Resistência dos Materiais II

Torção
Parte I

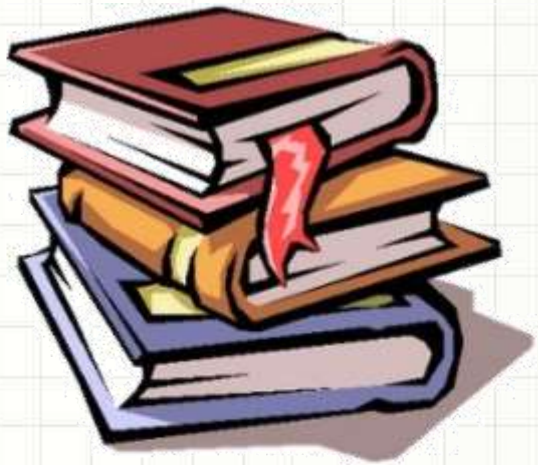
Prof. Dr. Daniel Caetano

2018 - 1

Objetivos

- Compreender a deformação por torção
- Compreender os esforços de torção
- Determinar distribuição de tensões de cisalhamento por torção
- Determinar cisalhamento pela transmissão de potência

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Resistência dos Materiais II – Aula 5)
Material Didático	Resistência dos Materiais (Hibbeler), págs 125 a 139.
Aula Online	3
Biblioteca Virtual	“Resistência dos Materiais”

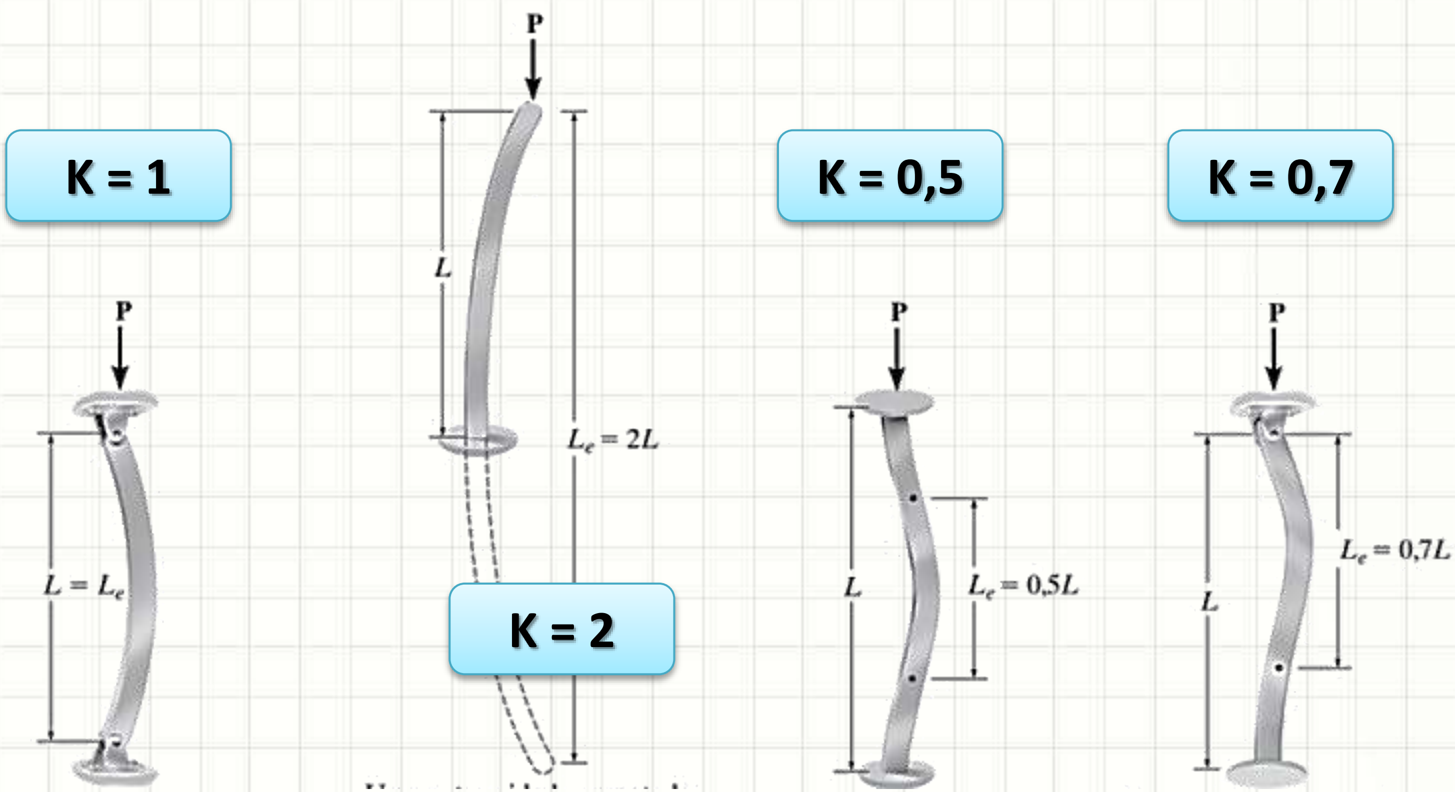
Relembrando:

Carregamentos Axiais

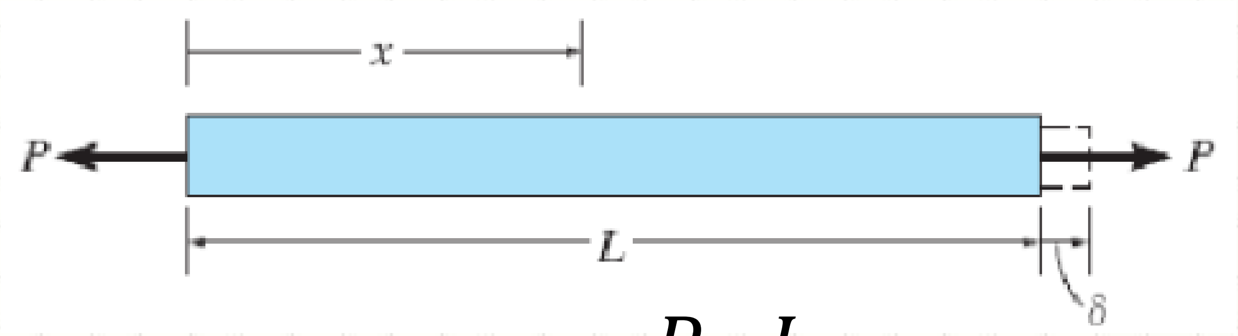
Flambagem

- Determinação da Carga Crítica P_{cr}

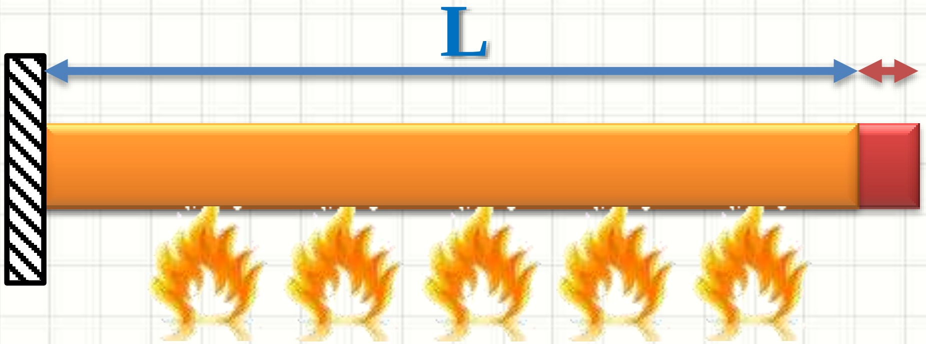
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2}$$



Carregamentos e Deformações Axiais



$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

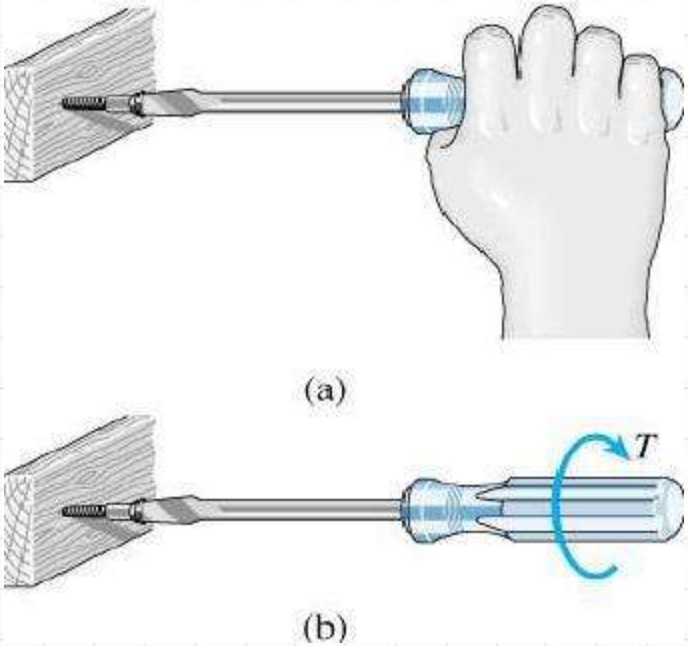


$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

Deformação de Eixo Circular por Torção

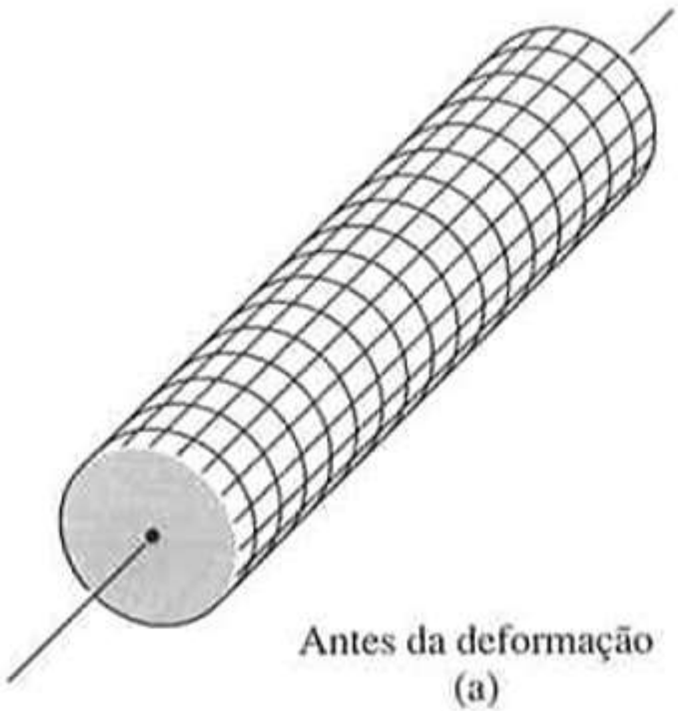
Deformação por Torção

- O que é torção?

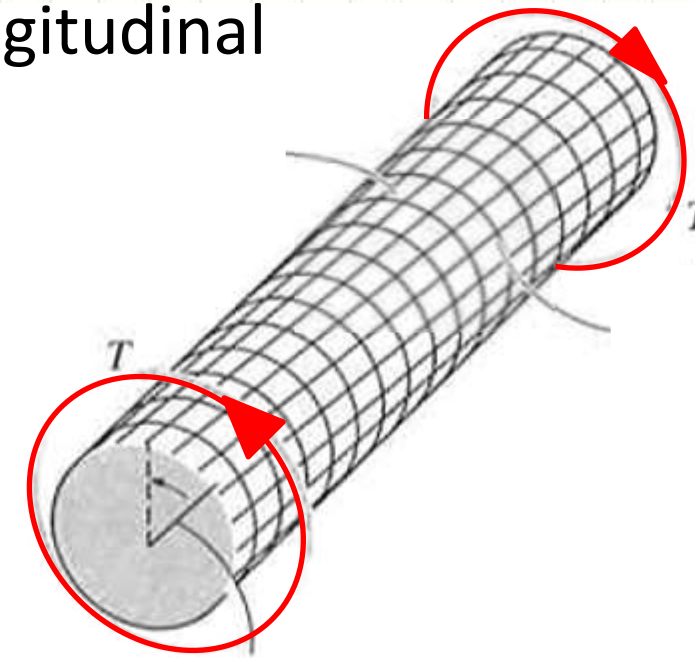


Deformação por Torção

- Torção é a deformação por efeito do **torque**
- **Torque** é um esforço que deforma...
  - Em torno do eixo longitudinal



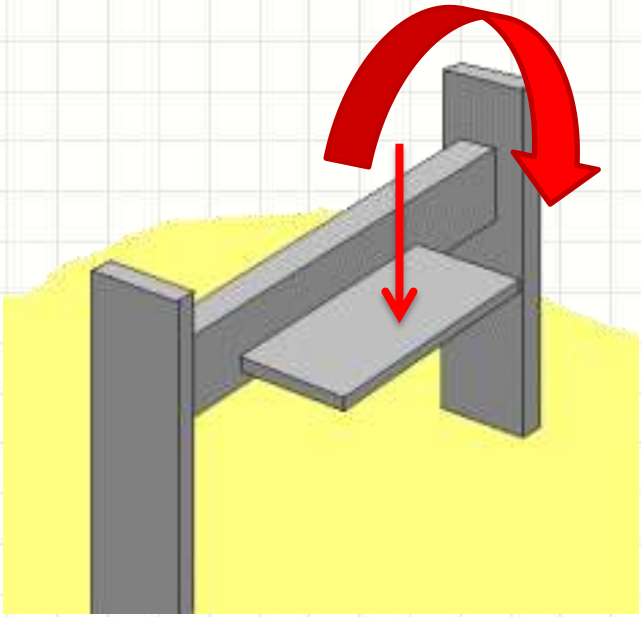
Antes da deformação
(a)

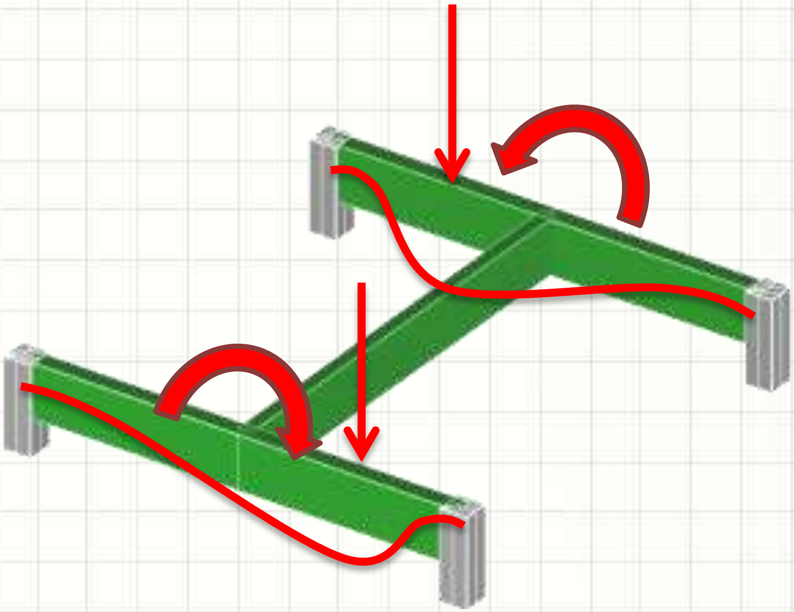


Após a deformação
(b)

Deformação por Torção

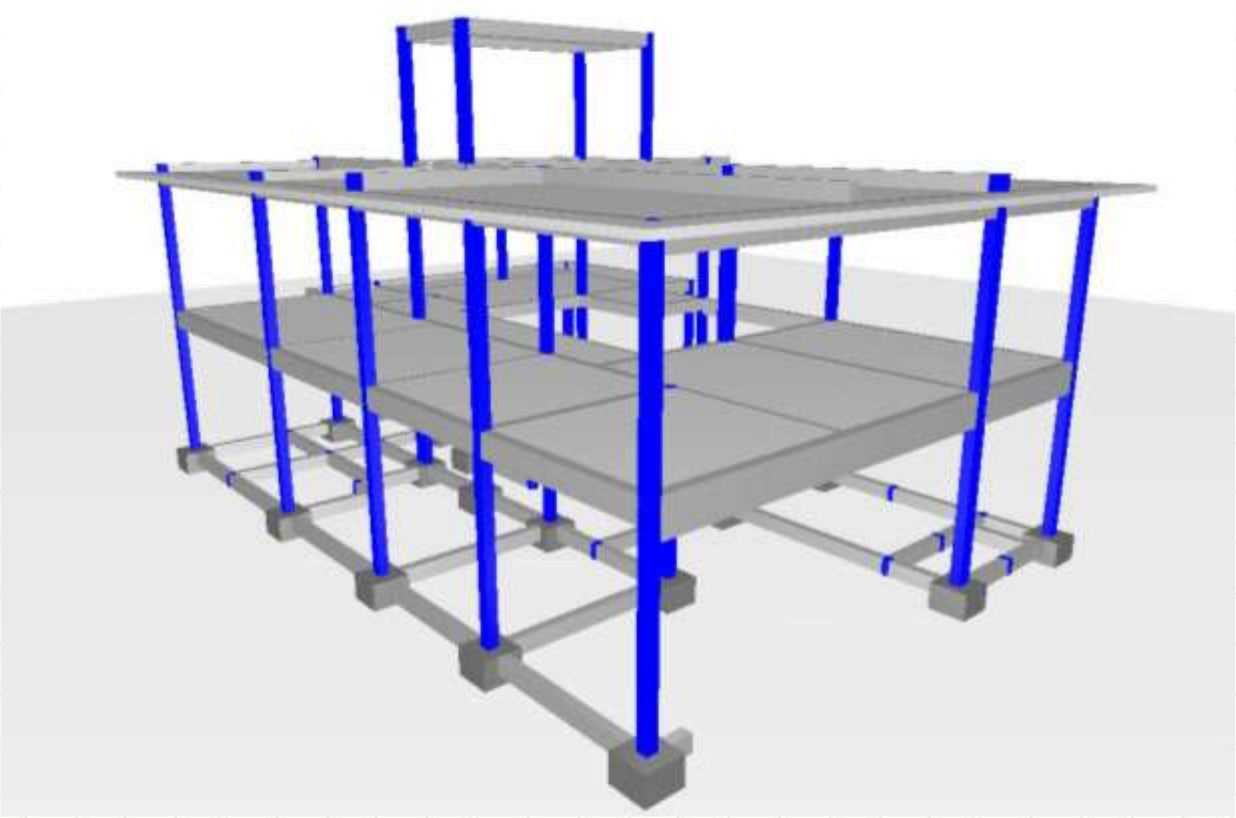
- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?





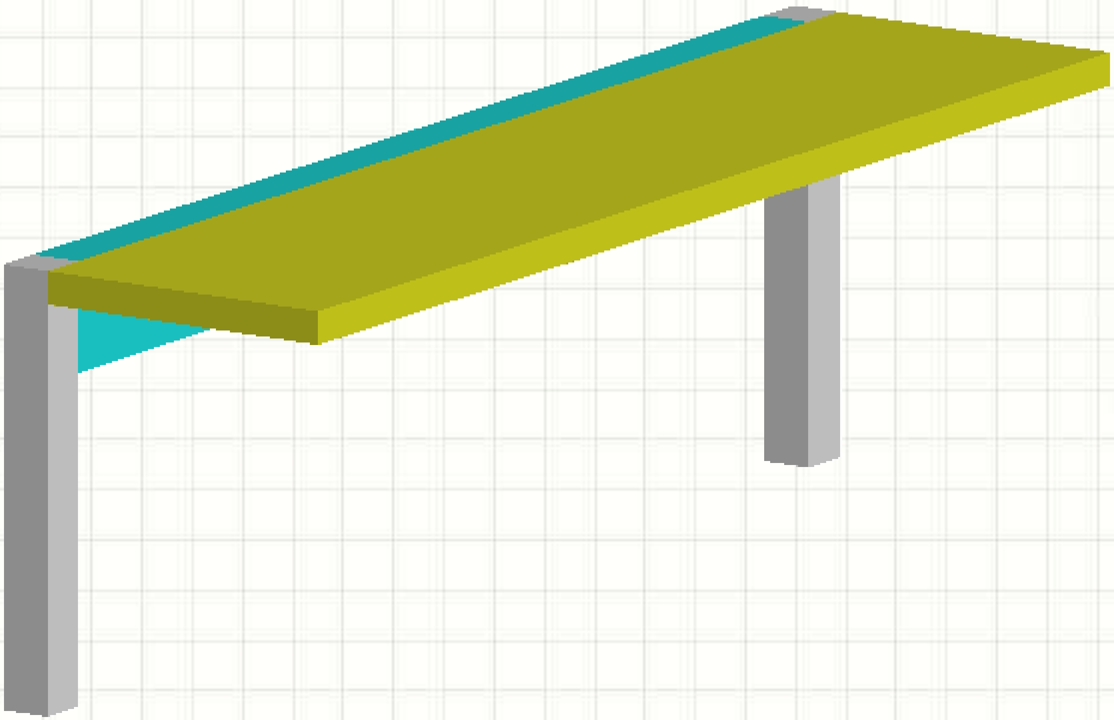
Deformação por Torção

- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



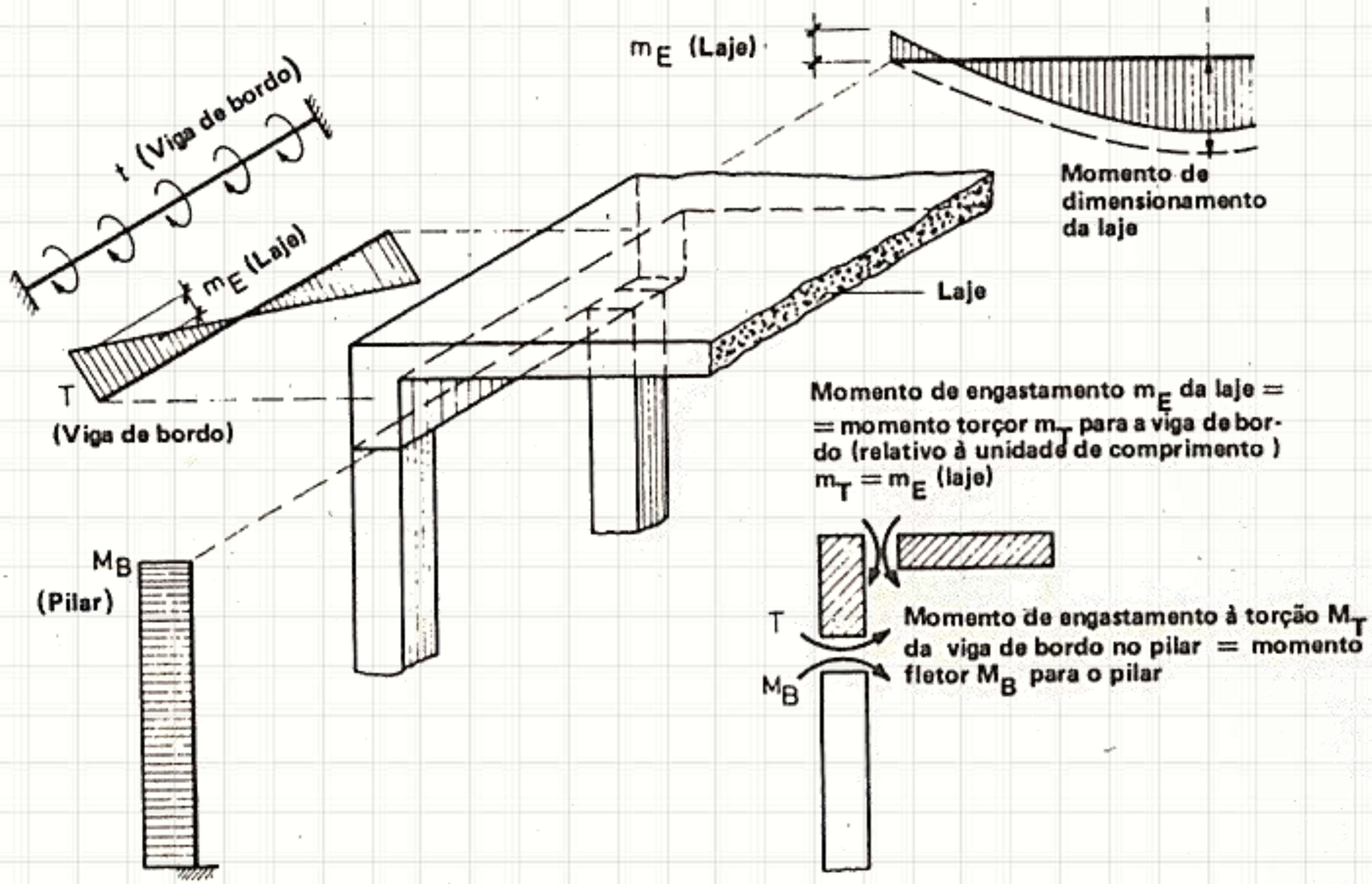
Deformação por Torção

- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



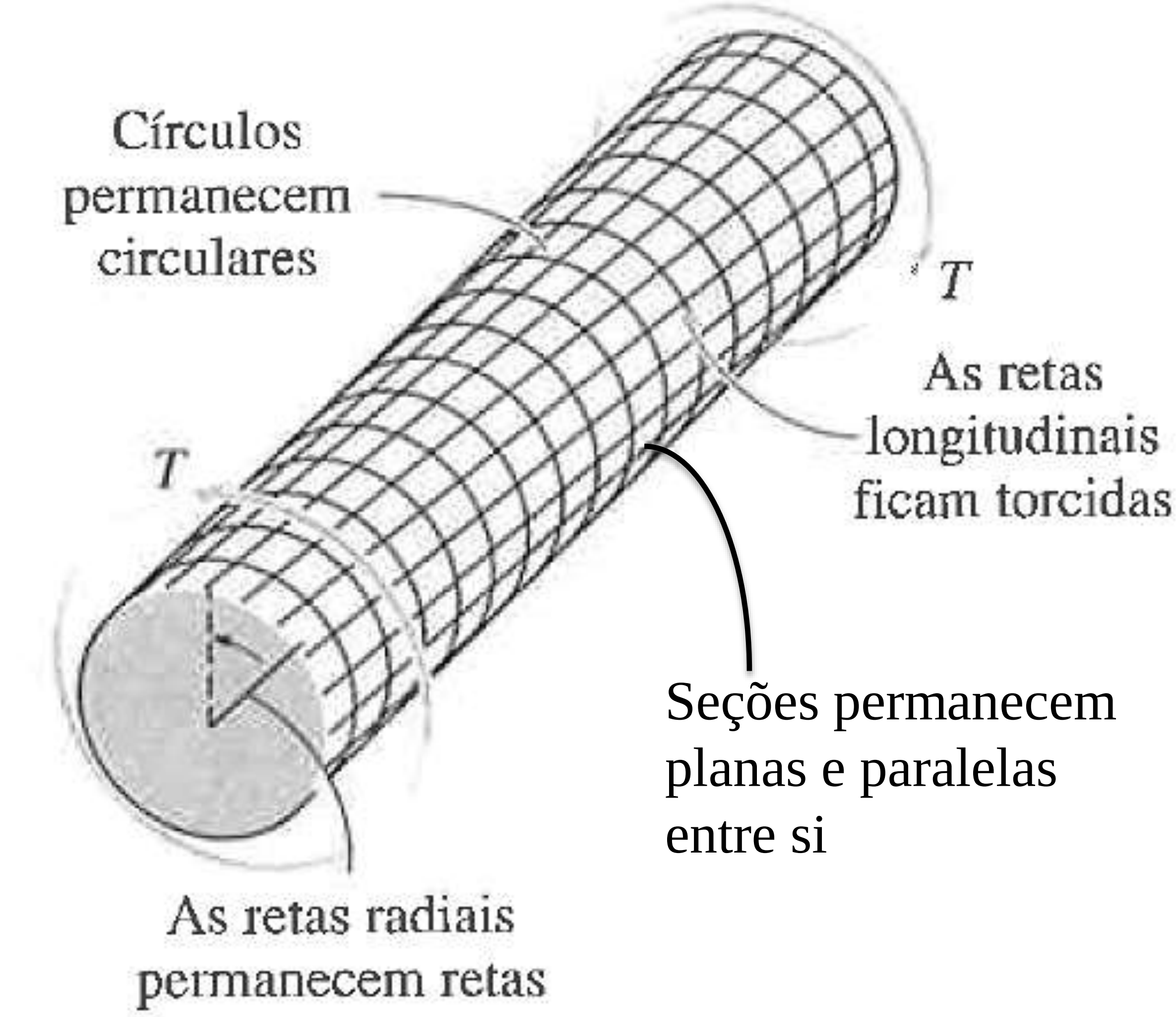
Deformação por Torção

- Preocupação em eixos...
- Estruturas reticuladas?



Deformação por Torção

- Vamos observar a deformação de perto



Deformação por Torção

- Vamos observar a deformação de perto

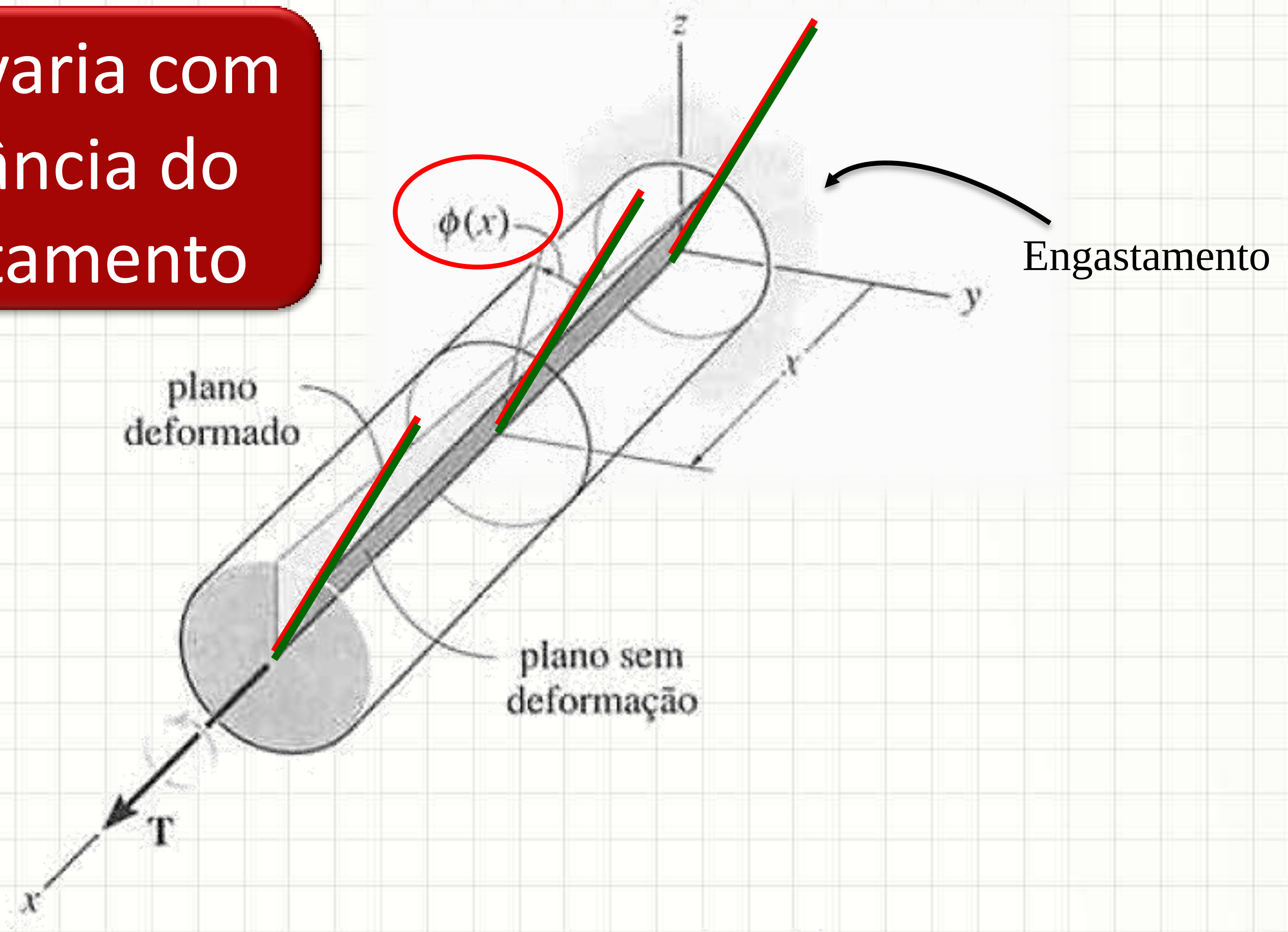
<u>Deformações Pequenas:</u>

- Raio não muda
- Comprimento não muda

Ângulo de Torção

- Pode-se definir a deformação por ângulo ϕ(x)

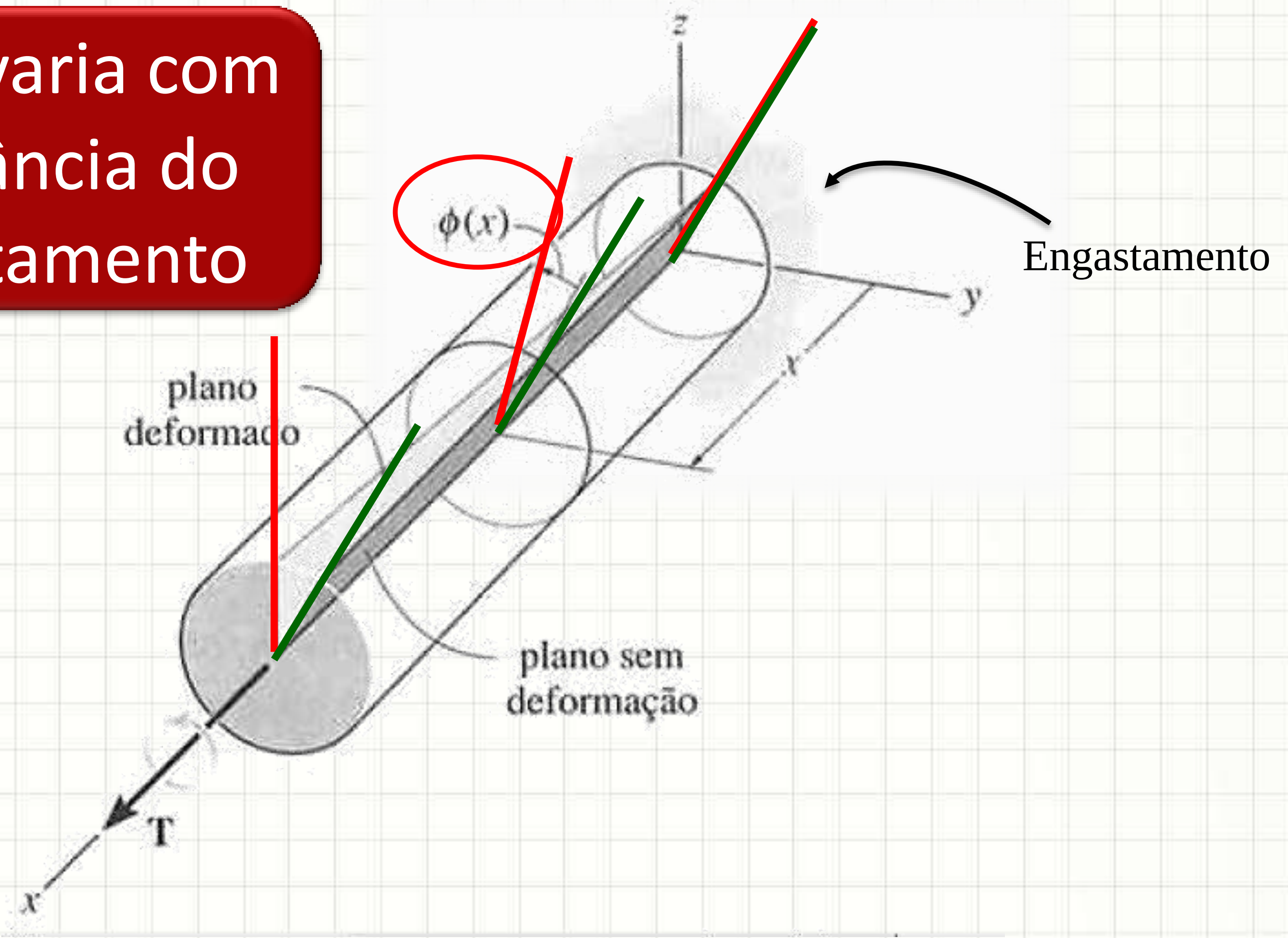
ϕ(x) : varia com a distância do engastamento



Ângulo de Torção

- Pode-se definir a deformação por ângulo $\phi(x)$

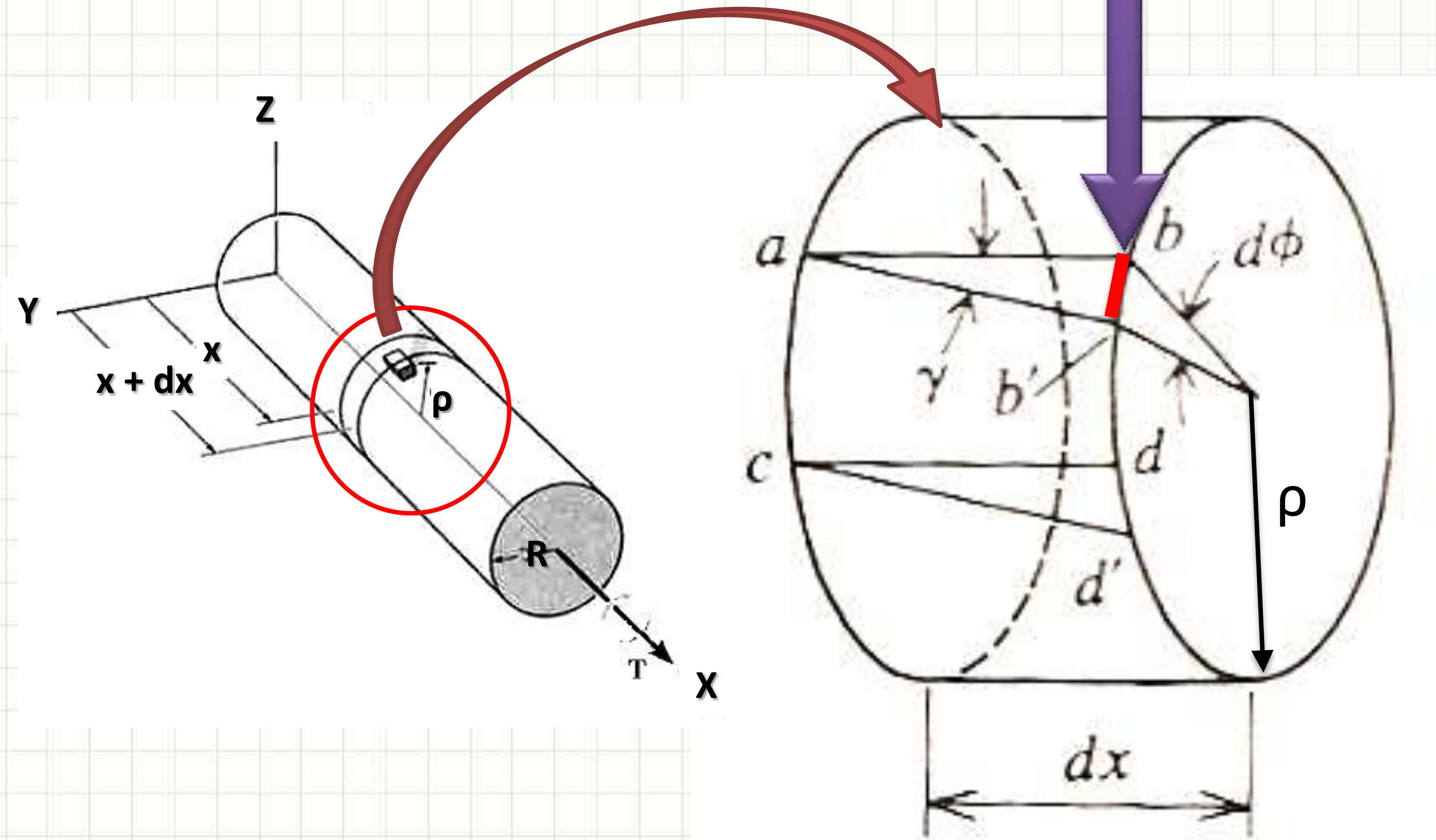
$\phi(x)$: varia com a distância do engastamento



Ângulo de Torção

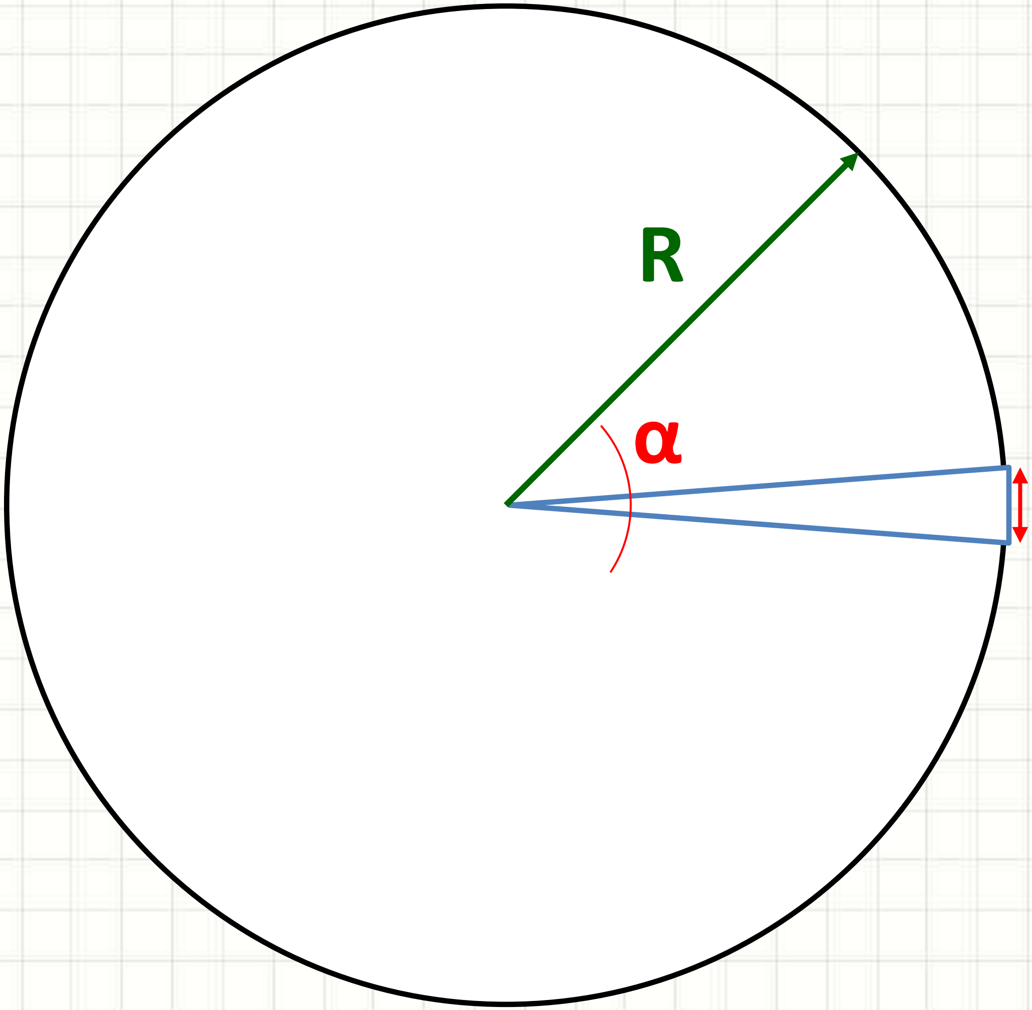
Quanto mede?

- Vamos entender melhor esse $\phi(x)$



Ângulo de Torção

- Relembremos a relação trigonométrica

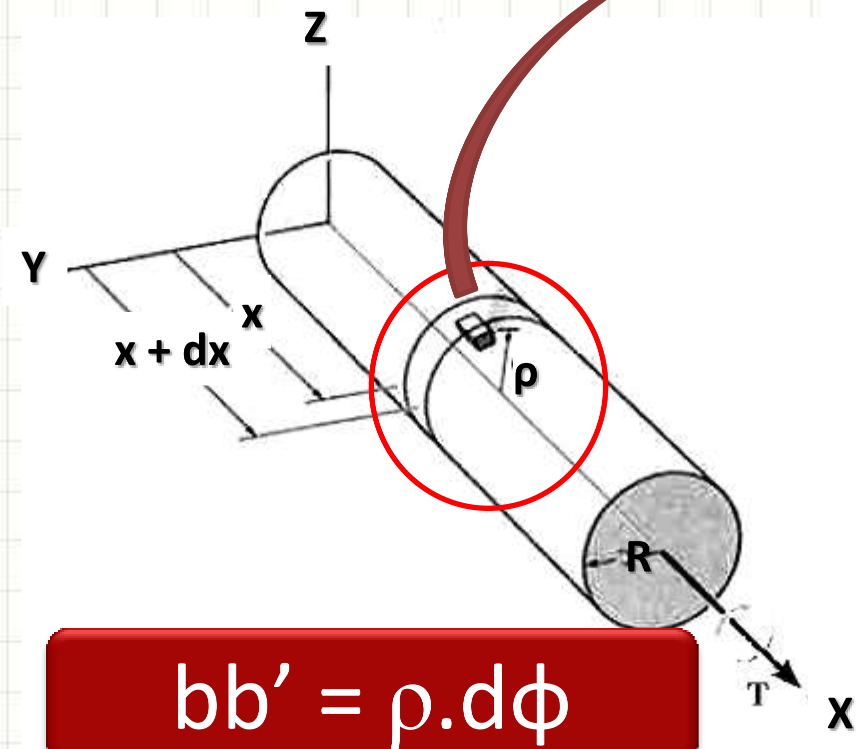


- Perímetro?
  - $2.\pi.R$
- E do arco?
  - $\alpha . R$

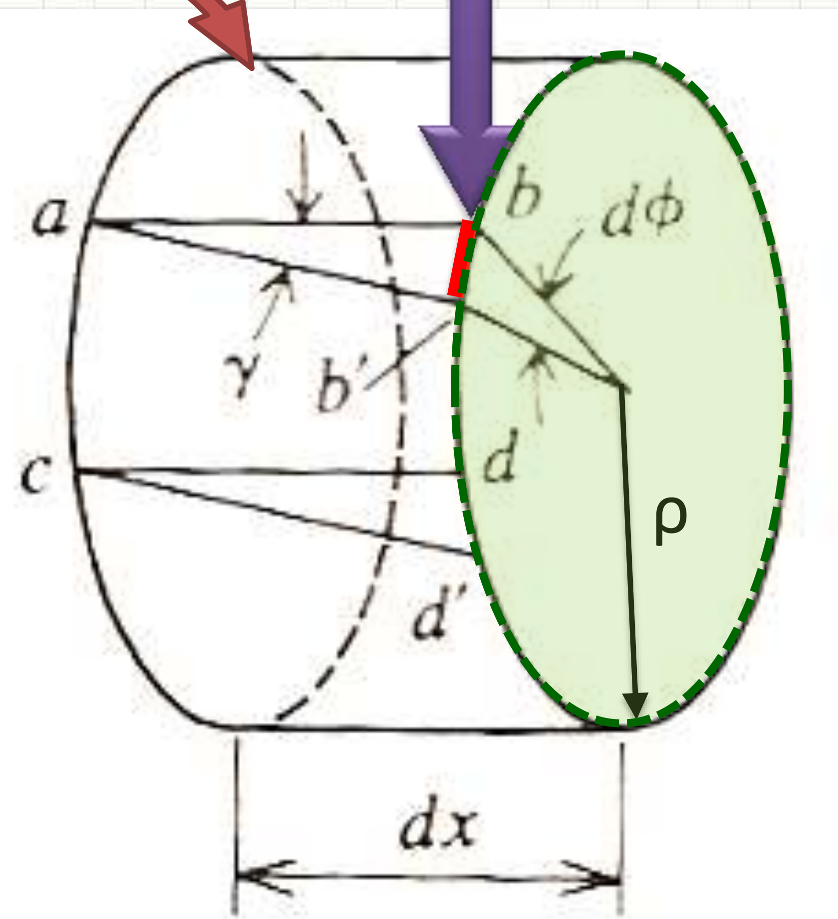
Ângulo de Torção

Quanto mede?

- Vamos entender melhor esse $\phi(x)$



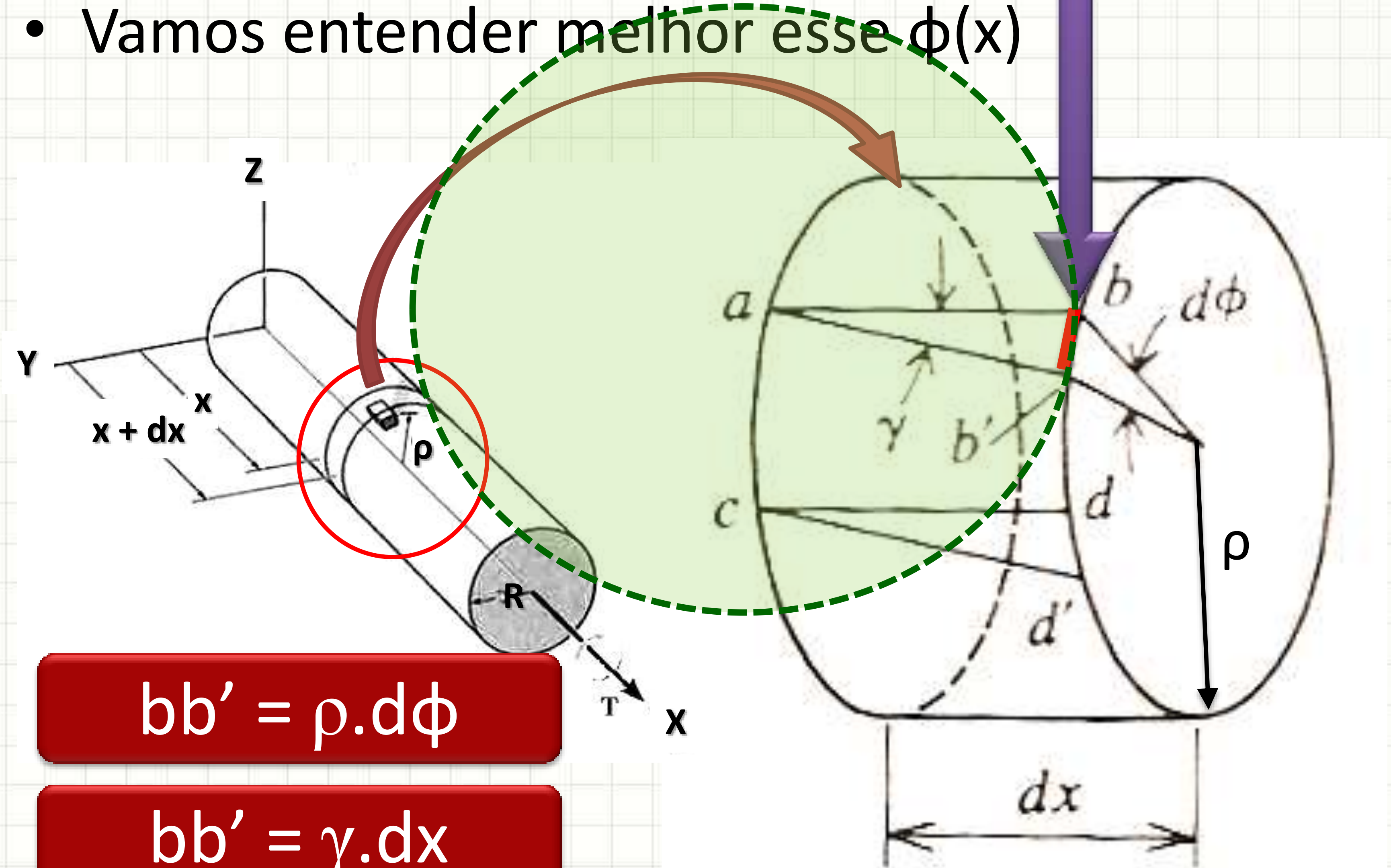
$$bb' = \rho . d\phi$$



Ângulo de Torção

- Vamos entender melhor esse $\phi(x)$

Quanto mede?



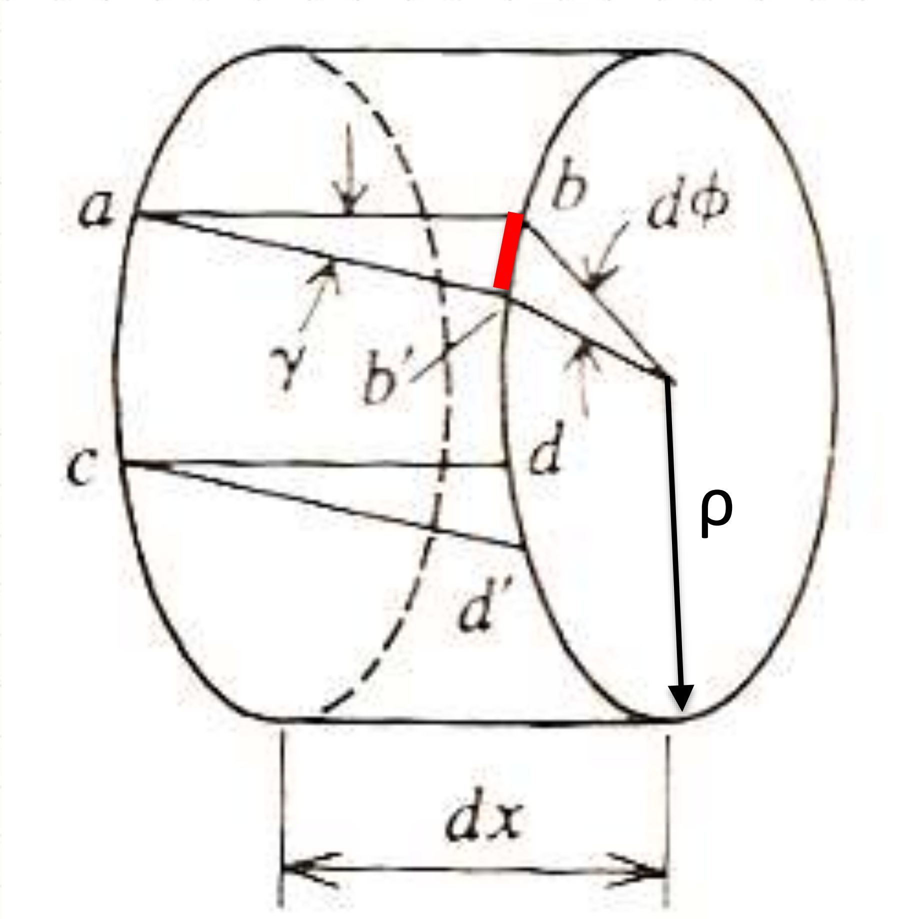
$$bb' = \rho.d\phi$$

$$bb' = \gamma.dx$$

Ângulo de Torção

- Portanto...

$$bb' = \rho.d\phi$$
$$bb' = \gamma.dx$$



$$\rho \cdot d\phi = \gamma \cdot dx$$

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

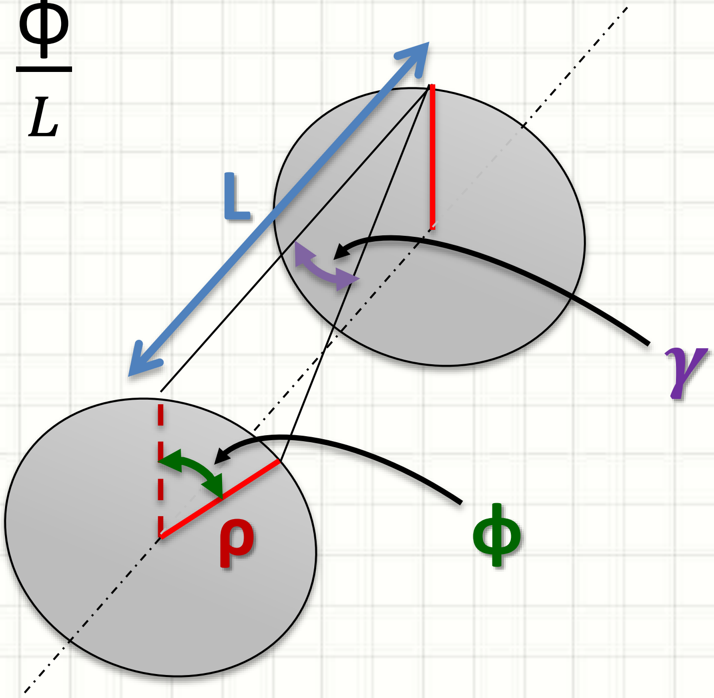
γ: deformação de cisalhamento

Ângulo de Torção

- Considerando torção pura... dϕ/dx = cte. = θ
- θ : âng. de torção por un. de comp. = ϕ/L

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx} = \rho \cdot \frac{\phi}{L}$$

$$\gamma = \rho \cdot \theta$$



Quanto maior o raio... Maior o γ

A Fórmula da Torção

A Fórmula Torção

- Pela lei de Hooke, para material linear elástico
  $\sigma = E \cdot \epsilon$
- Para a torção...
  $\tau = G \cdot \gamma$
- No entanto...
  $\gamma = \rho \cdot \theta$
- Logo...
  $\tau = G \cdot \rho \cdot \theta$

τ : tensão de cisalhamento
G : módulo de elasticidade ao cisalhamento

O valor de τ cresce com o raio... $\tau = 0$ se $\rho = 0$

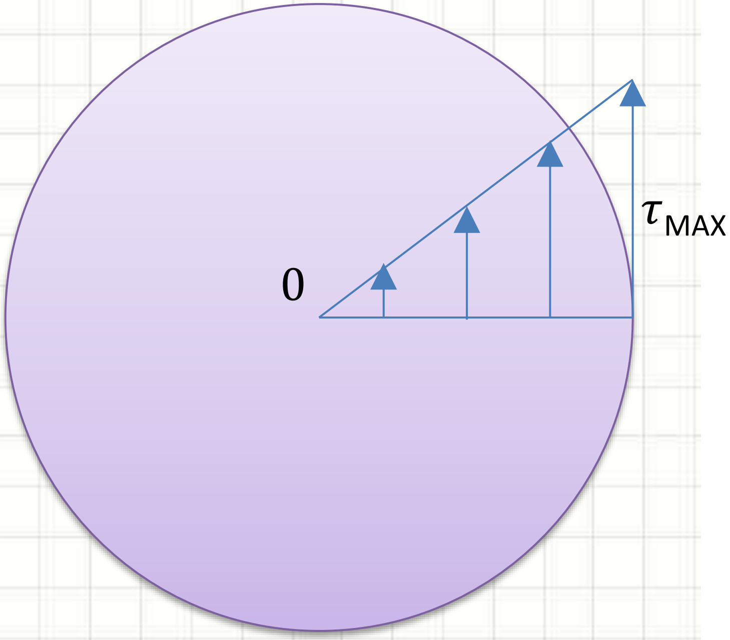
A Fórmula Torção

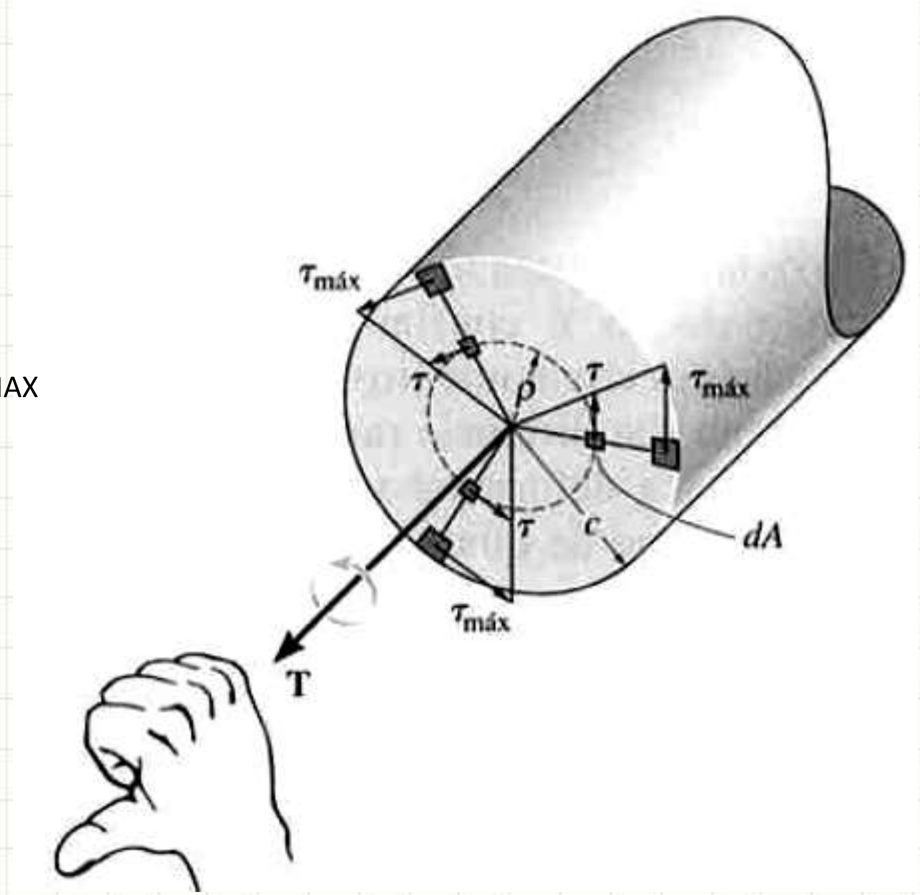
$\rho = 0 \rightarrow \tau = 0$

$\rho = \text{máx} \rightarrow \tau = \text{máx}$

- Visualizando a equação:

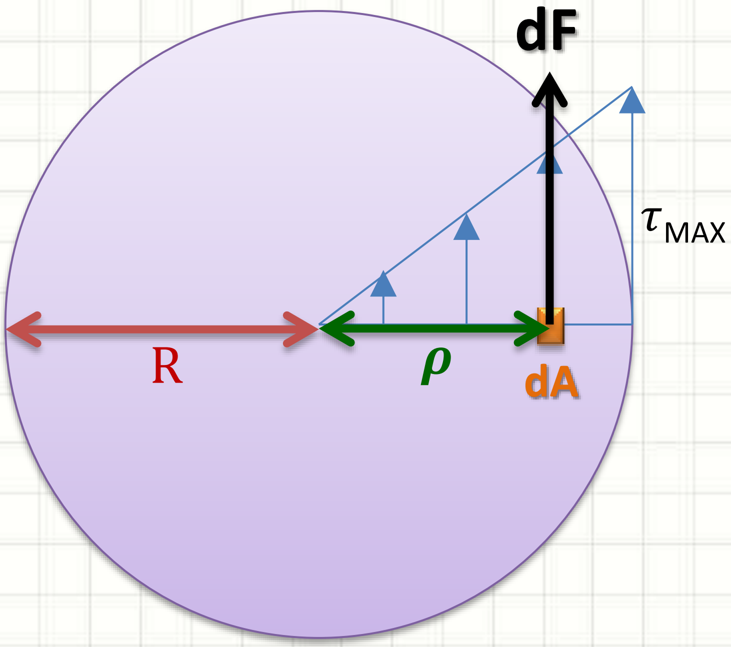
$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta$$





A Fórmula Torção

- Considerando que cada esforço age sobre dA



$$dF = \tau \,.\, dA$$

$$dT = \rho \,.\, dF = \rho \,.\, \tau \,.\, dA$$

- Integrando...

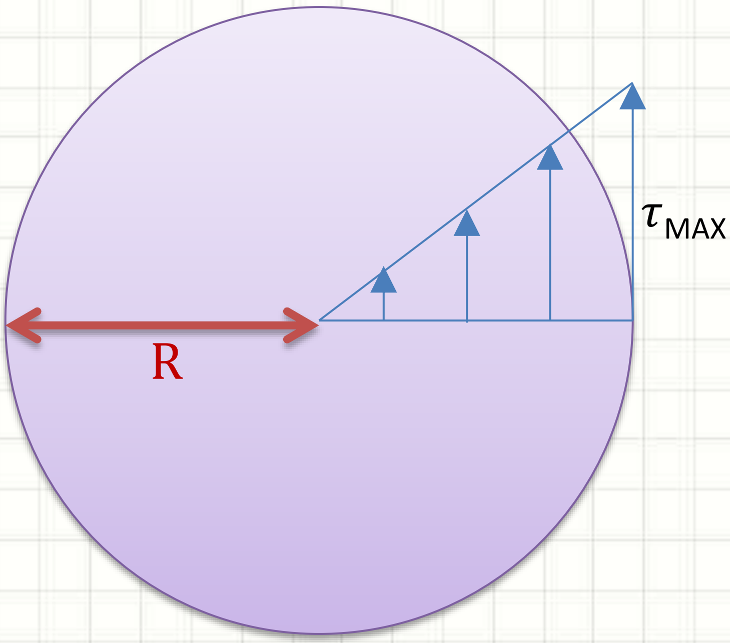
$$T = \int_A \rho \,.\, \tau \,.\, dA$$

- Ocorre que...

$$\tau = \tau_{MAX} \cdot \frac{\rho}{R}$$

A Fórmula Torção

- Ou seja... Podemos definir T como...



$$T = \int_A \rho.\tau_{MAX} \cdot \frac{\rho}{R}.\,\mathrm{dA}$$

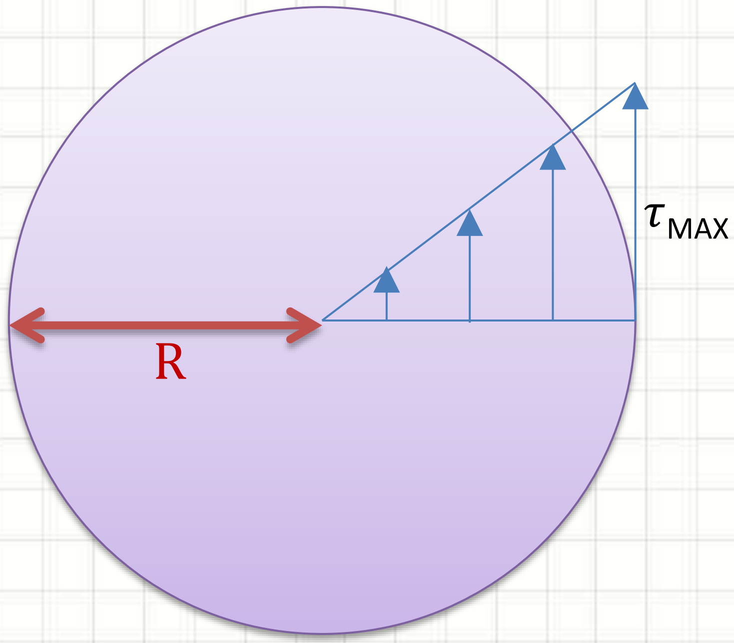
- Que resulta em...

$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R}.\int_A \rho^2.\,\mathrm{dA}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R}.J$$

A Fórmula Torção

- Define-se a fórmula da torção



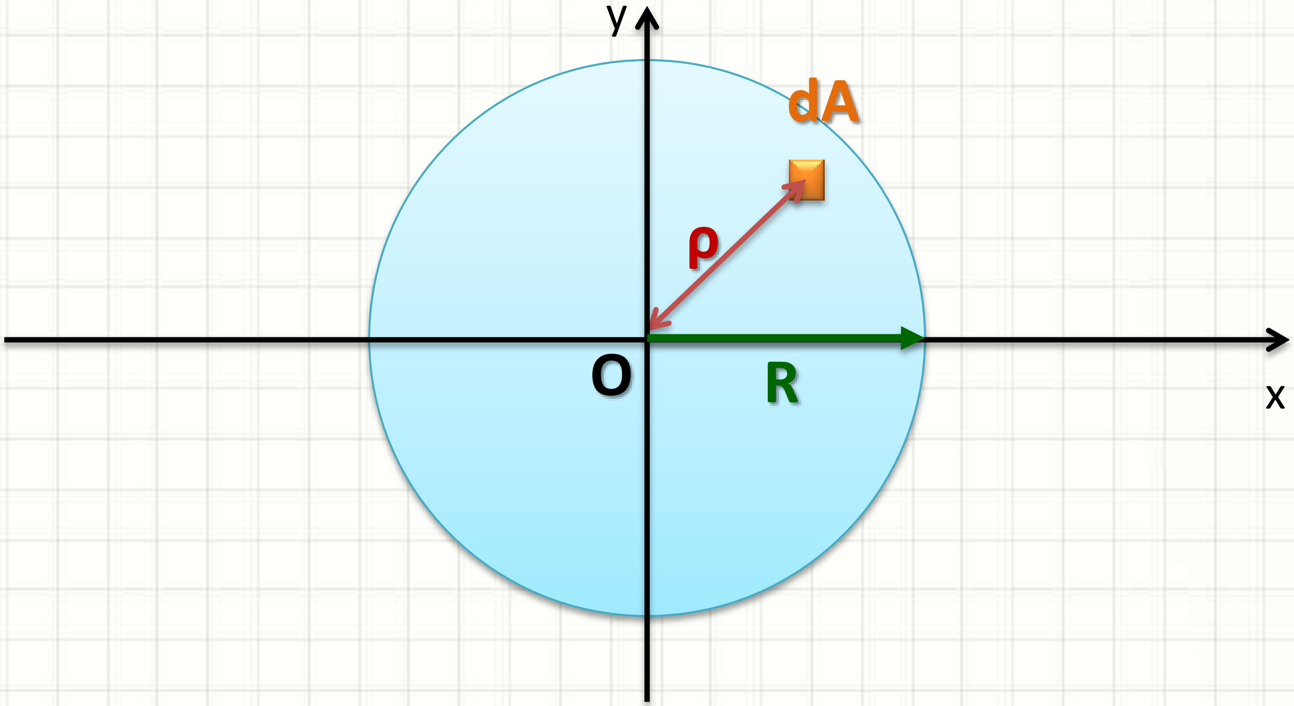
$$T = \frac{\tau_{MAX}}{R} . J$$

Ou...

$$\tau_{MAX} = \frac{T . R}{J}$$

Exemplo para Eixo Maciço

- Lembrando que J, para um eixo maciço...



$$J_O = \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\boldsymbol{\pi \cdot R^4}}{\mathbf{2}}$$

Exemplo para Eixo Maciço

- Lembrando que para um eixo maciço

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{2.T.R}{\pi \cdot R^4} = \frac{2.T}{\pi \cdot R^3}$$

Exemplo para Eixo Tubular

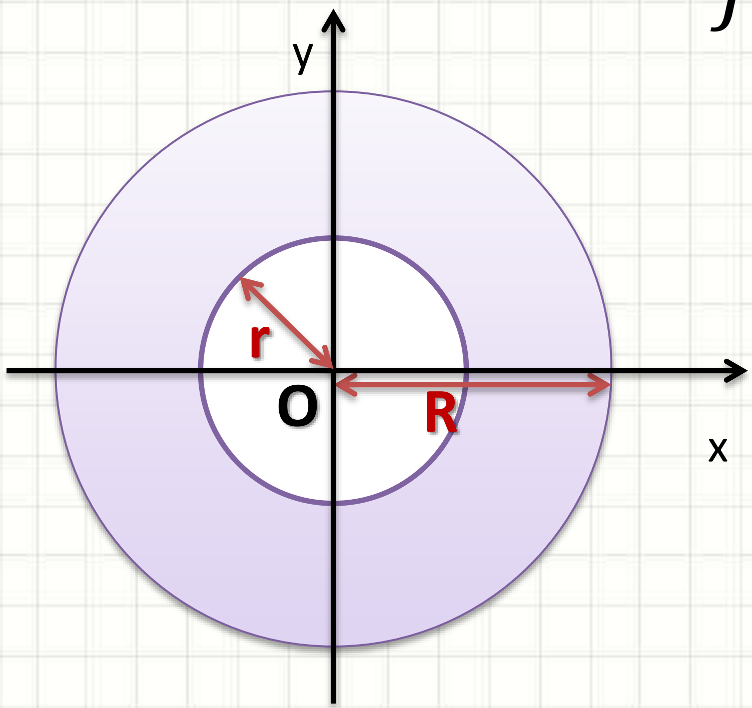
- No eixo tubular, há uma região vazia... J=?

$$J = J_{cheio} - J_{vazio}$$

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} - \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

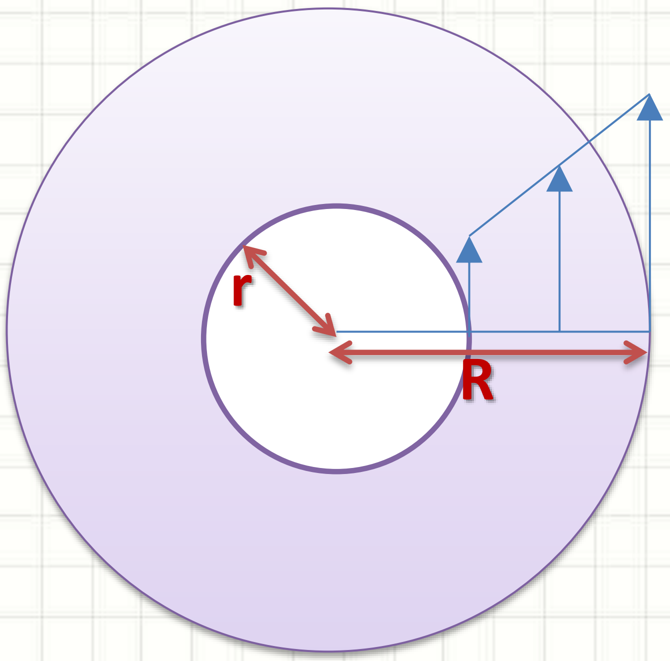
$$J = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$



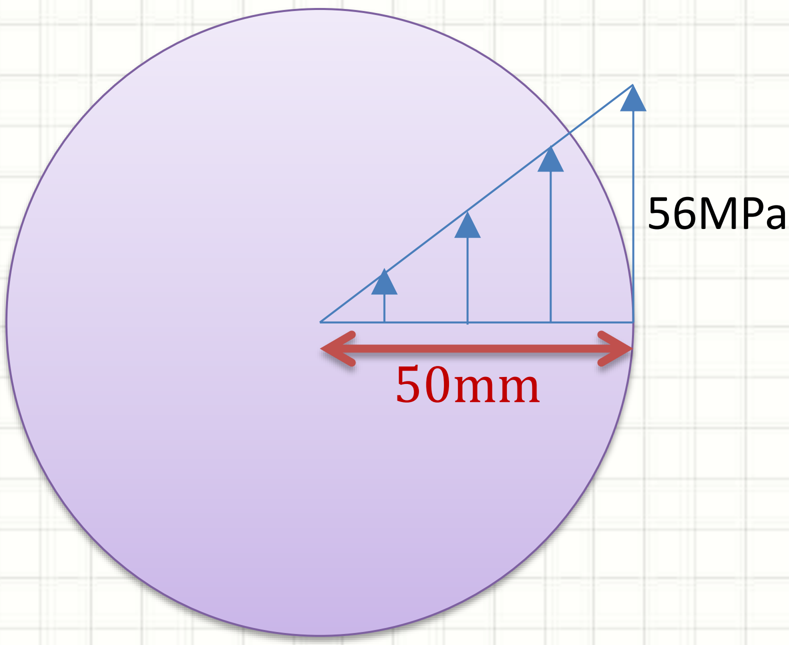
Exemplo para Eixo Tubular

- Distribuição de cisalhamento



Exemplo

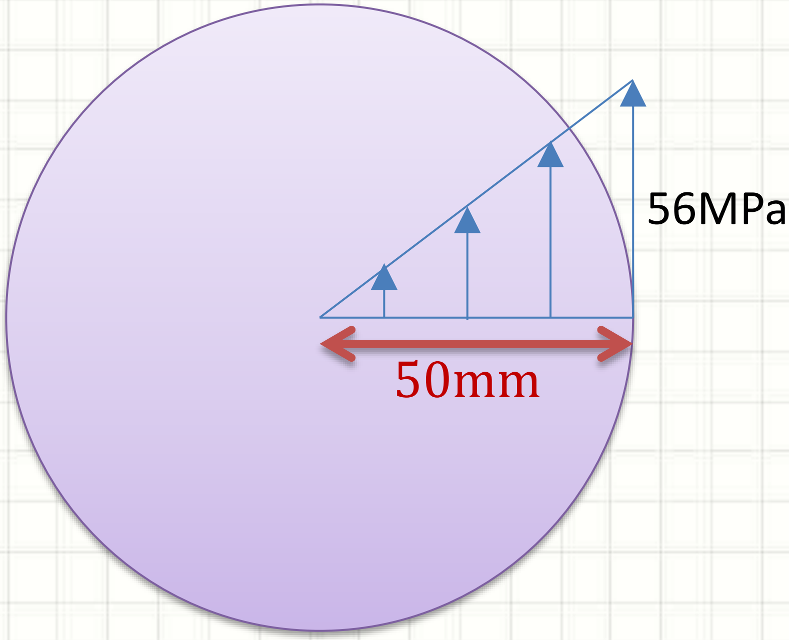
- Uma barra engastada de comprimento 10m e R=50mm está submetida à seguinte distribuição de cisalhamento



- Calcule o torque total agindo sobre a barra

Exemplo

- L=10m R=50mm T=?



- Sabemos que...

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$

- Logo...

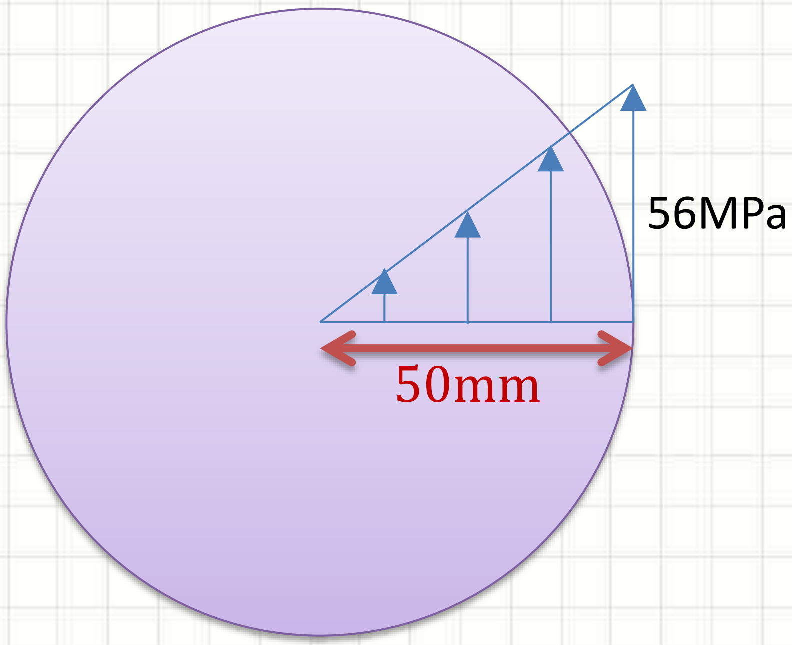
$$T = \frac{\tau_{MAX}.J}{R}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}.\pi.R^4}{R.2}$$

$$T = \frac{\tau_{MAX}.\pi.R^3}{2}$$

Exemplo

- L=10m R=50mm T=?



- Então...

$$T = \frac{\tau_{MAX}.\pi.R^3}{2}$$

$$T = \frac{56.10^6.\pi.(5.10^{-2})^3}{2}$$

$$T = 28.\pi.125$$

$$\boldsymbol{T = 10995,572N.m}$$
$$\boldsymbol{\cong 11kN.m}$$

Pausa para o Café!

Transmissão de Potência por Torção

A Potência e o Torque

- **Potência**: trabalho / unidade de tempo
- **Trabalho**: força x deslocamento
- **Potência** = força x deslocamento / tempo
- A potência pelo torque fica

$$P = T \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

- Logo...

$$\boldsymbol{P = T \cdot \omega}$$

P : potência, em watts
T : torque, em N.m
ω : vel. angular, em rad/s

A Potência e o Torque

- Cisalhamento máximo?

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$

- Mas... Tirando T da fórmula da potência...

$$P = T \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{\omega}$$

- Logo...

$$\tau_{MAX} = \frac{P.R}{\omega.J}$$

A Potência e o Torque

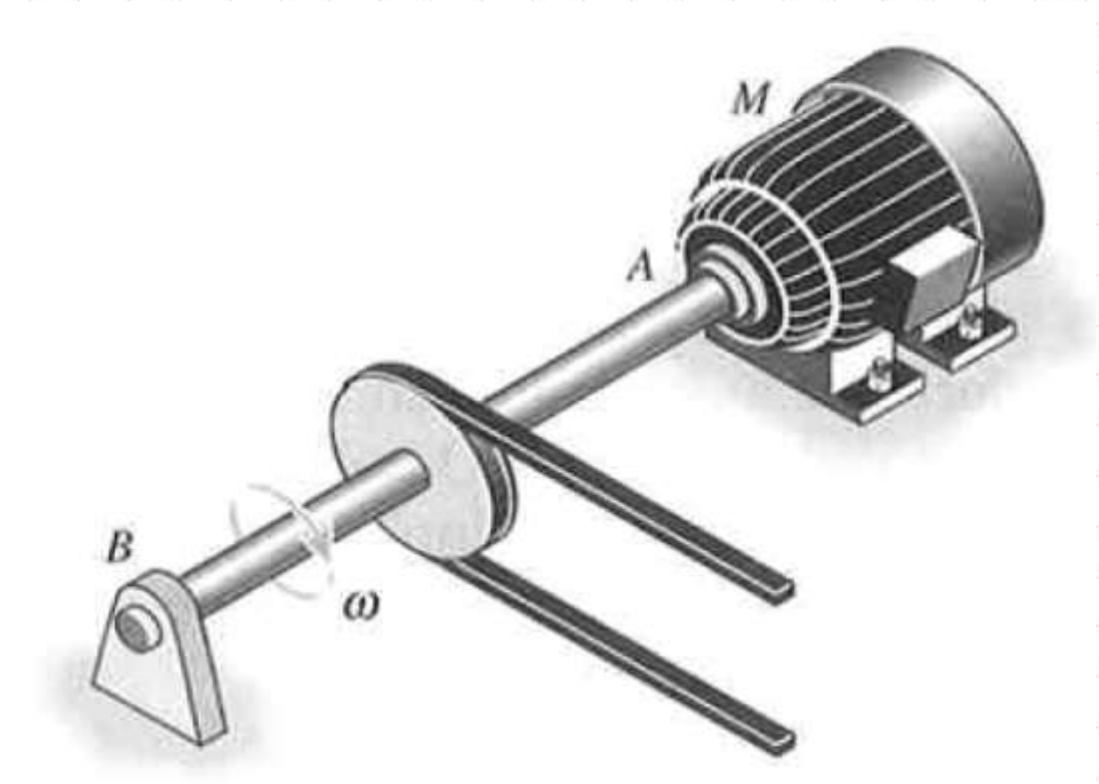
- Como $\boldsymbol{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$ (com f em Hz)
  - Logo...

$$P = T \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad P = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot J}$$

A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D



A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D
- Convertendo ω para o S.I.:

$$\omega = \frac{175\,rot}{1\,min} \cdot \frac{2\pi\,rad}{1\,rot} \cdot \frac{1\,min}{60\,s} = 18{,}33\,rad/s$$

A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D
- Pela fórmula da potência:

$$P = T.\omega \Rightarrow$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{3750}{18,33} = 204,6\ N.m$$

A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D
- Com T, podemos calcular τ_{MAX}

$$\tau_{MAX} = \frac{T.R}{J}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{204{,}6.R.2}{\pi.R^4} = \frac{409{,}2}{\pi.R^3}$$

A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D
- Considerando $\tau_{MAX} = \tau_{ADM}$

$$\tau_{MAX} = \frac{409{,}2}{\pi . R^3} = 100.\,10^6$$

A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D
- De onde concluímos que...

$$\frac{409{,}2}{\pi . R^3} = 100.10^6 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{4{,}092}{\pi . 10^6}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{4{,}092}{\pi . 10^6}} = \frac{1{,}092099}{10^2} = 0{,}01092099m$$

A Potência e o Torque

- Exemplo
- Eixo maciço de aço, P = 3750W
- Se ω = 175 rpm, τ_{ADM}=100MPa, calcule D
- Se temos o raio, temos o diâmetro:

$$R = 0{,}01092099m$$

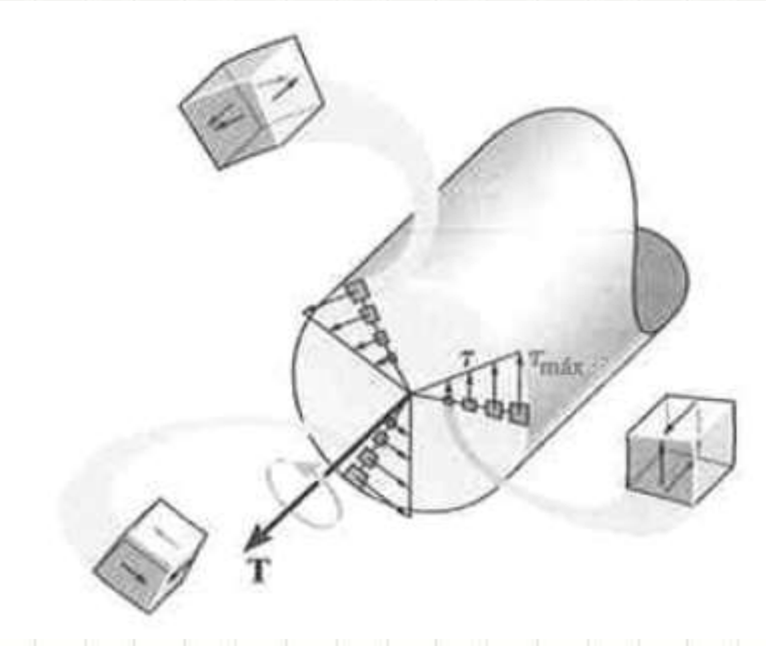
$$\mathrm{D} = 0{,}021842m$$

$$\mathrm{D} \cong 2{,}2cm$$

Rompimento

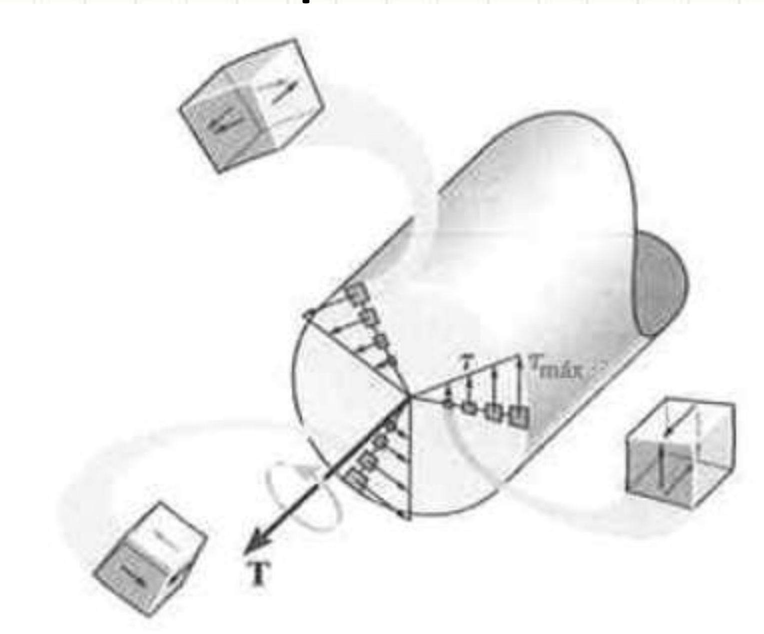
Rompimento por Torção

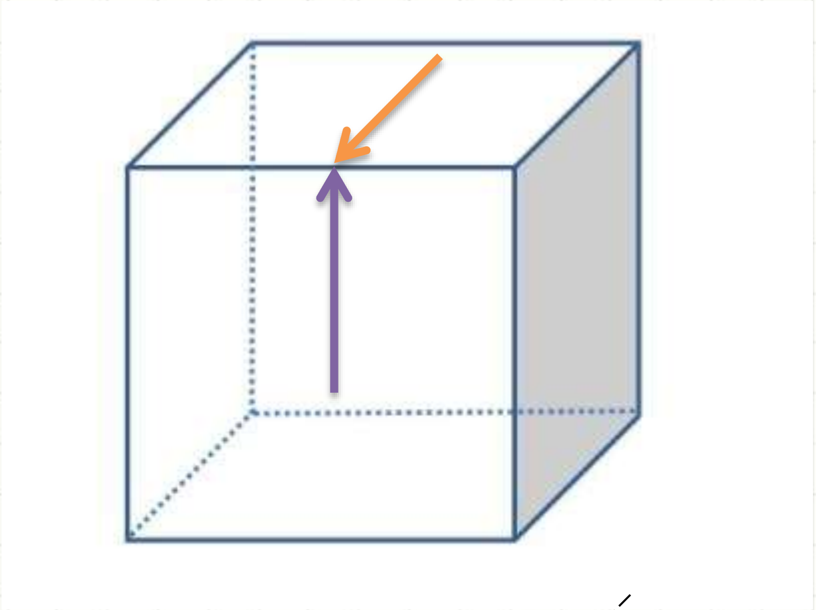
- O rompimento por forças de cisalhamento...
  - É no plano perpendicular a estas forças
- É isso que ocorre na torção?
- O rompimento é helicoidal!
  - Por quê?

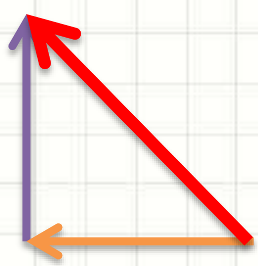


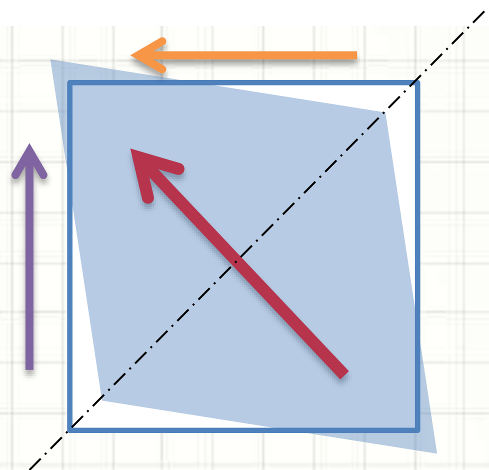
Rompimento por Torção

- O rompimento é helicoidal!



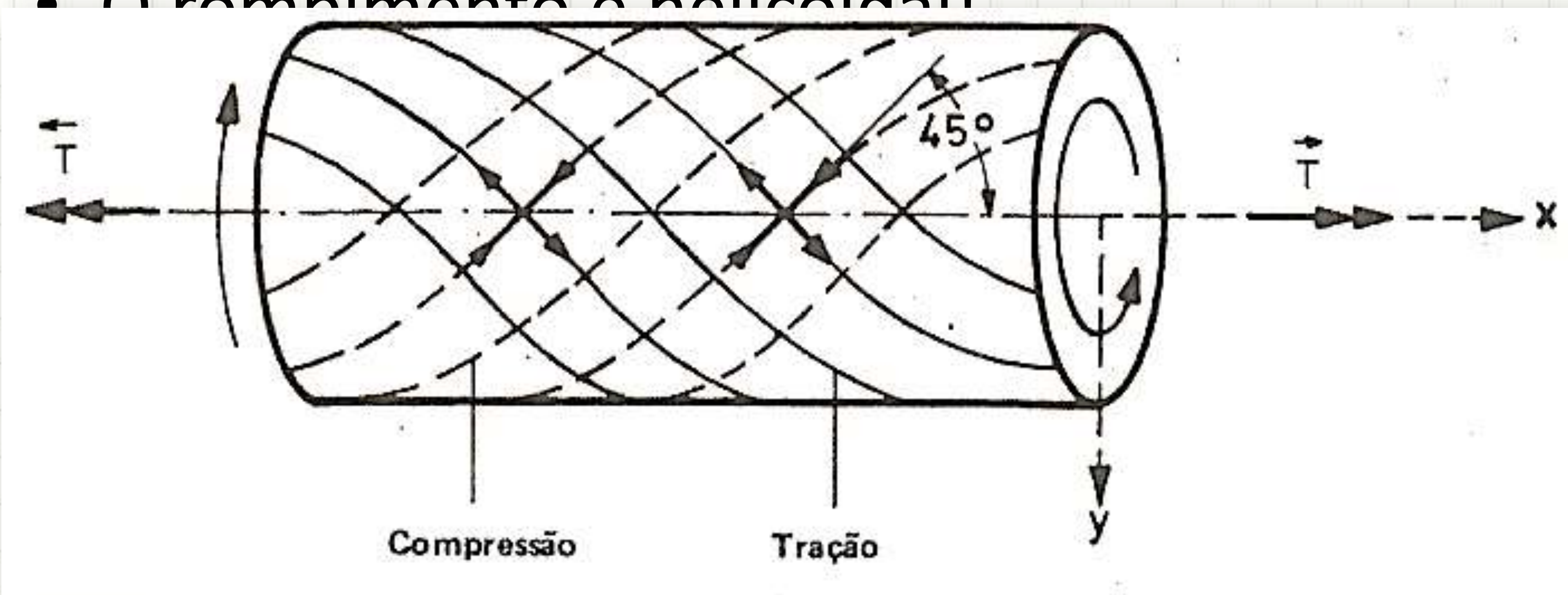


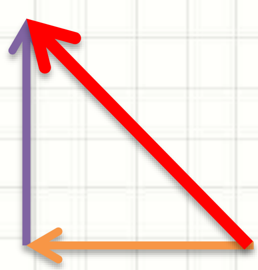


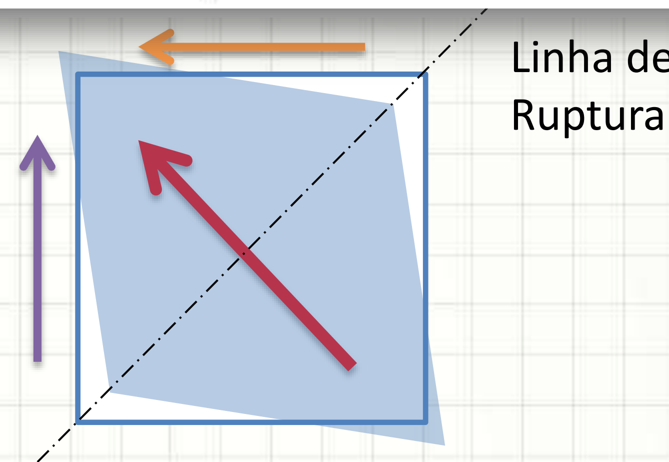


Rompimento por Torção

- O rompimento é helicoidal!







Conclusões

Resumo

- Torção: deformações medidas angularmente
  - Deformação depende do raio!
- Tensão de cisalhamento máxima: f(T,R,J)
- Eixos: rotação → potência máxima admissível
- **Exercitar**: Exercícios Hibbeler

- E a deformação total da torção?
- Como calcular o ponto de máxima torção?

PERGUNTAS?

Para Treinar

Para Treinar em Casa

- Mínimos:
  - Exercícios 5.1, 5.2, 5.5, 5.34
- Extras:
  - Exercícios 5.3, 5.9, 5.14, 5.35, 5.37

Para Treinar em Casa

Propriedades dos Materiais Utilizados em Engenharia

Materiais		Densidade (mg/m³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica x10-6
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Ligas de Aluminio Forjado	2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290	10	0,35	23
	6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186	12	0,35	24
Ligas de Ferro Fundido	cinza ASTM 20	7,19	67,0	27	-	-	-	179	669	-	0,6	0,28	12
	Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	-	-	-	276	572	-	5	0,28	12
Ligas de Cobre	Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	-	241	241	-	35	0,35	18
	Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0,34	17
Ligas de Magnésio	Am 1004-T61	1,83	44,7	18	152	152	-	276	276	152	1	0,30	26
Ligas de Aço	Estrutural A-36	7,85	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0,32	12
	Inoxidavel 304	7,86	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0,27	17
	Aço-ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	-	800	800	-	22	0,32	12
Ligas de Titânio	Ti-6A1-4V	4,43	120	44	924	924	-	1000	1000	-	16	0,36	9,4

Materiais		Densidade (mg/m³)	Módulo de elasticidade		Tensão de escoamento (MPa)			Tensão última (MPa)			Alongamento % em corpo de prova de 50mm	Coeficiente de Poisson	coeficiente de expansão termica
			E (GPa)	transversal G (GPa)	tração	compressão	cisalhamento	tração	compressão	cisalhamento			
Concreto	Baixa resistência	2,38	22,1	-	-	-	12	-	-	-	-	0,15	11
	Alta resistência	2,38	29,0	-	-	-	38	-	-	-	-	0,15	11
Plástico Reforçado	Keviar 49	1,45	131	-	-	-	-	717	483	20,3	2,8	0,34	-
	30% de vidro	1,45	72,4	-	-	-	-	90	131	-	-	0,34	-
Madeira Estrutural de Alta Qualidade	Abeto Douglas	0,47	13,1	-	-	-	-	2,1	26	6,2	-	0,29	-
	Abeto Branco	3,60	9,65	-	-	-	-	2,5	36	6,7	-	0,31	-

Fonte **HIBBELER, R.C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.**

Exercício

Exercício – Entrega Individual

- Um eixo de comprimento 10m e R=10cm está submetido ao T = 80kN.m.
- Calcule τ_{MAX} e a potência transmitida a 5000RPM em cada uma das configurações abaixo: