



# RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

## CARREGAMENTO AXIAL PARTE II

Prof. Dr. Daniel Caetano

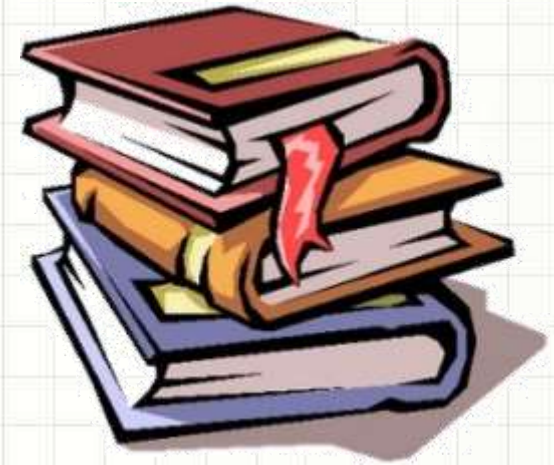
2018 - 1

# Objetivos

- Compreender o conceito de flambagem
- Compreender o surgimento de tensões por dilatação/contração térmica
- Compreender o que são concentrações de tensões
- Compreender as deformações inelásticas



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>  
(Resistência dos Materiais II – Aula 4)

Material Didático

Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 96-124 e 477 a 518.

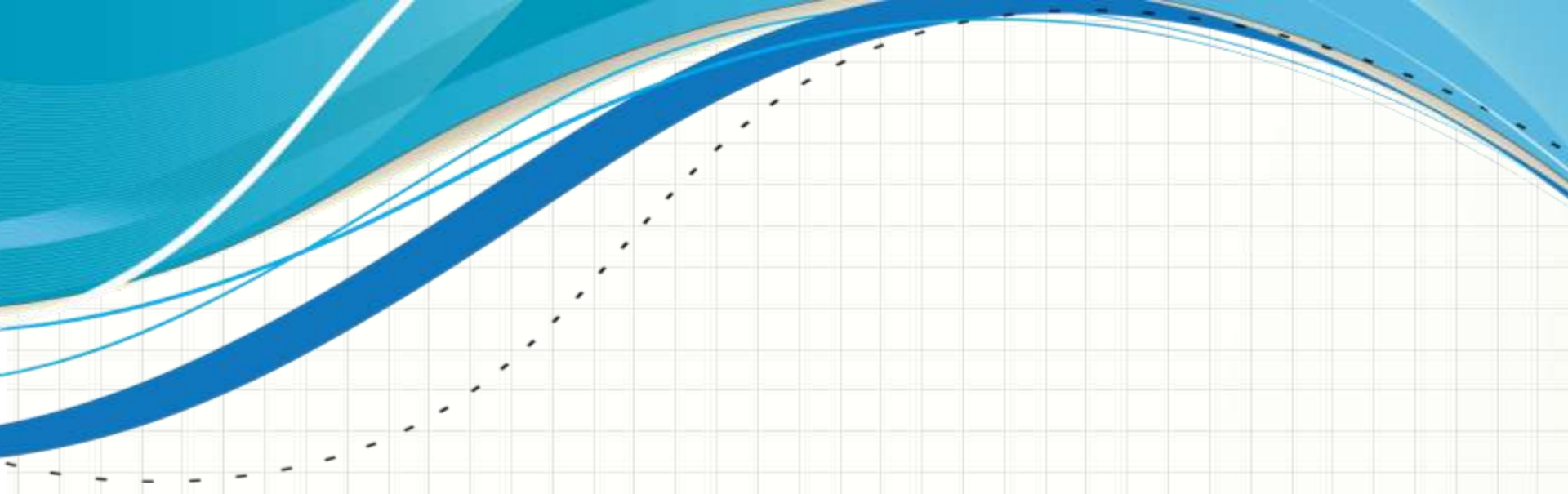
Aula Online

9 (Flambagem apenas)

Biblioteca Virtual

“Resistência dos Materiais”

---

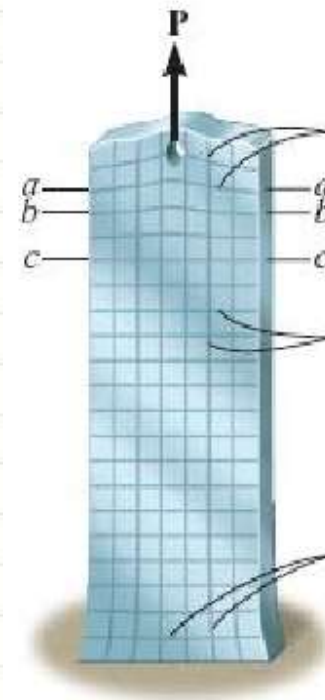


**RELEMBRANDO:**

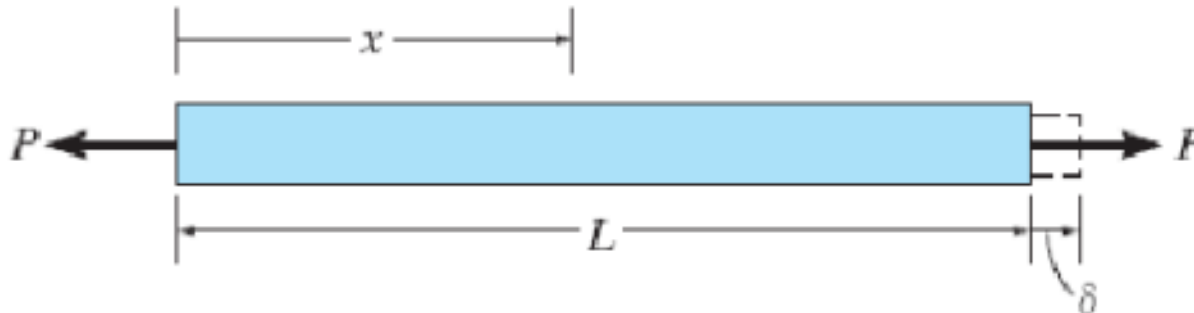
# **CARREGAMENTOS AXIAIS**

# Deformações Axiais

- Princípio de Saint-Venant

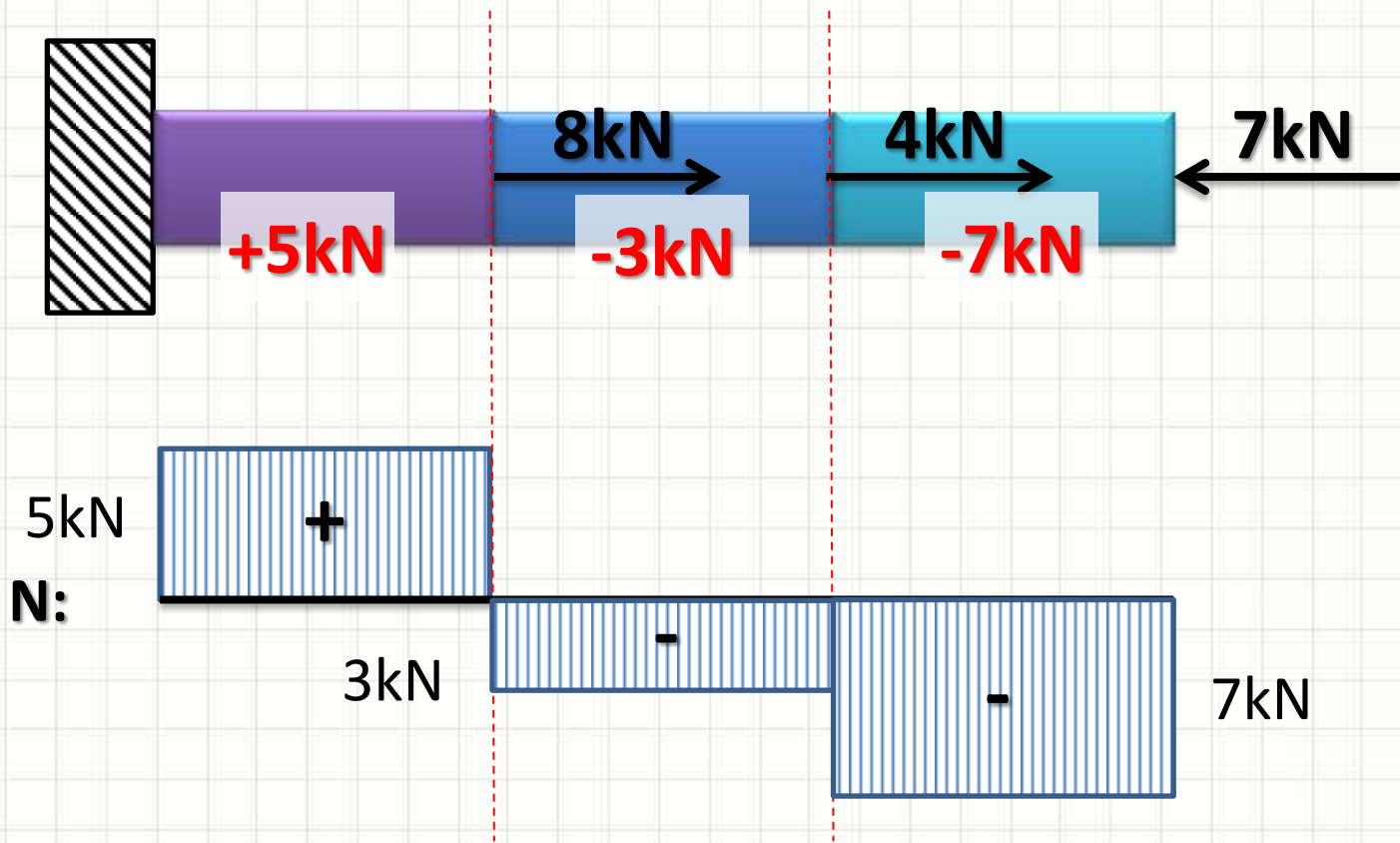


- Deformação de uma viga de seção constante



$$\delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

# Diagrama de Esforços Normais

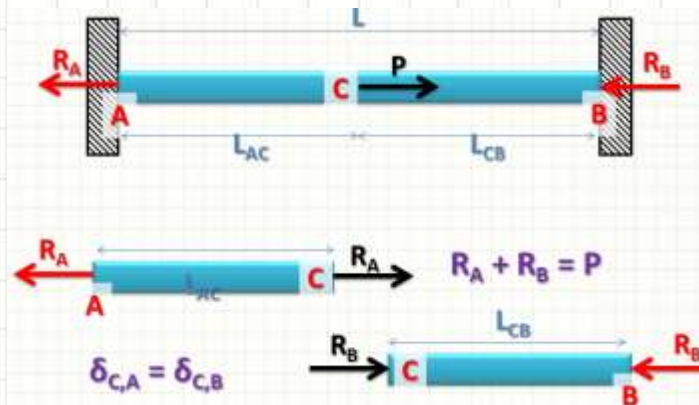


# Deformações Axiais

- Princípio da Superposição de efeitos



- Estruturas Estaticamente Indeterminadas



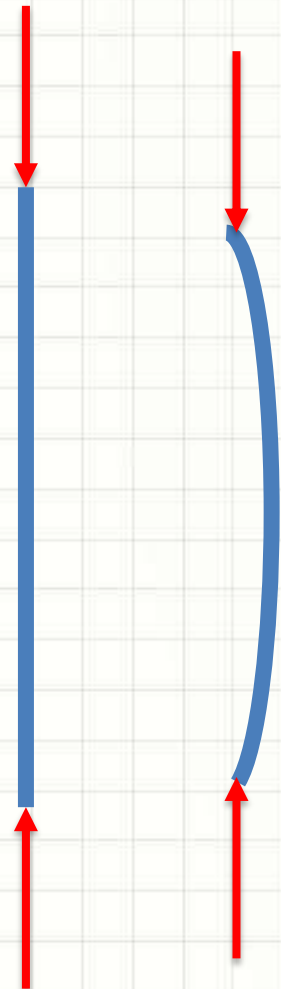
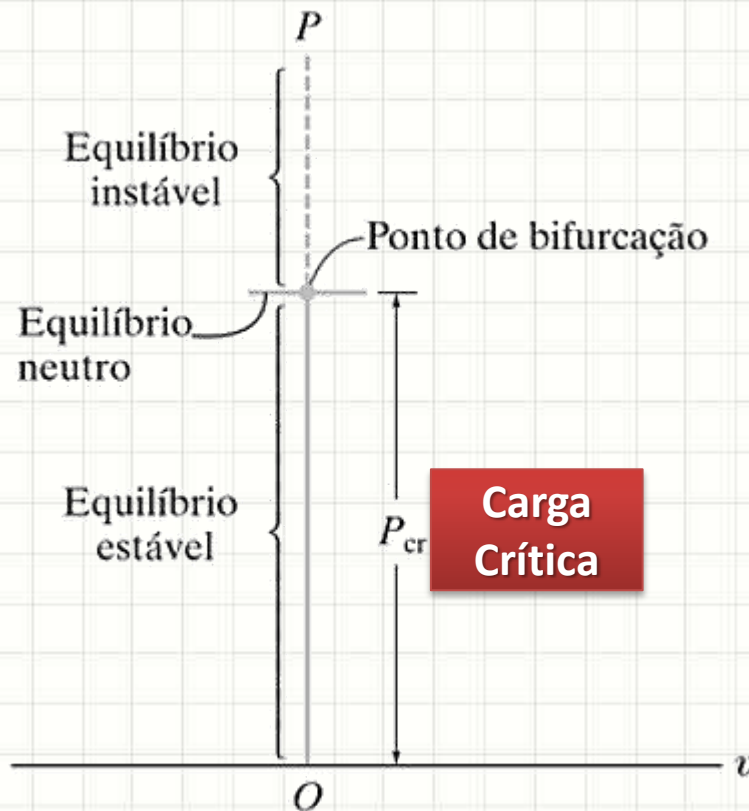


**FLAMBAGEM**



# Flambagem

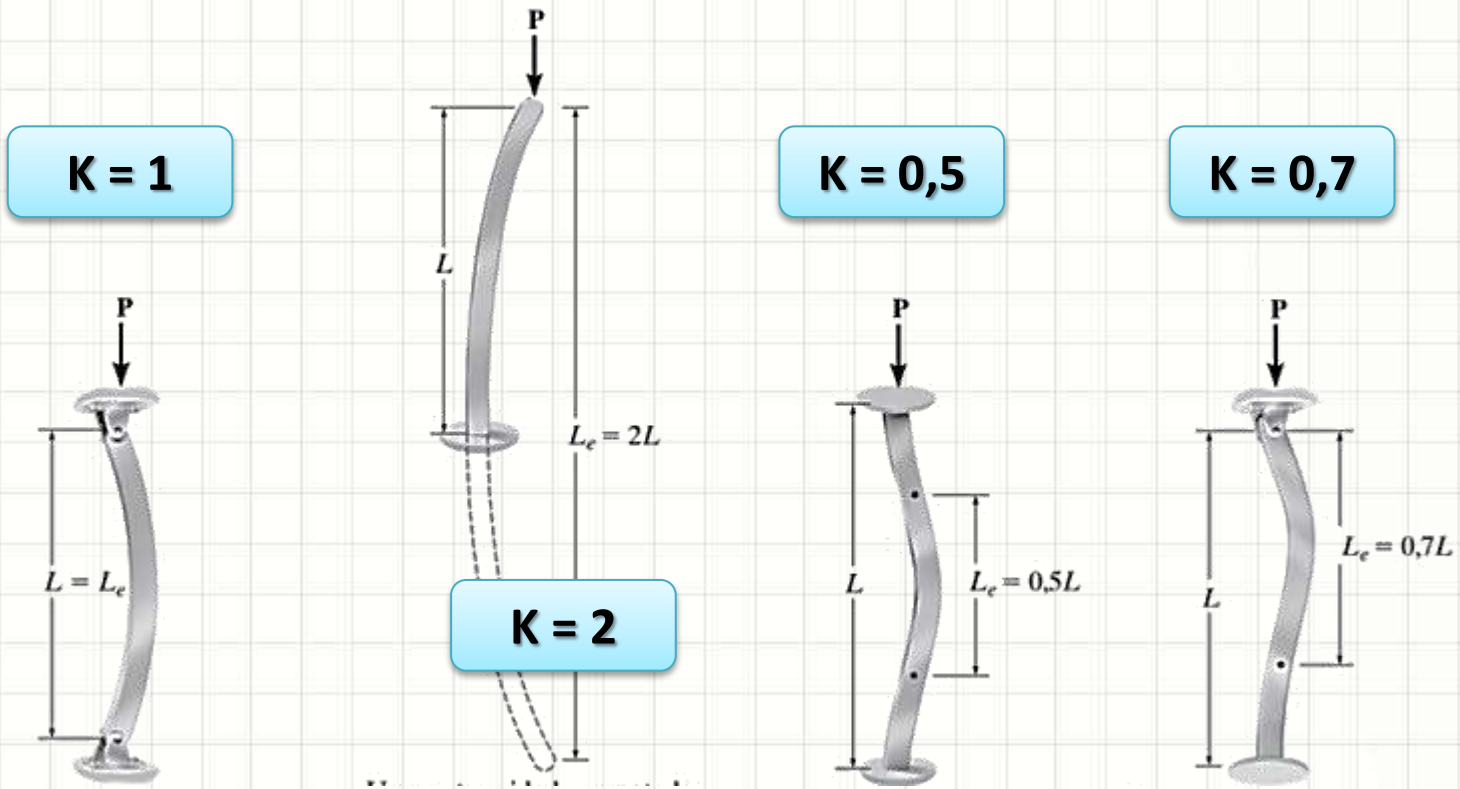
- Então, em um pilar, se  $\sigma_{\text{real}} < \sigma_{\text{adm}}$ , tudo ok?
- Infelizmente... Nem sempre!
- Equilíbrio Estável/Instável



# Flambagem

- Determinação da Carga Crítica  $P_{cr}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2}$$

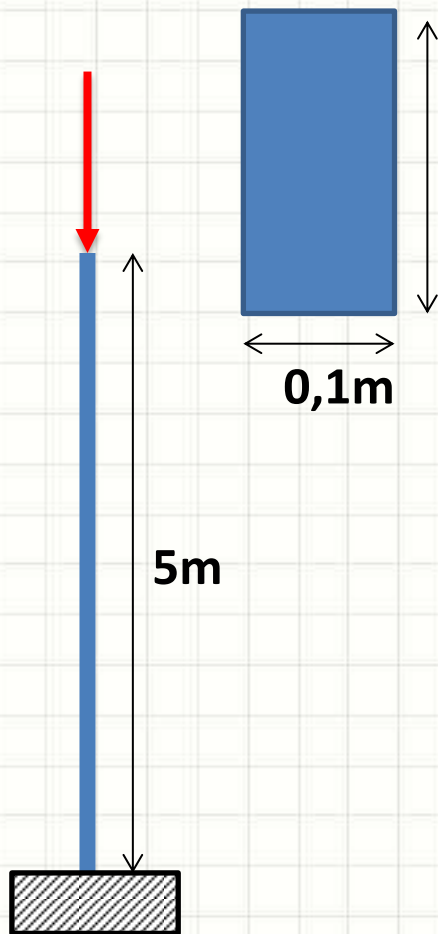


# Exercício

- Determine a Carga Crítica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2}$$

$$E = 50\text{GPa}$$



0,24m

0,1m

5m

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 50 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{(2 \cdot 5)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 100 \cdot 10^4}{100}$$

$$P_{cr} = 9,87 \cdot 10^4 \text{ N}$$

# Índice de Esbeltez

- Mais esbelto, mais propenso a flambagem

$$IE = \frac{L}{r}$$

- Raio de Giração

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- Tensão Crítica

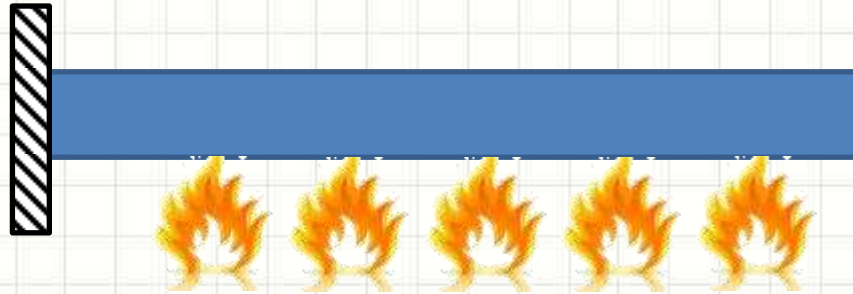
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(K \cdot L/r)^2}$$



# TENSÕES TÉRMICAS

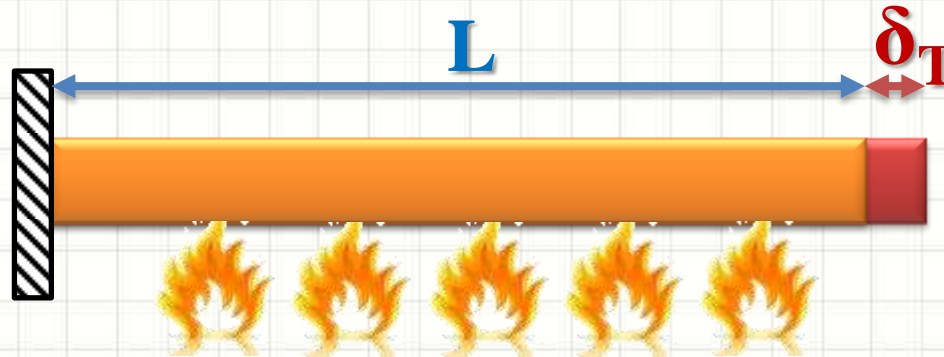
# Deformação Térmica

- Aumento de Temperatura



# Deformação Térmica

- Aumento de Temperatura



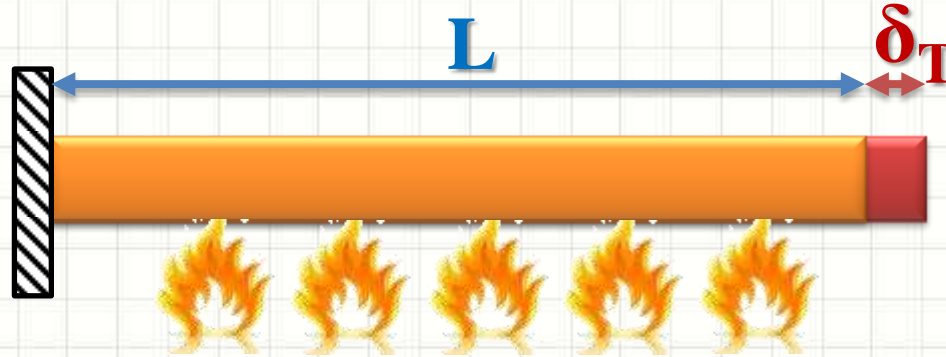
$\alpha$ : coeficiente linear de expansão térmica

- Dilatação térmica
- Podemos calcular  $\delta_T$ , se  $\Delta T$  for constante

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

# Deformação Térmica

- Aumento de Temperatura



$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

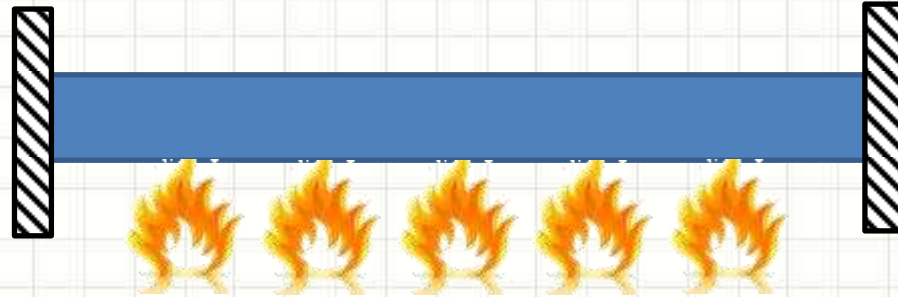
- Se  $\Delta T$  é variável,  $\Delta T = \Delta T(x)$

$$\delta_T = \int_0^L \alpha \cdot \Delta T \cdot dx$$



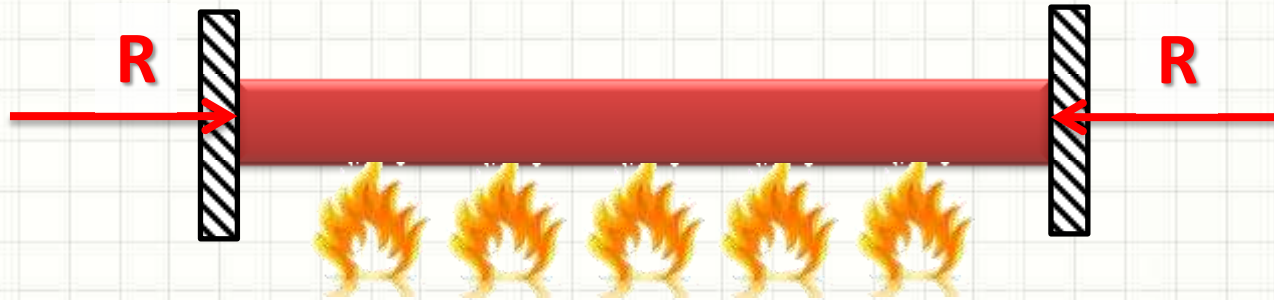
# Tensões Térmicas

- E agora?



# Tensões Térmicas

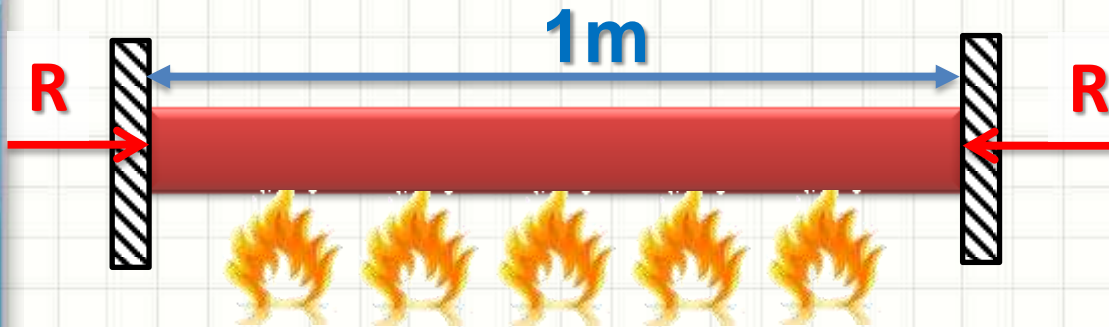
- E agora?



- O corpo vai querer dilatar de  $\delta_T$  ...
- Mas os apoios não vão deixar!
- Surgem reações que provocam um encurtamento...  $-\delta_T$  !

# Tensões Térmicas - Exemplo

- Considere a barra abaixo



$A = 0,0001 \text{ m}^2$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   
 $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$   
 $T_1 = 30 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (R = 0)}$   
 $T_2 = 60 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (R = ?)}$

- Por superposição de efeitos...



$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\delta + \delta_T = 0$$



$$\delta = \frac{-R \cdot L}{E \cdot A}$$

# Tensões Térmicas - Exemplo

$$A = 0,0001 \text{ m}^2$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T_1 = 30 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (R = 0)}$$

$$T_2 = 60 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (R = ?)}$$

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\delta = -\frac{R \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\delta + \delta_T = 0$$

- Calculando...

$$-\frac{R \cdot L}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 0 \Rightarrow \frac{R \cdot L}{E \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \Rightarrow$$

$$\frac{R}{E \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T \Rightarrow R = \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot A$$

$$R = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (60 - 30) \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-4}$$

# Tensões Térmicas - Exemplo

$$A = 0,0001 \text{ m}^2$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$T_1 = 30 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (R = 0)}$$

$$T_2 = 60 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ (R = ?)}$$

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\delta = -\frac{R \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\delta + \delta_T = 0$$

- Calculando...

$$R = 12 \cdot 30 \cdot 200 \cdot 10^{-1} = 12 \cdot 600 = 7200 \text{ N}$$

- Mas  $\sigma = F / A$  ...

$$\sigma = \frac{7200}{0,0001} = 72000000 \text{ Pa} = 72 \text{ MPa}$$

$$\sigma = 72 \text{ MPa}$$



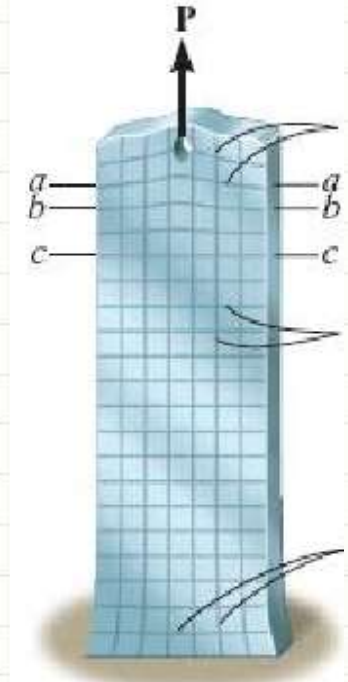
**PAUSA PARA O CAFÉ**



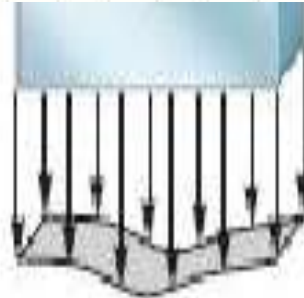
# **CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES**

# Concentração de Tensões

- Vimos, anteriormente...



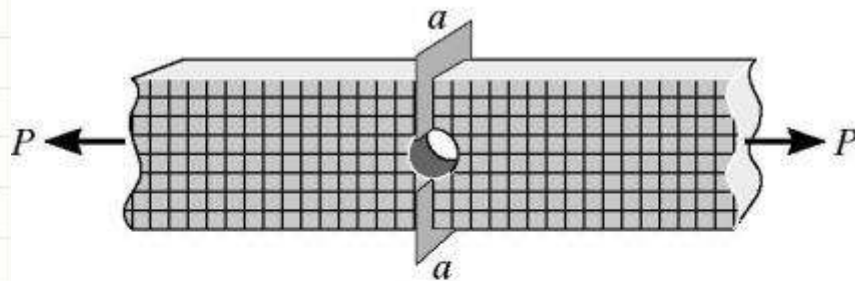
- Carga concentrada  $\rightarrow$  distorção...
  - distribuição de tensão variável



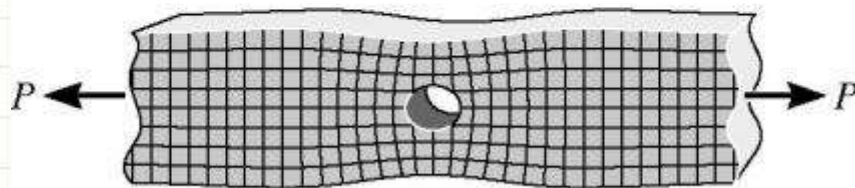


# Concentração de Tensões

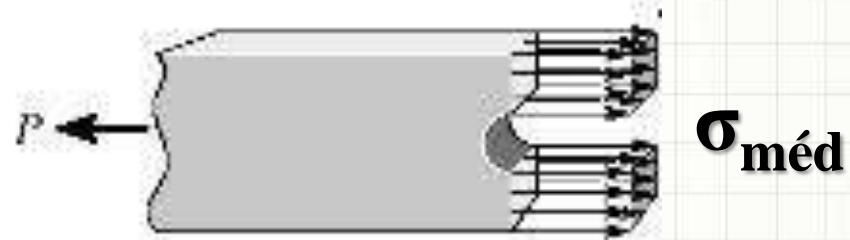
- Mudança na seção transversal:
  - Causa efeito similar



Não distorcida



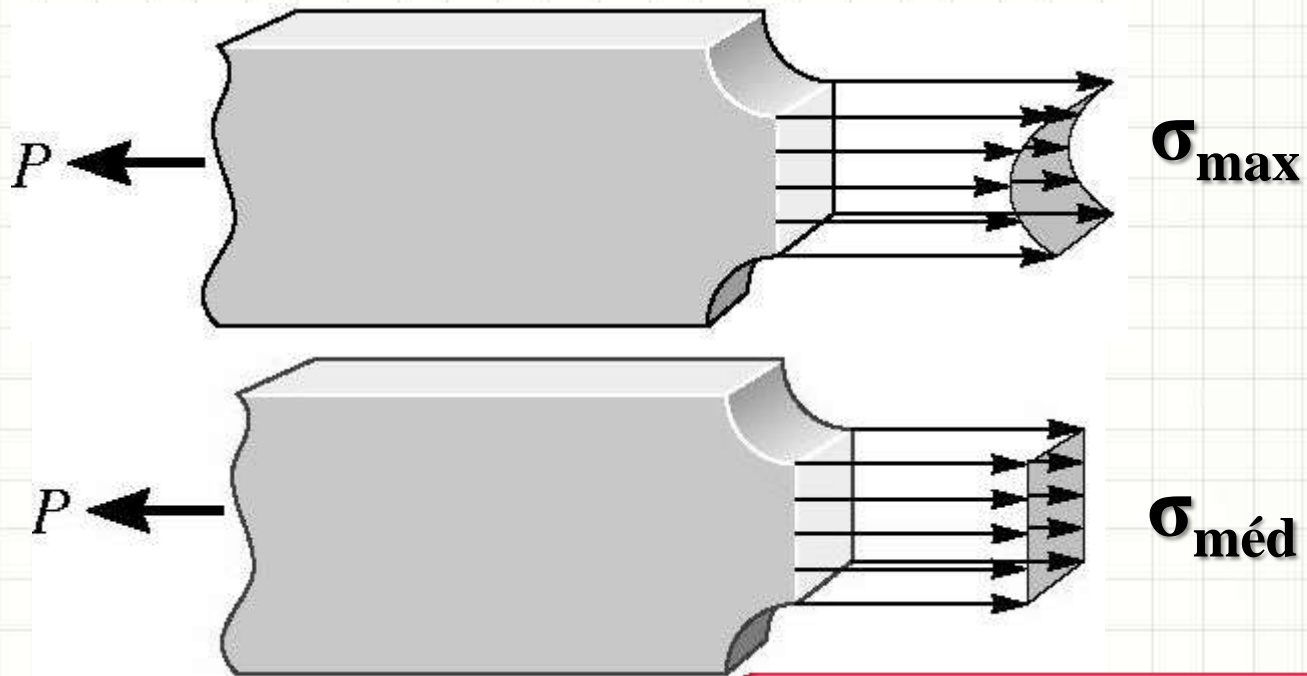
Distorção  
(a)



$$\sigma_{\max} > \sigma_{\text{méd}}$$

# Concentração de Tensões

- Mudança na seção transversal:
  - Causa efeito similar



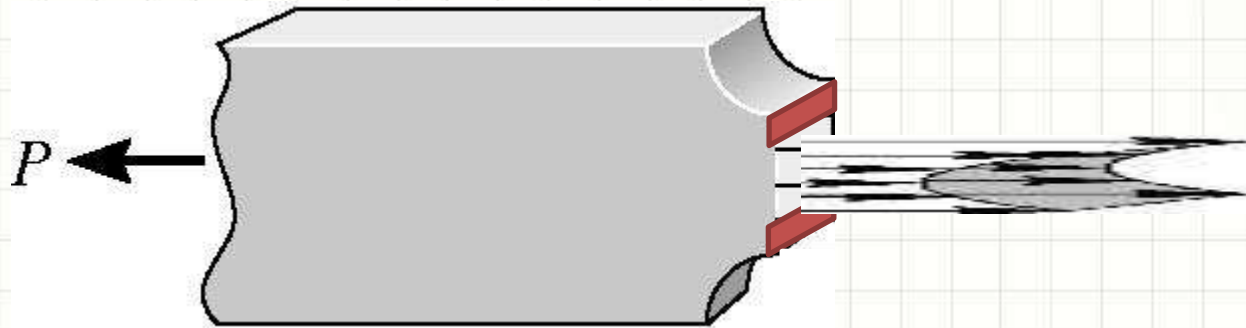
$$\sigma_{\max} > \sigma_{\text{méd}}$$

# Concentração de Tensões

- Onde se iniciará a ruptura?



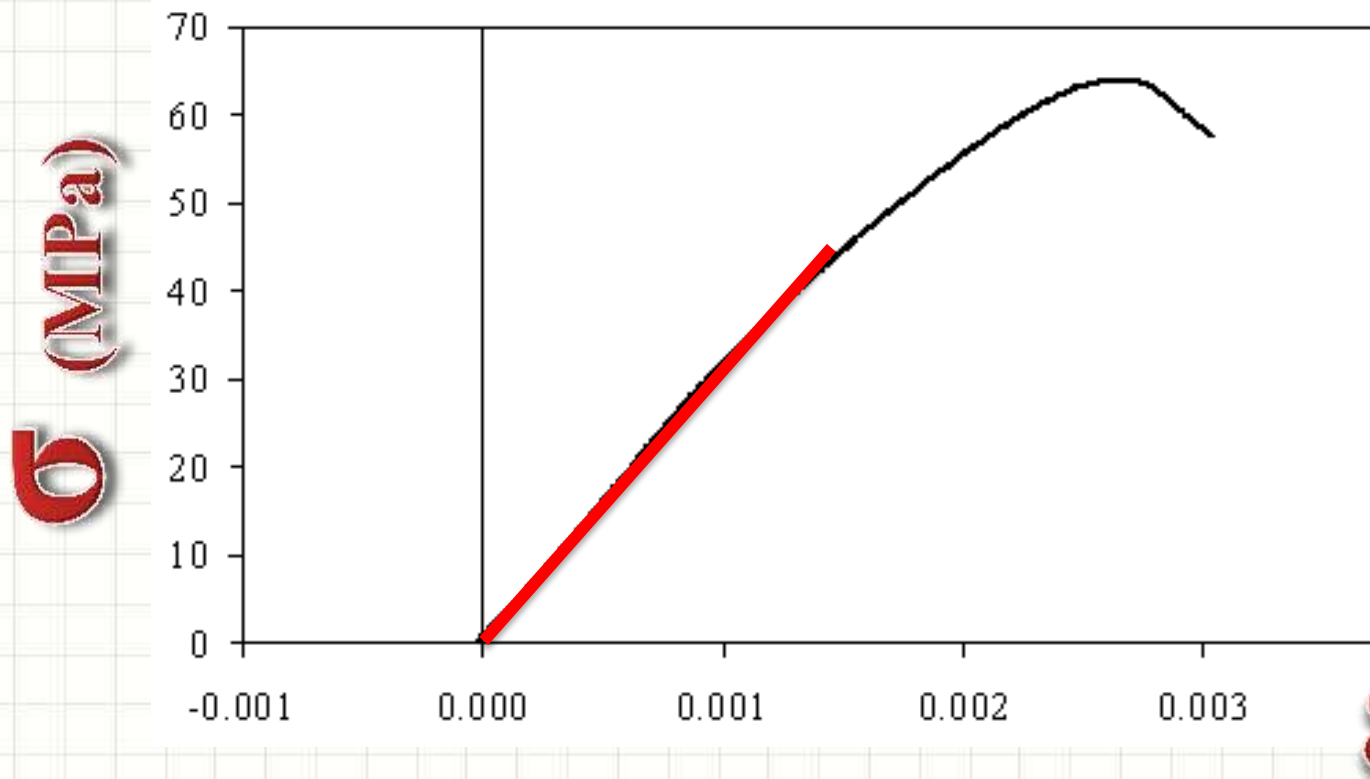
- E o que ocorrerá se começar a “rachar”?



- Problema em materiais **frágeis** (ex.: concreto)

# Concentração de Tensões

- Frágil? Garantir que a  $\sigma_{\text{máx}} < \sigma_{\text{ruptura}}$ 
  - Nesse caso  $\sigma_{\text{ruptura}} \approx \sigma_{\text{proporcionalidade}}$



# Concentração de Tensões

- Como calcular o  $\sigma_{m\acute{a}x}$  ?
  - Modelos computacionais complexos (Lei de Hooke)
  - Testes experimentais

$$K = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_{m\acute{e}d}}$$

- Como calcular o  $\sigma_{m\acute{e}d}$  ?

$$\sigma_{m\acute{e}d} = \frac{F}{A_{menor}}$$

# Concentração de Tensões

- Logo...  $\sigma_{m\acute{a}x}$  pode ser calculado

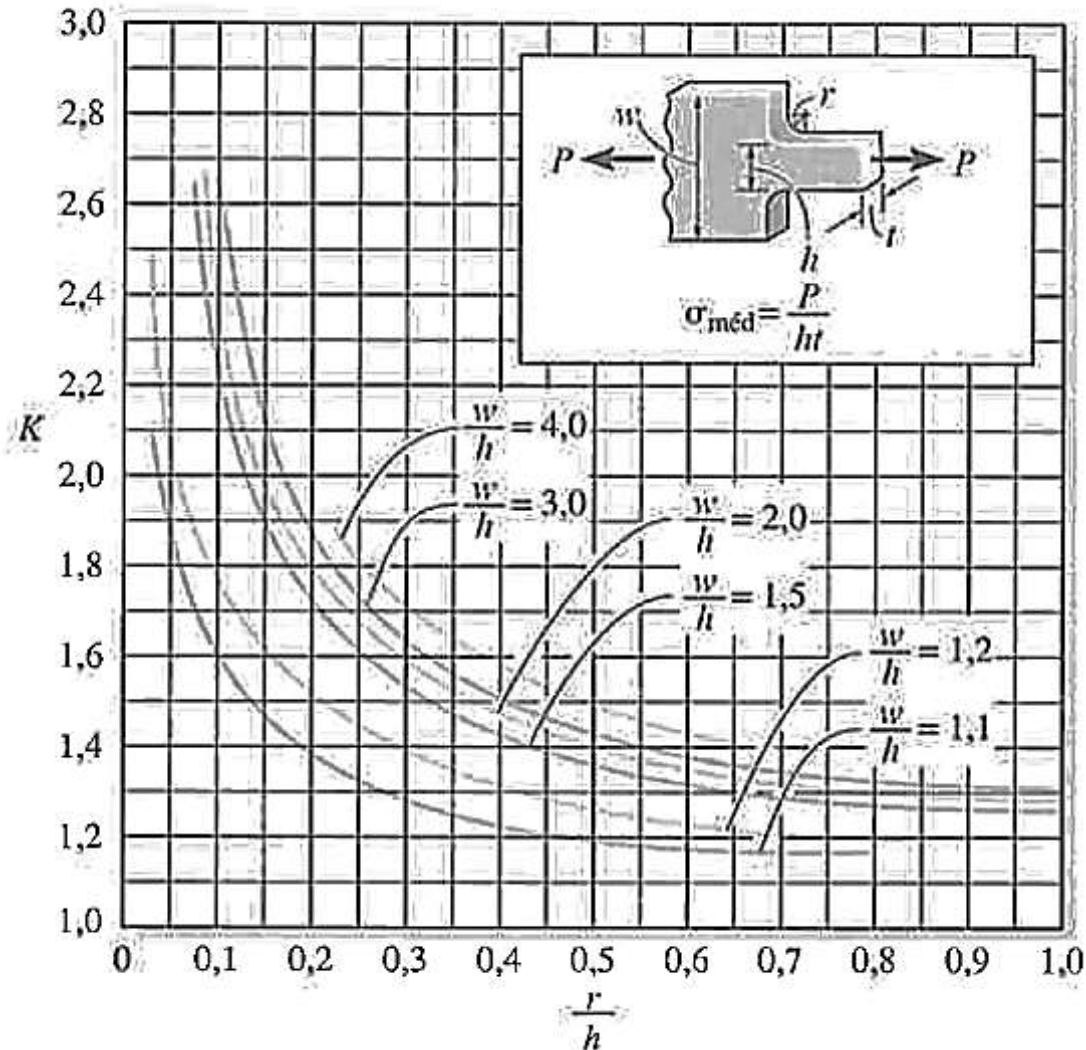
$$K = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_{m\acute{e}d}}$$

$$\sigma_{m\acute{e}d} = \frac{F}{A_{menor}}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = K \cdot \frac{F}{A_{menor}}$$

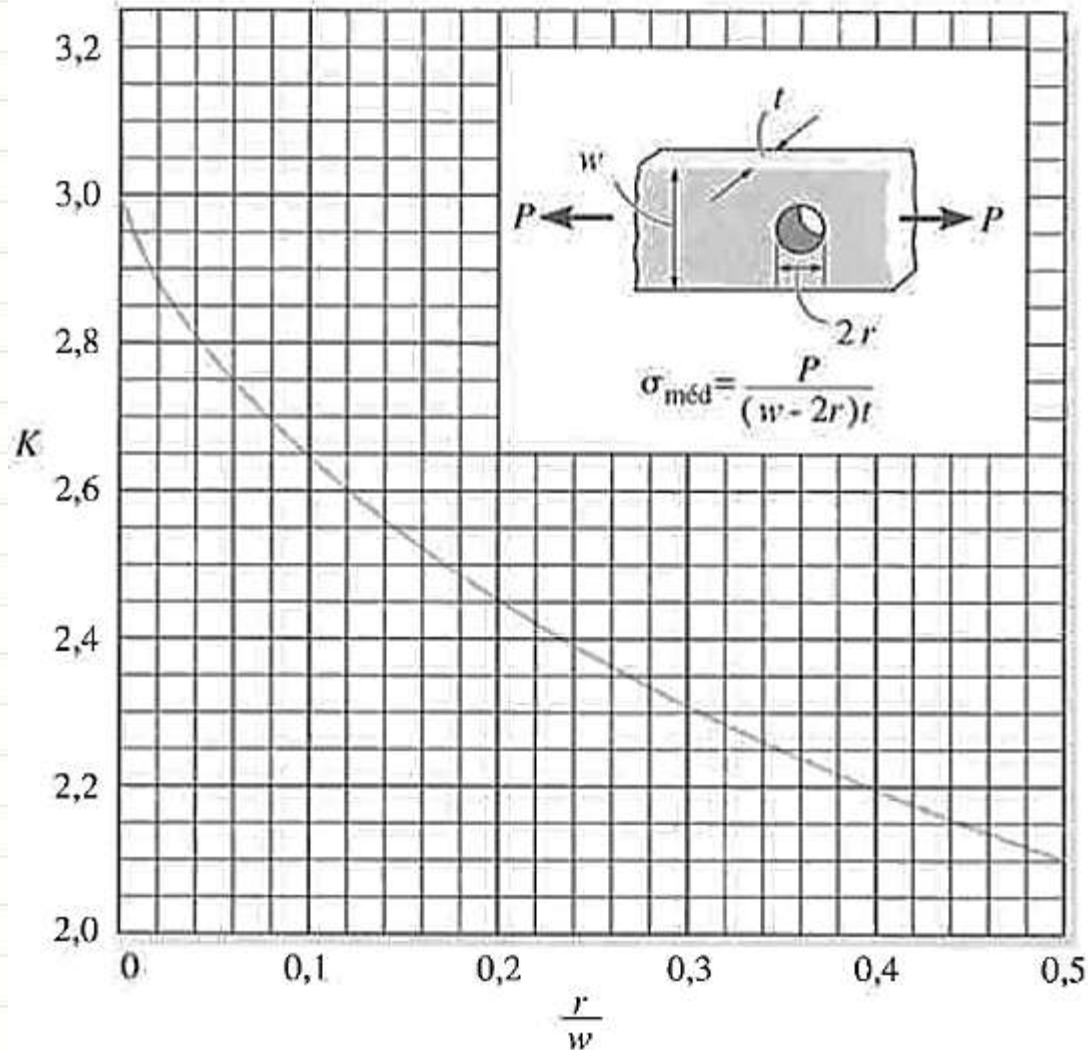
# Concentração de Tensões

- Como determinar o K?



# Concentração de Tensões

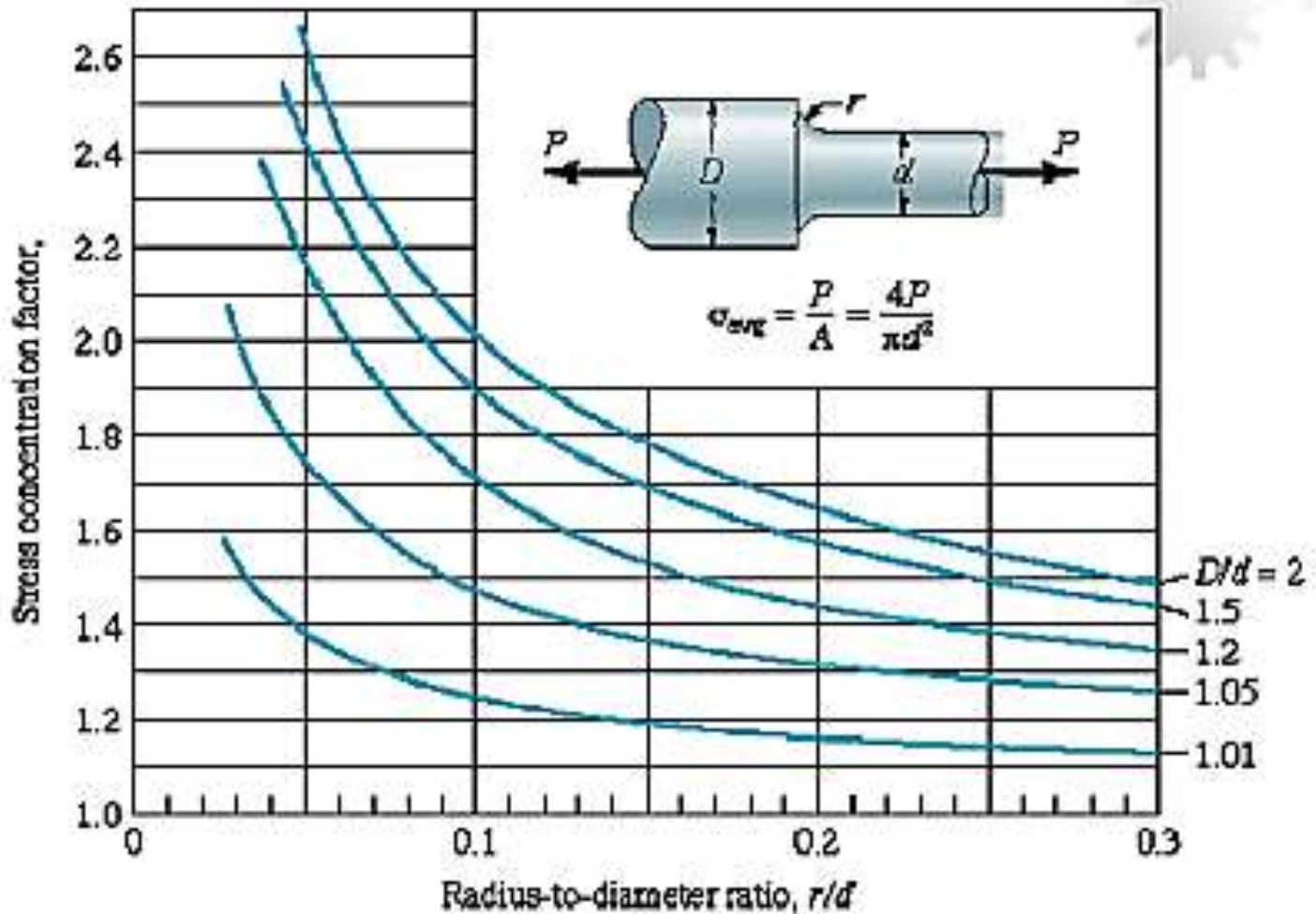
- Como determinar o K?





# Concentração de Tensões

- Como determinar o K?



# Concentração de Tensões

- Exemplo – O material resiste?



$A = 0,01 \text{ m}^2$   
 $A_R = 0,005 \text{ m}^2$   
 $\sigma_{\text{lim}} = 24\text{MPa}$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{F}{A_{\text{menor}}} = \frac{100000}{0,005} = \frac{100000000}{5} = 20000000$$

$$\sigma_{\text{méd}} = 20\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = K \cdot \sigma_{\text{méd}}$$

# Concentração de Tensões

- Exemplo – O material resiste?



$A = 0,01 \text{ m}^2$   
 $A_R = 0,005 \text{ m}^2$   
 $\sigma_{\text{lim}} = 24 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\text{méd}} = 20 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} = K \cdot \sigma_{\text{méd}}$$

**K = ?**

# Concentração de Tensões

- Exemplo – O material resiste?

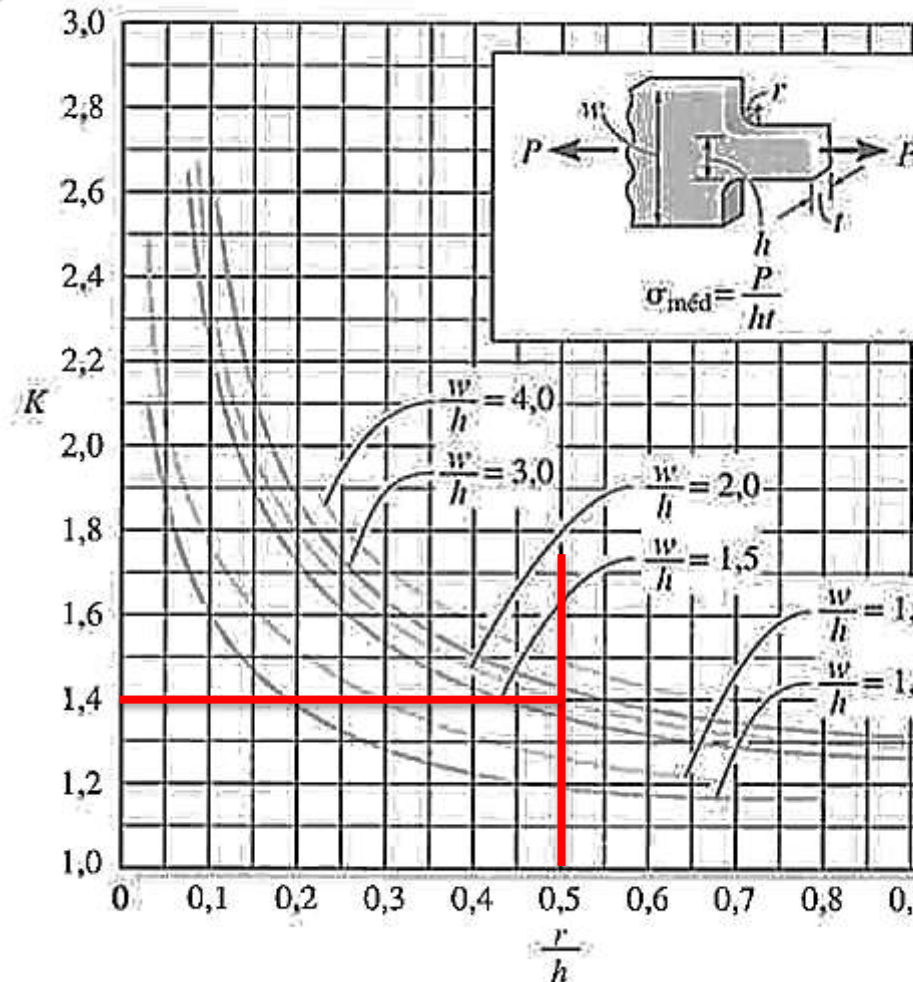


$$\sigma_{méd} = 20MPa$$

$$r/h = 0,025/0,05 = 0,5$$

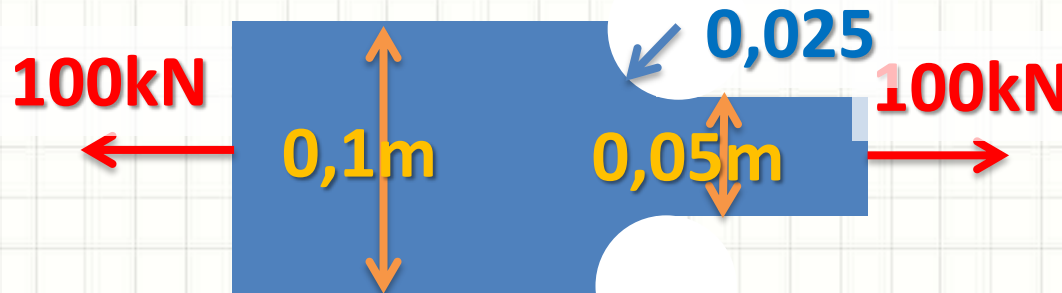
$$w/h = 0,1/0,05 = 2,0$$

$$K = 1,4$$



# Concentração de Tensões

- Exemplo – O material resiste?



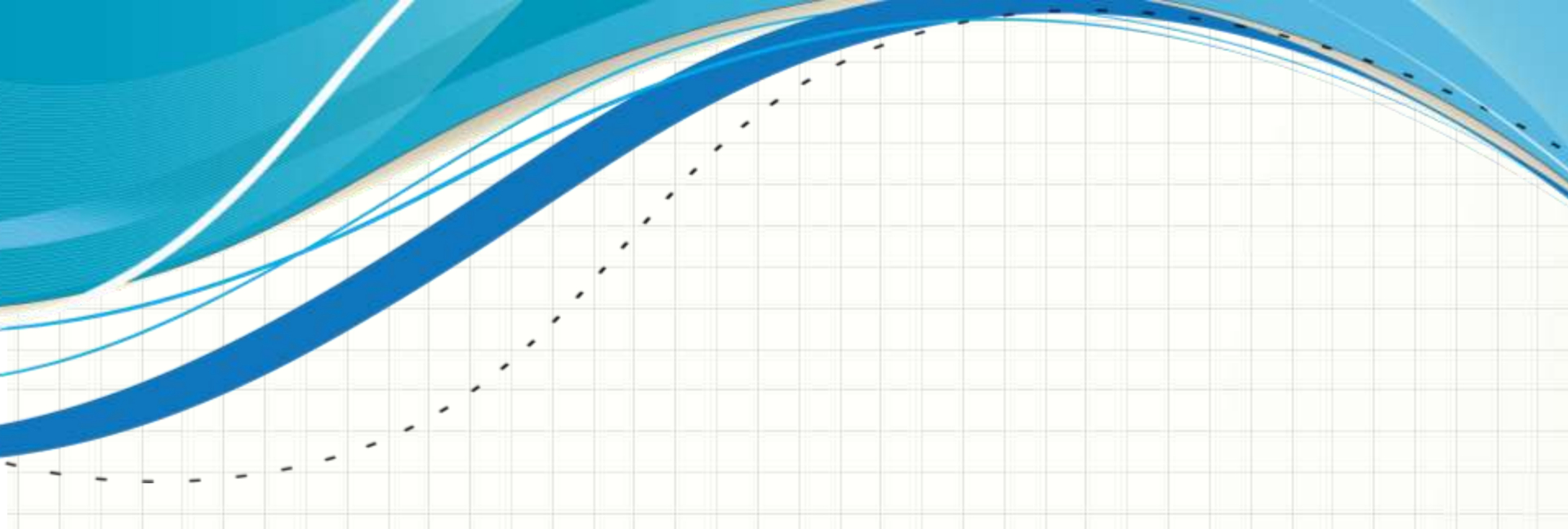
$A = 0,01 \text{ m}^2$   
 $A_R = 0,005 \text{ m}^2$   
 $\sigma_{lim} = 24 \text{ MPa}$

$$\sigma_{méd} = 20 \text{ MPa} \quad \sigma_{máx} = K \cdot \sigma_{méd} \quad K = 1,4$$

$$\sigma_{máx} = 1,4 \cdot 20 \text{ MPa} = 28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{máx} < \sigma_{lim}?$$

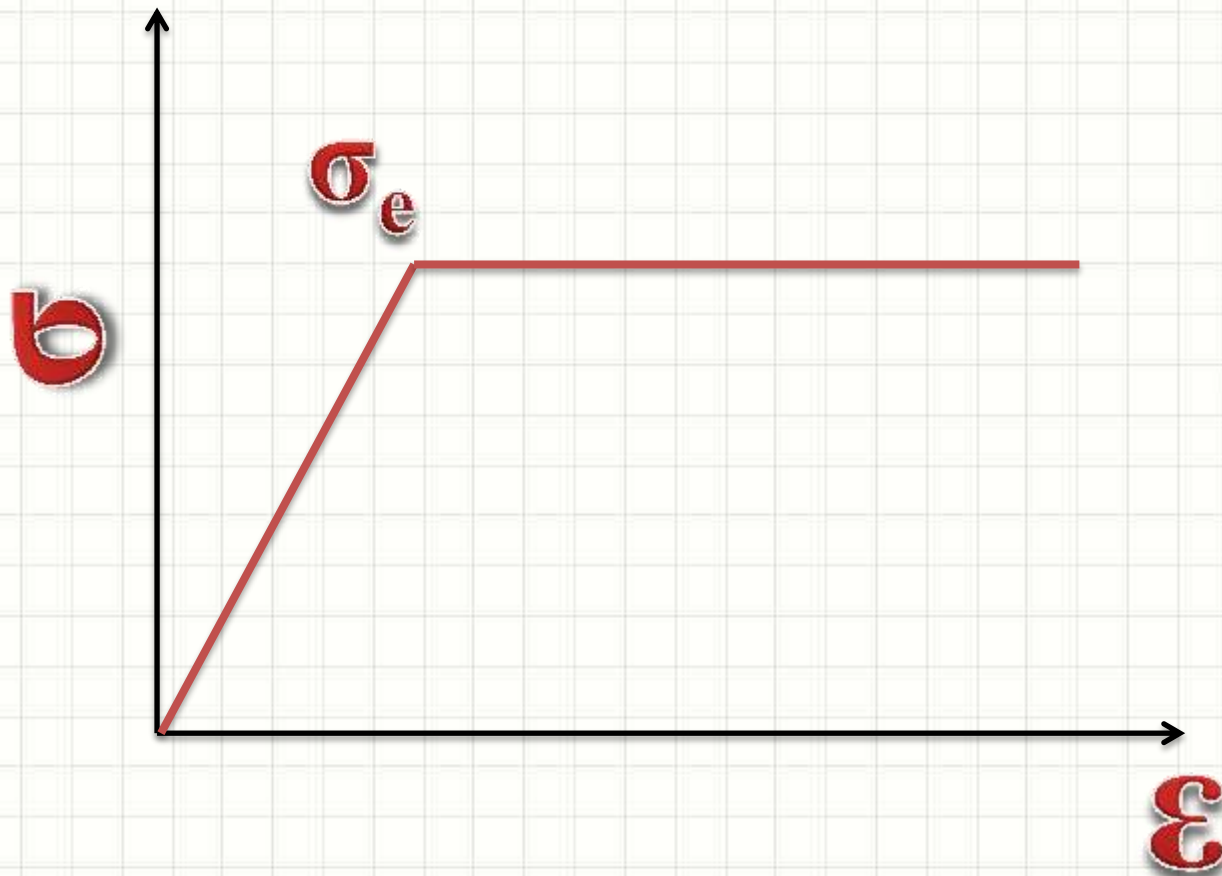
**FALSO! Há ruptura!**



# **DEFORMAÇÕES INELÁSTICAS EM CARREGAMENTO AXIAL**

# Deformações Inelásticas

- Consideramos: materiais frágeis
- O que ocorre com os elastoplásticos?



# Deformações Inelásticas

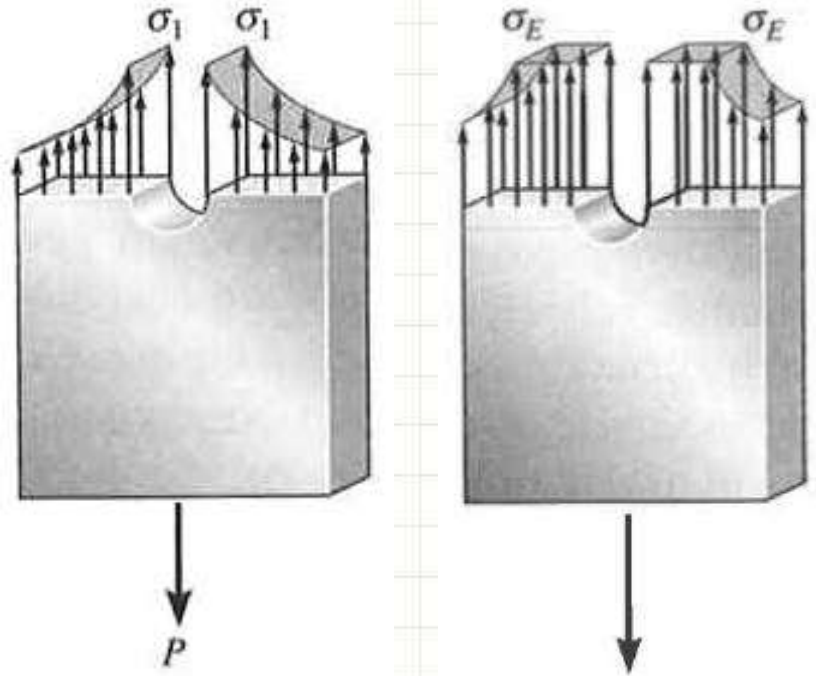
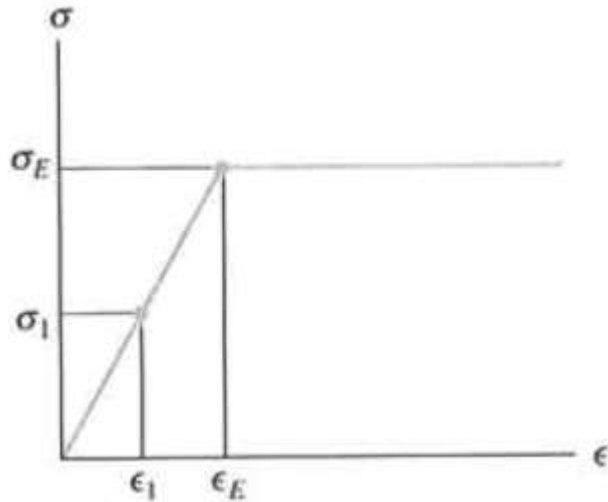
- O que ocorre com os elastoplásticos?
- Ao atingir a  $\sigma_e$ , escoamento...
- Mas... Observe... Onde haverá escoamento?





# Deformações Inelásticas

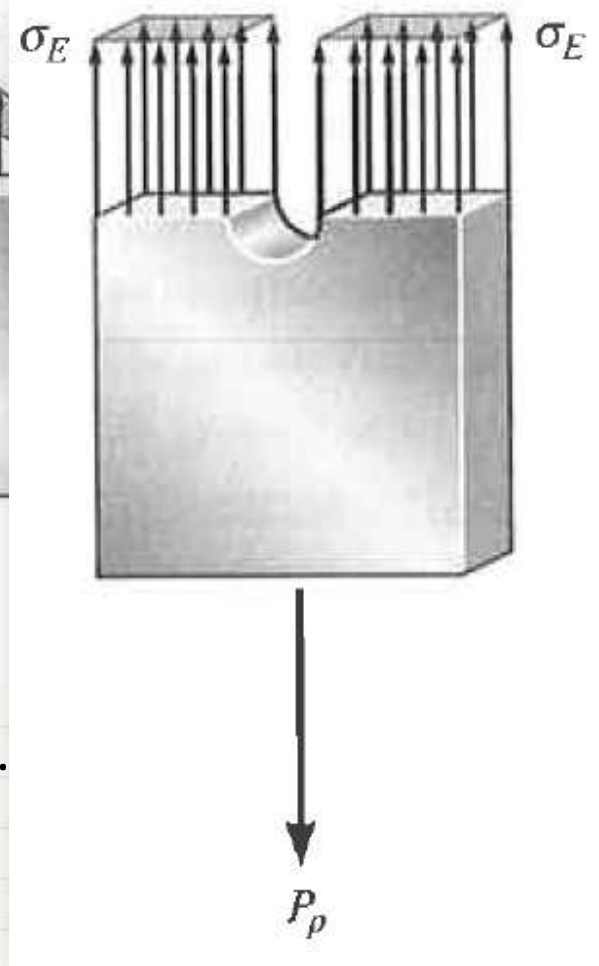
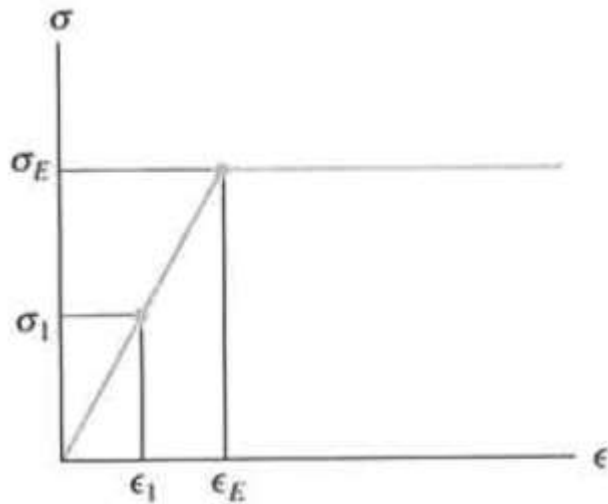
- Antes de atingir  $\sigma_e$



- No escoamento... atinge  $\sigma_e$ ...

# Deformações Inelásticas

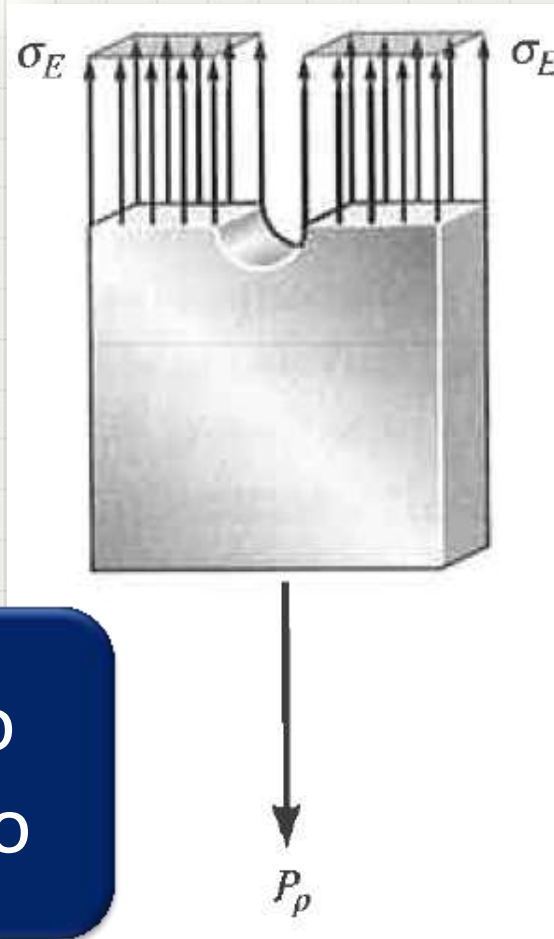
- Antes de atingir  $\sigma_e$



- No escoamento... atinge  $\sigma_e$ ...
- Mais escoamento... e o  $\sigma_e$ ...
- Toda a seção =  $\sigma_e$ ...

# Deformações Inelásticas

- $R_{\max} = \sigma_e \cdot A$



Endurecimento  
por Deformação

Se alguma parte  
da estrutura ficar  
assim:  
Estrutura no  
**Estado Limite  
Último**

- Resistência adicional até escoamento total



**CONCLUSÕES**

# Resumo

- Flambagem: preocupação adicional!
  - Dilatação/contração térmica: causa tensões!
  - Concentrações de tensão: acelera ruptura
  - Materiais dúteis: resistência adicional!
  - **Exercitar: Exercícios Hibbeler**
- 
- Só existem tensões normais?
    - Torção...
    - Momento...



**PERGUNTAS?**



**PARA TREINAR**

# Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercícios 4.70, 4.71, 4.73
  - Exercícios 4.87, 4.88
  - Exercícios 13.3, 13.6
- Extras:
  - Exercícios 4.74, 4.75
  - Exercícios: 4.89, 4.90
  - Exercícios 13.4, 13.7



# Para Treinar em Casa

## Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Alumínio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6Al-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Kevlar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**



# EXERCÍCIO

# Exercício – Entrega Individual

- Uma barra de aço mede 120m quando tracionada por 1000N a uma temp. de 20°C.
- Se a tensão for removida mas a barra de aço for aquecida até 45°C, qual será seu comprimento?
- $A = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$
- $E_{\text{aço}} = 200 \text{GPa}$
- $\alpha_{\text{aço}} = 17 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$