



MECÂNICA DOS SÓLIDOS

DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE E REAÇÕES DE APOIO

Prof. Dr. Daniel Caetano

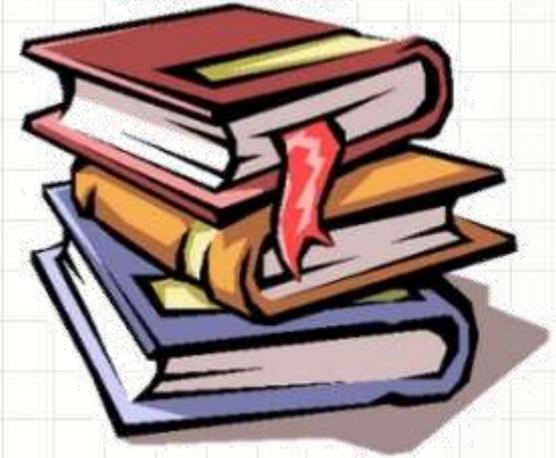
2019 - 1

Objetivos

- Conhecer os tipos de vínculo de estruturas bidimensionais
- Determinar o Grau de Hiperestaticidade de estruturas simples
- Calcular reações de apoio em estruturas hiperestáticas simples
- **Atividade Aula 3 – SAVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica dos Sólidos – Aula 3)

Material Didático

Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 2 (SAVA)

Minha Biblioteca

Estática e Mecânica dos Materiais (BERR;JOHNSTON),
Cap. 4

Material Adicional

Livro: Estática (HIBBELER), Cap 5.

Apostila de Análise Estrutural UFSC:
<https://bit.ly/2xkw4bE>



RELEMBRANDO:
EQUILÍBRIO DE
CORPOS RÍGIDOS

Equilíbrio de Forças

- Sempre que a resultante em uma direção é 0
 - Existe um equilíbrio de forças naquela direção

Condição de
Equilíbrio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$



Se equilibram!

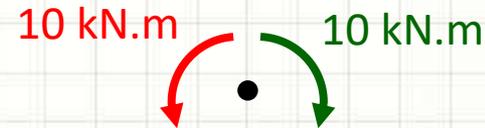
- Equilíbrio significa “parado”?
 - “Sem alterar estado de movimento” na direção!

Equilíbrio de Momentos

- Sempre que a resultante dos momentos é 0
 - Momentos estão em equilíbrio!

Condição de Equilíbrio
de Momentos

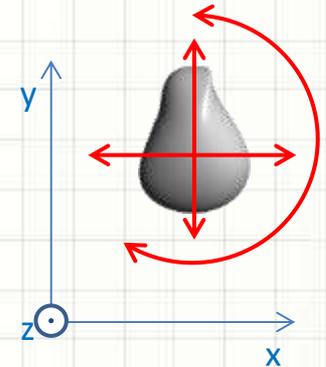
$$\vec{M}_R = \sum \vec{M} = 0$$



- Equilíbrio significa “parado”?
 - “Não alterar o estado de giro” naquele plano!

Graus de Liberdade e Equilíbrio

- No plano, corpo rígido: 3 graus de liberdade
 - Translação horizontal
 - Translação vertical
 - Rotação no plano (ao redor de z)



- Condição de Equilíbrio do Corpo Rígido

Condição de
Equilíbrio em X

$$R_x = \sum F_x = 0$$

Condição de
Equilíbrio em Y

$$R_y = \sum F_y = 0$$

Condição de
Equilíbrio de Momentos

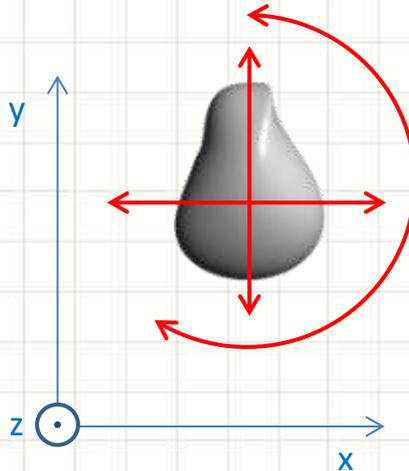
$$M_{R0} = \sum M_o = 0$$



VÍNCULOS DE UM CORPO RÍGIDO

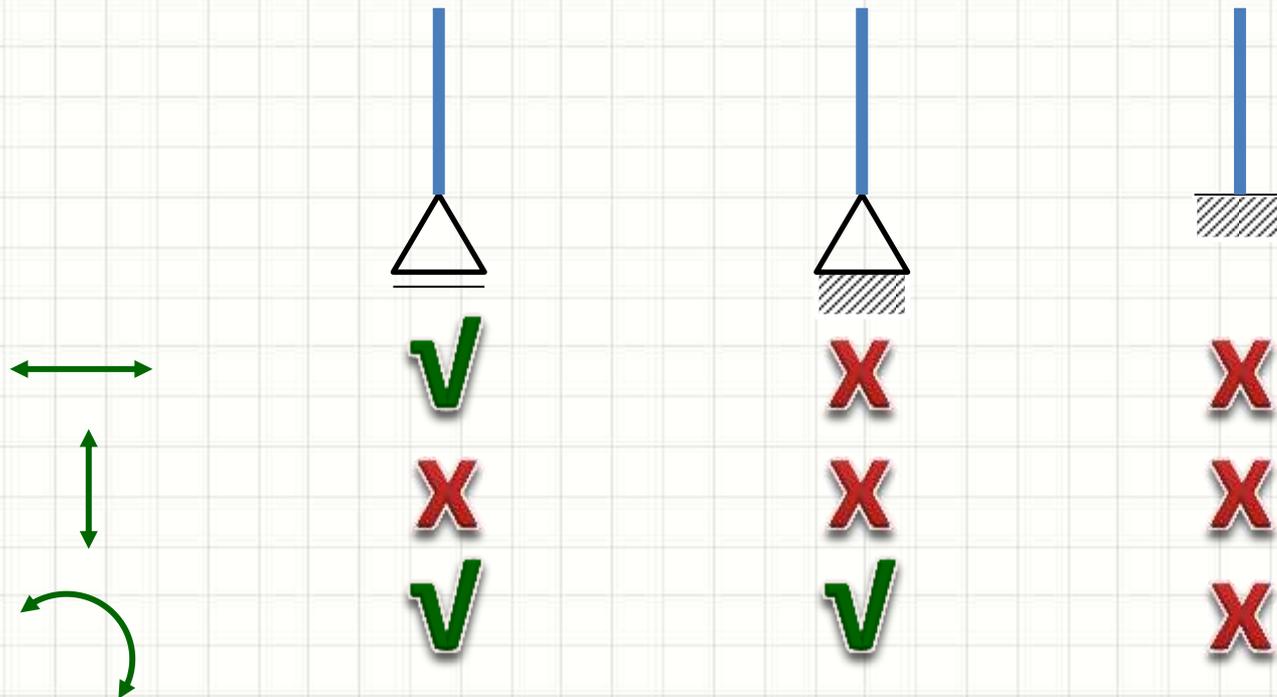
Equilíbrio x Movimento

- Equilíbrio: manutenção do estado
 - Parado x Movimento
- Para garantir ausência de movimento...
 - É necessário “fixar” o elemento



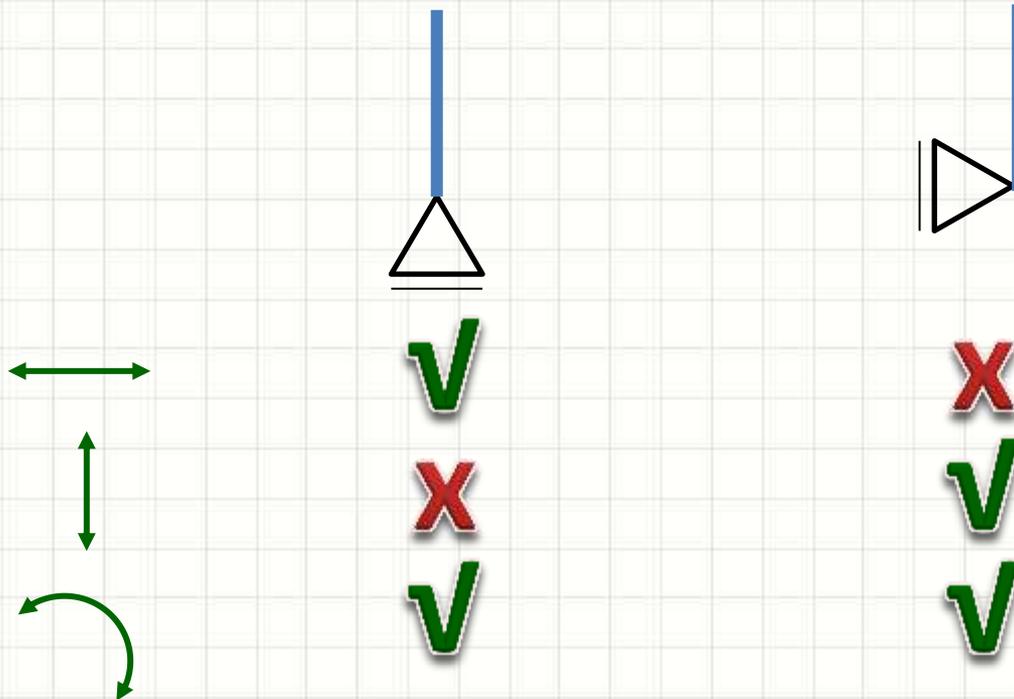
Vínculos de um Corpo Rígido

- Vincular: prender, ligar
- No plano, pode-se vincular para restringir
 - Um, dois ou todos os graus de liberdade



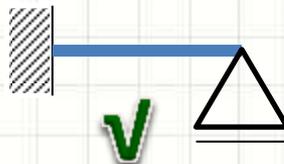
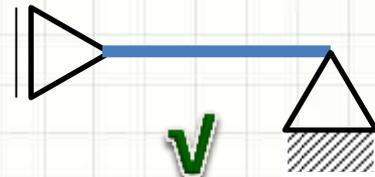
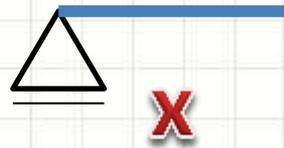
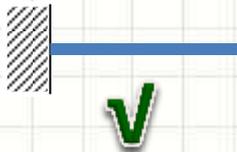
Vínculos de um Corpo Rígido

- Vincular: prender, ligar
- No plano, pode-se vincular para restringir
 - Um, dois ou todos os graus de liberdade



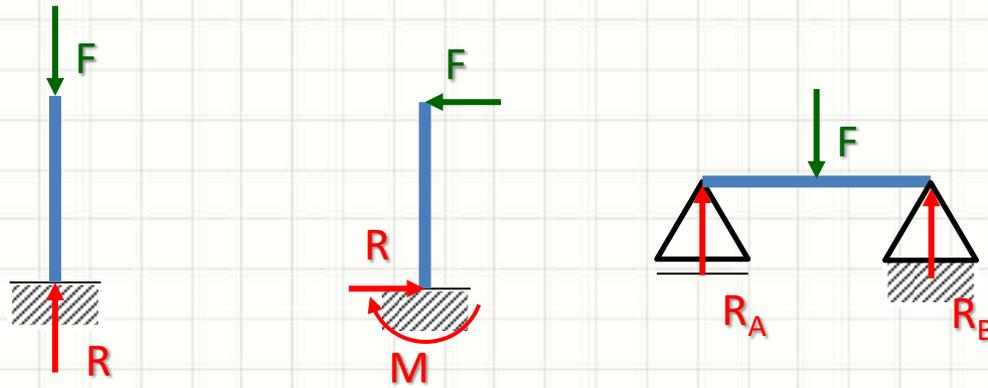
Vínculos x Equilíbrio Estático

- Equilíbrio estático
 - Todos os graus de liberdade impedidos
- Quais estão em equilíbrio estático?



Reações de Apoio

- O equilíbrio ocorre porque...
 - Os vínculos impõem reações aos esforços



Reações de Apoio

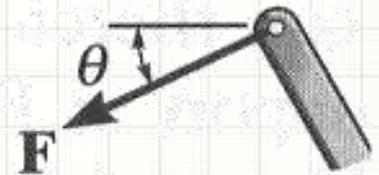
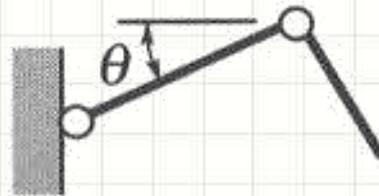
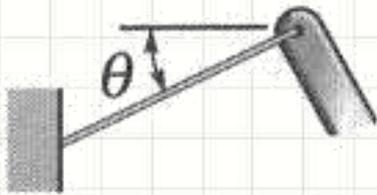
- Cada tipo **pode** impor diferentes reações



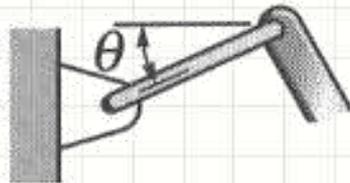
Como Calcular?

Vínculos, símbolos e reações

Cabo

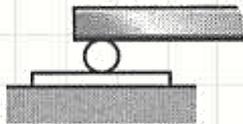
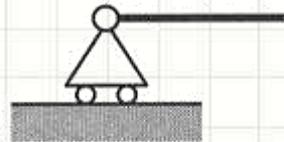


Ligação esbelta

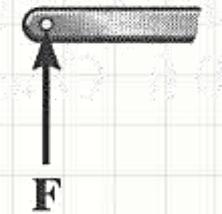
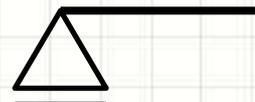
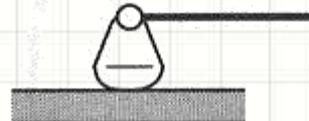
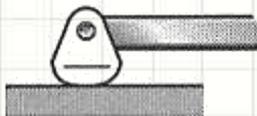


Vínculos, símbolos e reações

Roletes

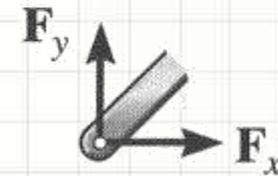
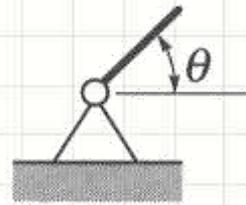
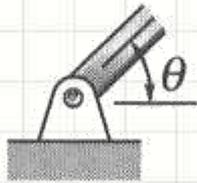


Rótula



Vínculos, símbolos e reações

Articulação



Apoio rígido (engaste)

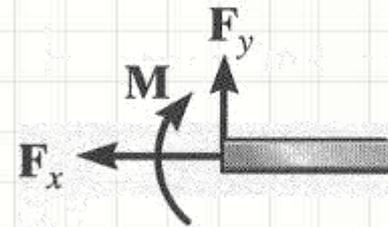
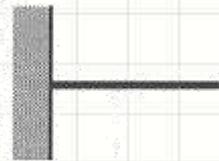
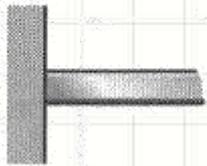
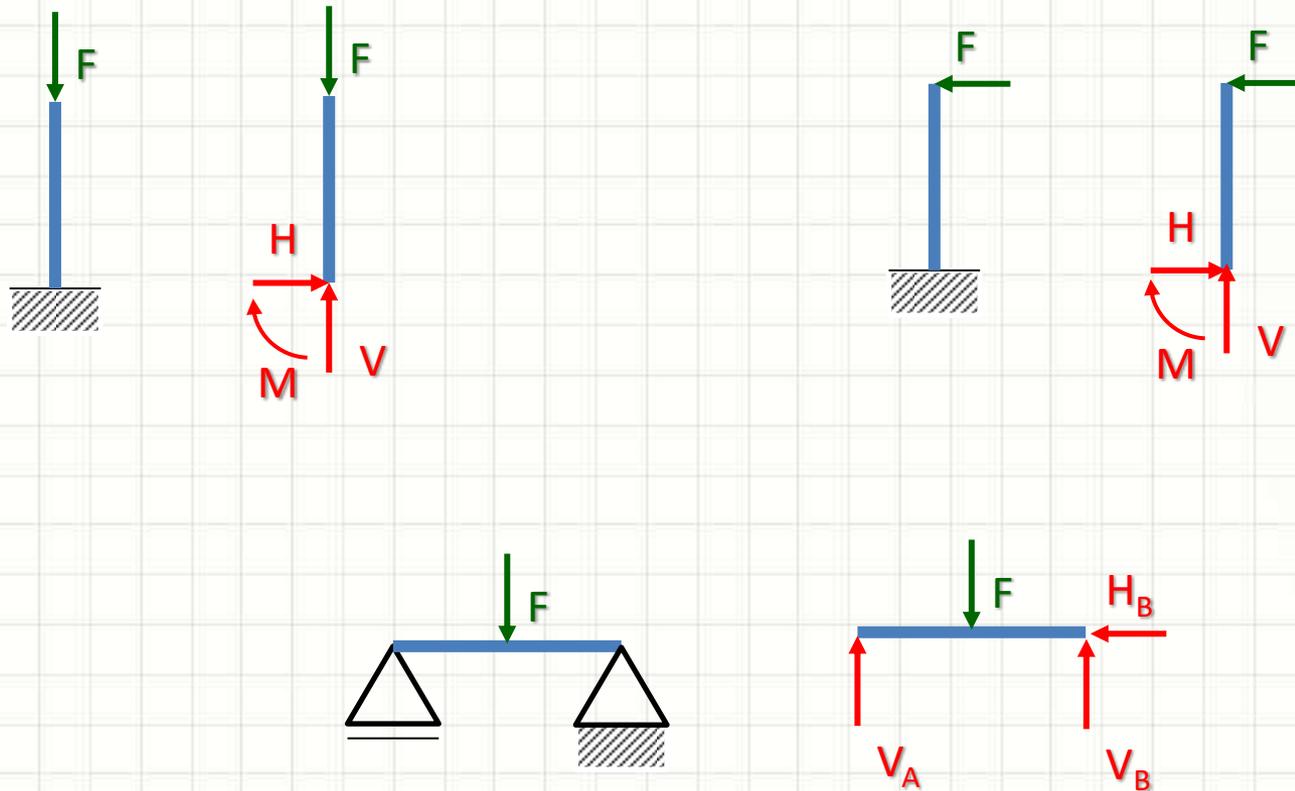


Diagrama de Corpo Livre

- Quando redesenhamos a estrutura substituindo seus vínculos por reações:

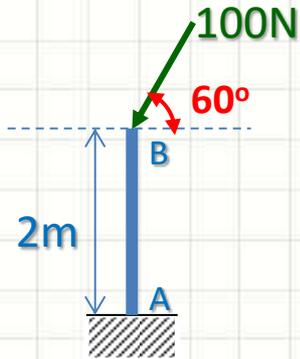




EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Exemplo

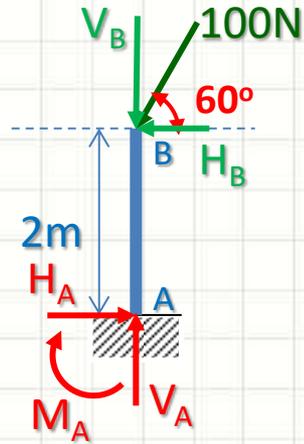
- Calcule as reações de apoio



Exemplo



- Calcule as reações de apoio

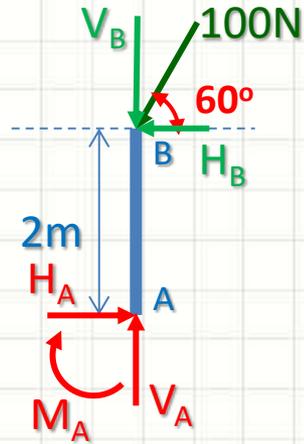


1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)

Exemplo



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)
2. Decompor os esforços nos eixos x e y

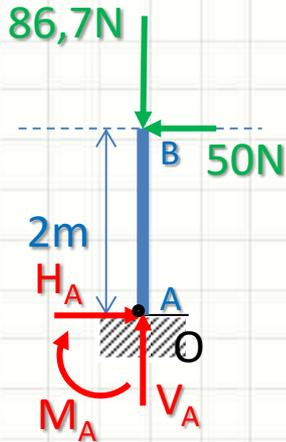
$$H_B = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 \cong 50N$$

$$V_B = 100 \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,867 \cong 86,7N$$

Exemplo



- Calcule as reações de apoio

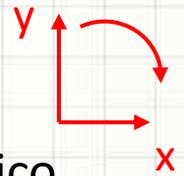


1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)
2. Decompor os esforços nos eixos x e y

$$H_B = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 \cong 50N$$

$$V_B = 100 \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,867 \cong 86,7N$$

3. Identificar as direções positivas
4. Determinar as reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_A - 50 = 0 \quad \Rightarrow H_A = 50N$$

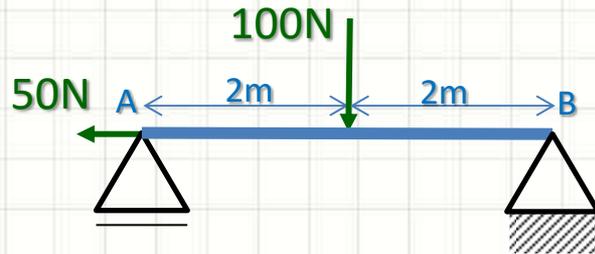
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 86,7 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 86,7N$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(86,7 \cdot 0) - (50 \cdot 2) + (V_A \cdot 0) + (H_A \cdot 0) + M_A = 0 \Rightarrow M_A = 100N \cdot m$$

Exercício



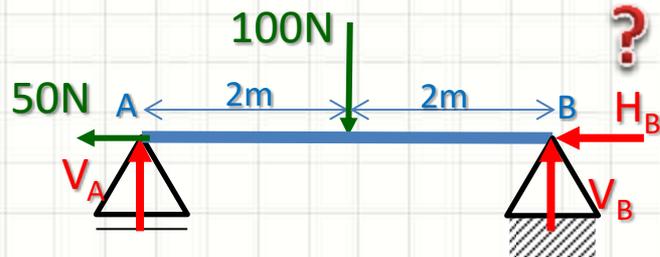
- Calcule as reações de apoio



Exercício



- Calcule as reações de apoio

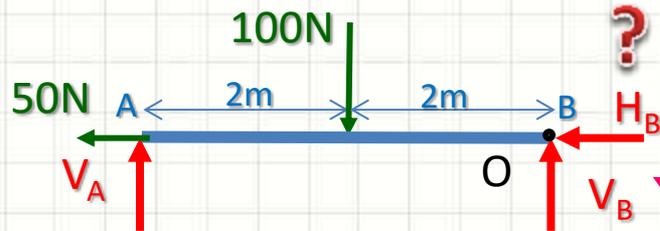


1. Diagrama de corpo livre

Exercício



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -50 - H_B = 0 \quad \Rightarrow H_B = -50N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 100 + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 100 - V_A$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow +(V_A \cdot 4) + (50 \cdot 0) - (100 \cdot 2) + (V_B \cdot 0) + (H_B \cdot 0) = 0$$

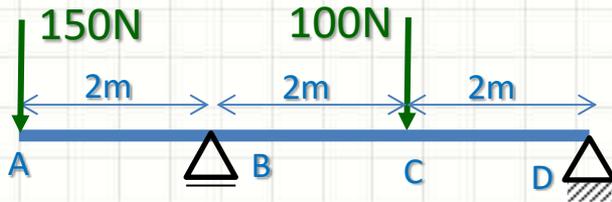
$$\Rightarrow 4 \cdot V_A = 200$$

$$\Rightarrow V_A = 50N \quad \therefore V_B = 50N$$

Exercício



- Calcule as reações de apoio

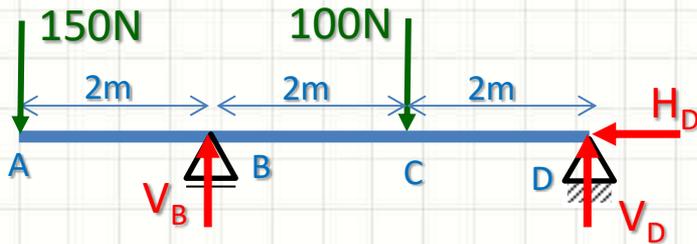


Exercício



- Calcule as reações de apoio

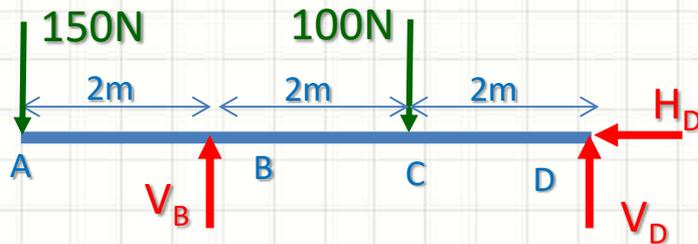
1. Diagrama de corpo livre



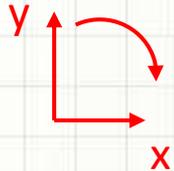
Exercício



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_D = 0 \Rightarrow H_D = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -150 + V_B - 100 + V_D = 0 \Rightarrow V_D = 250 - V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(150 \cdot 6) + (V_B \cdot 4) - (100 \cdot 2) + (V_D \cdot 0) + (H_D \cdot 0) = 0$$

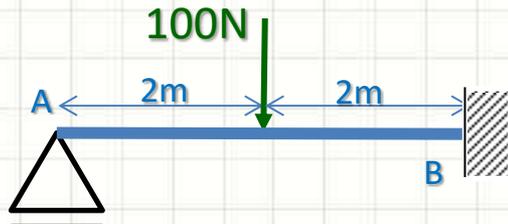
$$\Rightarrow 4 \cdot V_B = 1100$$

$$\Rightarrow V_B = 275N \quad \therefore V_D = -25N$$

Outro Exemplo



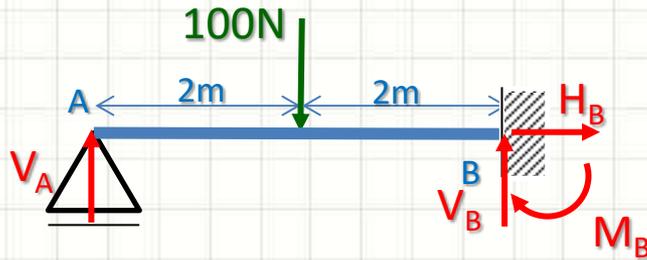
- Calcule as reações de apoio



Outro Exemplo



- Calcule as reações de apoio

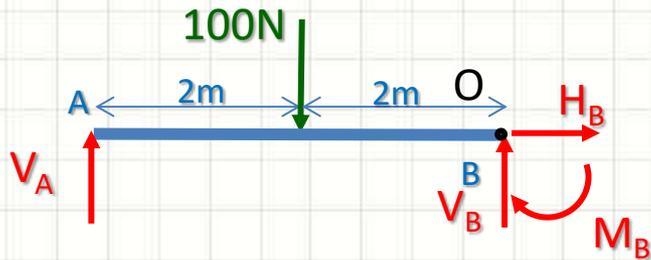


1. Diagrama de corpo livre

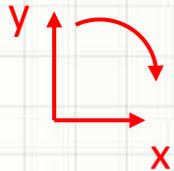
Outro Exemplo



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0 \Rightarrow H_B = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 100 + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 100 - V_A$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(V_A \cdot 4) - (100 \cdot 2) + (V_B \cdot 0) + (H_B \cdot 0) + M_B = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot V_A = 200 - M_B$$

$$\Rightarrow V_A = \left(50 - \frac{M_B}{4}\right)N$$

Por que não conseguimos resolver?
E Agora?



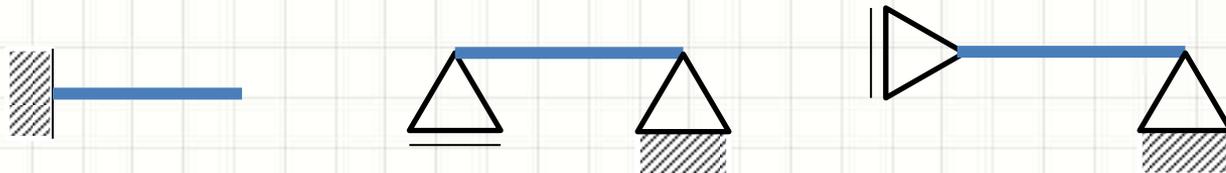
**GRAU DE HIPERESTATICIDADE
DE UMA ESTRUTURA DE
CORPO RÍGIDO PLANA**

Grau de Hiperestaticidade

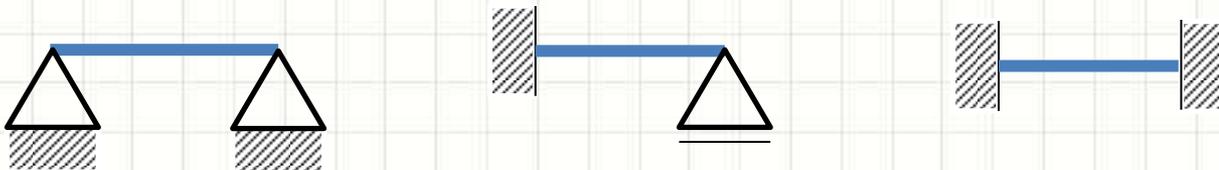
- Equilíbrio de movimentos e vínculos
 - Hipostáticos: vínculos $<$ movimentos possíveis



- Isostáticos: vínculos $=$ movimentos possíveis

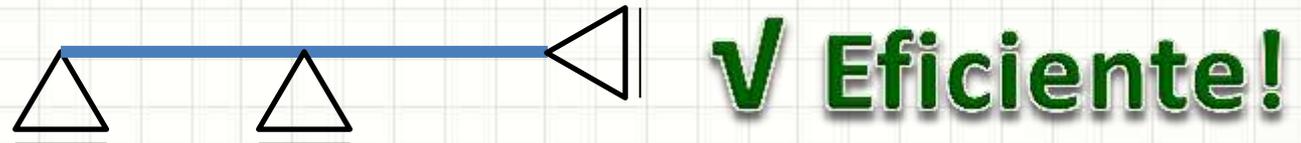


- Hiperestáticos: vínculos $>$ movimentos possíveis



Grau de Hiperestaticidade

- Nota importante
 - Vínculos precisam estar dispostos eficientemente



Estruturas Estaticamente Determinadas

- As estruturas **isostáticas**
 - São classificadas: “Estaticamente Determinadas”
- Por quê?
 - Porque as reações podem ser determinadas por:

Condição de
Equilíbrio em X

$$R_x = \sum F_x = 0$$

Condição de
Equilíbrio em Y

$$R_y = \sum F_y = 0$$

Condição de
Equilíbrio de Momentos

$$M_{R_o} = \sum M_o = 0$$

- E as hiperestáticas
 - Veremos mais adiante no curso!

Cálculo: Grau de Hiperestaticidade

- Calcula-se pela equação:

$$gh = C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3.m$$

– gh: grau de hiperestaticidade

- $gh < 0$: hipostática
- $gh = 0$: isostática
- $gh > 0$: hiperestática

– C_1 : vínculos que restringem 1 grau de liberdade

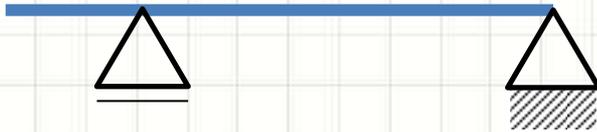
– C_2 : vínculos que restringem 2 graus de liberdade

– C_3 : vínculos que restringem 3 graus de liberdade

– m: número de barras do sistema

Exemplo

- Calcule o grau de hiperestaticidade



Exemplo

- Calcule o grau de hiperestaticidade



$$gh = C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3.m$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = 0$$

$$m = 1$$

$$gh = 1 + 2.1 + 3.0 - 3.1$$

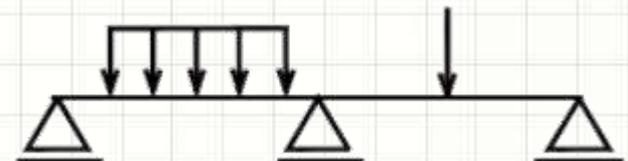
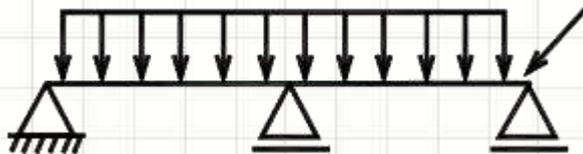
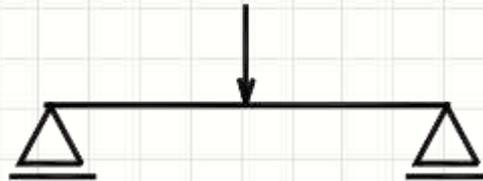
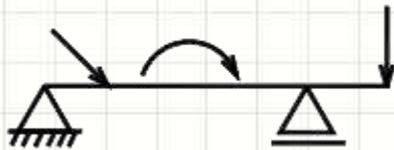
$$gh = 1 + 2 + 0 - 3$$

$$gh = 0$$

Isostática

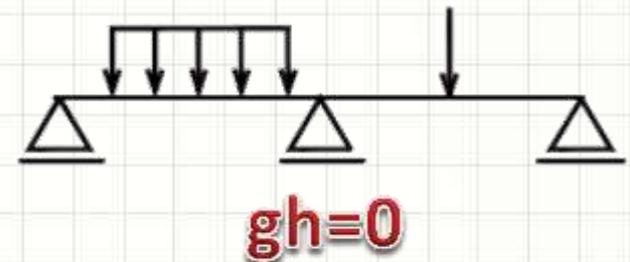
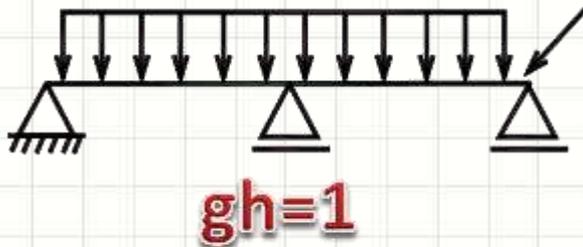
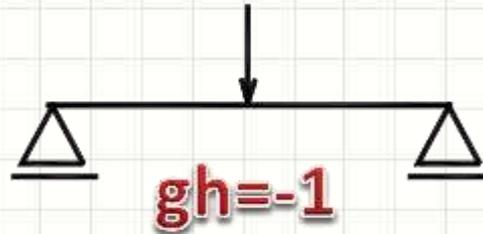
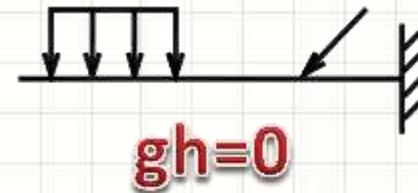
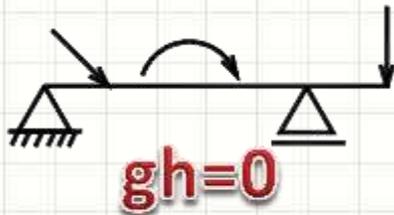
Exercício

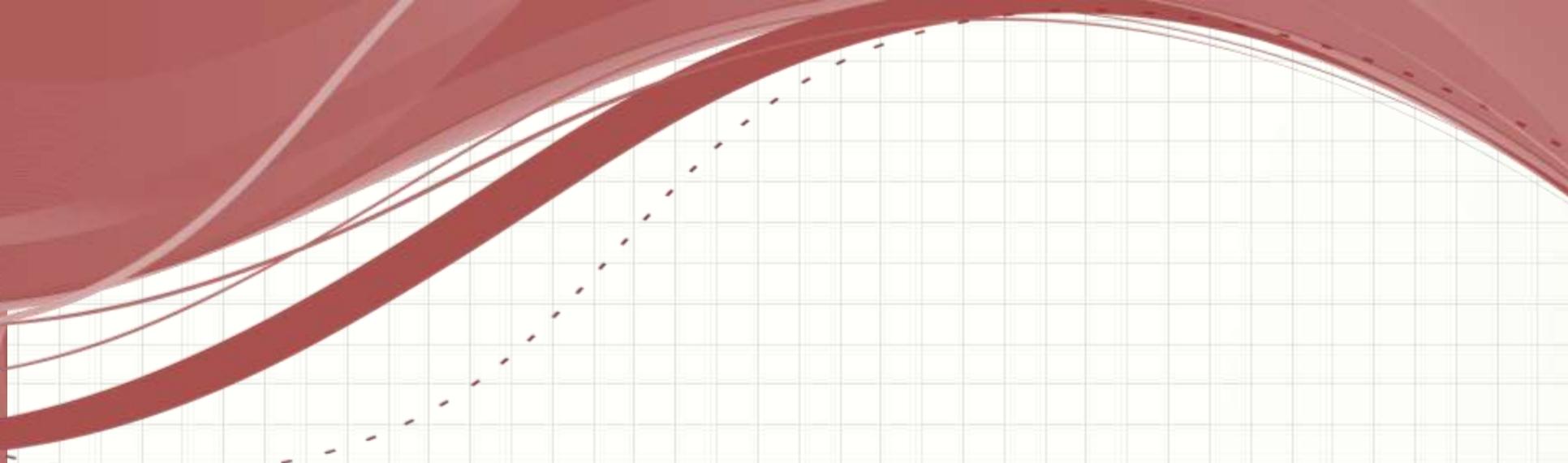
- Calcule o grau de hiperestaticidade



Exercício

- Calcule o grau de hiperestaticidade





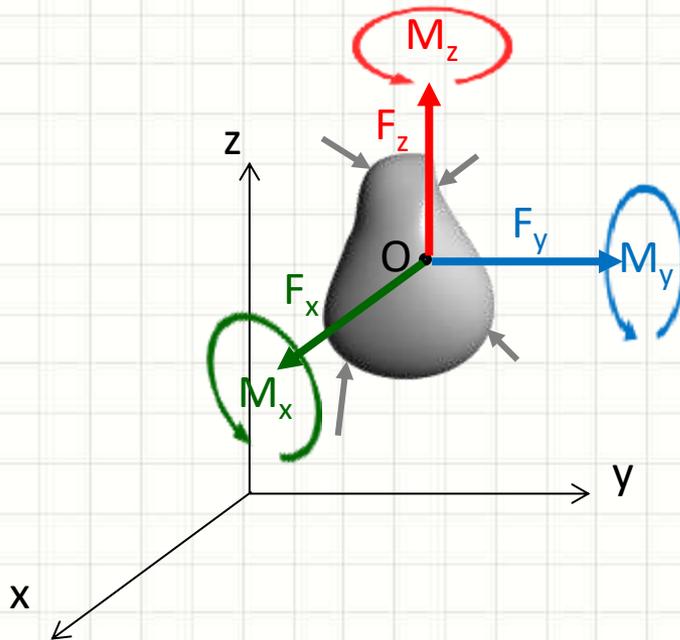
ESTENDENDO O CONCEITO:

EQUILÍBRIO ESTÁTICO TRIDIMENSIONAL

Equilíbrio de Corpo Rígido em 3D

- Para equilíbrio, forças não devem provocar:
 - Translação em x , y e z
 - Rotação ao redor de x , y e z

6 graus de liberdade!



Equilíbrio em X

$$\sum F_x = 0$$

Momento X em O

$$\sum M_{xo} = 0$$

Equilíbrio em Y

$$\sum F_y = 0$$

Momento Y em O

$$\sum M_{yo} = 0$$

Equilíbrio em Z

$$\sum F_z = 0$$

Momento Z em O

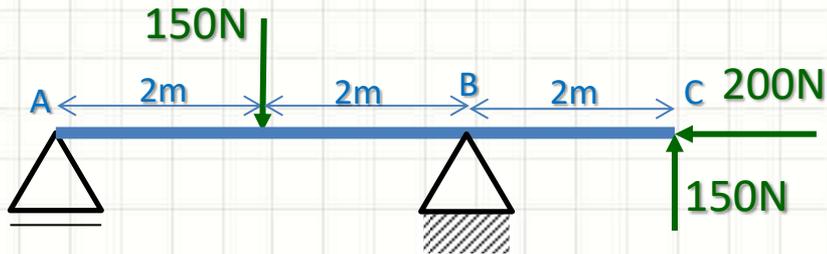
$$\sum M_{zo} = 0$$



EXERCÍCIO

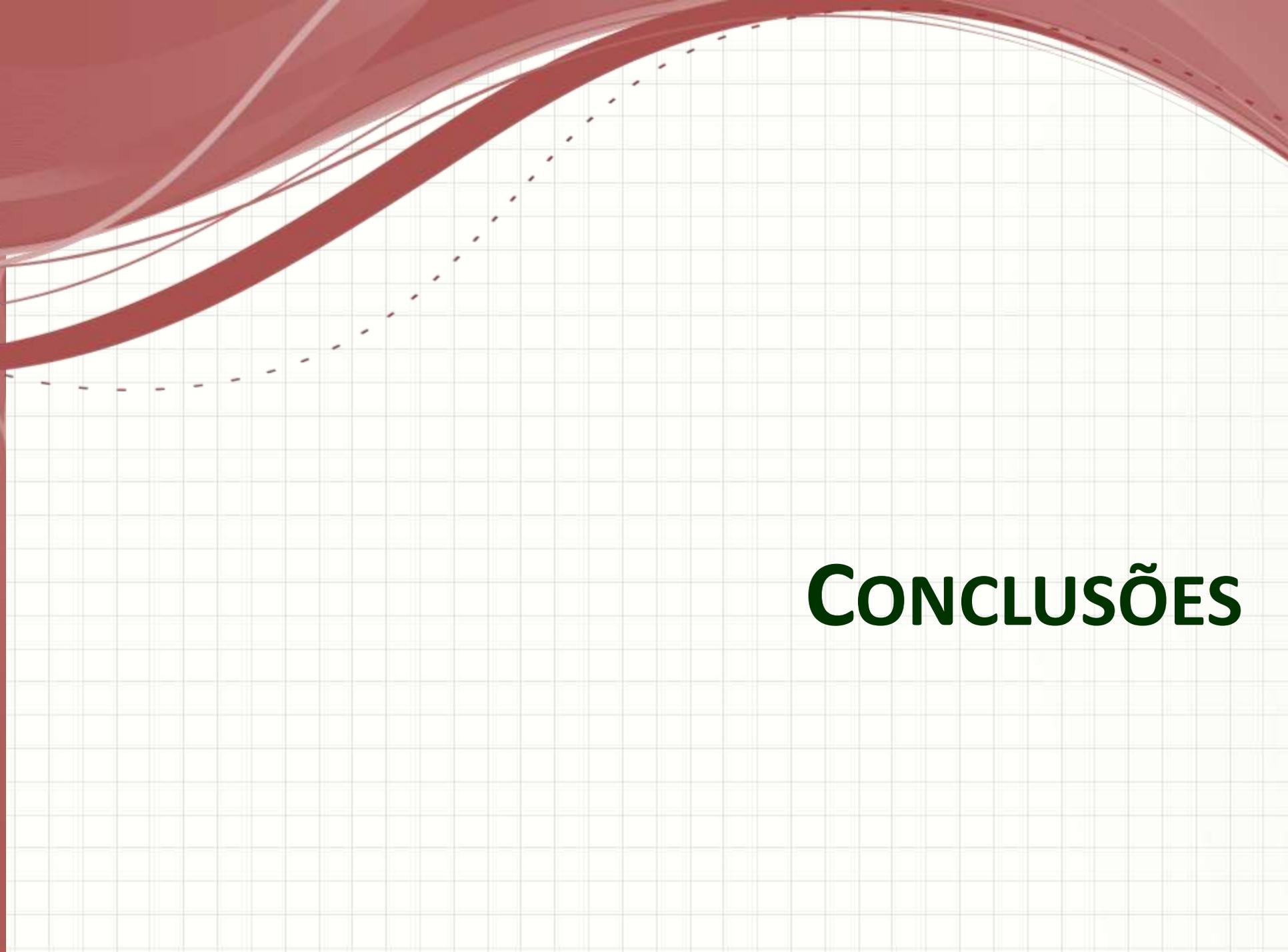
Exercício (para Entrega!)

- Calcule as reações de apoio V_A , V_B e H_B



$$V_A = 150N$$

$$V_B = -150N$$

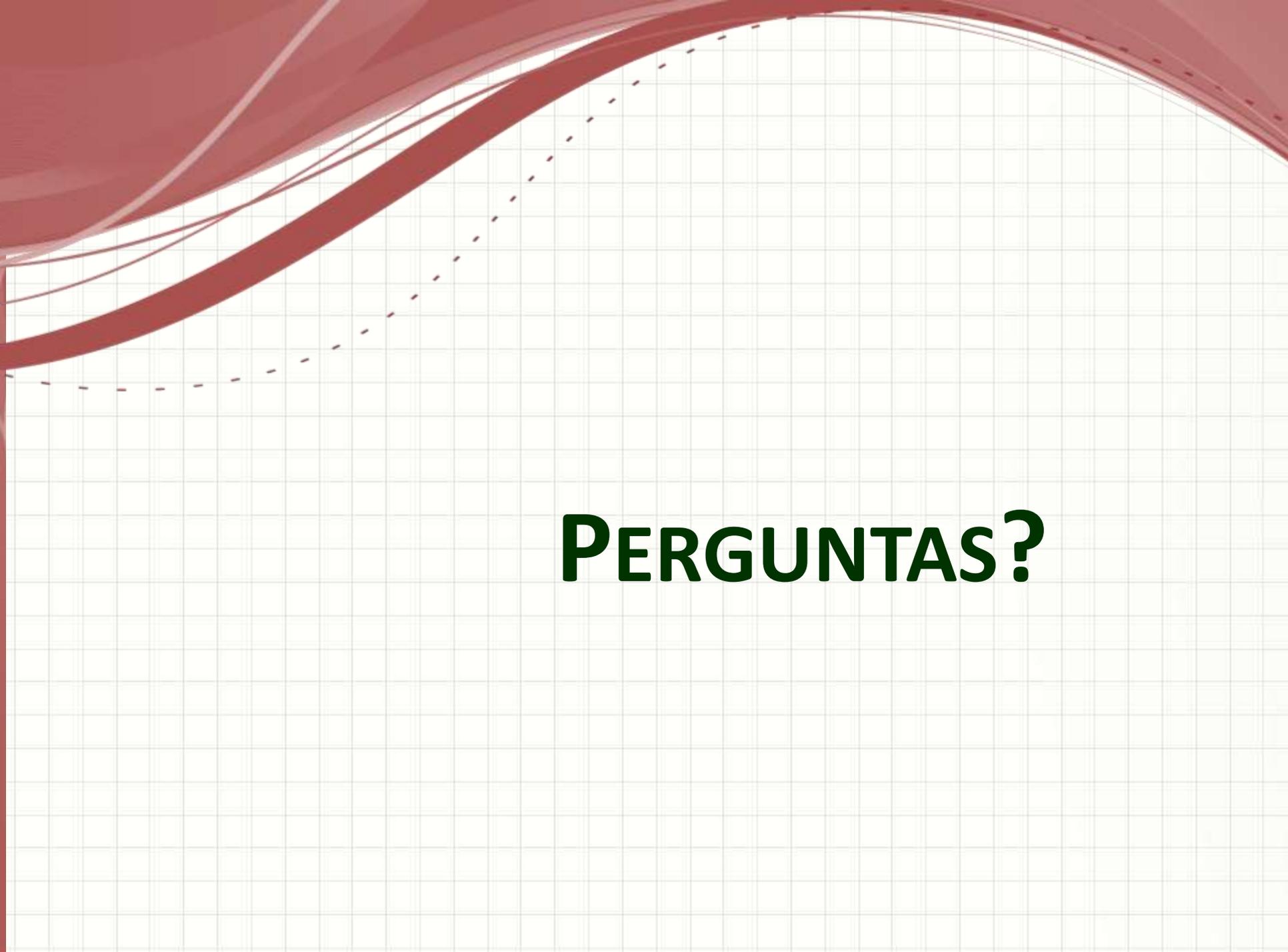


CONCLUSÕES

Resumo

- Equilíbrio estático \leftrightarrow vínculos
- Diversos tipos de vínculo
- Diagramas de corpo livre
- Grau de Hiperestaticidade
- Generalização para espaço 3D
- **TAREFA:** Exercícios Aula 3

-
- Diagramas de Corpo Livre
 - Exercitar cálculos de reações!



PERGUNTAS?