



MECÂNICA DOS SÓLIDOS

TRELIÇAS PLANAS

PARTE II

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 1

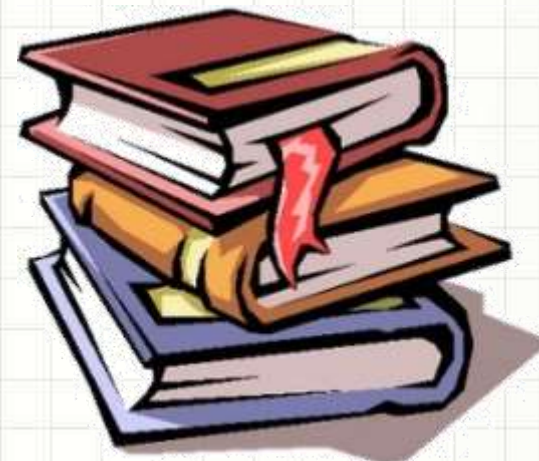
Objetivos

- Compreender os esforços internos que surgem em uma treliça
- Compreender o método de Cremona
Compreender o Método de Ritter

- **Atividade Aula 5 – SAVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica dos Sólidos – Aula 5)

Material Didático

Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 3.2 (SAVA)

Minha Biblioteca

Estática e Mecânica dos Materiais (BERR;JOHNSTON),
Cap. 6 – Seção 6.1 a 6.6

LEMBRETE: CONSULTAR O “DEPOIS” DA AULA 5 NO SAVA!

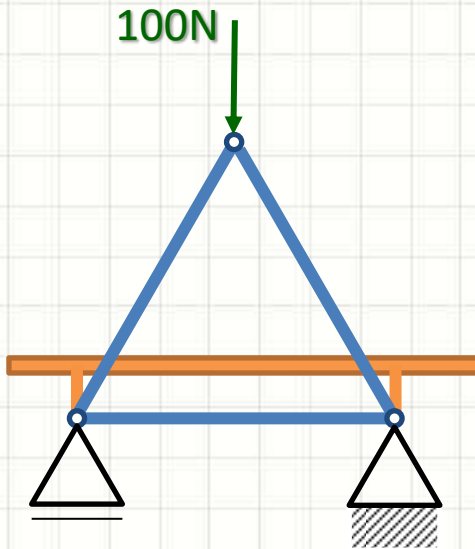


RELEMBRANDO:

TRELIÇAS PLANAS RÍGIDAS

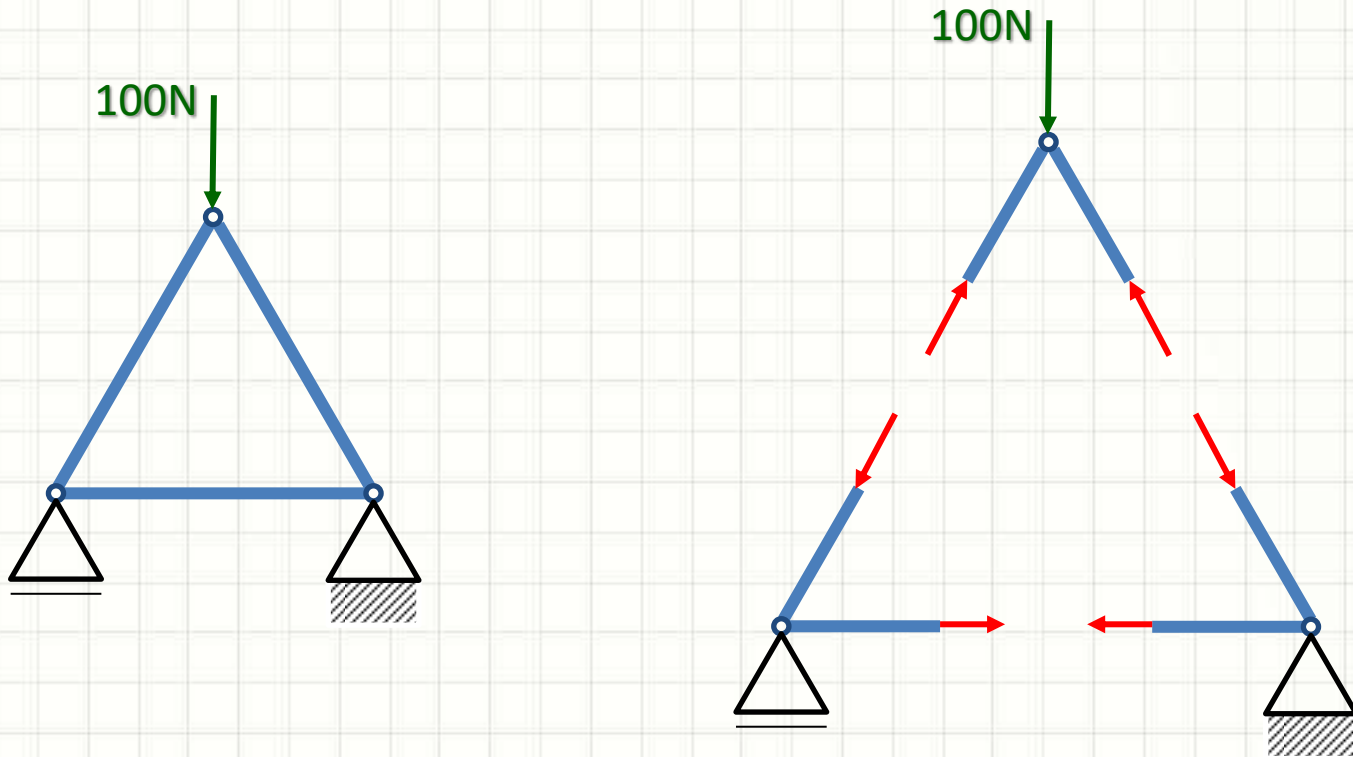
Treliças Planas Rígidas

- Estrutura composta por barras
 - Em geral, compondo elementos triangulares
 - Articuladas nas extremidades
 - As cargas são aplicadas sempre nos nós



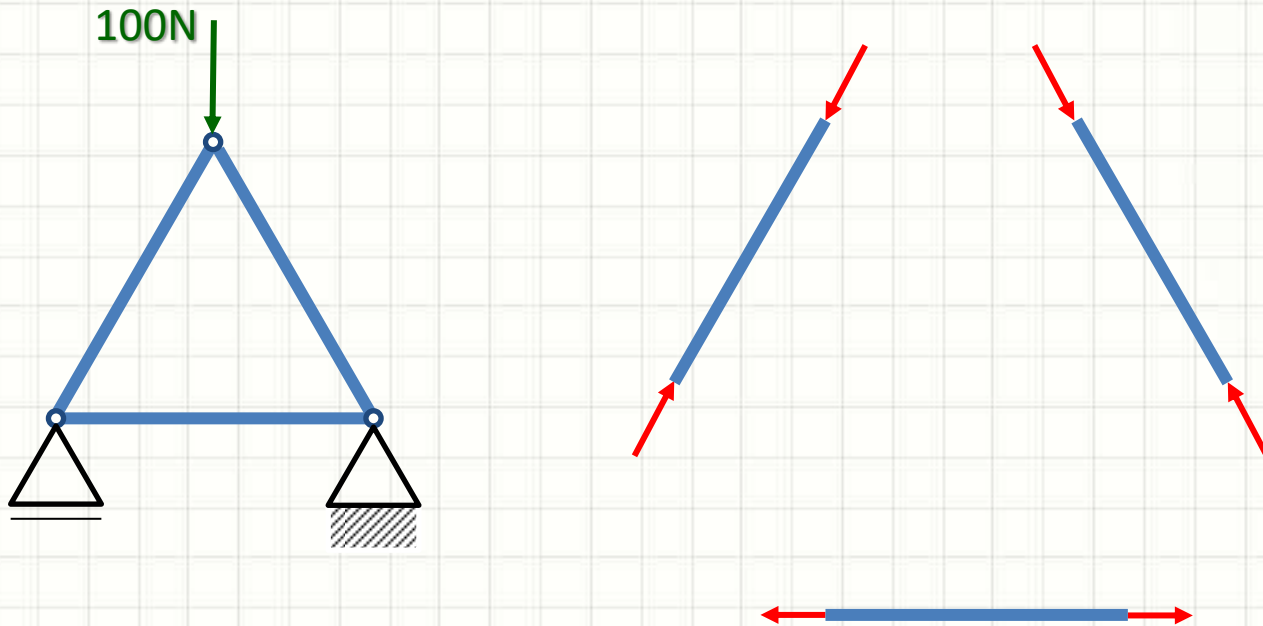
Forças Internas

- Até agora... Forças Externas
 - Equilíbrio externo
- Forças Internas: mantém estrutura coesa



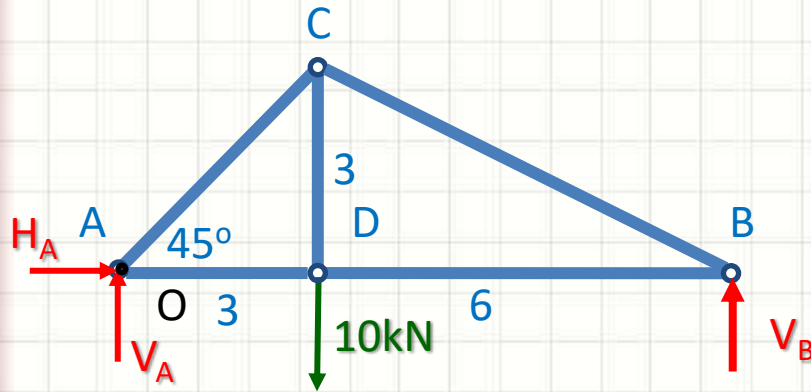
Forças Internas

- Seguindo as regras elencadas
 - Barras tracionadas ou comprimidas
 - Nunca flexionadas!



Cálculo de Reações de Apoio

- Como no Cálculo de Barras



1. Corpo livre
2. Decompor esforços
3. Identificar as direções positivas
4. Determinar as reações

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_A + 0 = 0 \Rightarrow H_A = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 10000 + V_B = 0 \Rightarrow V_A = 10000 - V_B$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow +(10000 \cdot 3) - (V_B \cdot 9) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{30000}{9} = 3,33kN$$

$$\therefore V_A = 6,67kN$$



ESFORÇOS INTERNOS

Esforços Internos

- Como calcular os esforços nas barras?
 - Tração x Compressão
- 1º Método: de Cremona
 - “Método do Equilíbrios dos Nós”
 - “Método dos Nós”

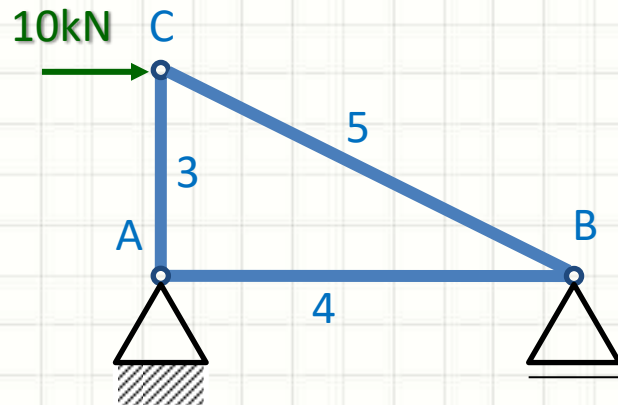
Em uma treliça em equilíbrio, todos os nós dessa treliça estão em equilíbrio.

Método de Cremona

- Procedimento
 1. Determinar as reações de apoio
 2. Identificar as barras tracionadas / comprimidas
 3. Verificar o equilíbrio de cada nó
 - Do com menos incógnitas para o com mais incógnitas

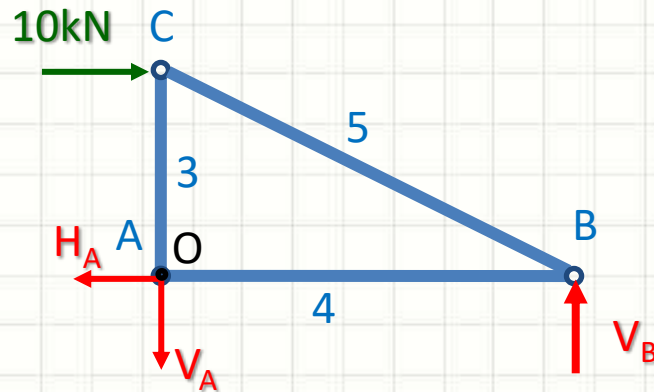
Exemplo

- Método de Cremona



Exemplo – Método de Cremona

1. Determinar as Reações



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 10000 = 0 \Rightarrow H_A = 10kN$$

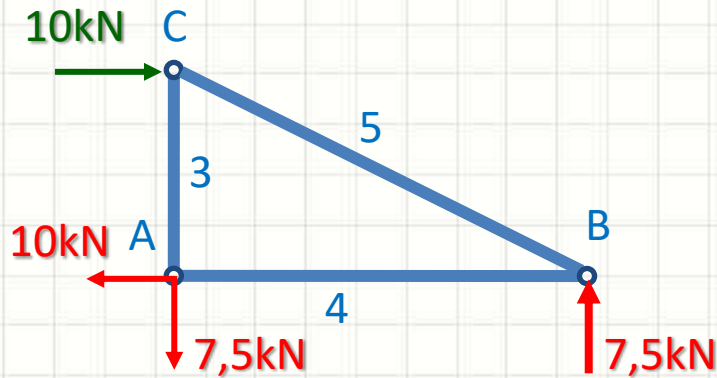
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(10000 \cdot 3) - (V_B \cdot 4) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{30000}{4} = 7,5kN$$

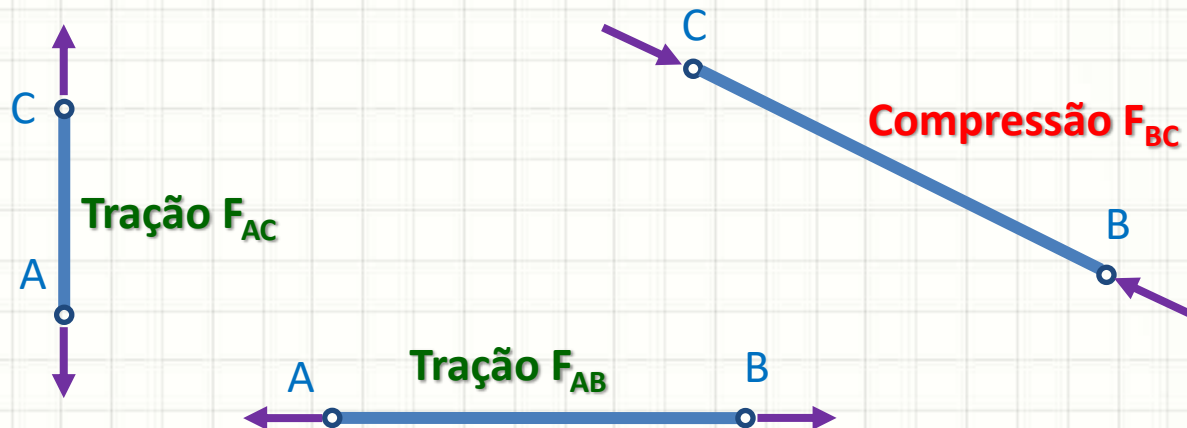
$$\therefore V_A = 7,5kN$$

Exemplo – Método de Cremona

2. Determinar barras tracionadas/comprimidas

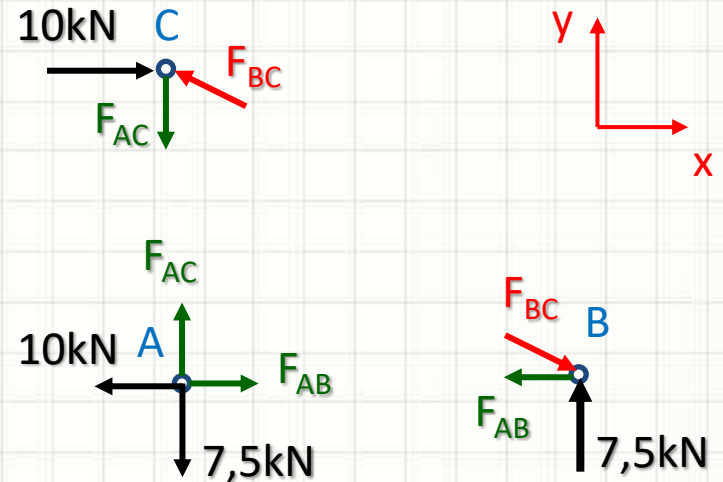
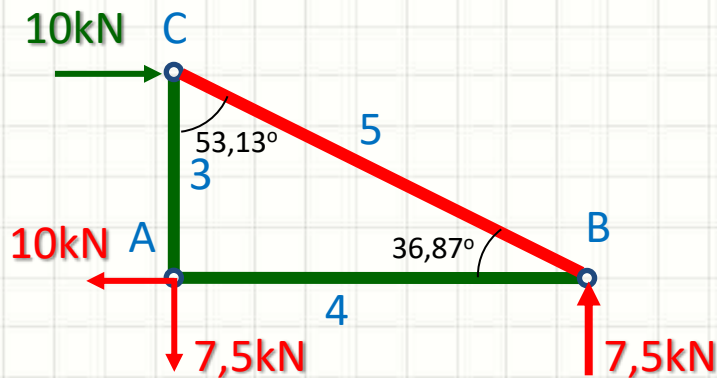


a. Estimado!



Exemplo – Método de Cremona

3. Equilíbrio nos Nós



$$\text{A) } \sum F_x = 0 \Rightarrow -10000 + F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -7500 + F_{AC} = 0 \Rightarrow F_{AC} = 7,5 \text{ kN}$$

$$\text{B) } \sum F_x = 0 \Rightarrow -10000 + F_{BC} \cdot \cos 36,87^\circ = 0 \Rightarrow F_{BC} = 12,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +7500 - 12500 \cdot \sin 36,87^\circ = 0 \quad \text{Ok!}$$

$$\text{C) } \sum F_x = 0 \Rightarrow +10000 - 12500 \cdot \sin 53,13^\circ = 0 \quad \text{Ok!}$$

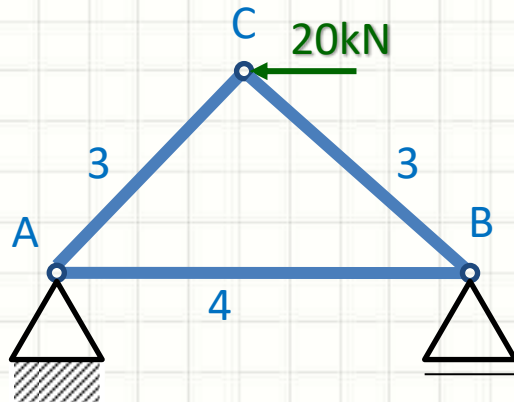
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -7500 + 12500 \cdot \cos 53,13^\circ = 0 \quad \text{Ok!}$$



EXERCÍCIO

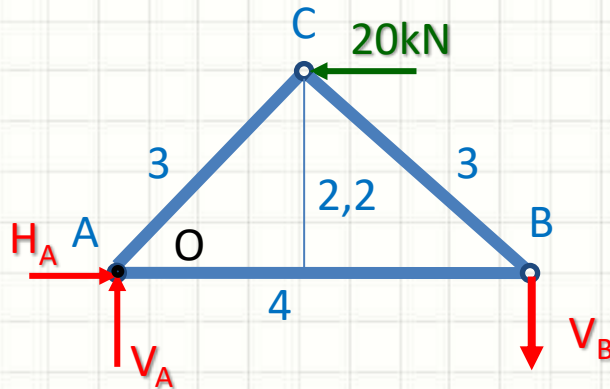
Exercício

Aplique o Método de Cremona



Exercício

Aplique o Método de Cremona



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 20000 = 0 \Rightarrow H_A = 20kN$$

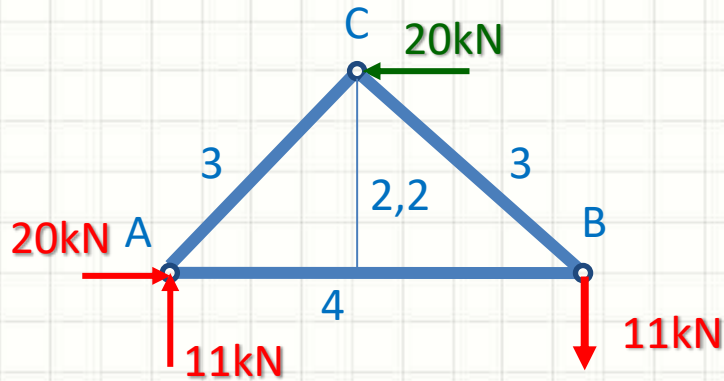
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(20000 \cdot 2,2) + (V_B \cdot 4) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{44000}{4} = 11kN$$

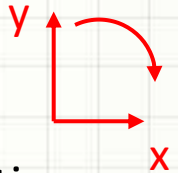
$$\therefore V_A = 11kN$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona

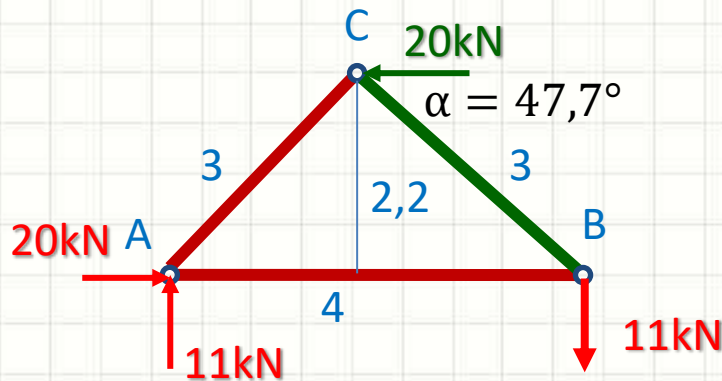


- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações
- Estimar trações/compressões

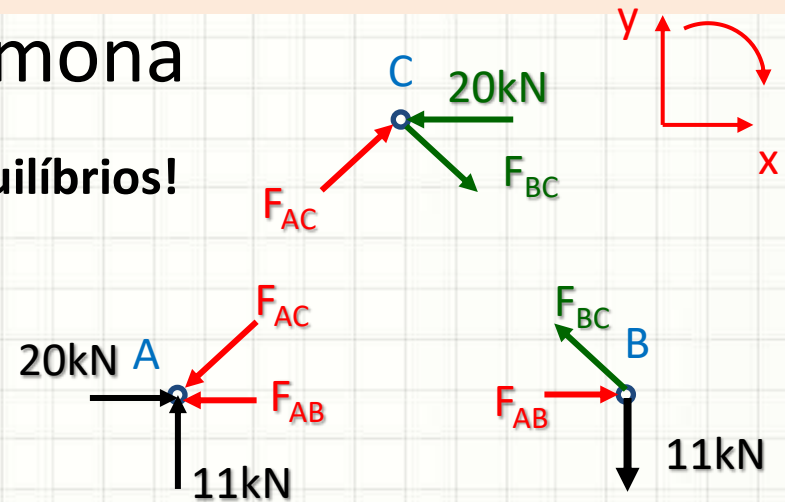


Exercício

Aplique o Método de Cremona



Equilíbrios!



$$\begin{aligned} \text{C)} \quad \sum F_x = 0 &\Rightarrow -20000 + F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ + F_{BC} \cdot \cos 47,7^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow +F_{AC} \cdot \sin 47,7^\circ - F_{BC} \cdot \sin 47,7^\circ = 0 \Rightarrow F_{AC} = F_{BC} \end{aligned}$$

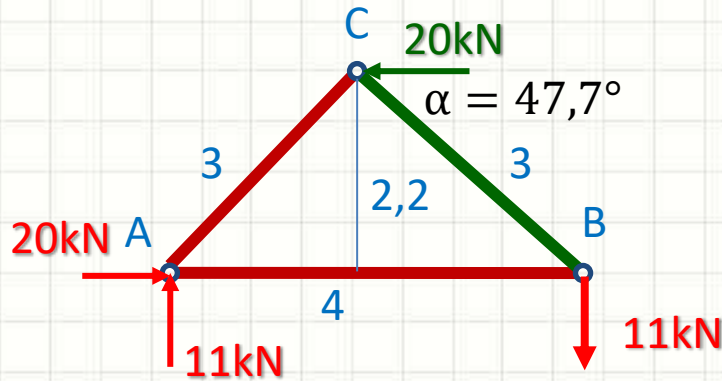
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -20000 + 2 \cdot F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ = 0$$

$$2 \cdot F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ = 20000$$

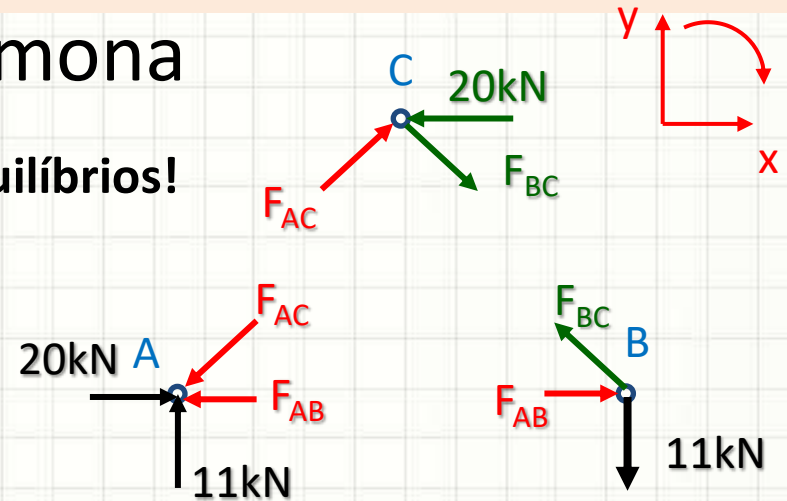
$$F_{AC} \cdot 0,67 = 10000 \Rightarrow F_{AC} = 14925N$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona



Equilíbrios!



C) $F_{AC} = 14925N$ $F_{BC} = 14925N$

A) $\sum F_x = 0 \Rightarrow +20000 - F_{AC} \cdot \cos 47,7^\circ - F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 9955N$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow +11000 - F_{AC} \cdot \sin 47,7^\circ = 0$

Ok!

B) $\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC} \cdot \cos 47,7^\circ + F_{AB} = 0$

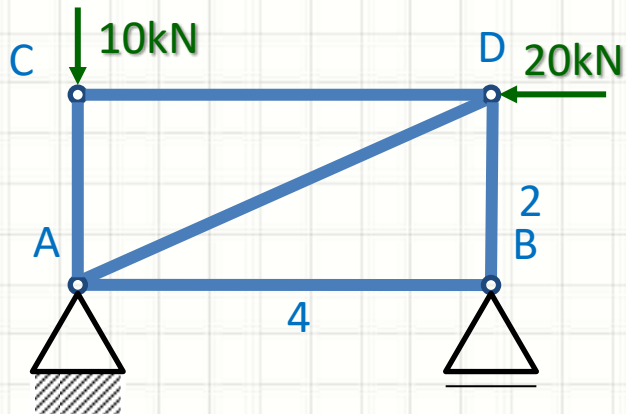
Ok!

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -11000 + F_{BC} \cdot \sin 47,7^\circ = 0$

Ok!

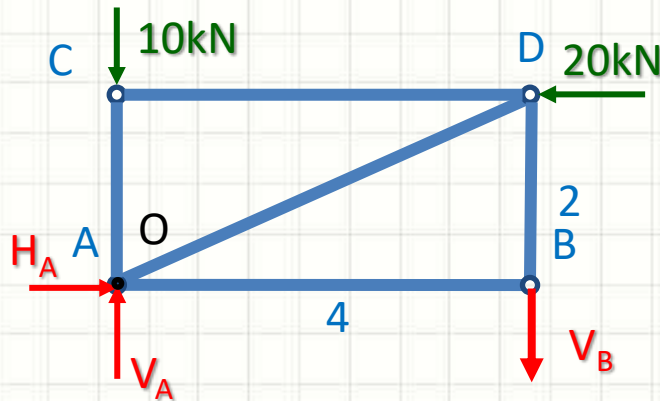
Exercício

Aplique o Método de Cremona

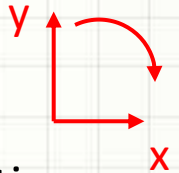


Exercício

Aplique o Método de Cremona



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 20000 = 0 \Rightarrow H_A = 20kN$$

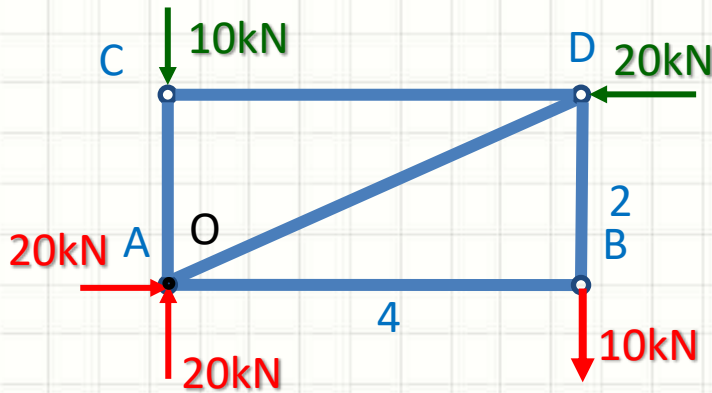
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - V_B - 10000 = 0 \Rightarrow V_A = 10000 + V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(20000 \cdot 2) + (V_B \cdot 4) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{40000}{4} = 10kN$$

$$\therefore V_A = 20kN$$

Exercício

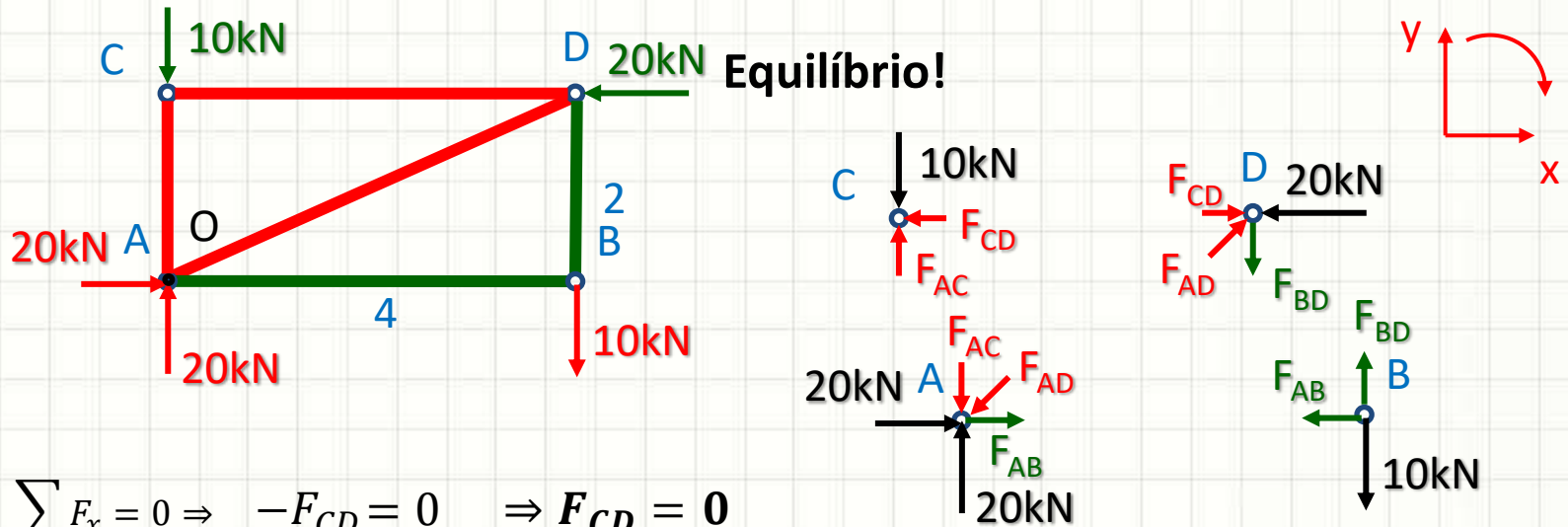
Aplique o Método de Cremona



- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Determinar as reações
- Estimar trações/compressões

Exercício

Aplique o Método de Cremona



C)
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{CD} = 0 \Rightarrow F_{CD} = 0$$

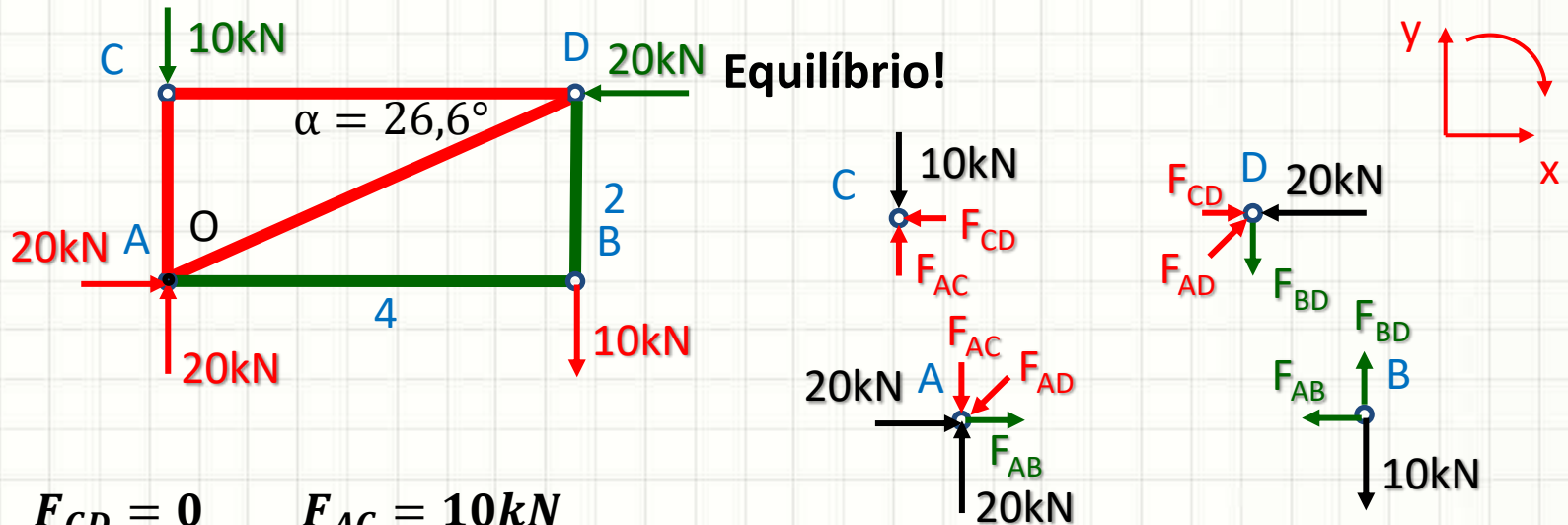
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +F_{AC} - 10000 = 0 \Rightarrow F_{AC} = 10kN$$

B)
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +F_{BD} - 10000 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 10kN$$

Exercício

Aplique o Método de Cremona



C) $F_{CD} = 0$ $F_{AC} = 10kN$

B) $F_{AB} = 0$ $F_{BD} = 10kN$

D) $\sum F_x = 0 \Rightarrow +F_{CD} + F_{AD} \cdot \cos 26,6^\circ - 20000 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 22,4kN$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{BD} + F_{AD} \cdot \sin 26,6^\circ = 0$ **Ok!**

Precisa do A?



MÉTODO DE RITTER

Esforços Internos

- Quando queremos todos os esforços...
 - O método dos nós é o mais eficiente
 - Mas é trabalhoso!
- E quando precisamos apenas de alguns?
 - O Método de Ritter pode ser mais simples
 - “Método das Seções”

Em uma treliça em equilíbrio, qualquer parte dessa treliça estará em equilíbrio.

Método de Ritter

- Procedimento

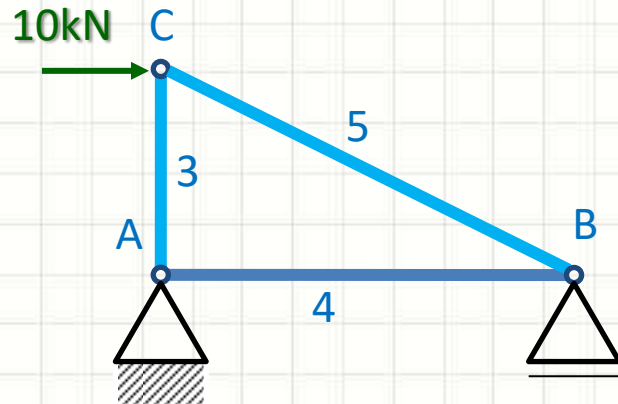
1. Determinar um corte

- Até 3 forças desconhecidas!
- Entre elas, a que se deseja identificar a tensão!
- Ex.: Corte de 3 barras!

2. Calcular pelo equilíbrio estático do pedaço

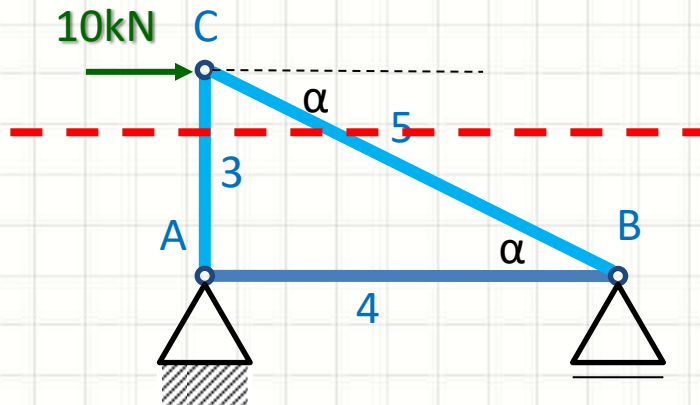
Exemplo – Método de Ritter

- Determine o esforço em CA e CB

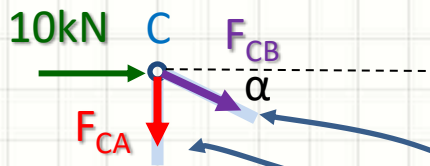
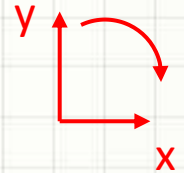


Exemplo – Método de Ritter

- Determine o esforço em CA e CB



- Traçar o Corte
- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Equilíbrio Estático



$$\alpha = \text{atg} \frac{3}{4} \quad \alpha = 36,9^\circ$$

$$F_{CBh} = F_{CB} \cdot \cos 36,9^\circ = 0,8 \cdot F_{CB}$$

$$F_{CBv} = F_{CB} \cdot \sin 36,9^\circ = 0,6 \cdot F_{CB}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 10000 + 0,8 \cdot F_{CB} = 0 \\ &\Rightarrow F_{CB} = -10000/0,8 \end{aligned}$$

Compressão $\Rightarrow F_{CB} = -12,5kN$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -0,6 \cdot F_{CB} - F_{CA} = 0 \\ &\Rightarrow F_{CA} = -0,6 \cdot F_{CB} \end{aligned}$$

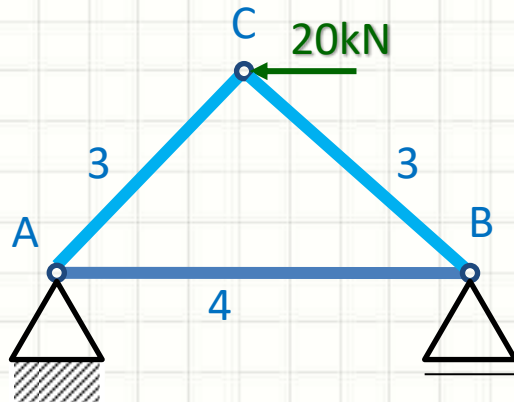
Tração $\Rightarrow F_{CA} = 7,5kN$



EXERCÍCIO

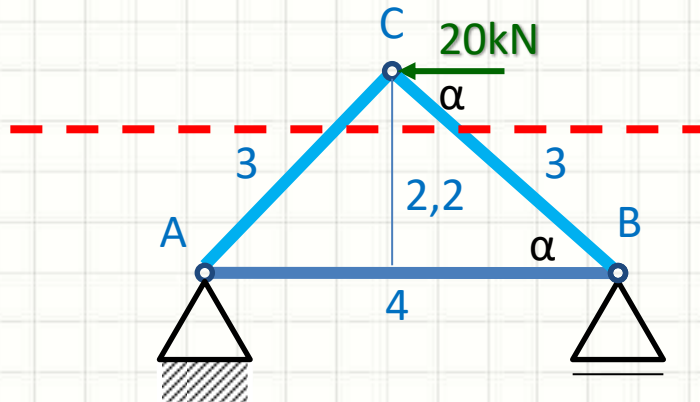
Exercício

Aplique o Método de Ritter



Exercício

Aplique o Método de Ritter



$$\alpha = \text{atg} \frac{2,2}{2} \quad \alpha = 47,7^\circ$$

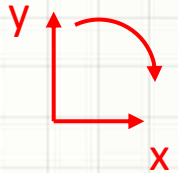
$$F_{CAh} = F_{CA} \cdot \cos 47,7^\circ = 0,67 \cdot F_{CA}$$

$$F_{CAv} = F_{CA} \cdot \sin 47,7^\circ = 0,74 \cdot F_{CA}$$

$$F_{CBh} = F_{CB} \cdot \cos 47,7^\circ = 0,67 \cdot F_{CB}$$

$$F_{CBv} = F_{CB} \cdot \sin 47,7^\circ = 0,74 \cdot F_{CB}$$

- Traçar o Corte
- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Equilíbrio Estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -20000 - 0,67F_{CA} + 0,67F_{CB} = 0$$

$$\Rightarrow F_{CB} = (+20000 + 0,67F_{CA})/0,67$$

$$\Rightarrow F_{CB} = 29851 + F_{CA}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -0,74F_{CB} - 0,74F_{CA} = 0$$

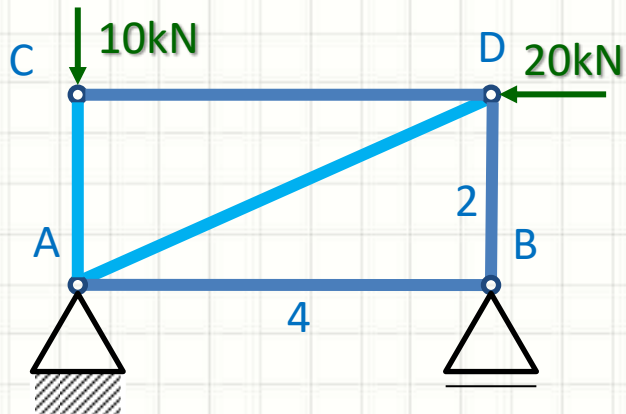
$$\Rightarrow F_{CA} = -F_{CB}$$

$$\Rightarrow F_{CB} = 14,9 \text{ kN}$$

$$\therefore F_{CA} = -14,9 \text{ kN}$$

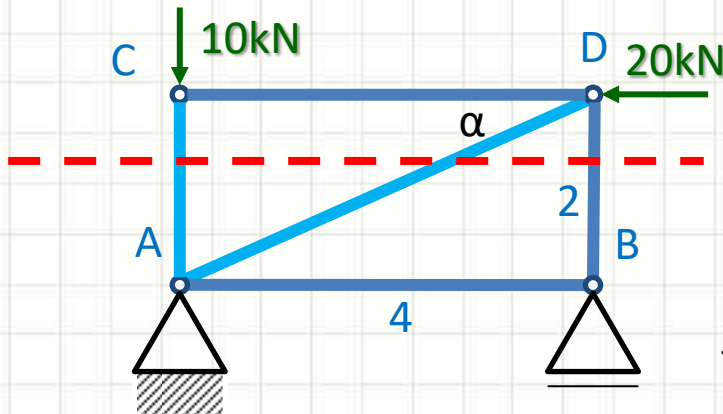
Exercício

Aplique o Método de Ritter



Exercício

Aplique o Método de Ritter

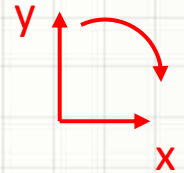


$$\alpha = \text{atg} \frac{2}{4} \quad \alpha = 26,6^\circ$$

$$F_{DAh} = F_{DA} \cdot \cos 26,6^\circ = 0,89 \cdot F_{DA}$$

$$F_{DAv} = F_{DA} \cdot \sin 26,6^\circ = 0,45 \cdot F_{DA}$$

- Traçar o Corte
- Corpo livre
- Decompor esforços
- Identificar as direções positivas
- Equilíbrio Estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -20000 - 0,89 F_{DA} = 0$$

$$\Rightarrow F_{DA} = -20000 / 0,89$$

$$\Rightarrow F_{DA} = -22472 \cong -22,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10000 - F_{CA} - 0,45 F_{DA} - F_{DB} = 0$$

$$\Rightarrow F_{DB} = 10000 + F_{CA} + 0,45 \cdot 22472$$

$$\Rightarrow F_{DB} = 20112 + F_{CA}$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -4 \cdot F_{CA} - 10000 \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow F_{CA} \cong -10 \text{ kN}$$

$$\therefore F_{DB} \cong 10,1 \text{ kN}$$



CONCLUSÕES

Resumo

- Calcular estruturas e treliças é trabalhoso
- Há vários métodos
 - O mais prático depende do propósito!

- **TAREFA:** Exercícios Aula 5

SAVA5!

-
- Manual/Download do FTOOL
 - Vídeo: Treliza Plana no FTool

- Vigas: O que é?

- Geometria, Carregamento e Esforços



PERGUNTAS?

Exercício para casa

Determine os esforços nas barras AB e BC

