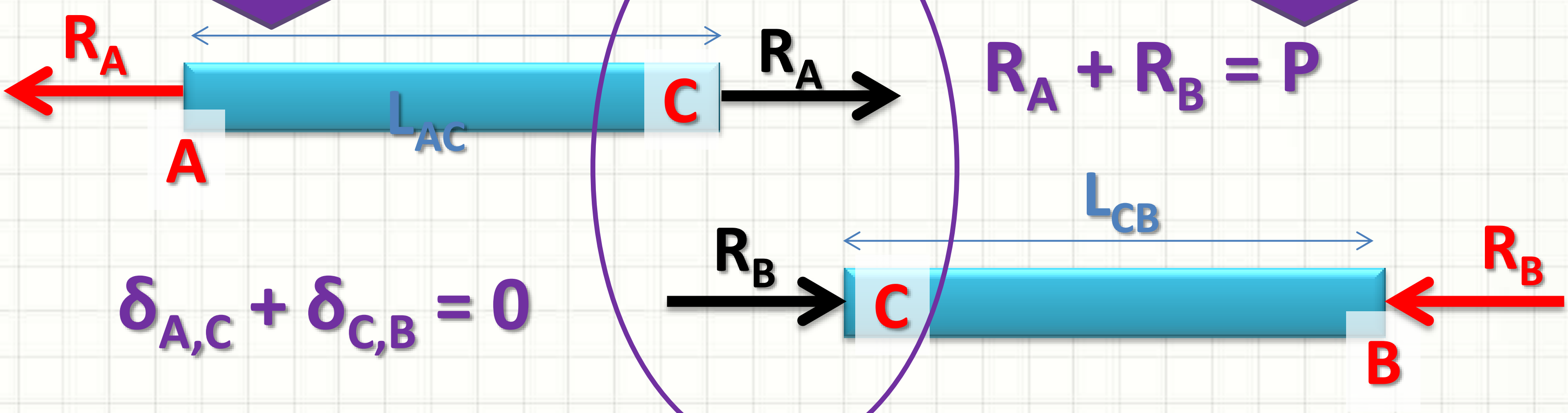
…amente Inde…

…ga abaixo



A soma da carga dividida entre as barras é igual à carga aplicada no ponto!

- Po… os enxergar essa viga de outr… odo...

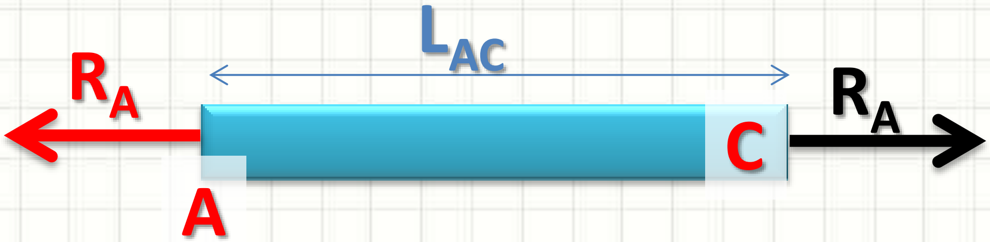


$$R_A + R_B = P$$

$$\delta_{A,C} + \delta_{C,B} = 0$$

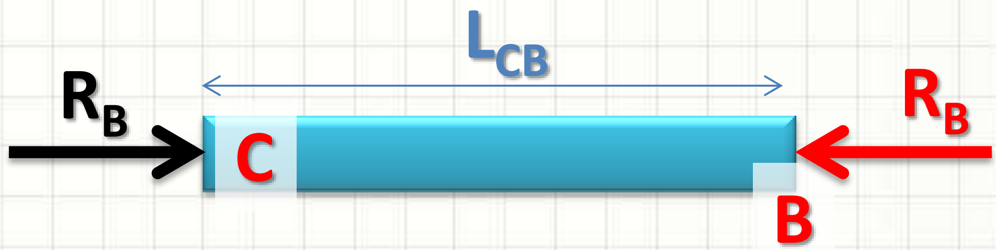
Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...



$$R_A + R_B = P$$

$$\delta_{A,C} + \delta_{C,B} = 0$$

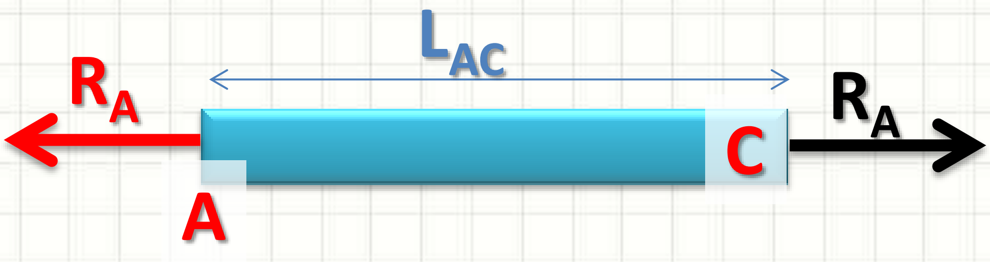


$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \frac{-R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0$$

$$R_A = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Calculemos...



$$R_A + R_B = P$$

$$\delta_{A,C} + \delta_{C,B} = 0$$

Condição de Equilíbrio

$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{\ldots} + \frac{-R_B \ldots}{E \cdot A}$$

$$\ldots = \frac{R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

Condição de Compatibilidade

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

ϕ = 5mm
E = 200GPa

- Qual o alongamento se fosse livre em B?

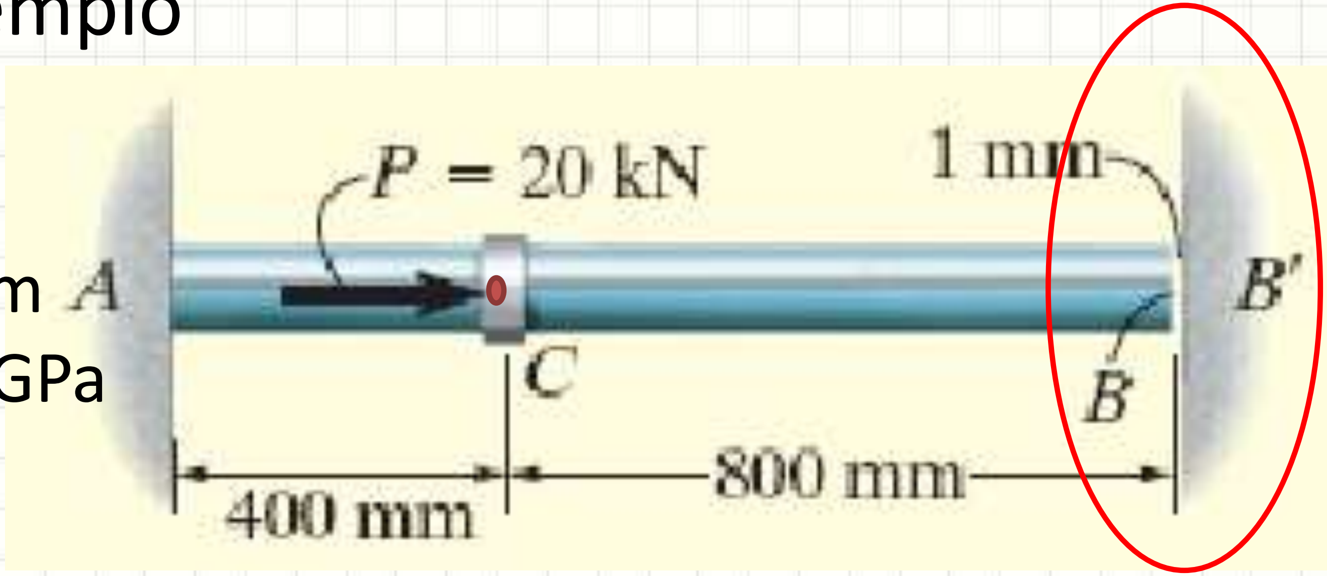
$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{2.10^4 \cdot 4.10^{-1}}{2.10^{11} \cdot 6{,}25.10^{-6}.\pi} = 2.10^{-3}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

ϕ = 5mm

E = 200GPa



- Reações R_A e R_B ... ?

$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R_A + P - R_B = 0 \Rightarrow \mathbf{R_A + R_B = P}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

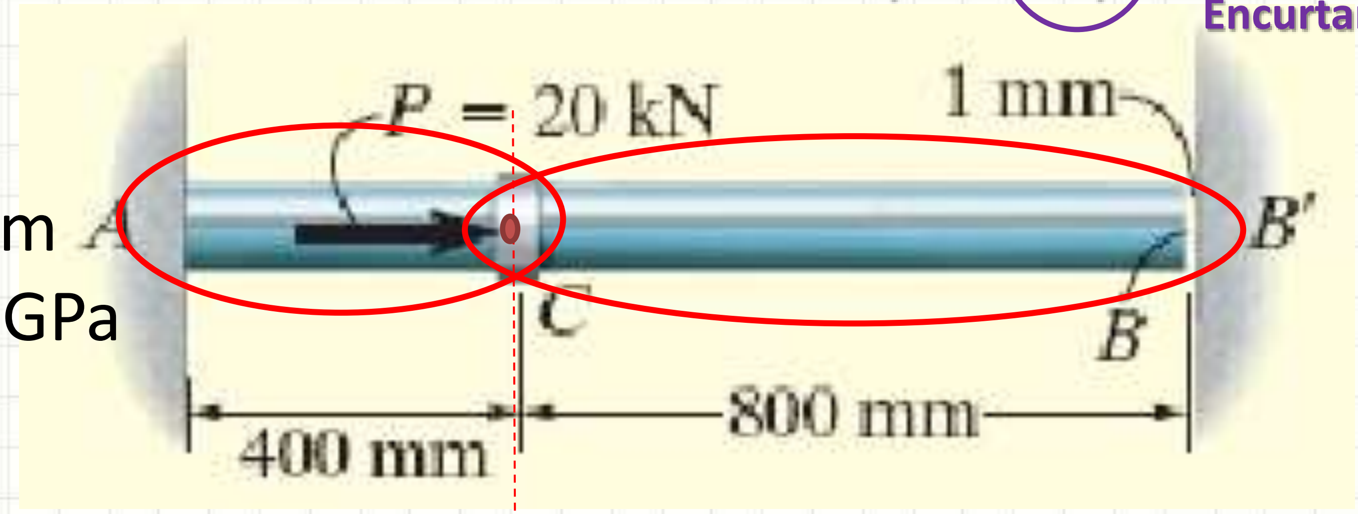
- Exemplo

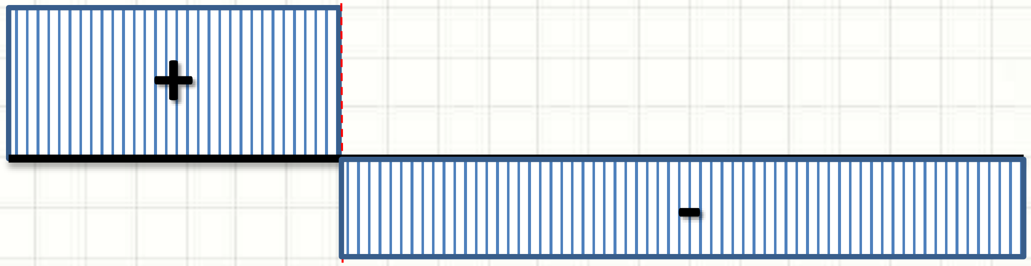
$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

Encurtamento!

ϕ = 5mm

E = 200GPa





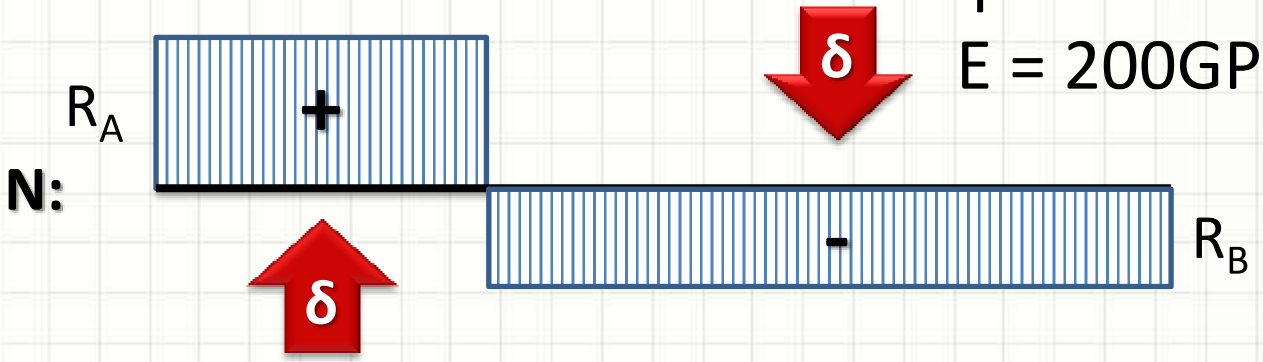
Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

$\phi = 5mm$

$E = 200GPa$



$$\frac{R_A \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \frac{-R_B \cdot L_{CB}}{E \cdot A} = 0{,}001$$

$$\boldsymbol{R_A = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}}}$$

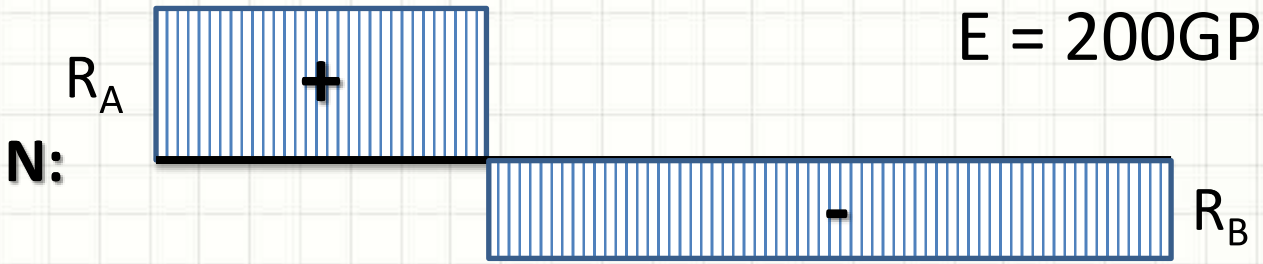
Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$\delta_{C,A} + \delta_{C,B} = 0{,}001$

$\phi = 5mm$

$E = 200GPa$



$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + R_B \cdot L_{CB}}{L_{AC}} = \frac{0{,}001 \cdot E \cdot A + (P - R_A) \cdot L_{CB}}{L_{AC}}$$

$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})^2 + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = \frac{0{,}001 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-6} + (20 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

$$R_A = \frac{3927 + (20000 - R_A) \cdot 0{,}8}{0{,}4}$$

$$R_A = 9817{,}5 + 40000 - 2 \cdot R_A$$

$$3 \cdot R_A = 49817{,}5$$

$$R_A = 16605{,}8N \cong 16{,}6kN$$

Elem. Estaticamente Indeterminados

- Exemplo

$$R_A = 16605{,}8N \cong 16{,}6kN$$

$$R_B = P - R_A$$

$$R_B = 20kN - 16{,}6kN$$

$$R_B = 3{,}4kN$$

CONCLUSÕES

Resumo

- Existe relação entre carga e deslocamento
- Influenciam: Elastic. (E) / Área (A) / Comprim. (L)
- Podemos "decompor" problemas (superposição)
- Estaticamente Indeterminados?
  - Compatibilidade de deslocamentos
- **Exercitar: Hibbeler / Lista Aula 3**

- Únicas preocupações com cargas axiais?
  - Flambagem e Temperatura
  - Concentração de tensão
  - Deformação Inelástica

PERGUNTAS?

Para Treinar

Para Treinar em Casa

- Aço A-36: E = 200GPa
- Concreto de Alta Resistência: E = 35GPa
- Hibbeler (Bib. Virtual)
  - Pág. 91 a 106
- Mínimos:
  - Exercícios 4.1, 4.5, 4.10, 4.29
  - Exercícios 4.31, 4.33
- Extras:
  - Exercícios 4.2 a 4.4, 4.6, 4.7, 4.21, 4.30
  - Exercícios: 4.34, 4.36, 4.37

Exercício

Exercício – Entrega Individual

- Calcule as reações de apoio
- Trace o Diagrama de Normal
- Calcule o deslocamento em C

- $\phi_A = 0{,}5m$ $\phi_B = 1m$
- $E_A = E_B = 50GPa$