



# **PESQUISA OPERACIONAL II**

## **O CAIXEIRO VIAJANTE: INSERÇÃO DE MENOR ENCARGO**

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 1

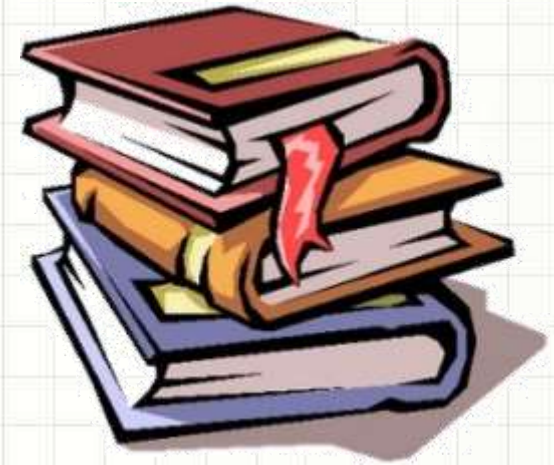
# Objetivos

- Capacitar para aplicação do método do menor encargo

- **Atividade Aula 12 – SAVA!**



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>  
(Pesquisa Operacional II – Aula 12)

Minha Biblioteca

Pesquisa Operacional – Fundamentos e Modelos  
(Loesch;Heiin) – Seção 7.2

Recursos na Web

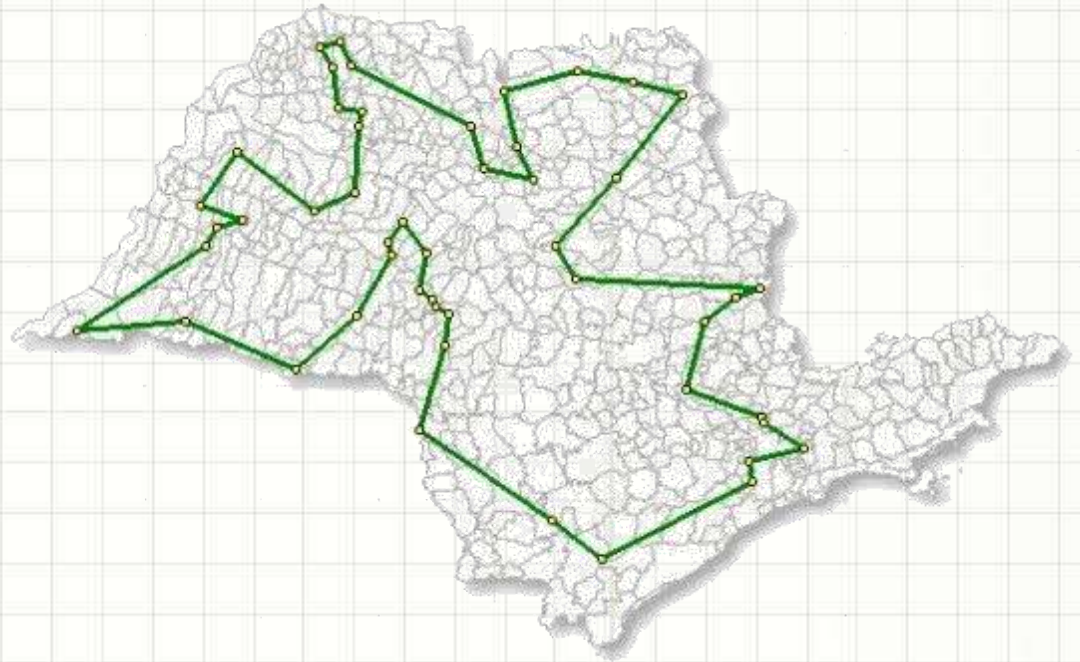
Grafos – Caixeiro Viajante:  
<https://tinyurl.com/y5ygp3gf>



# **O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE**

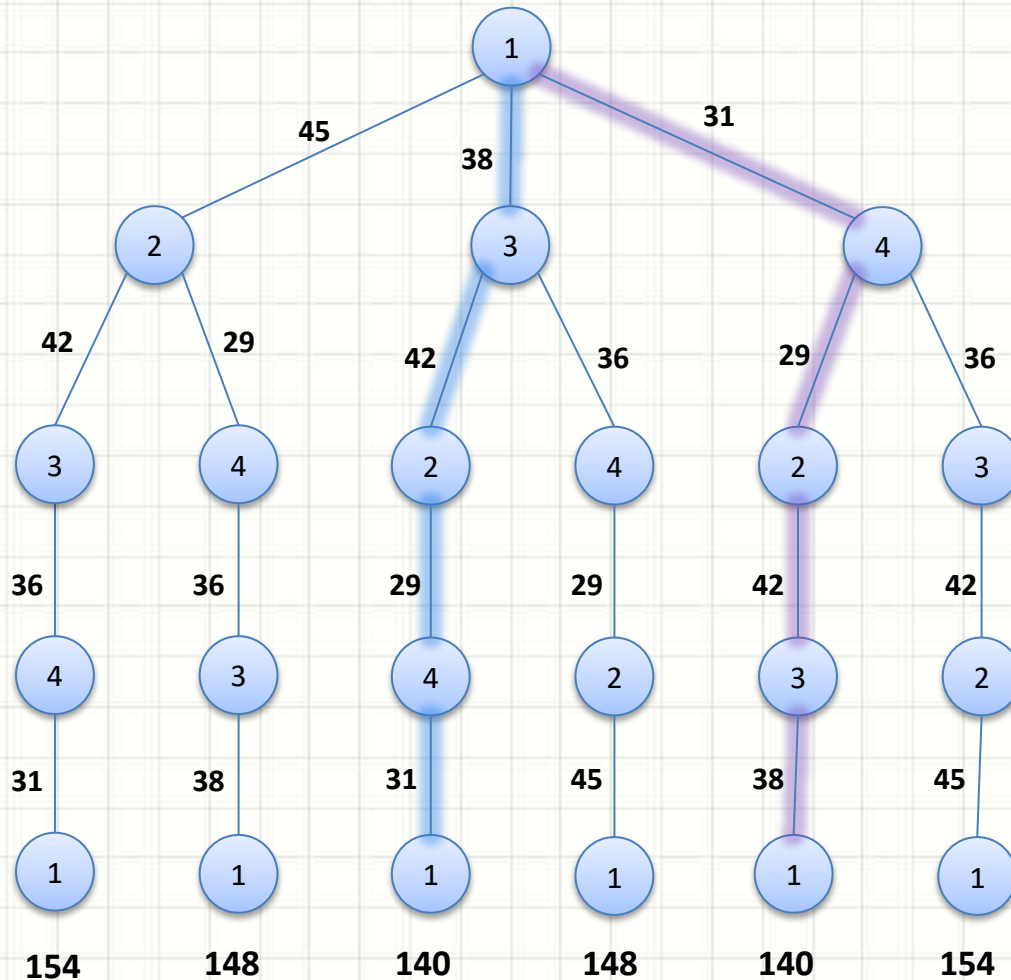
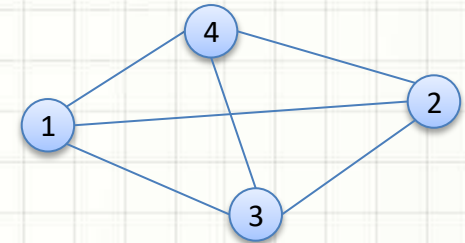
# Problema do Caixeiro Viajante

- Visitar todas as cidades, sem repetir, com a menor distância



# Problema da Cobertura de Nós

- Começando de 1, possibilidades:



O/D	1	2	3	4
1	-	45	38	31
2	45	-	42	29
3	38	42	-	36
4	31	29	36	-

# Modelagem Matemática

- Minimizar a distância percorrida
- Modelo Completo
- F.O.:

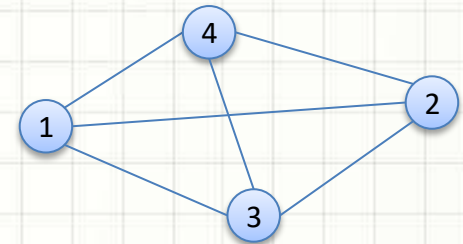
$$\min \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}$$

- S.A.: 
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j: j \neq i$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i: i \neq j \quad \sum_{i=1}^n x_{ii} = 0$$

$$u_i - u_j + 1 - (n - 1)(1 - x_{ij}) \leq 0 \quad \forall (i, j): i, j \neq 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j$$





PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE:

# MÉTODO DA INSERÇÃO DE MENOR ENCARGO



# Inserção de Menor Encargo

- Encontrar o par de cidades de menos custo para fechar um ciclo
- Passos
  1. Para cada ligação, calcular o custo de inserir cada nó na mesma
  2. Inserir o nó que ampliar menos o custo
  3. Se ainda houver nós não visitados, volte para 1

**Escolha de nó inicial guiada!**

**Não leva sempre ao ótimo!**

# Inserção de Menor Encargo

- Basta Tabela de Distâncias (ou a calcular)

O/D	1	2	3	4
1	-	45	38	31
2	45	-	42	29
3	38	42	-	36
4	31	29	36	-

# Inserção de Menor Encargo

- Qual par inicial?

O/D	1	2	3	4
1	-	45	38	31
2	45	-	42	29
3	38	42	-	36
4	31	29	36	-

- Escolha de circuito inicial

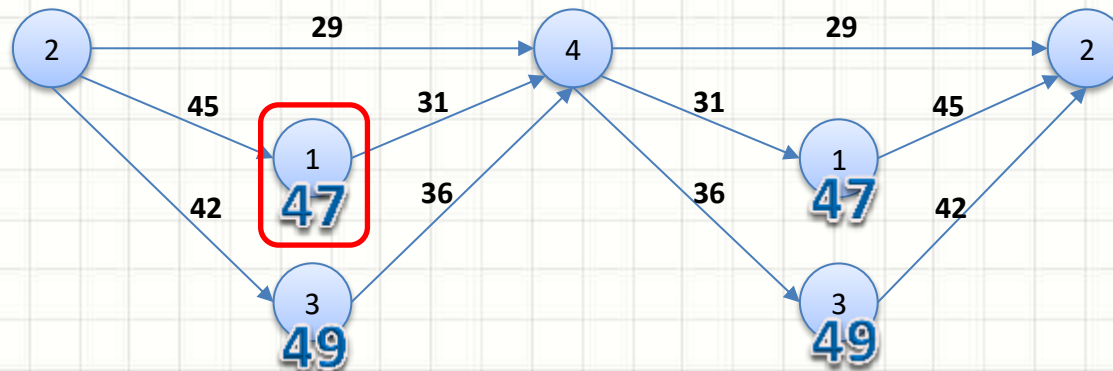
1	1,2,1: 90	1,3,1: 76	1,4,1: 62
2	-	2,3,2: 84	2,4,2: 58
3	-	-	3,4,3: 72

# Inserção de Menor Encargo

- Qual par inicial?

O/D	1	2	3	4
1	-	45	38	31
2	45	-	42	29
3	38	42	-	36
4	31	29	36	-

- Qual e onde adicionar?

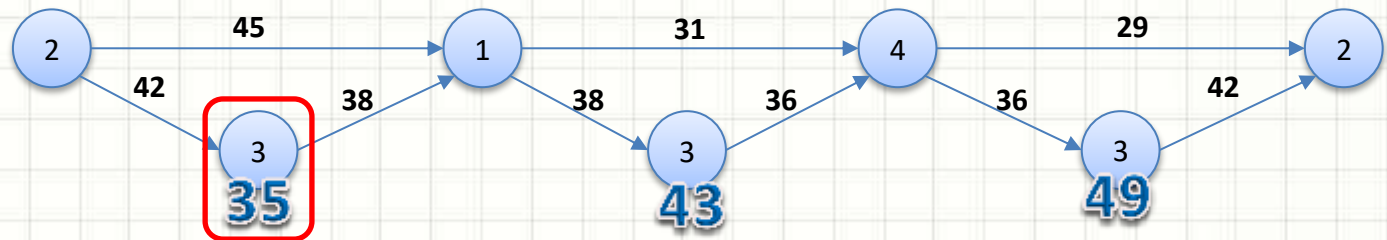


# Inserção de Menor Encargo

- Qual par inicial?

O/D	1	2	3	4
1	-	45	38	31
2	45	-	42	29
3	38	42	-	36
4	31	29	36	-

- Qual e onde adicionar?



# Inserção de Menor Encargo

- Qual par inicial?

O/D	1	2	3	4
1	-	45	38	31
2	45	-	42	29
3	38	42	-	36
4	31	29	36	-

- Sequência final:



**Total: 42+38+31+29 = 140**

# Exercício

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5
1	-	20	40	31	37
2	20	-	18	24	39
3	40	18	-	38	13
4	31	24	38	-	11
5	37	39	13	11	-

# Exercício

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5
1	-	20	40	31	37
2	20	-	18	24	39
3	40	18	-	38	13
4	31	24	38	-	11
5	37	39	13	11	-

1	1,2,1: 40	1,3,1: 80	1,4,1: 62	1,5,1: 74
2	-	2,3,2: 36	2,4,2: 48	2,5,2: 78
3	-	-	3,4,3: 76	3,5,3: 26
4	-	-	-	<b>4,5,4: 22</b>



# Exercício

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5
1	-	20	40	31	37
2	20	-	18	24	39
3	40	18	-	38	13
4	31	24	38	-	11
5	37	39	13	11	-



1  $31+37-11 = 57$

2  $24+39-11 = 52$

3  $38+13-11 = 40$

# Exercício

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5
1	-	20	40	31	37
2	20	-	18	24	39
3	40	18	-	38	13
4	31	24	38	-	11
5	37	39	13	11	-



1  $31+49-38 = 42$

1  $40+37-13 = 64$

1  $37+31-11 = 57$

2  $24+18-38 = 4$

2  $18+39-13 = 44$

2  $39+24-11 = 52$

# Exercício

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5
1	-	20	40	31	37
2	20	-	18	24	39
3	40	18	-	38	13
4	31	24	38	-	11
5	37	39	13	11	-



1  $31+20-24 = 27$

1  $20+40-18 = 42$

1  $40+37-13 = 64$

1  $37+31-11 = 57$

# Exercício

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5
1	-	20	40	31	37
2	20	-	18	24	39
3	40	18	-	38	13
4	31	24	38	-	11
5	37	39	13	11	-



$$\text{Total: } 31+20+18+13+11 = 93$$



# **EXEMPLO MAIS COMPLETO**

# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

1	1,2,1: 51	1,3,1: 44	1,4,1: 60	1,5,1: 42	1,6,1: 43	1,7,1: 42
2		2,3,2: 38	2,4,2: 75	2,5,2: 20	2,6,2: 77	2,7,2: 75
3			3,4,3: 49	3,5,3: 69	3,6,3: 40	3,7,3: 27
4				<b>4,5,4: 19</b>	4,6,4: 53	4,7,4: 46
5					5,6,5: 60	5,7,5: 56
6						6,7,6: 45

# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

Inserir	4-5 (11)	5-4 (8)
1	$39+19-11 = 47$	$19+39-8 = 50$
2	$35+11-11 = 35$	$11+35-8 = 38$
3	$32+36-11 = 57$	$36+32-8 = 60$
6	$37+19-11 = 45$	$19+37-8 = 48$
7	$32+39-11 = 60$	$39+32-8 = 63$



# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

Inserir	4-2 (35)	2-5 (11)	5-4 (8)
1	$39+24-35=28$	$27+19-11=35$	$23+21-8=36$
3	$32+26-35=23$	$12+36-11=37$	$33+17-8=42$
6	$37+39-35=41$	$38+19-11=46$	$41+16-8=49$
7	$32+33-35=30$	$42+39-11=70$	$17+14-8=23$

# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

Inserir	4-3 (32)	3-2(26)	2-5 (11)	5-4 (8)
1	39+29-32: 36	15+24-26: 13	27+19-11: 35	23+21-8: 36
6	37+18-32: 23	22+39-26: 35	38+19-11: 46	41+16-8: 49
7	32+19-32: 19	8+33-26: 15	42+39-11: 70	17+14-8: 23

# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

Inserir	4-3 (32)	3-1 (15)	1-2 (24)	2-5 (11)	5-4 (8)
6	37+18-32: 23	22+25-15: 32	18+39-24: 33	38+19-11: 46	41+16-8: 49
7	32+19-32: 19	8+14-15: 7	28+33-24: 37	42+39-11: 70	17+14-8: 23

# Exemplo Mais Completo

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	24	29	21	19	18	28
2	27	-	12	40	11	38	42
3	15	26	-	17	36	22	8
4	39	35	32	-	11	37	32
5	23	9	33	8	-	41	17
6	25	39	18	16	19	-	24
7	14	33	19	14	39	21	-

Inserir	4-3 (32)	3-7 (8)	7-1 (14)	1-2 (24)	2-5 (11)	5-4 (8)
6	37+18-32: 23	22+24-8: 38	21+25-14: 32	18+39-24: 33	38+19-11: 46	41+16-8: 49

**Caminho: 4-6-3-7-1-2-5-4**

**Total: 37+18+8+14+24+11+8 = 120**

# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

1	1,2,1: 65	1,3,1: 38	1,4,1: 49	1,5,1: 49	<b>1,6,1: 23</b>	1,7,1: 64
2		2,3,2: 38	2,4,2: 47	2,5,2: 42	2,6,2: 55	2,7,2: 36
3			3,4,3: 51	3,5,3: 34	3,6,3: 44	3,7,3: 76
4				4,5,4: 66	4,6,4: 44	4,7,4: 68
5					5,6,5: 52	5,7,5: 53
6						6,7,6: 45

# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

Inserir	1-6 (14)	6-1 (9)
2	$41+14-14 = 41$	$41+24-9 = 56$
3	$8+16-14 = 10$	$28+30-9 = 49$
4	$18+28-14 = 32$	$34+31-9 = 56$
5	$8+24-14 = 18$	$28+41-9 = 60$
7	$33+12-14 = 31$	$33+21-9 = 45$

# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

Inserir	1-3 (8)	3-6(16)	6-1 (9)
2	$41+29-8 = 62$	$9+14-16 = 7$	$41+24-9 = 56$
4	$18+19-8 = 29$	$32+10-16 = 26$	$34+31-9 = 56$
5	$8+22-8 = 22$	$12+24-16 = 20$	$28+41-9 = 60$
7	$33+37-8 = 62$	$39+12-16 = 35$	$33+21-9 = 45$



# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

Inserir	1-3 (8)	3-2 (9)	2-6 (14)	6-1 (9)
4	$18+19-8 = 29$	$32+9-9 = 32$	$38+10-14 = 34$	$34+31-9 = 56$
5	$8+22-8 = 22$	$12+10-9 = 13$	$32+24-14 = 42$	$28+41-9 = 60$
7	$33+37-8 = 62$	$39+27-9 = 57$	$9+12-14 = 7$	$33+21-9 = 45$

# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

Inserir	1-3 (8)	3-2 (9)	2-7 (9)	7-6 (12)	6-1 (9)
4	$18+19-8 = 29$	$32+9-9 = 32$	$38+40-9 = 69$	$28+10-12 = 26$	$34+31-9 = 56$
5	$8+22-8 = 22$	$12+10-9 = 13$	$32+42-9 = 65$	$11+24-12 = 23$	$28+41-9 = 60$

# Exercício (para entrega)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	41	8	18	8	14	33
2	24	-	29	38	32	14	9
3	30	9	-	32	12	16	39
4	31	9	19	-	28	10	40
5	41	10	22	38	-	24	42
6	9	41	28	34	28	-	33
7	21	27	37	28	11	12	-

Inserir	1-3 (8)	3-5 (12)	5-2 (10)	2-7 (9)	7-6 (12)	6-1 (9)
4	$18+19-8 = 29$	$32+28-12 = 48$	$38+9-10 = 37$	$38+40-9 = 69$	$28+10-12 = 26$	$34+31-9 = 56$

**Caminho: 1-3-5-2-7-4-6-1**

**Total:  $8+12+10+9+28+10+9 = 86$**



# CONCLUSÕES

# Resumo

- Caixeiro Viajante
    - Problema simples, solução complexa
    - Simplex e Vizinho Mais Próximo
  - Outro método: inserção de menor encargo
    - Nem sempre solução ótima!
  - **TAREFA:** Exercícios Aula 12
- 
- Outros métodos de solução?
    - Método da inserção com maior afastamento



**PERGUNTAS?**



**EXERCÍCIO**

# Exercício (para casa)

- Resolva pela inserção de menor encargo

O/D	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	9	35	26	18	16	42	24
2	26	-	11	15	18	38	34	40
3	9	21	-	21	15	11	33	37
4	32	33	40	-	36	30	24	32
5	37	11	29	26	-	25	38	26
6	14	28	13	14	9	-	20	22
7	31	17	20	29	25	27	-	19
8	9	18	32	38	35	32	38	-