Pesquisa Operacional II

Problema do Caminho Mínimo: Dijkstra

Prof. Dr. Daniel Caetano

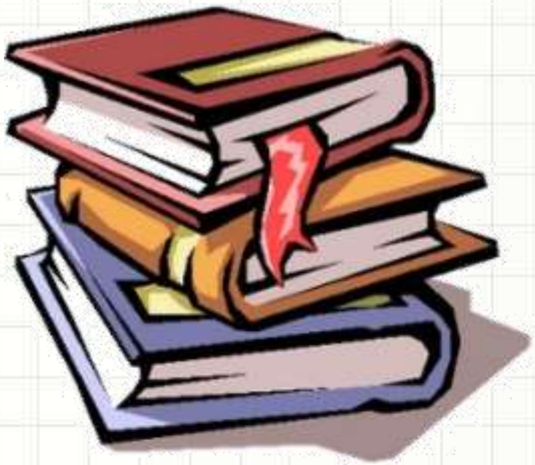
2019 - 1

Objetivos

- Compreender os problemas de caminho mínimo e suas aplicações
- Compreender a modelagem de problemas de caminho mínimo
- Capacitar para aplicação do algoritmo de Dijkstra (Label Correcting)

- **Atividade Aula 4 – SAVA!**

Material de Estudo



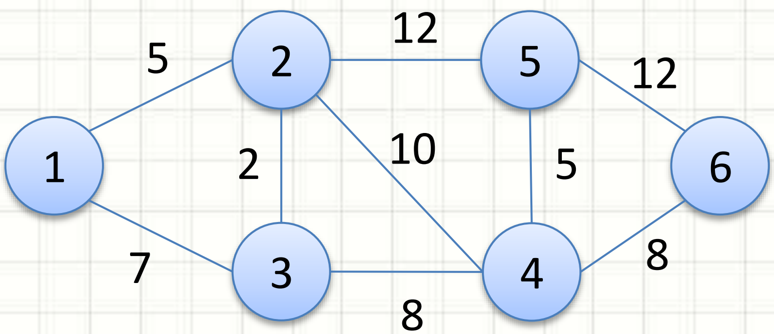
Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Pesquisa Operacional II – Aula 4)
Minha Biblioteca	Introdução à Pesquisa Operacional (Hillier/Lieberman), Cap. 9, Seção 9.3
Recursos na Web	http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3138/tde-21032006-135820/publico/Daniel_Caetano_DissertacaoFinal.pdf - Anexo B

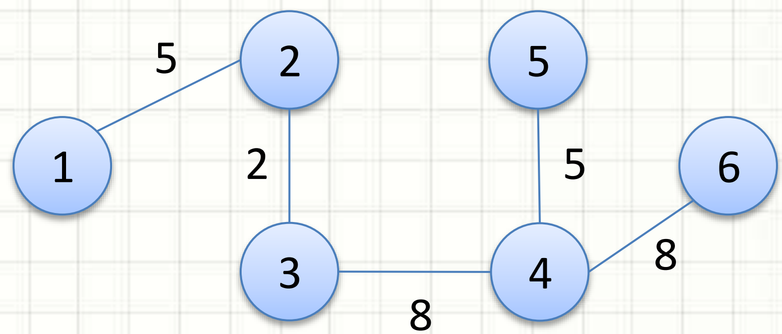
Retomando:

Árvores Geradoras de Custo Mínimo

O que é Árvore Geradora Mínima?

- É uma árvore (sub-grafo onde não há ciclos)
- Que preserva todos os nós originais
- Cuja soma dos arcos tem valor mínimo





Comparando Prim x Kruskal

- Complexidade Computacional de Prim

$$C = O(v^2)$$

Não fala nada dos arcos!

- Complexidade do algoritmo de Kruskal

$$C = O(a.\log v)$$

Arcos pesam mais que nós

- Usamos Prim
  – Quando o grafo é todo conexo
  – Quando a densidade é alta (muitos arcos por nó)
- Usamos Kruskal
  – Quando o grafo não é todo conexo
  – Quando a densidade é baixa (poucos arcos)

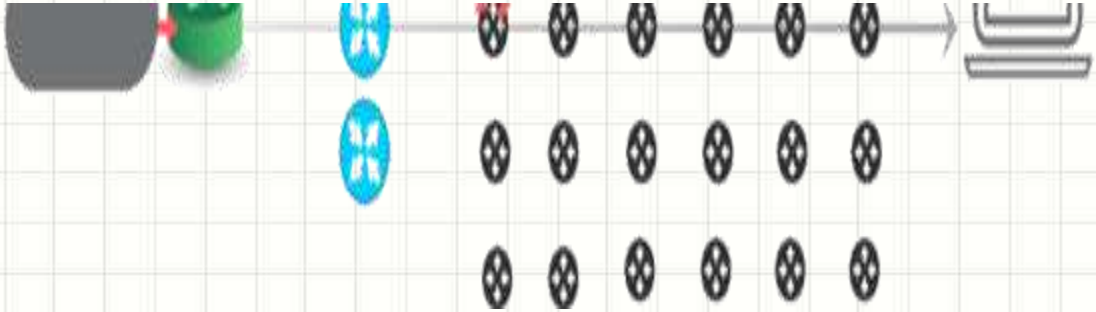
Problemas de Caminho Mínimo

Problemas de Caminho Mínimo

- Problema de Fluxo em Rede
  - Encontrar caminho para deslocamento
- Especificamente...
  - Encontrar um caminho de menor “custo”
- O que pode ser o custo?
  - “Dinheiro” (custo financeiro)
  - Distância
  - Tempo
  - ...

Problemas de Caminho Mínimo

- Exemplos?
  – Melhor caminho para uma entrega
    - Mais rápido
    - Mais barato
  – Melhor caminho em uma rede de comunicação
    - Mais rápido – menor "lag"
  – Identificar áreas de atuação de emergência
    - Mais rápido - pontos atendidos dentro de um tempo

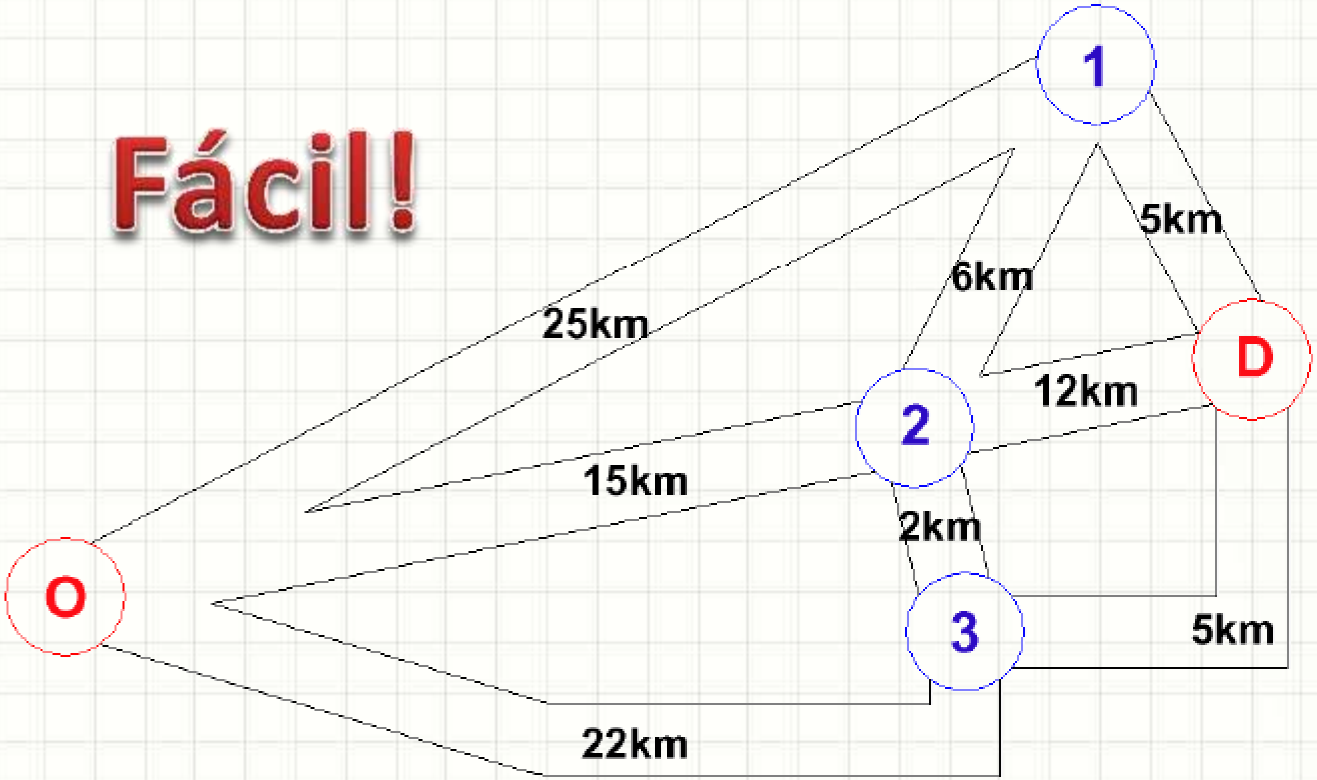


O Problema do Motorista de Taxi

- Características Consideradas
  - Um funcionário de uma empresa de taxi ganha um valor fixo por viagem
    - Quanto mais viagens ele fizer, mais ele ganha
  - Ele não escolhe as viagens que faz
  - Velocidade constante e fixa
  - Sem informações sobre o próximo passageiro
  - Não tem informações sobre o trânsito
- Como maximizar os ganhos?
  - Vejamos um exemplo

Problema do Motorista de Taxi

- Objetivo
  - Passageiro de O a D pelo caminho mais curto



Problema do Motorista de Taxi

- Objetivo
  - Passageiro de O a D pelo caminho mais curto

E agora?

Como Funciona?

Modelagem Matemática

Modelagem Matemática

- A modelagem é tradicional

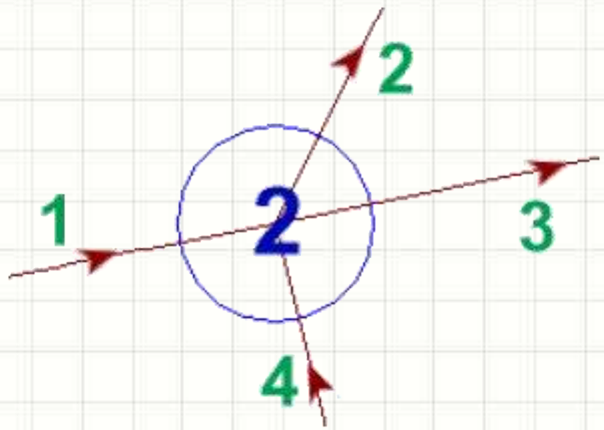
$$\min \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\boxed{\sum_{ij \in E} x_{ij} - \sum_{jk \in E} x_{jk} = B \quad \forall j \in S}$$

B= -1 para j = O
B= 1 para j = D
B = 0 para os demais nós

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in E$$



Alternativa?

Algoritmos de Caminho Mínimo

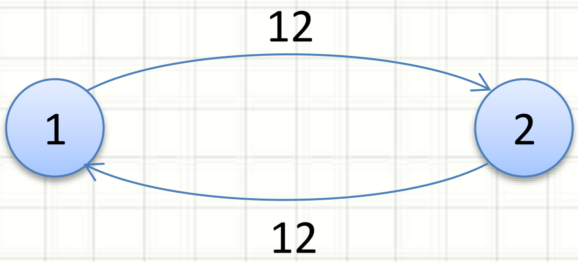
- Existem vários
- Genéricos
  - Network Simplex
  - Out-of-Kilter
- Específicos
  - Label Setting
  - Dijkstra (Label Correcting)
  - Moore etc.

Algoritmo de Dijkstra

Algoritmo de Dijkstra

- Também conhecido como *Label Correcting*
- Funciona para redes direcionadas ou não
  - Em geral trabalhamos com direções
- Quando o grafo não é direcionado...

- ...criamos arcos em ambas as direções

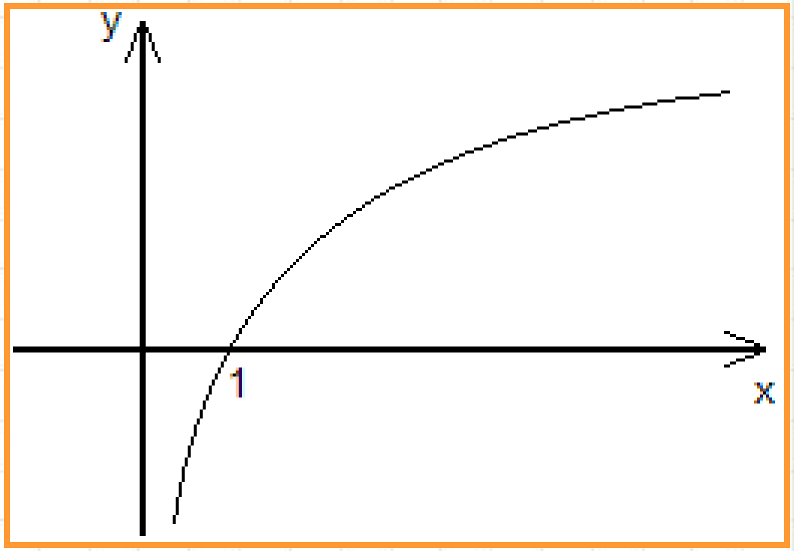


Label Correcting

- **Lida** com redes com ciclos
- Complexidade no pior caso

$$C = O(a + v.\log v)$$

Arcos e nós pesam quase o mesmo, mas nós pesam mais

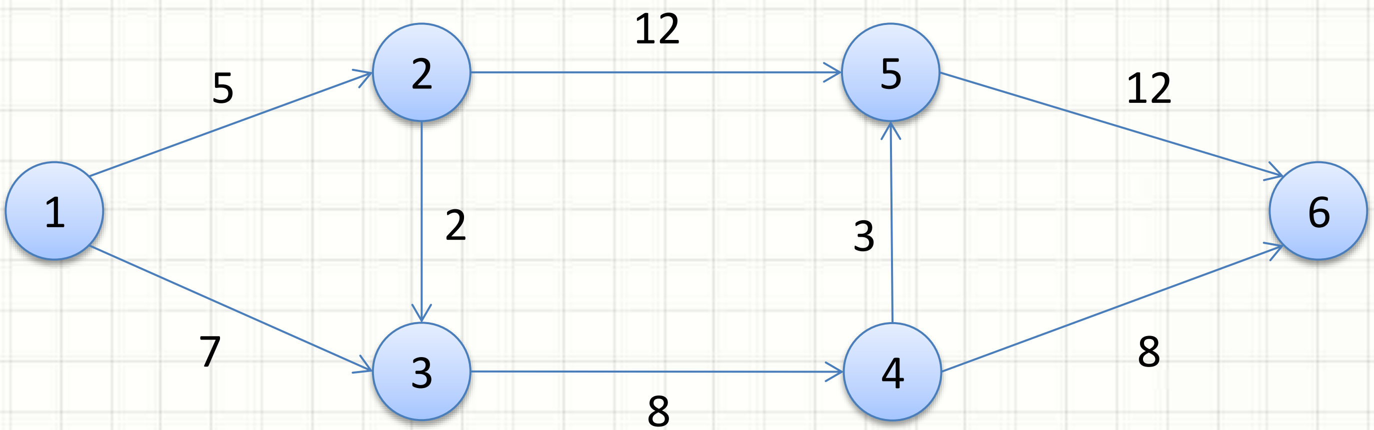


Label Correcting

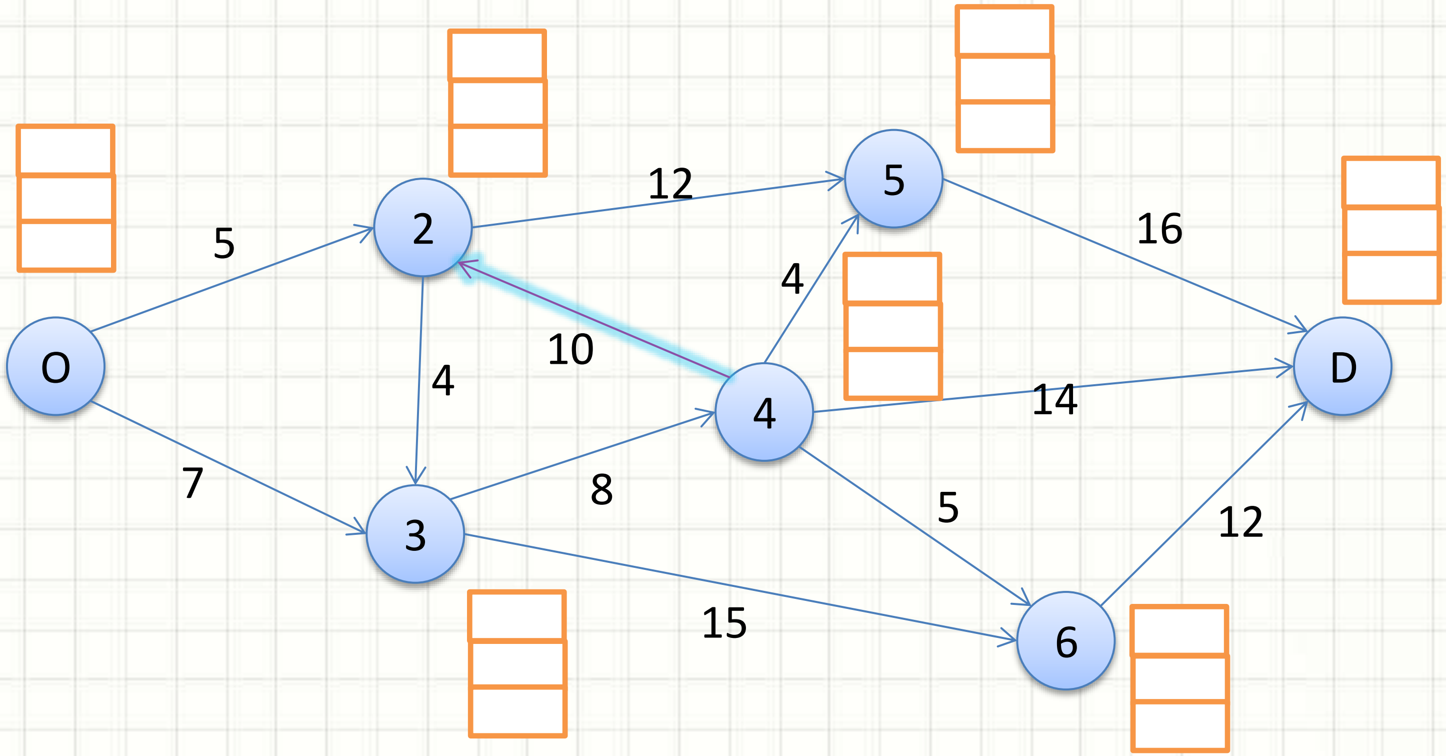
Nó Antecessor
Distância Acumulada
Necessita Cálculo?

- Etiquetas com 3 posições:
- Lógica:
  a) Marcar o nó Origem com antecessor O (ele mesmo), distância 0 e *necessidade de cálculo*.
  b) Escolha o nó *com necessidade de cálculo* com menor distância acumulada. Esse é o nó atual.
  c) Calcule a distância do nó atual para todos os descendentes, preenchendo a etiqueta dos que estão com a etiqueta vazia ou quando o caminho atual for amis curto que o registrado na etiqueta. Cada nó preenchido ou alterado deve ser marcado para cálculo.
  d) Marque que o nó atual não precisa mais de cálculo.
  e) Voltar para b) até que nenhum nó esteja marcado para cálculo.

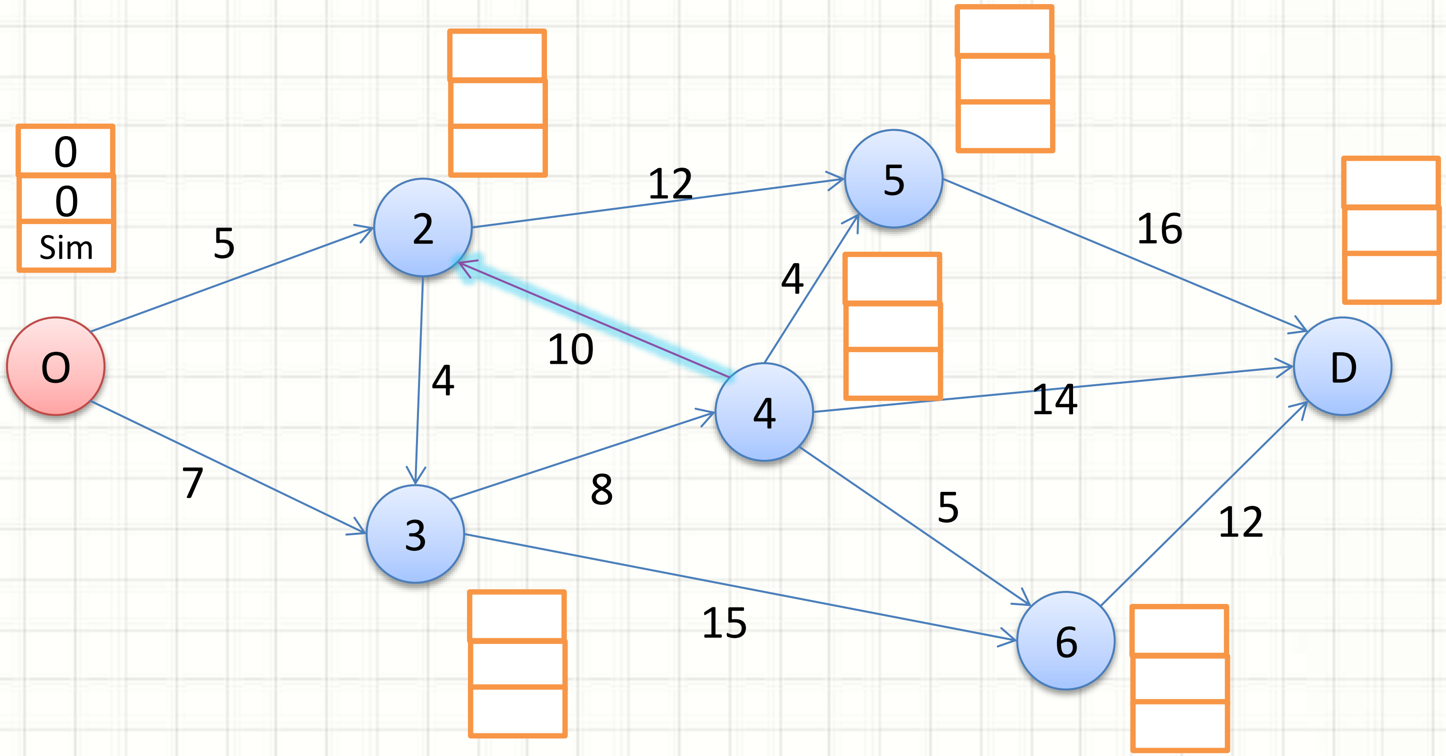
Exemplo Label Correcting



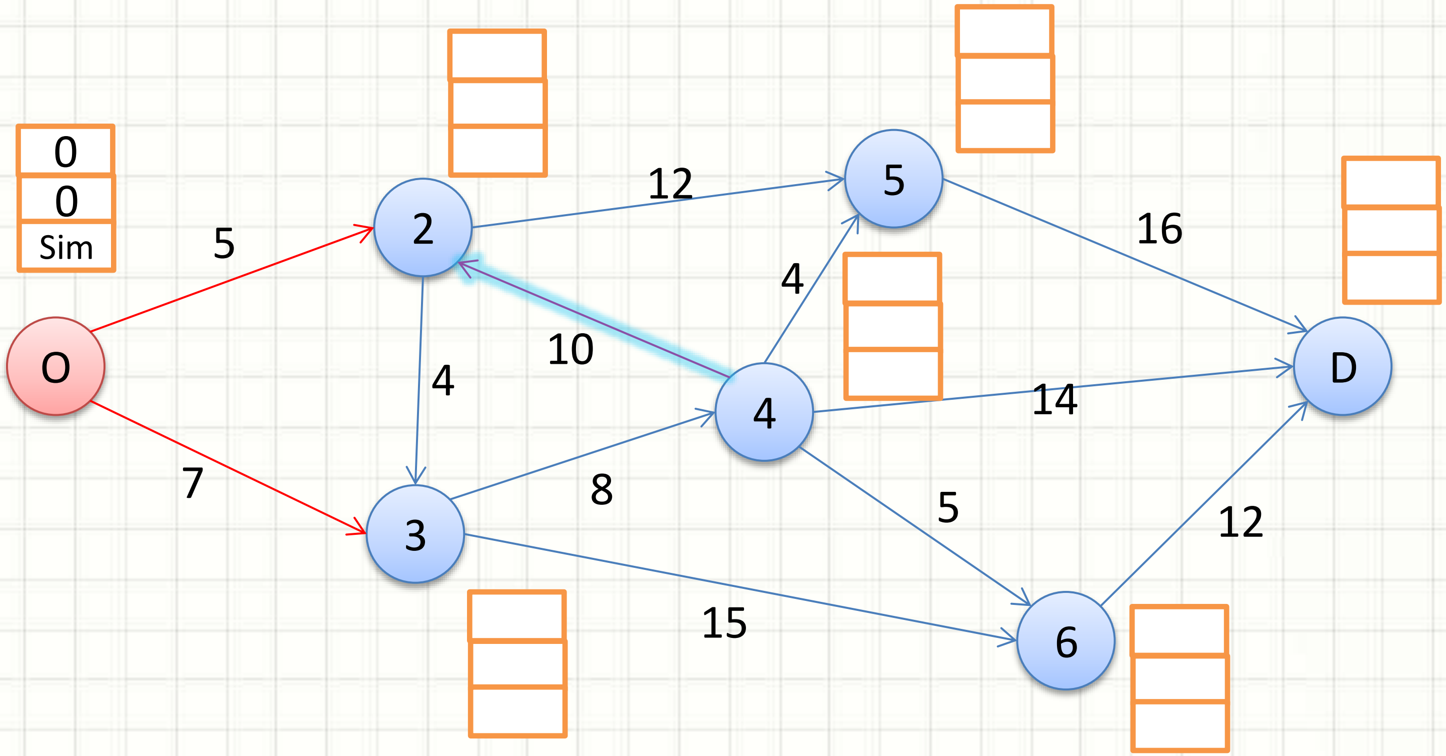
Label Correcting



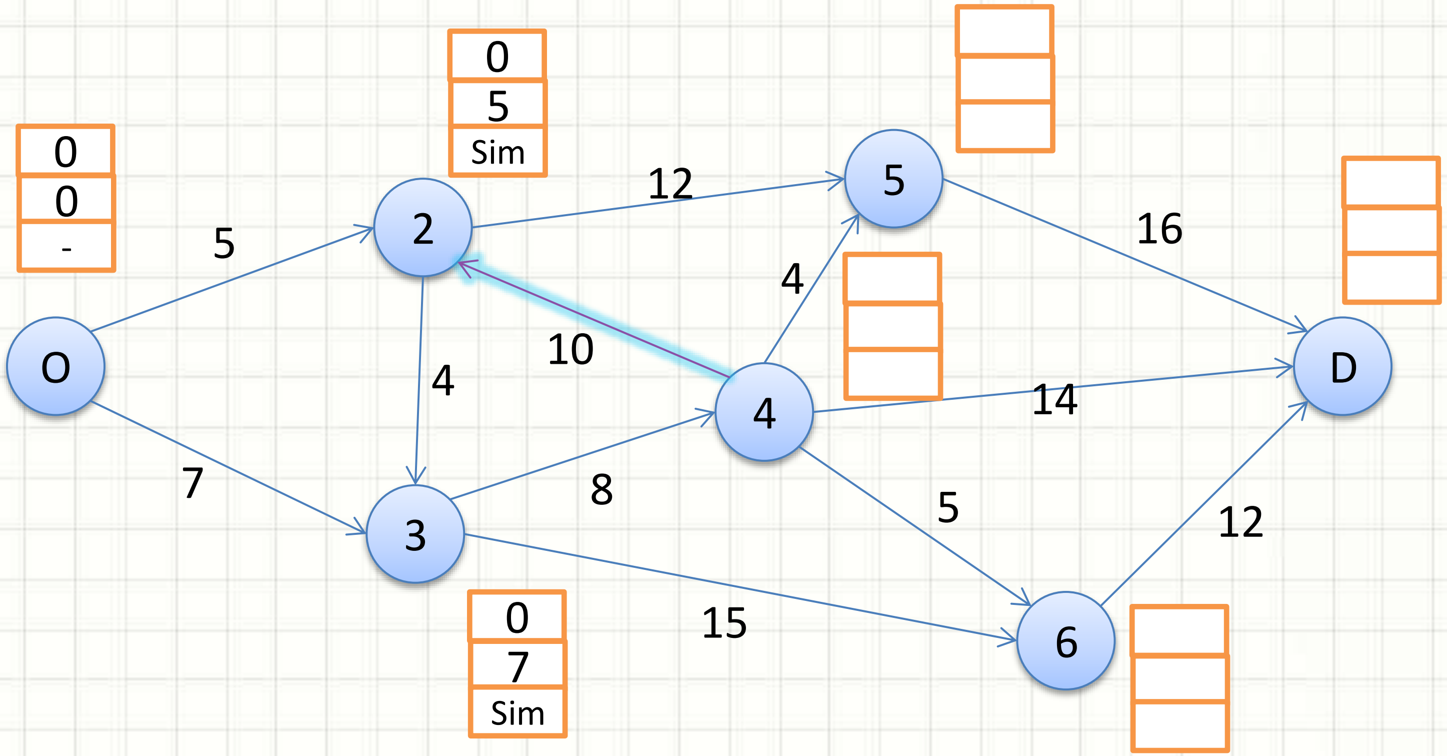
Label Correcting



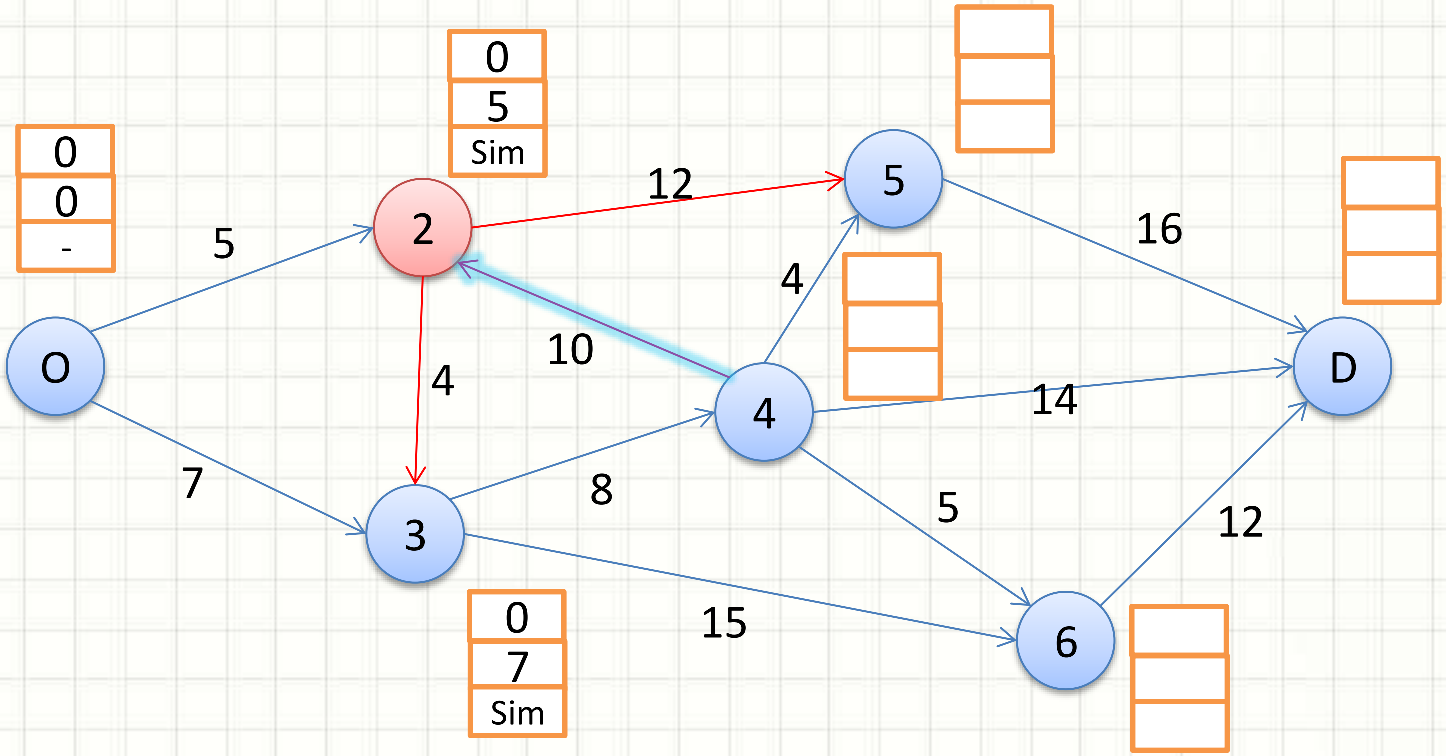
Label Correcting



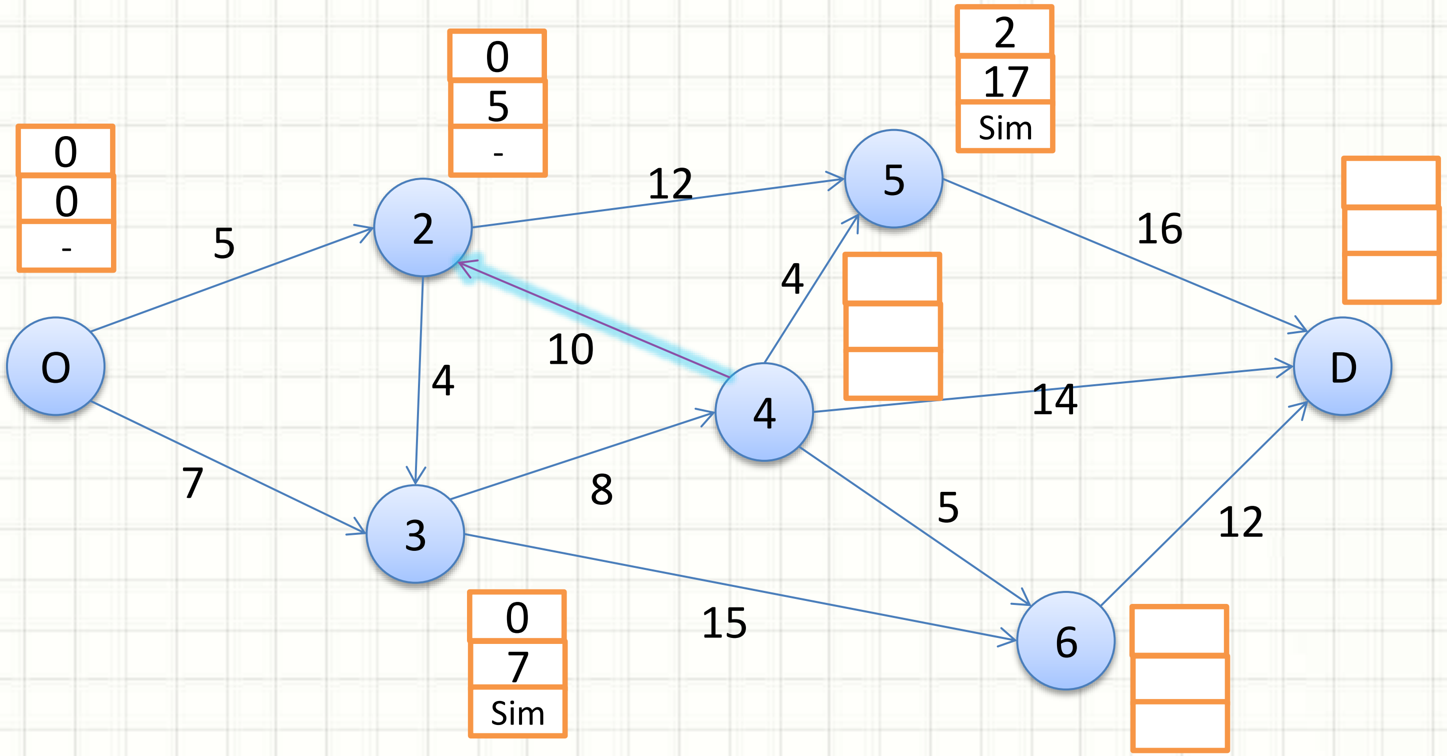
Label Correcting



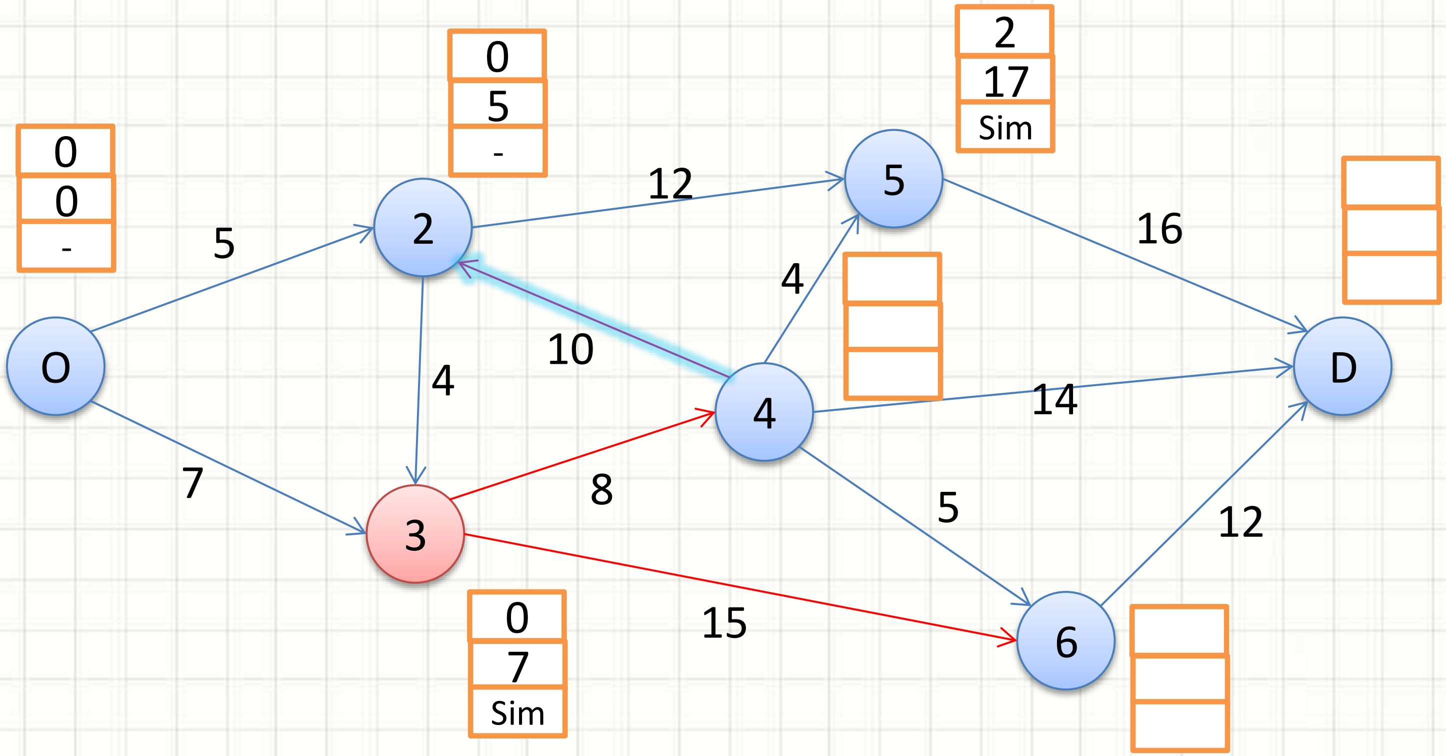
Label Correcting



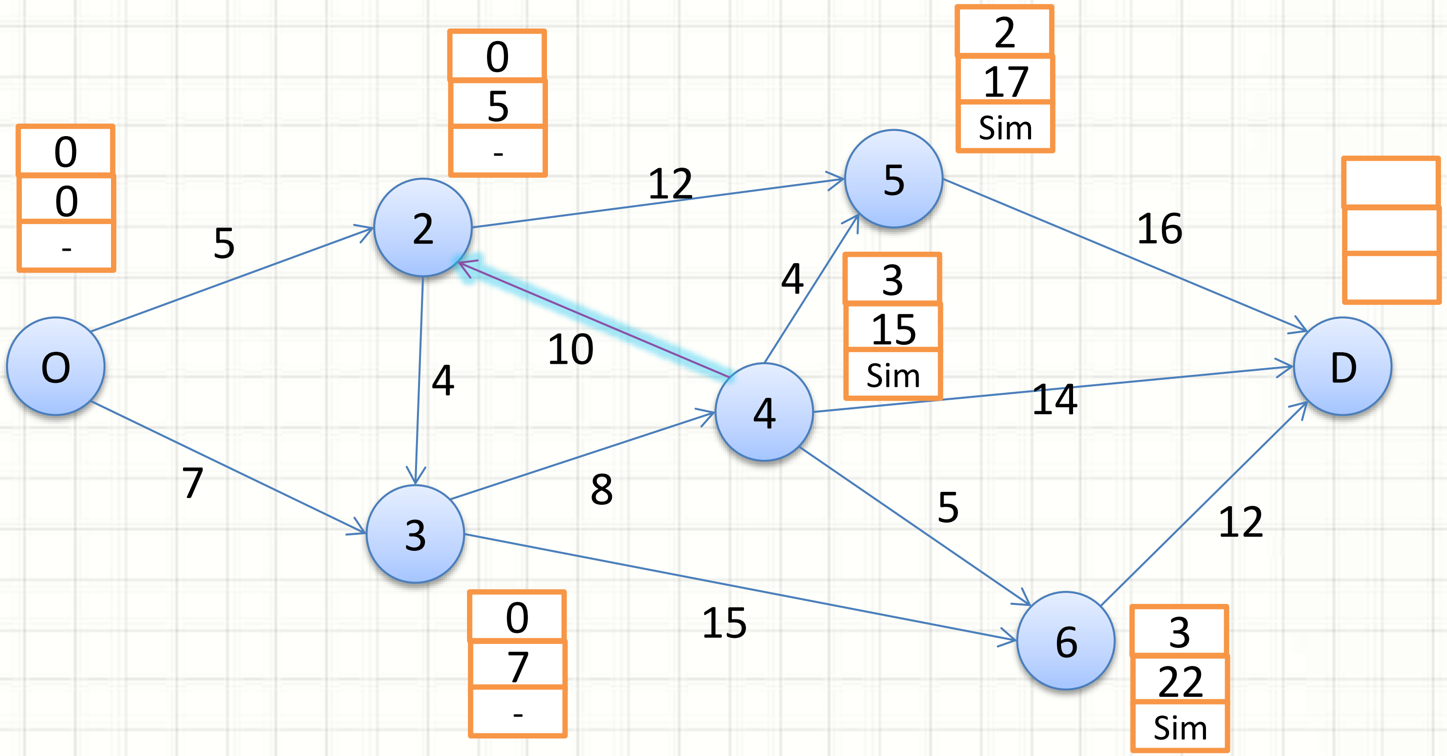
Label Correcting



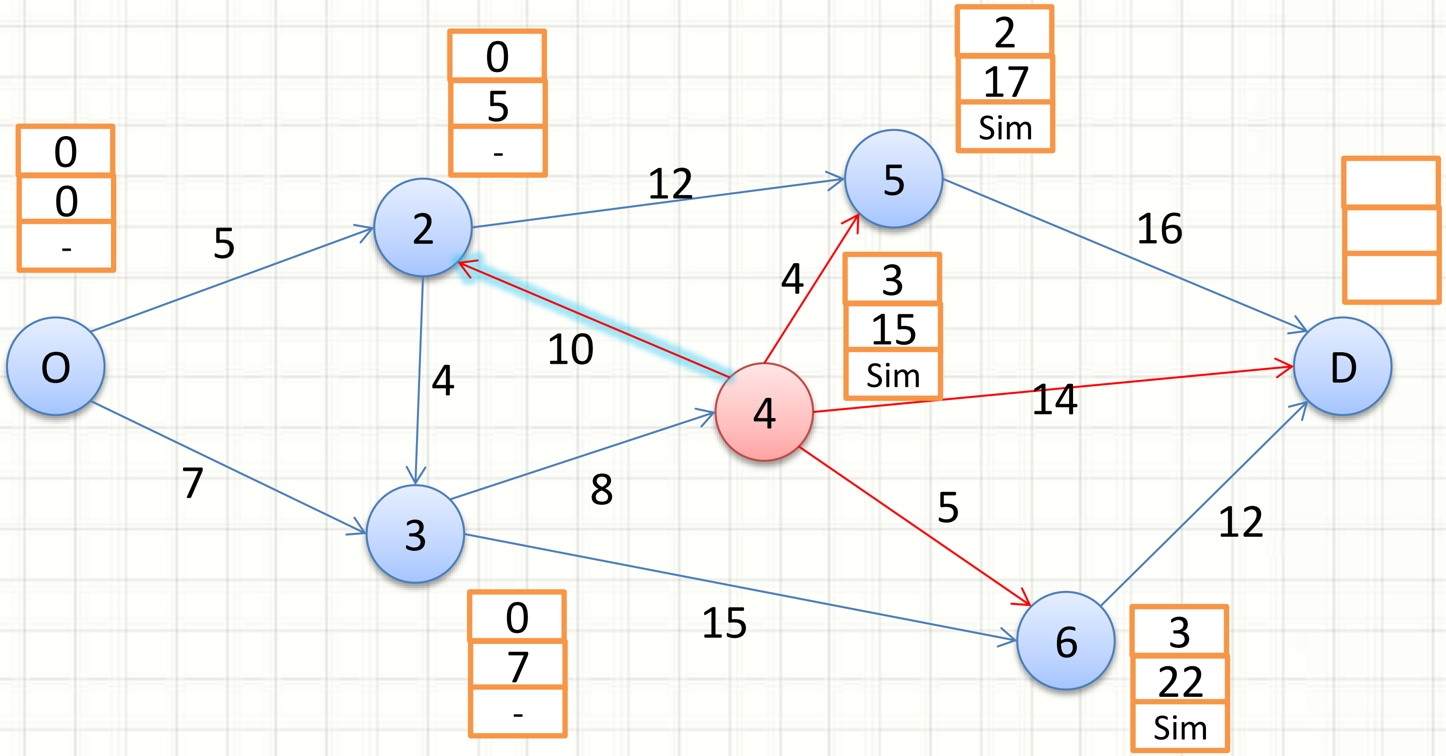
Label Correcting



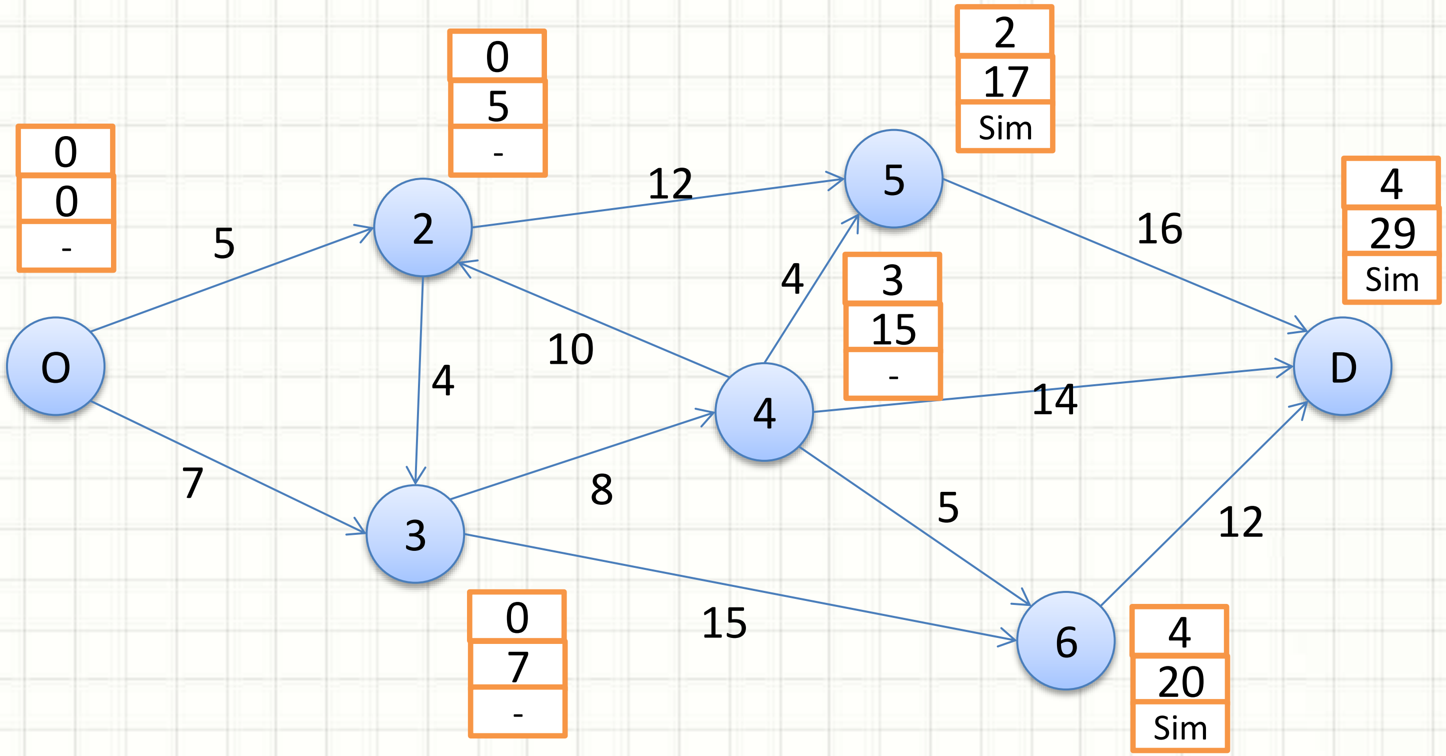
Label Correcting



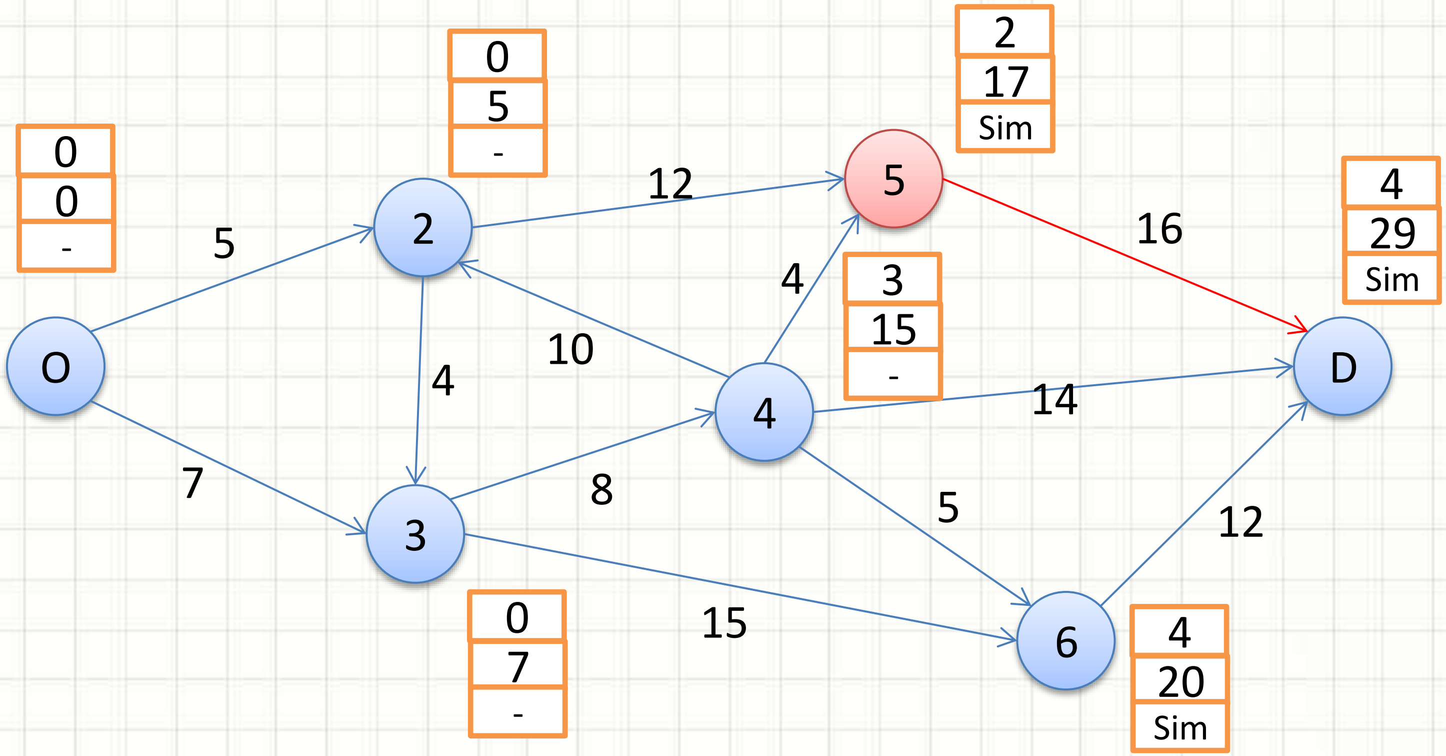
Label Correcting



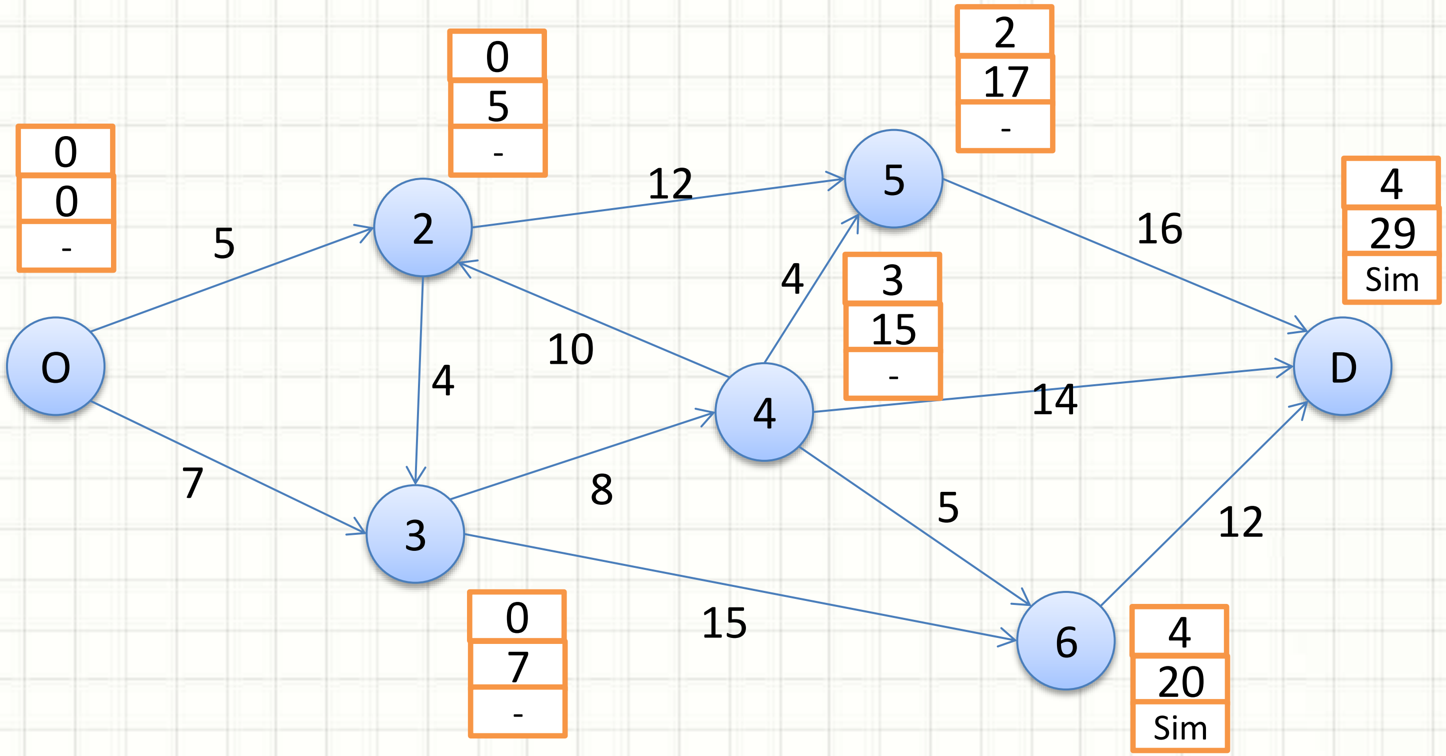
Label Correcting



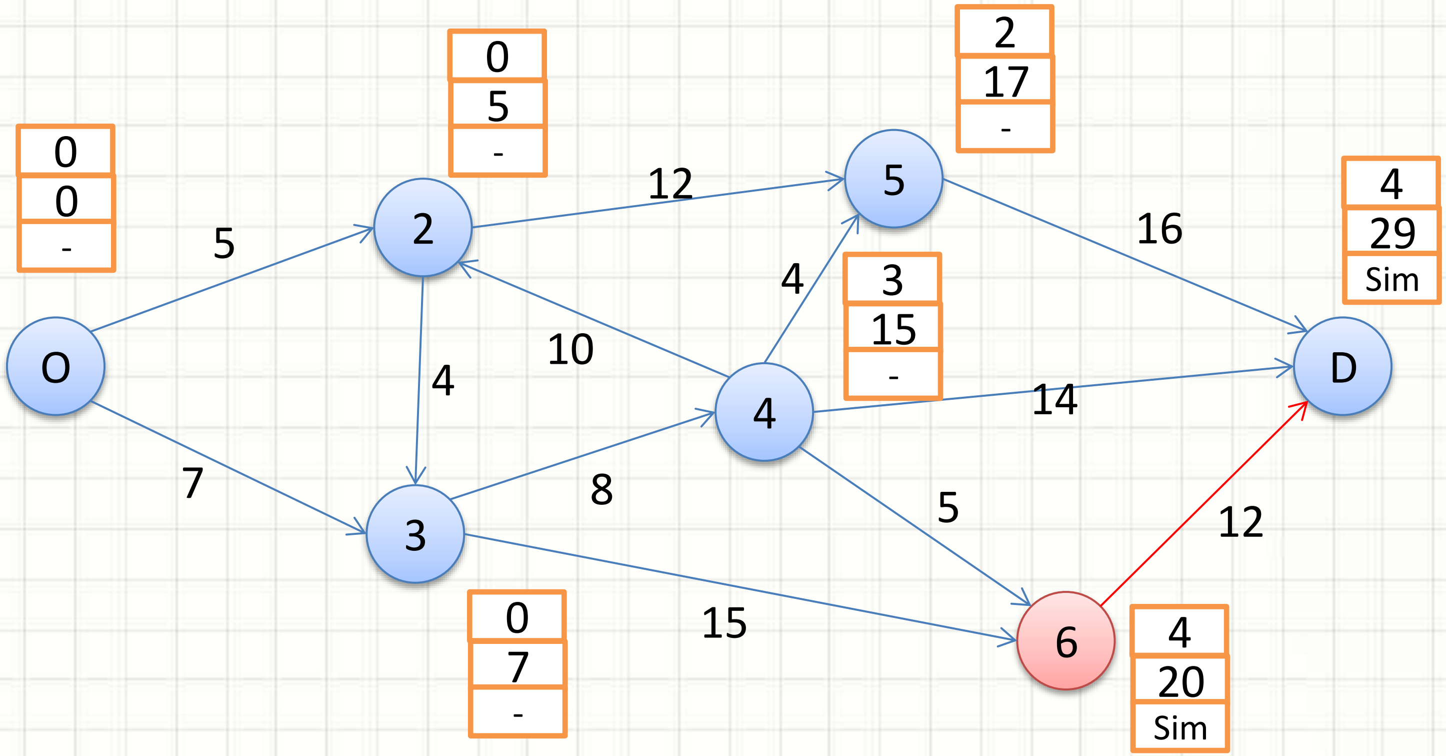
Label Correcting



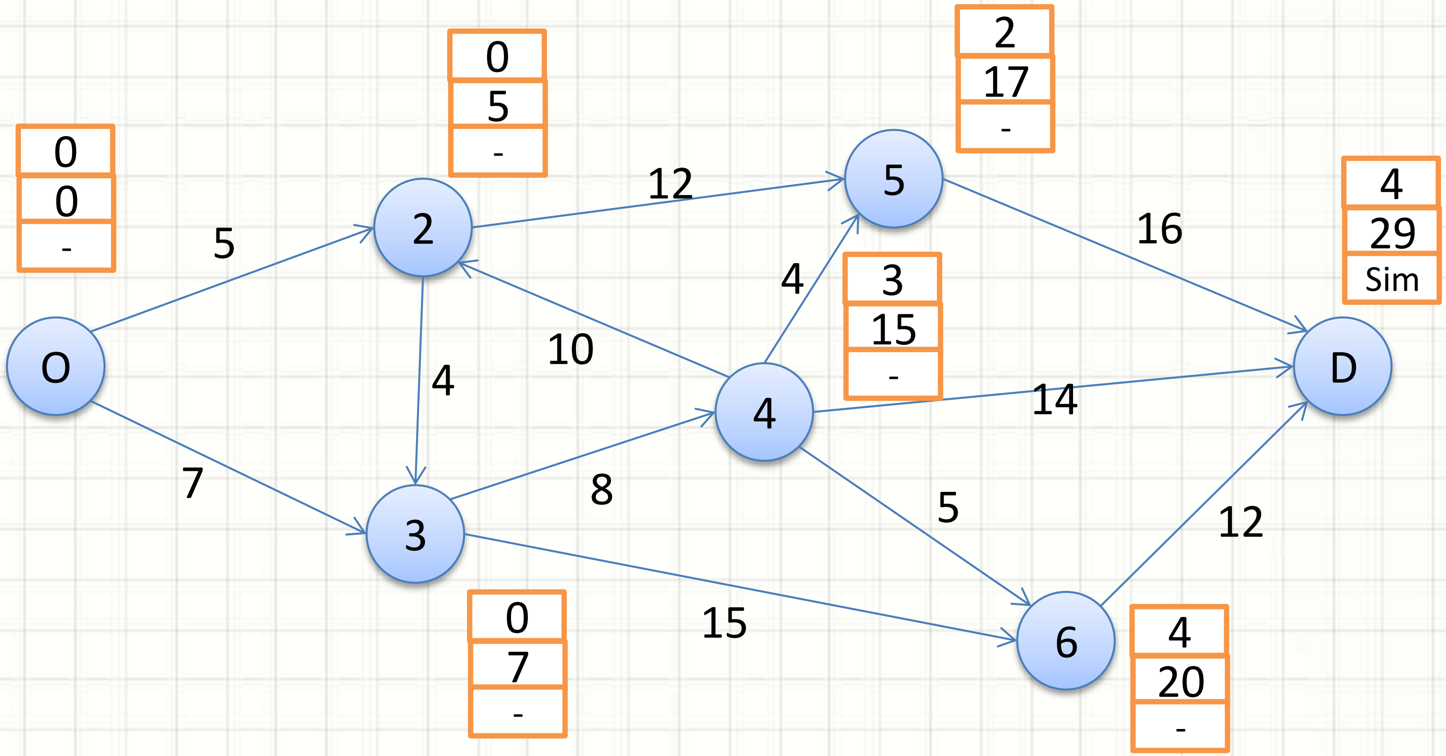
Label Correcting



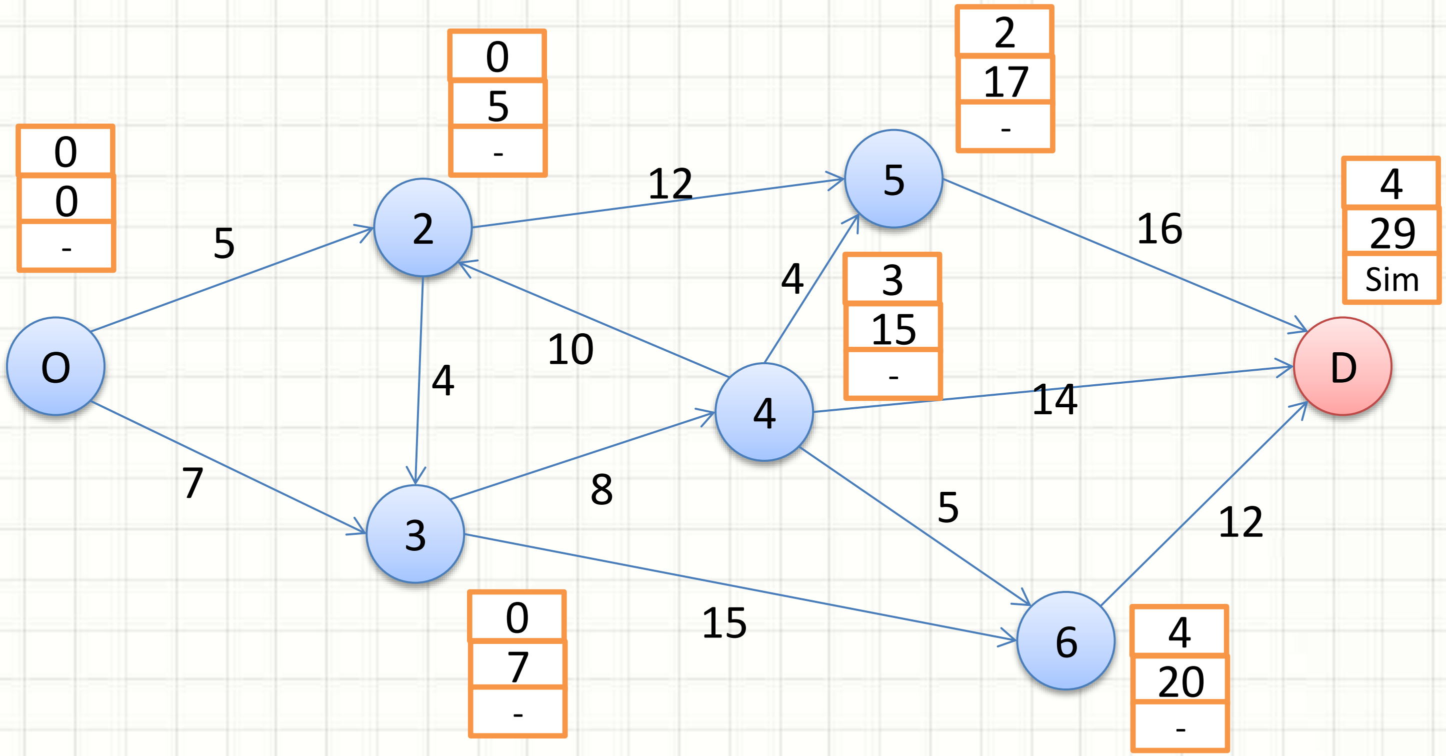
Label Correcting



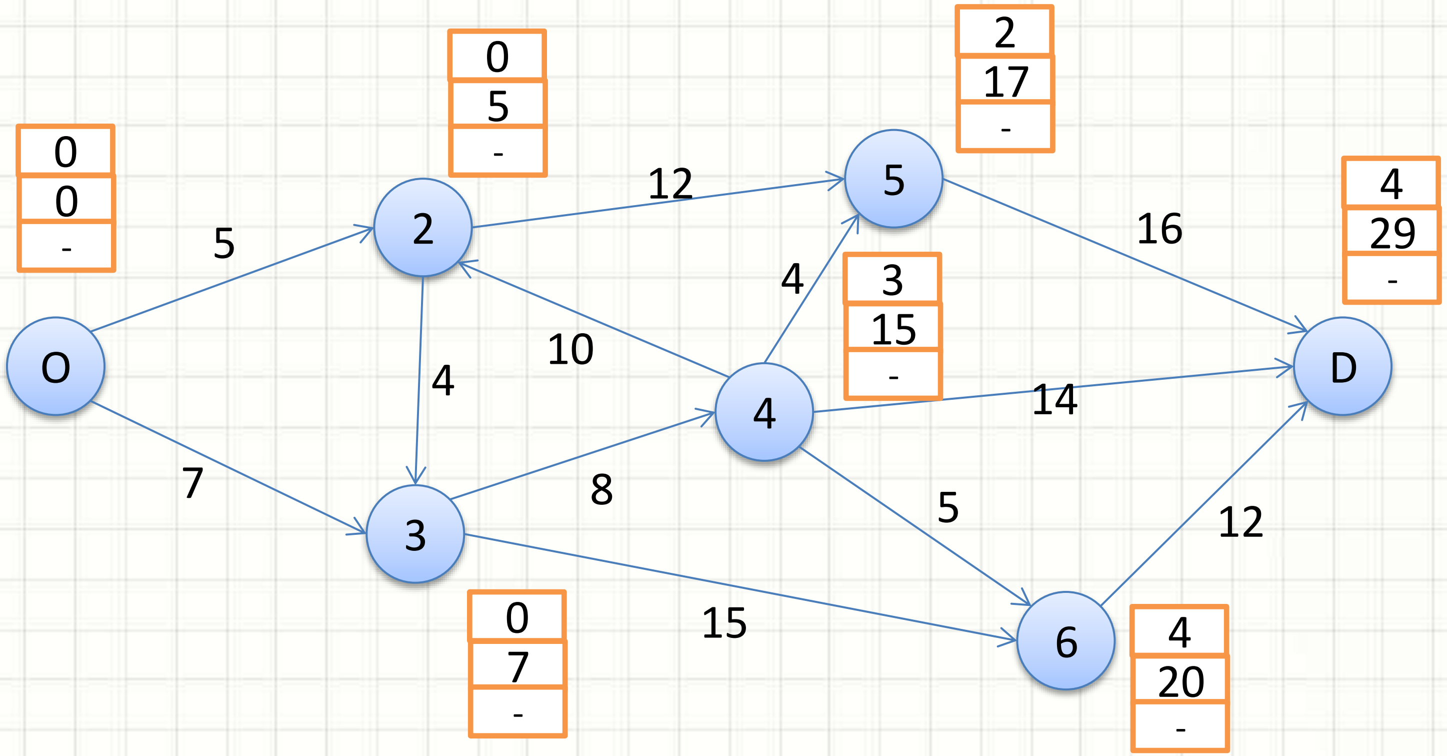
Label Correcting



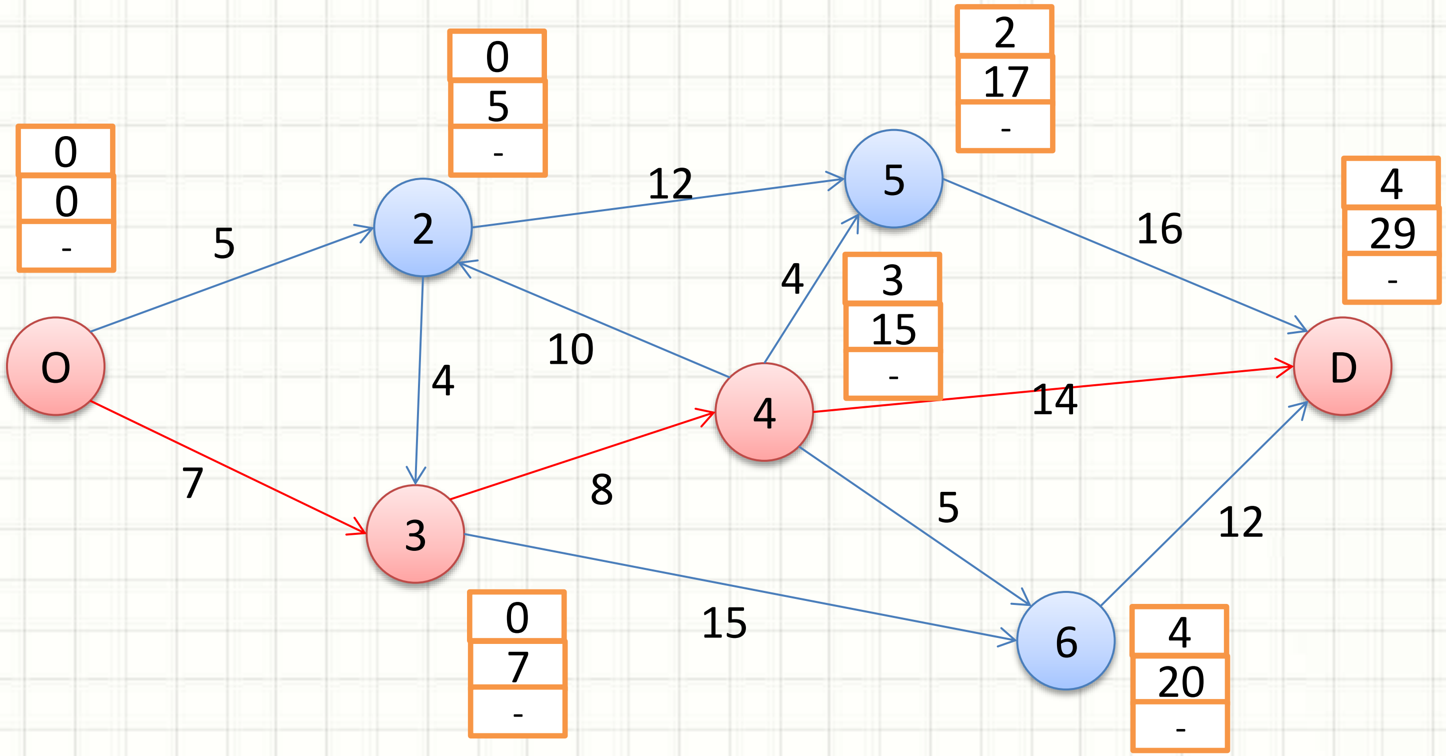
Label Correcting



Label Correcting



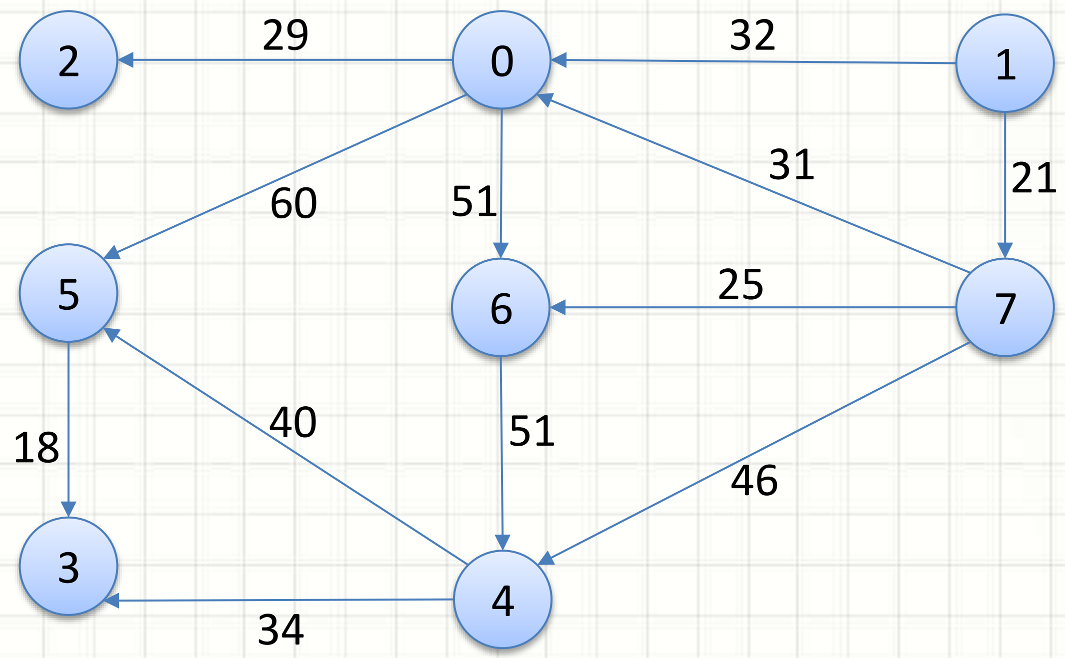
Label Correcting



Exercícios

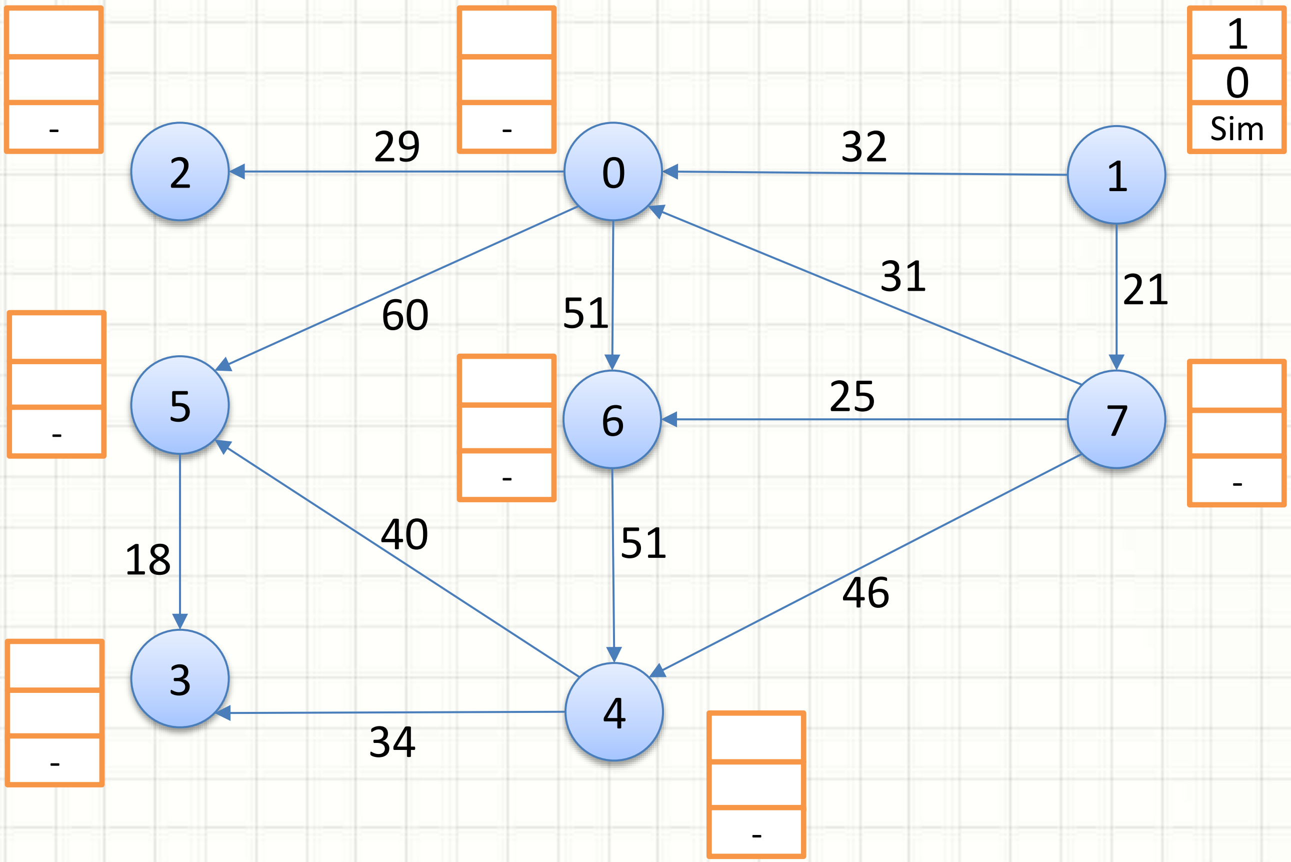
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



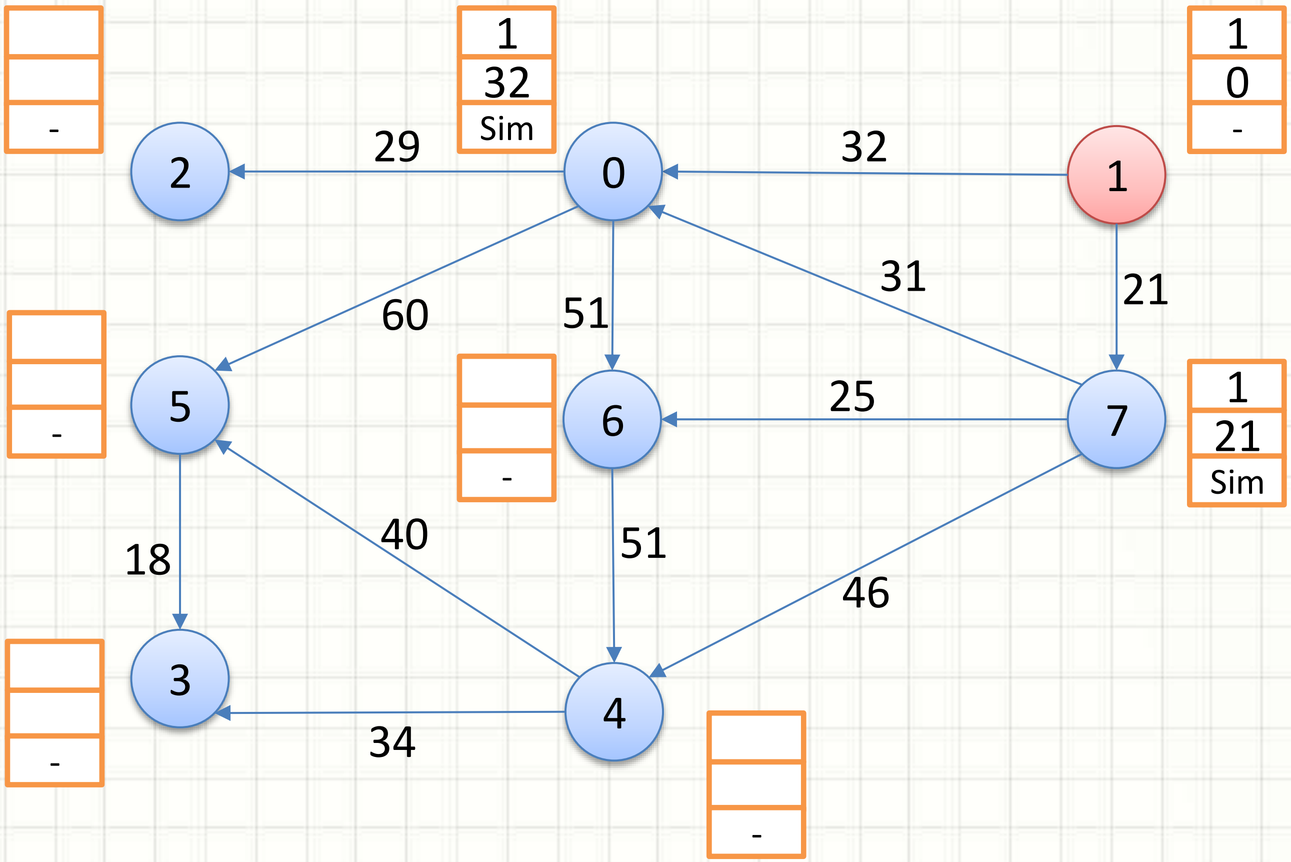
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



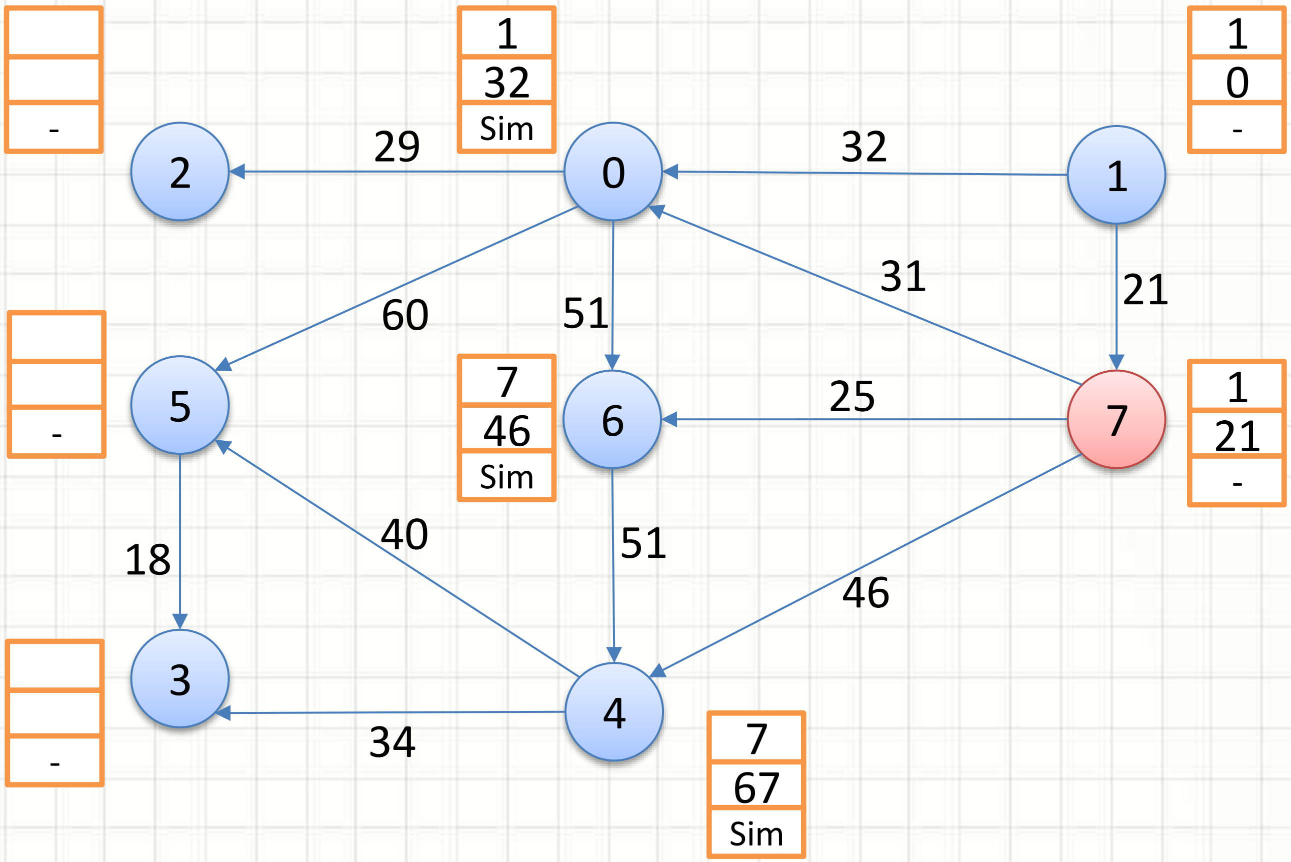
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



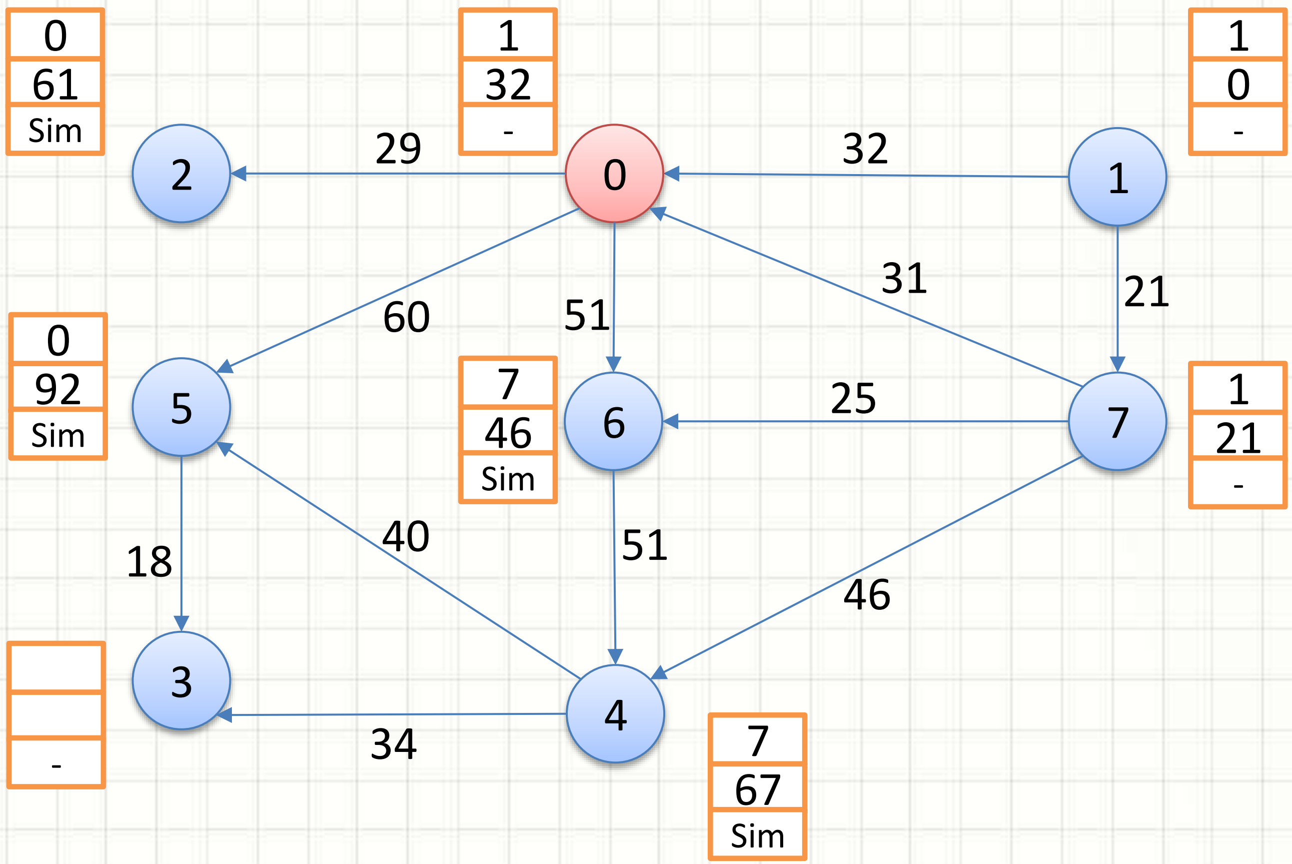
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



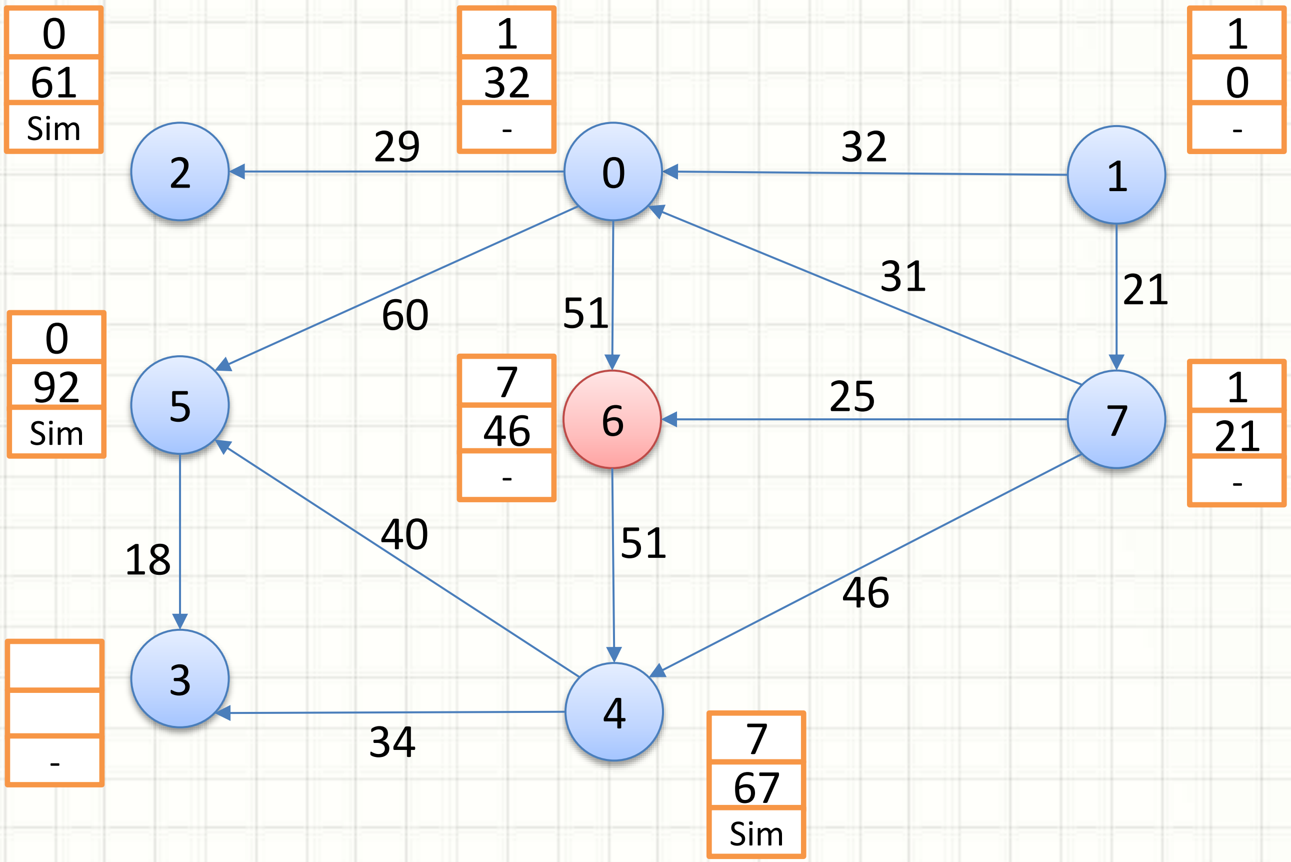
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



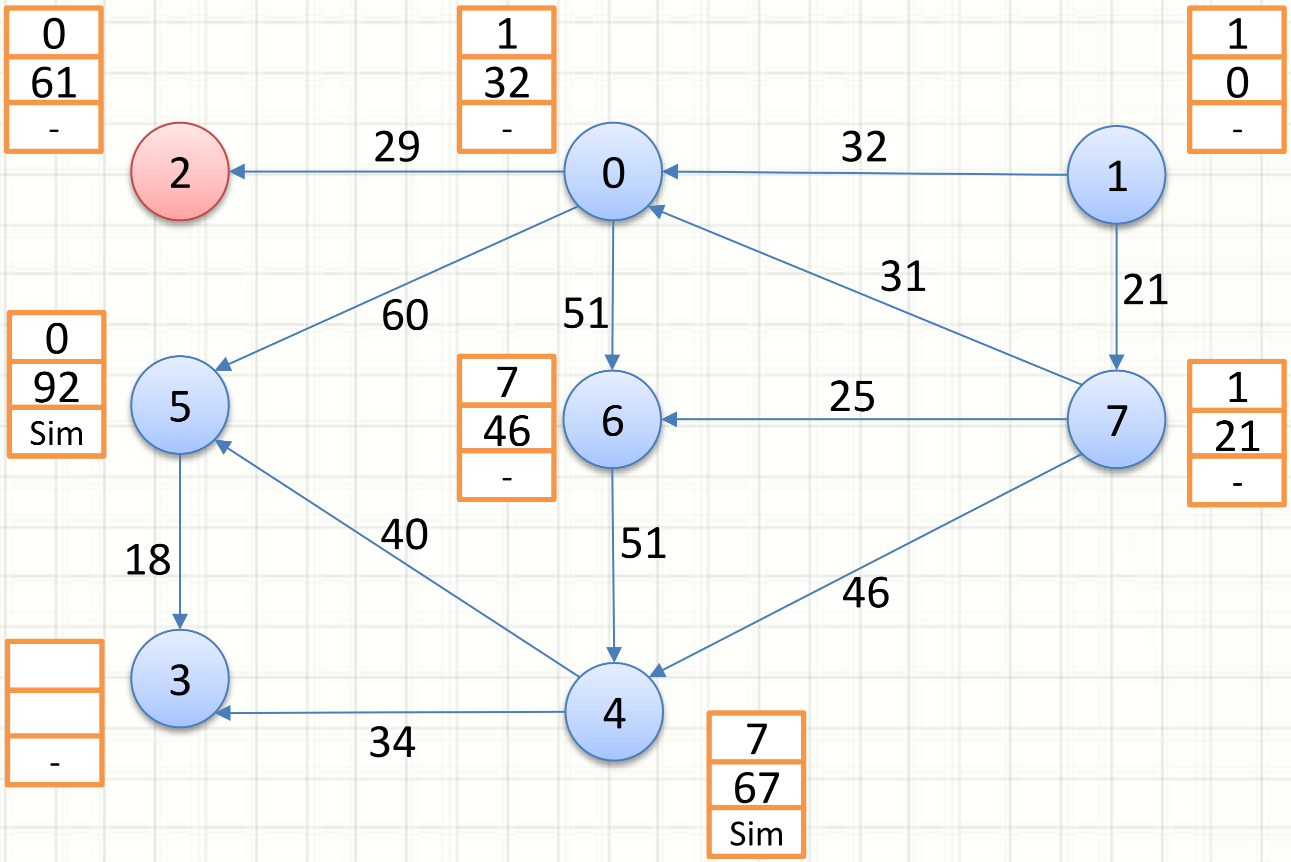
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



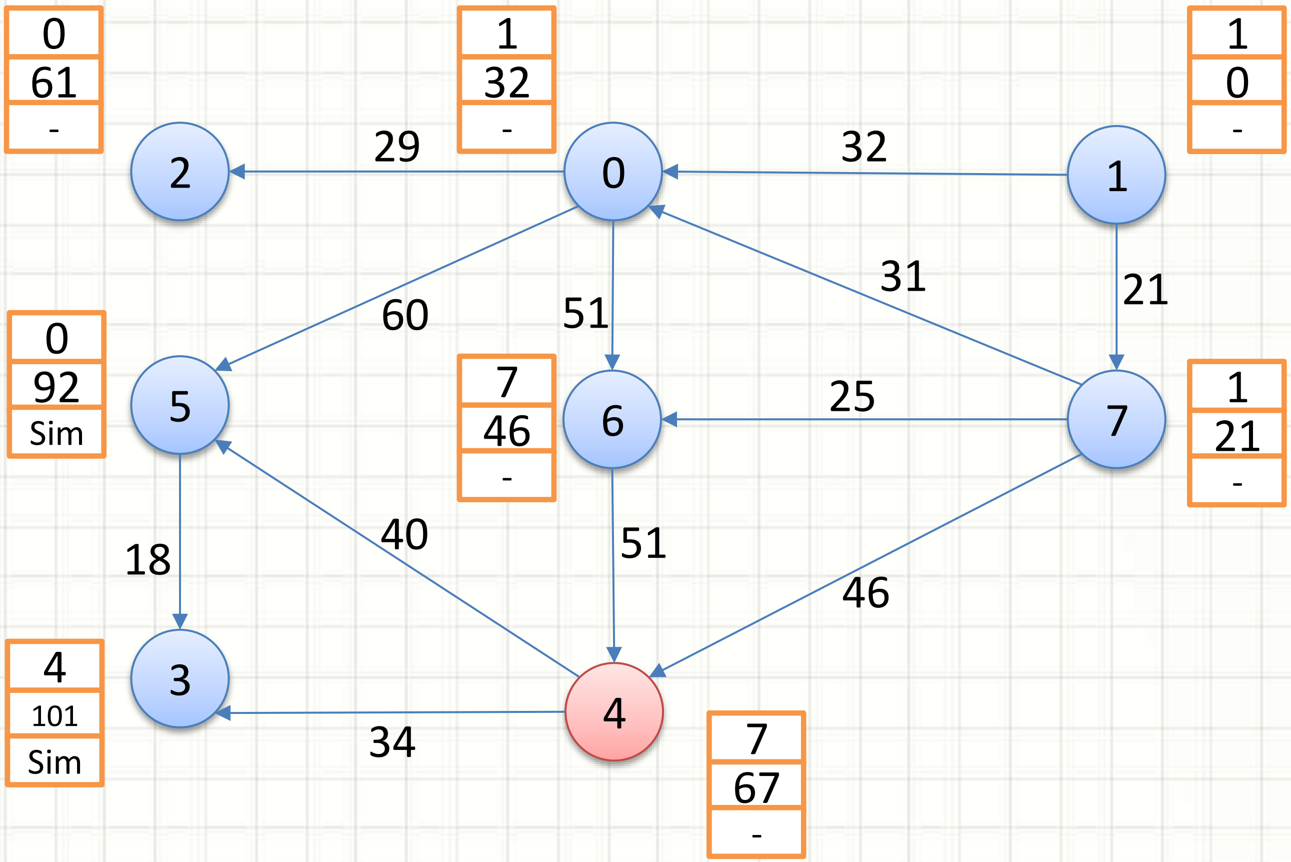
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



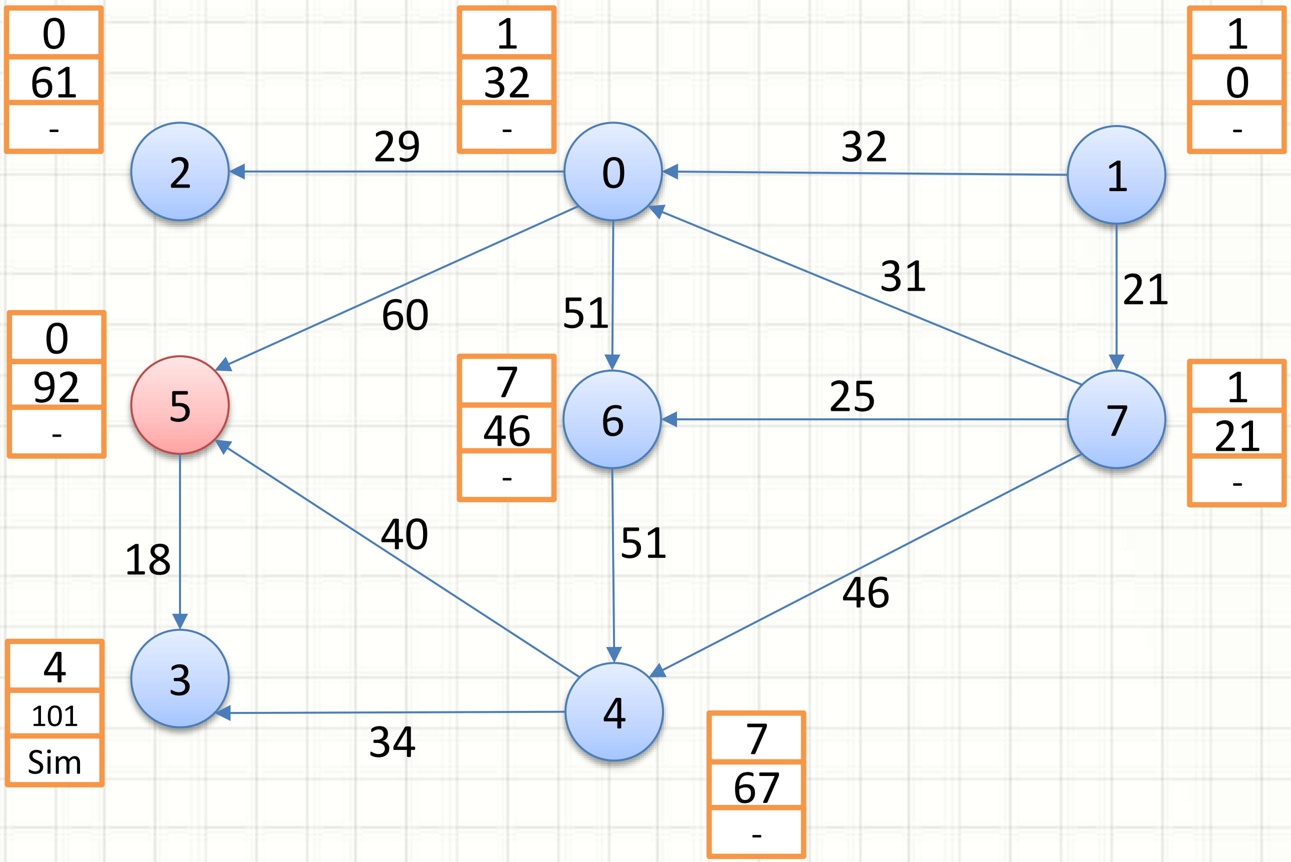
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



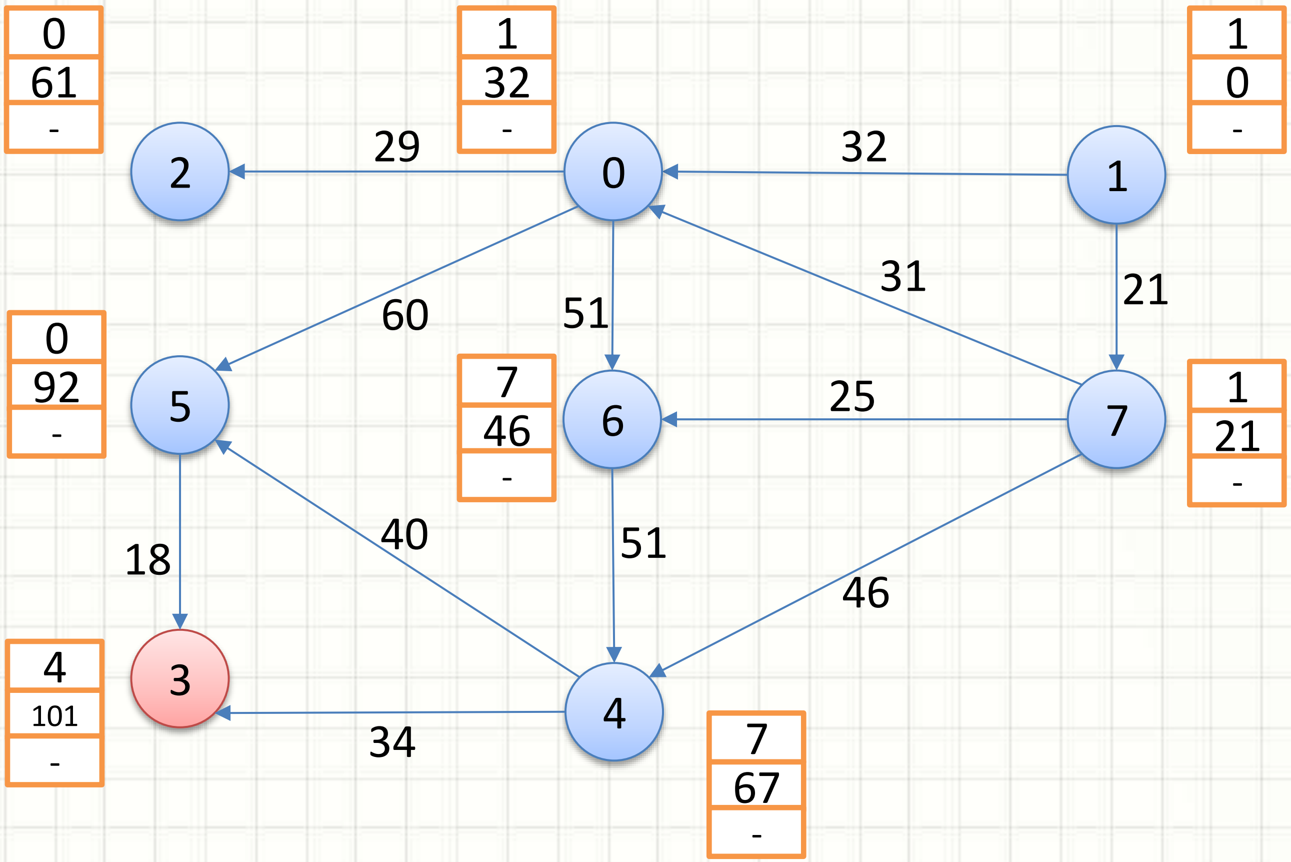
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



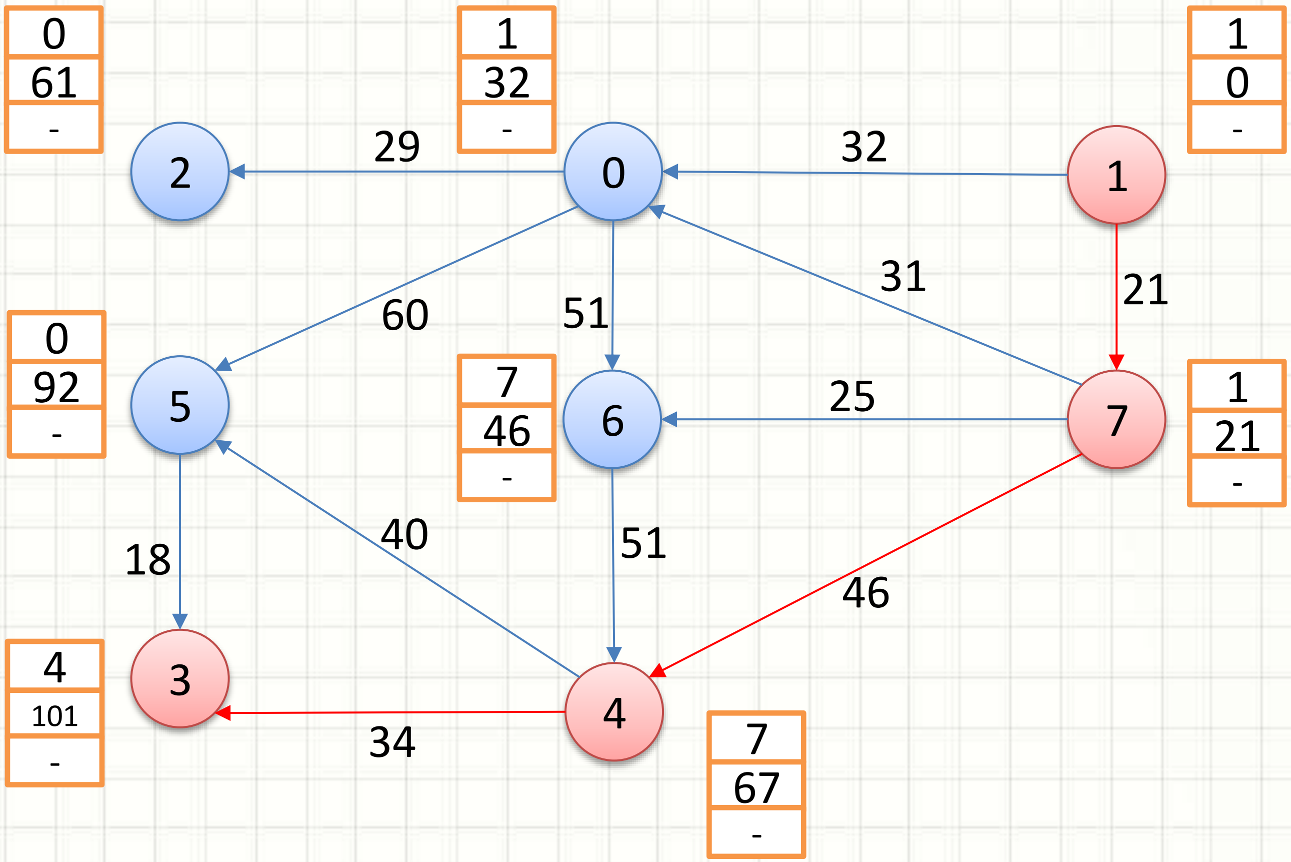
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



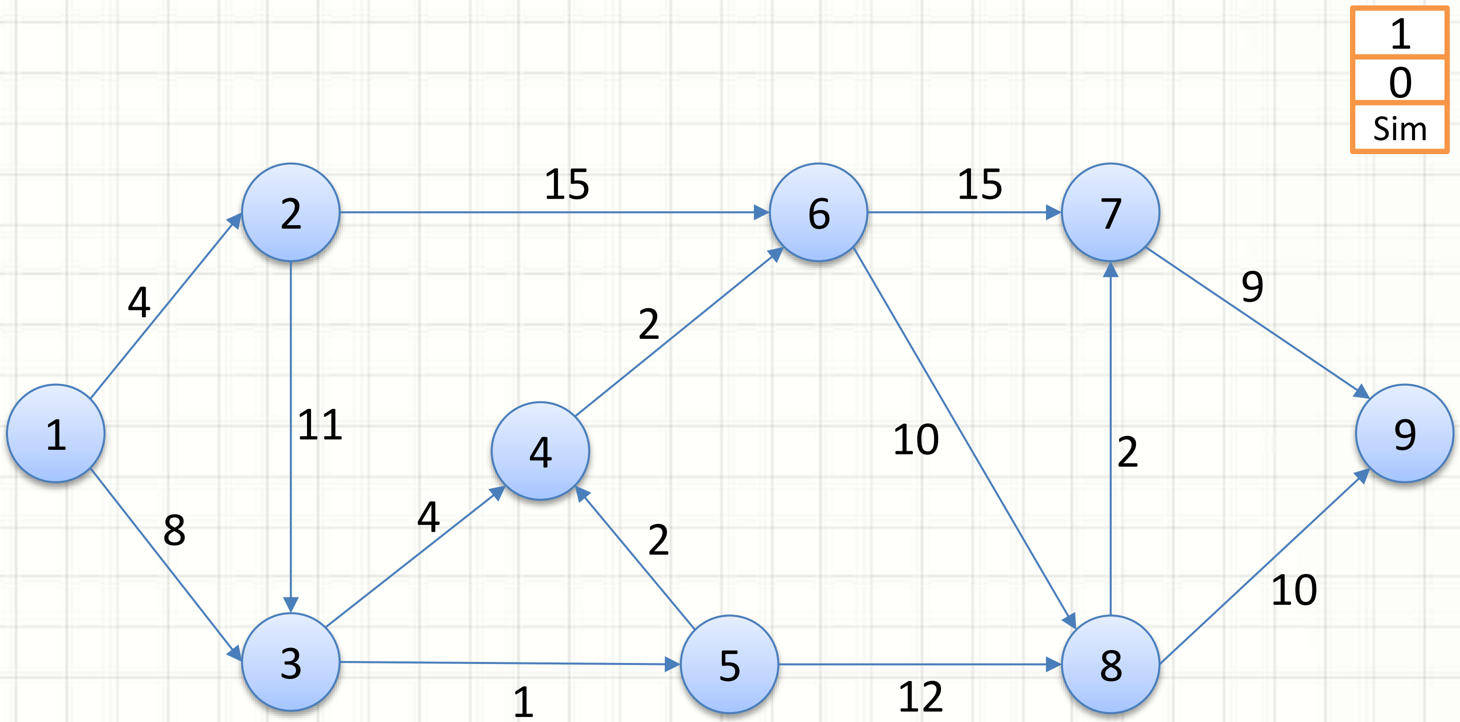
Exercício

1. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 3)



Exercício (para entrega!)

2. Aplique o Algoritmo de Dijkstra (1 a 9)



Conclusões

Resumo

- Caminho Mínimo: Modelagem Matemática
- Algoritmo de Dijkstra: rápido!
- Calcular todos os caminhos para uma origem!
- **TAREFA**: Exercícios Aula 4

- Outros problemas de fluxo em rede?
  - O clássico Problema do Transporte

Perguntas?