



MECÂNICA DOS SÓLIDOS

VIGAS

PARTE II

Prof. Dr. Daniel Caetano

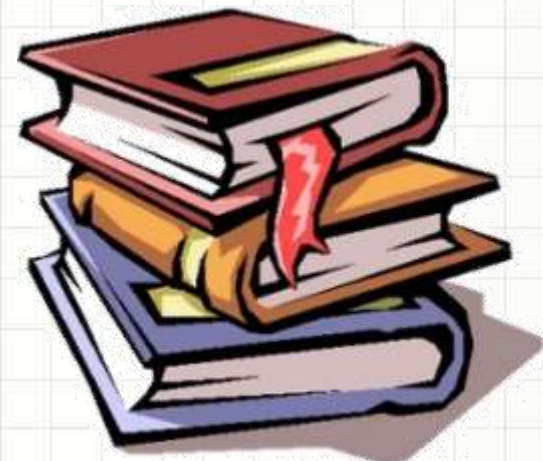
2019 - 1

Objetivos

- Conceituar cargas distribuídas e sistemas mecanicamente equivalentes
- Compreender uma das técnicas para cálculos com cargas distribuídas
- Compreender o traçado de diagramas de cortante e momentos fletores
- **Atividade Aula 7 – SAVA!**
- **Pré-Aula 08 – SAVA**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica dos Sólidos – Aula 7)

Material Didático

Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 5 (SAVA)

Minha Biblioteca

Estática e Mecânica dos Materiais (BERR;JOHNSTON),
Cap. 11, 12 e 13

Biblioteca Virtual

Resistência dos Materiais (Hibbeler, 7ª, pgs 181-201)

LEMBRETE: CONSULTAR O “ANTES” DA AULA 8 NO SAVA!

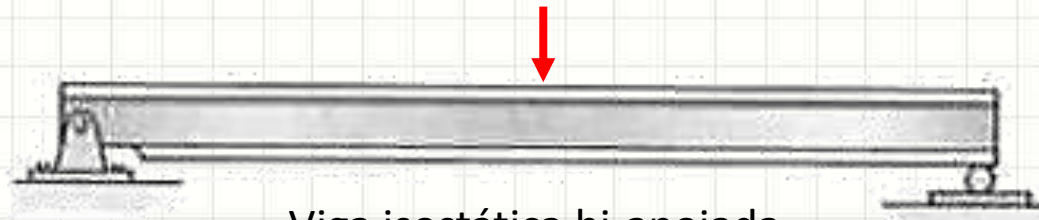
The background features a light gray grid pattern. A thick, dark red wavy line curves across the top of the page. Below it, a dashed red line follows a similar path. The text is positioned in the lower right quadrant of the grid.

RETOMANDO:

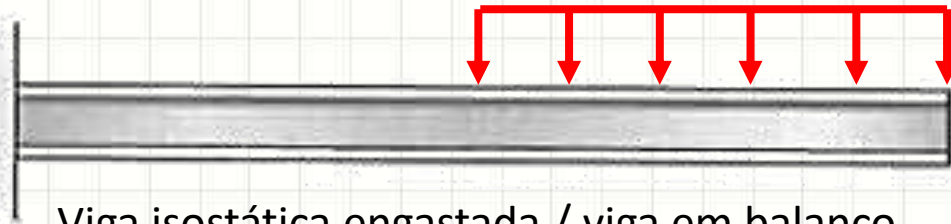
AS VIGAS

Objeto de Estudo

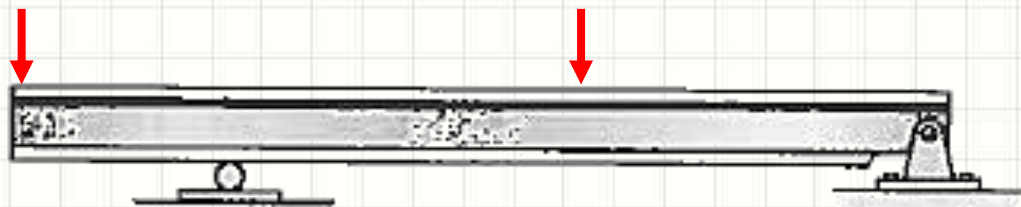
- Vigas – Cargas perpendiculares ao eixo



Viga isostática bi-apoiada



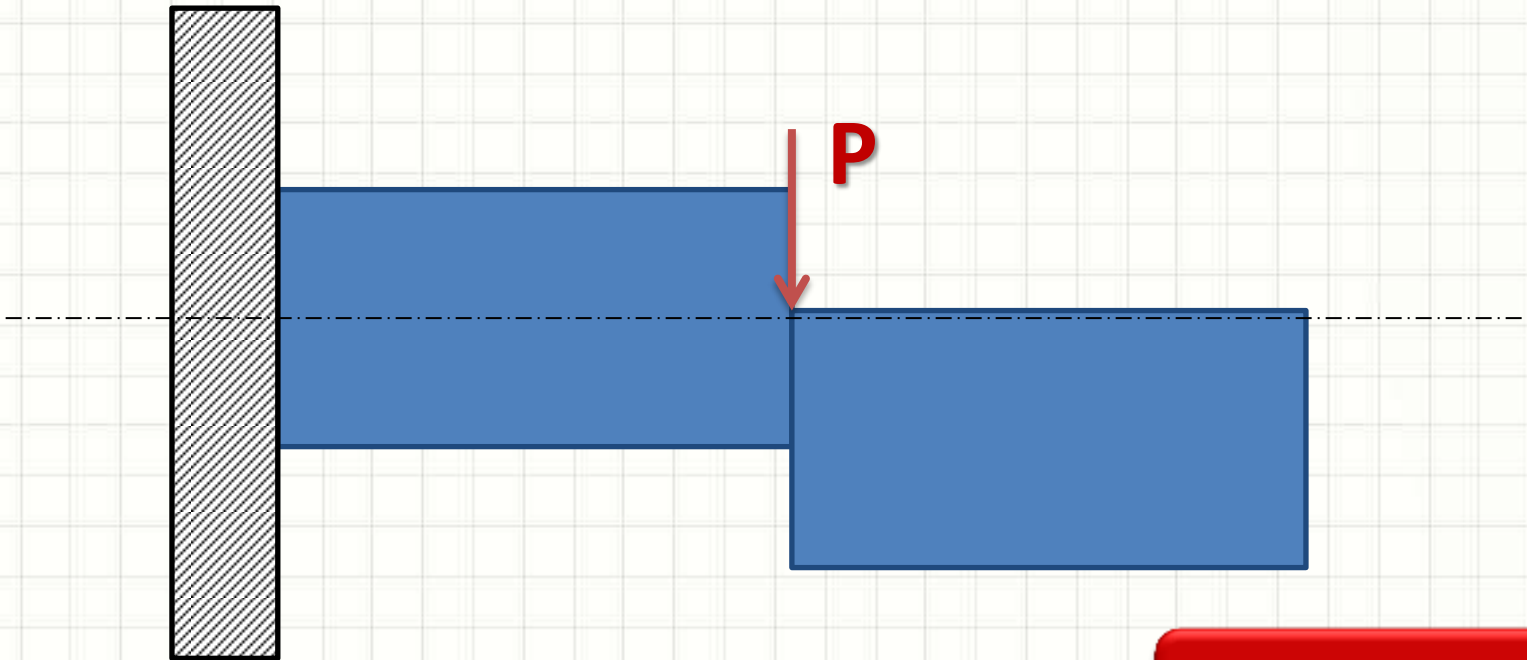
Viga isostática engastada / viga em balanço



Viga isostática bi-apoiada com extremidade em balanço

Força Cortante

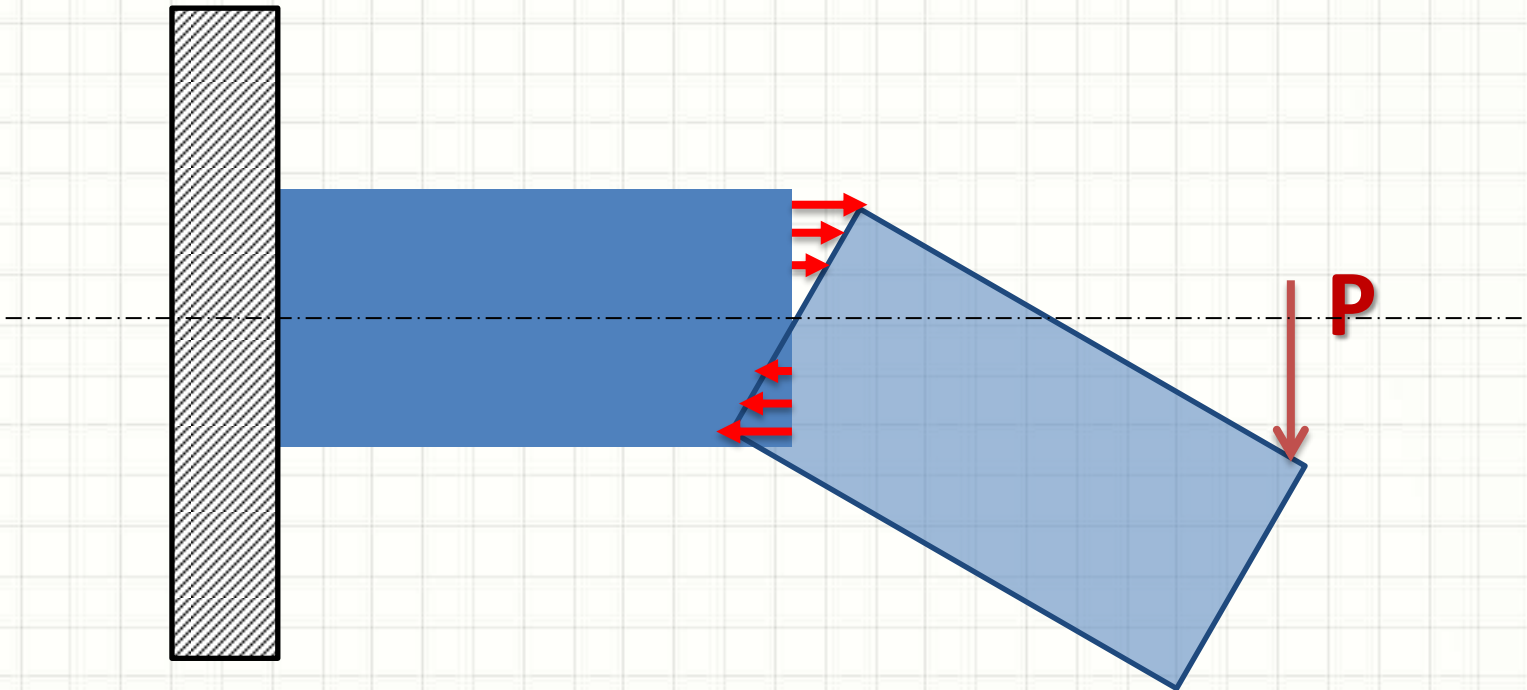
- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
 - É perpendicular ao eixo da barra



Só isso?

Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
 - Resulta das forças cortantes



Diagramas de Esforços Cortantes

- Por que traçar diagrama de cortante?
 - Cortante pode variar ao longo do comprimento
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação

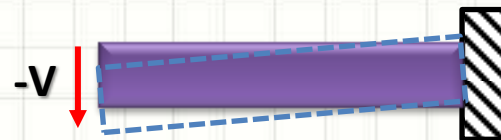
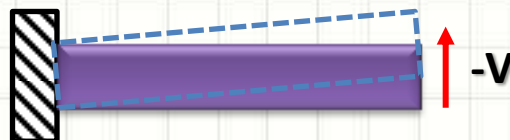
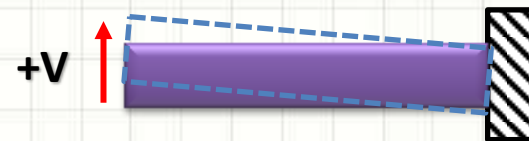
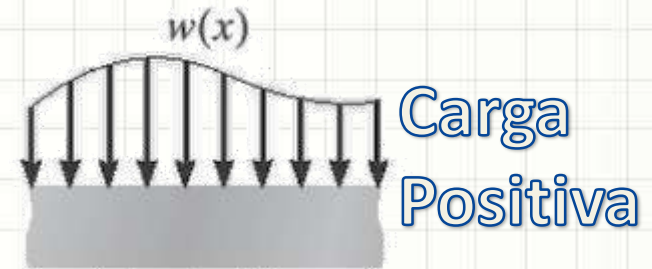
- Convenção de Sinais

- Carregamento

- De cima para baixo: +
 - De baixo para cima: -

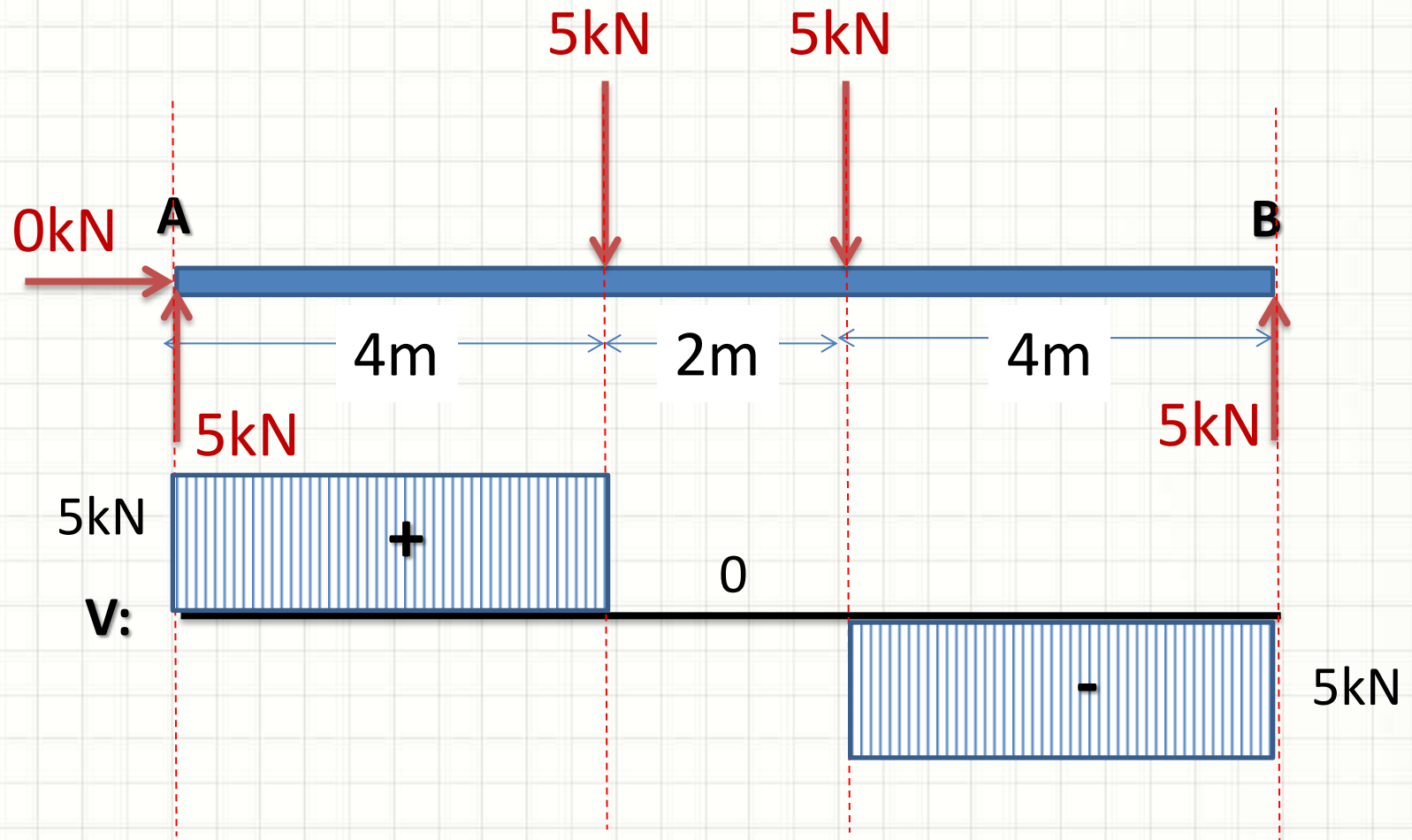
- Cortante

- Gira sent. Horário: +
 - Gira sent. Anti-Horário: -



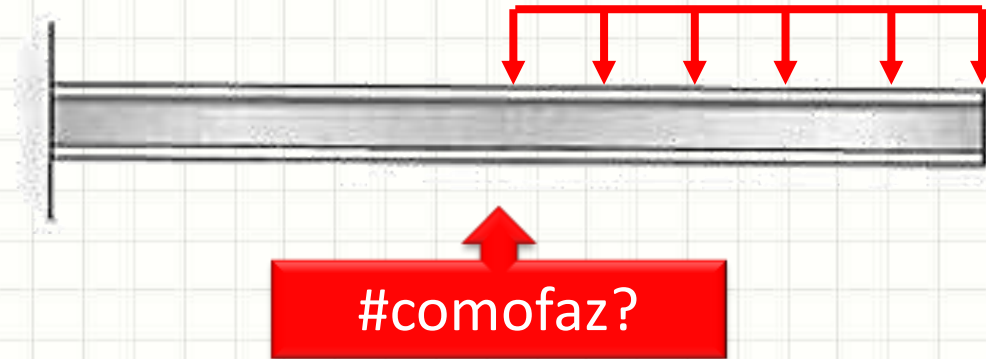
Exemplo: Diagrama de Esf. Cortantes

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



Diagramas de Esforços Cortantes

- E se as forças forem uma carga distribuída?
 - Ex.: enchimento de uma laje rebaixada



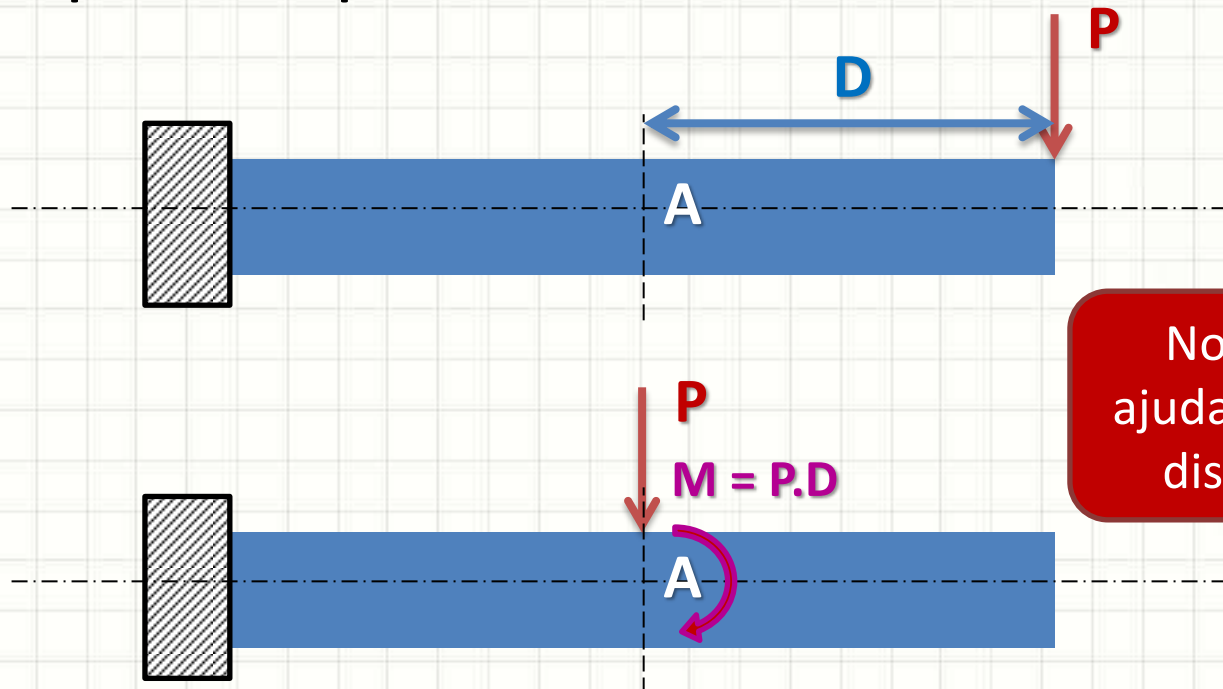


TEOREMA DO CORTE:

SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES

Sistemas de Forças ME

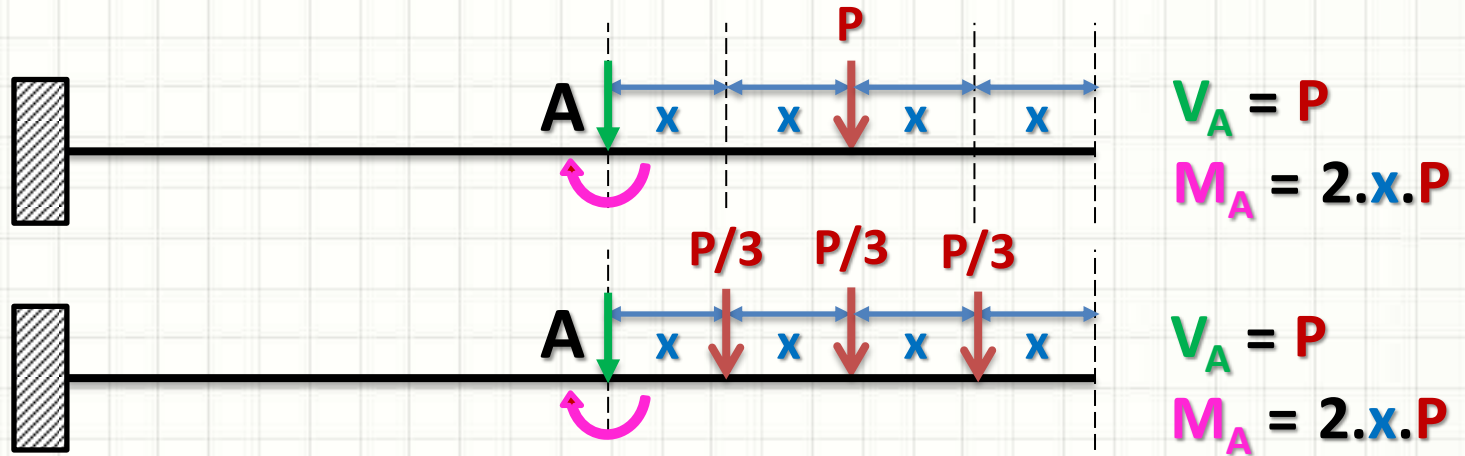
- Quando, para seção transversal específica:
 - Configurações de forças diferentes...
 - Esforços solicitantes iguais
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



No que isso ajuda para carga distribuída?

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



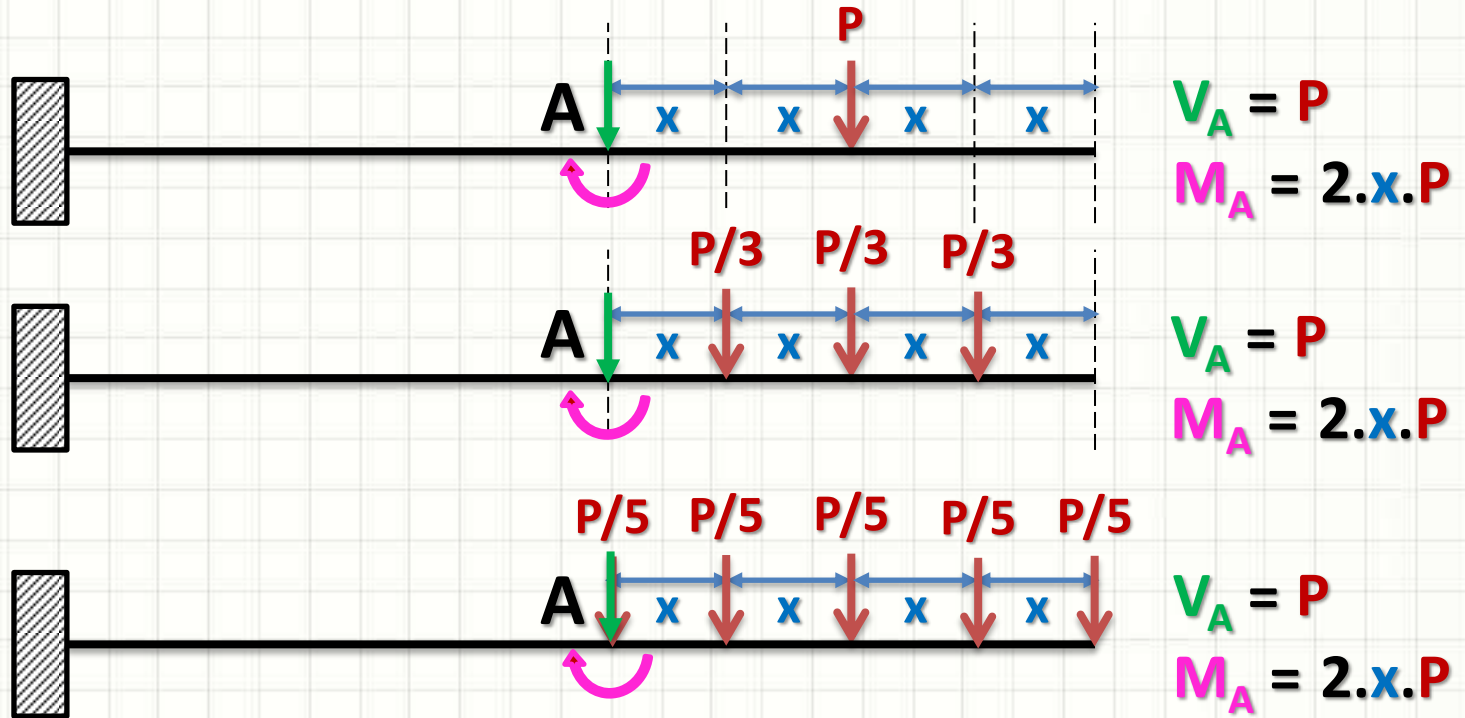
$$V_A = 3 \cdot \frac{P}{3}$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot 6 \cdot x$$

Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



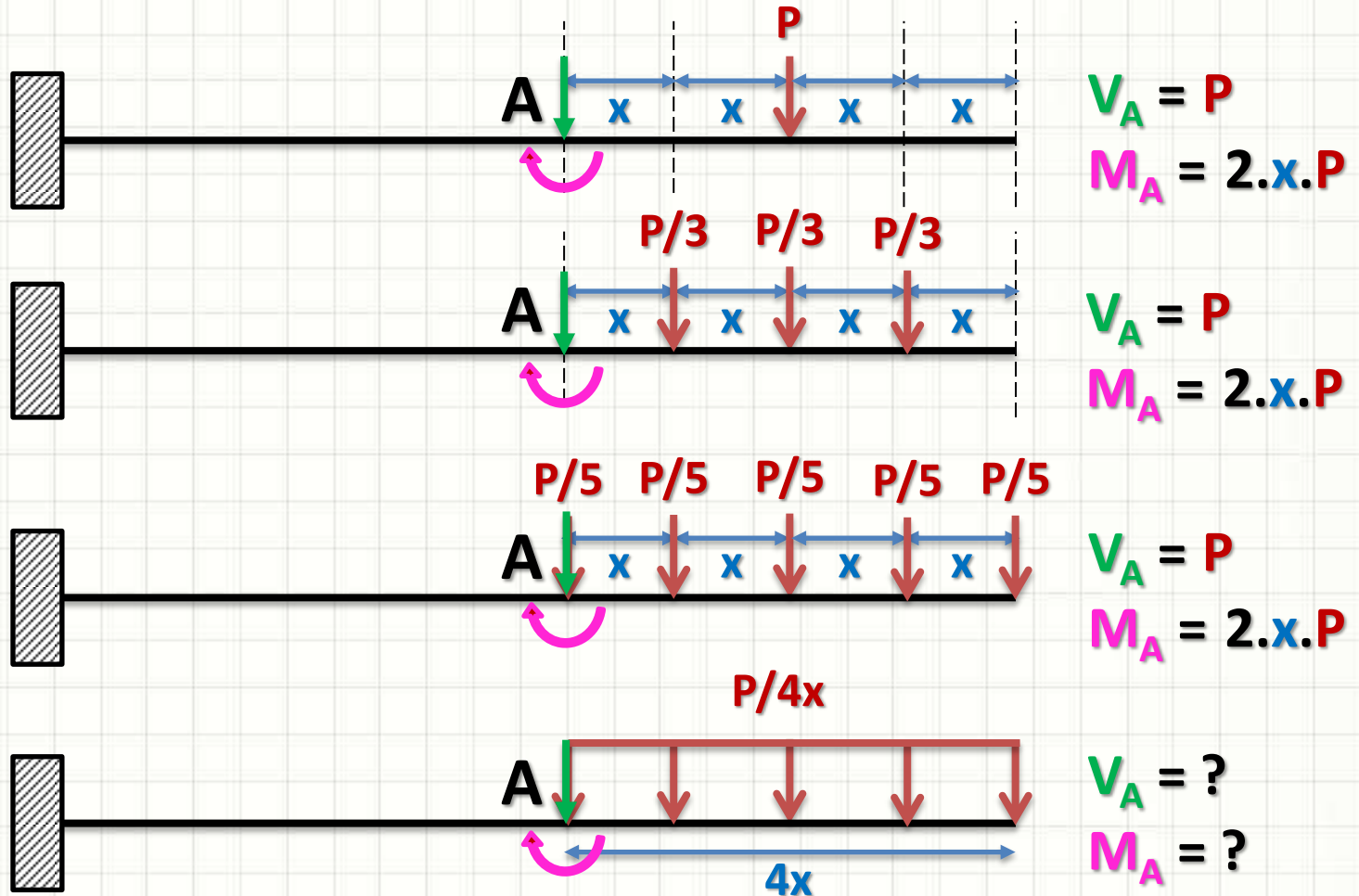
$$V_A = 5 \cdot \frac{P}{5}$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 0 + \frac{P}{5} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 4 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 10 \cdot x$$

Sistemas de Forças ME

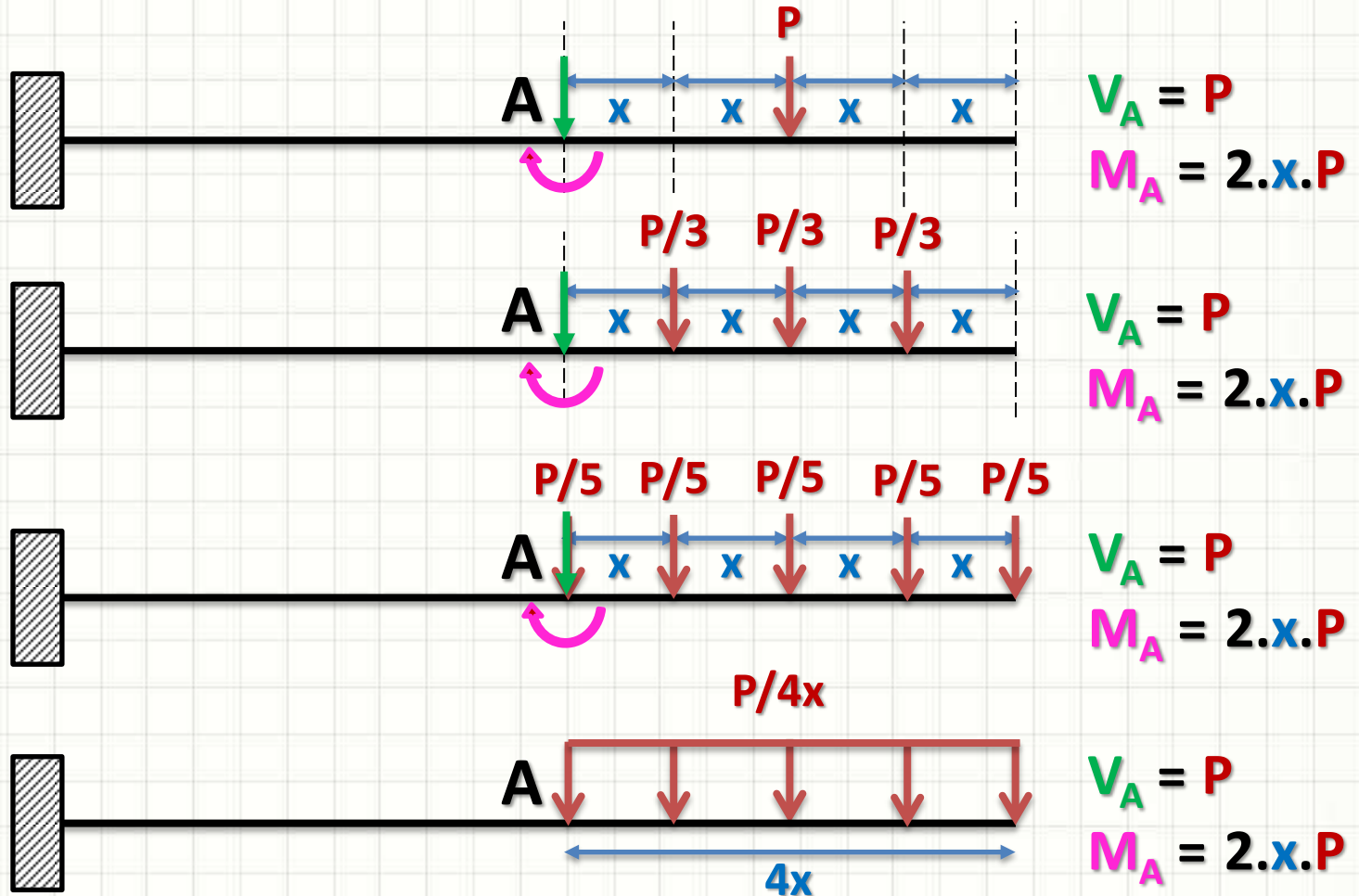
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sist

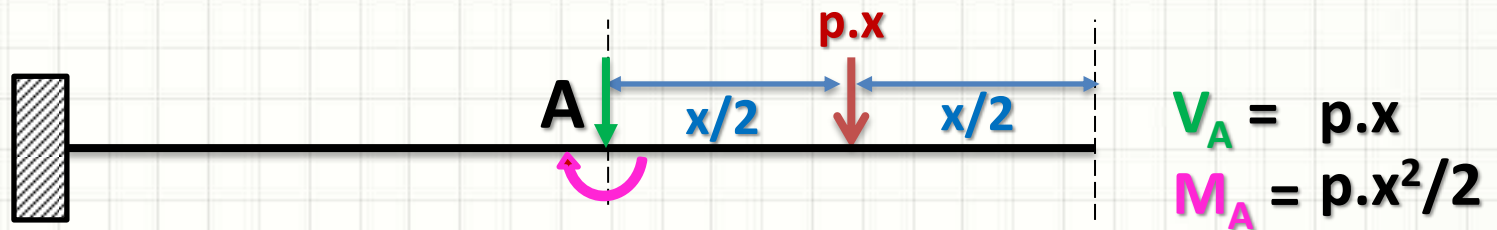
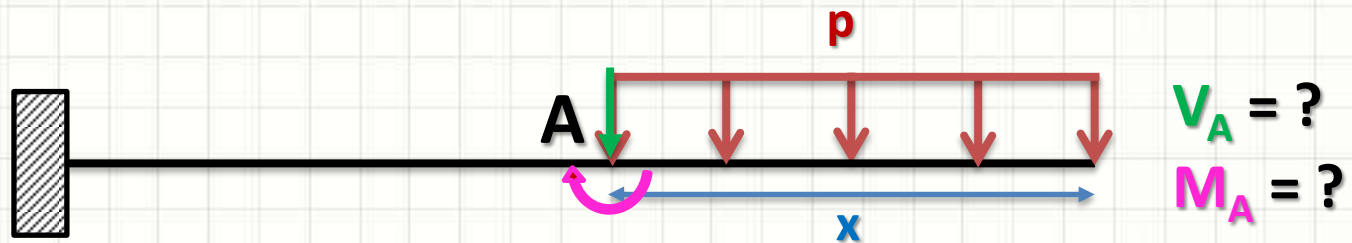
É como se a carga total estivesse no C.G. da carga distribuída!

- Exemplo: Do ponto de vista de A



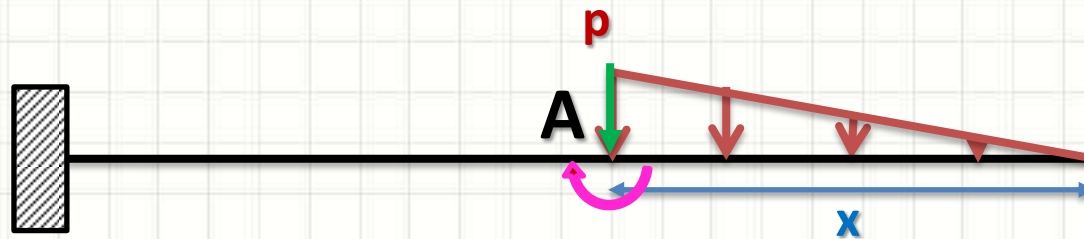
Sistemas de Forças ME

- Ou seja: Do ponto de vista de **A**

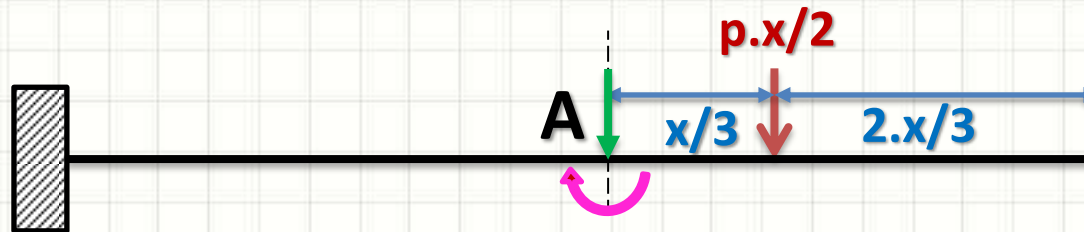


Sistemas de Forças ME


- Sempre no meio?
 - Não!
 - No C.G. da “área” da carga distribuída!



$$V_A = ?$$
$$M_A = ?$$



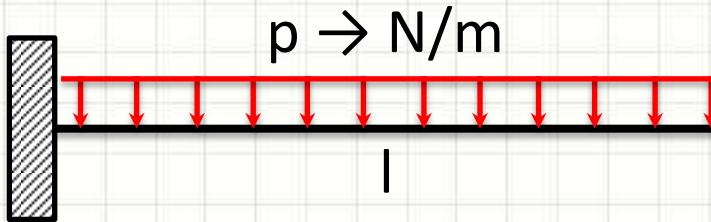
$$V_A = p \cdot x / 2$$
$$M_A = p \cdot x^2 / 6$$



**DIAGRAMAS DE
ESFORÇOS CORTANTES
EM CARGAS DISTRIBUÍDAS**

Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?

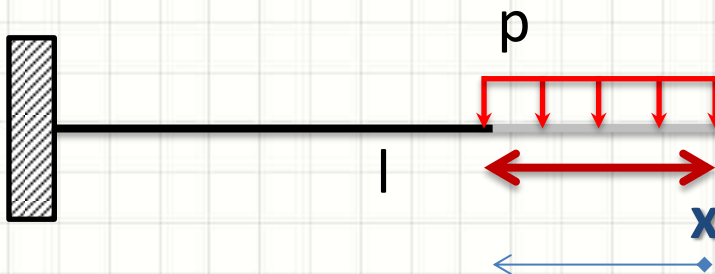
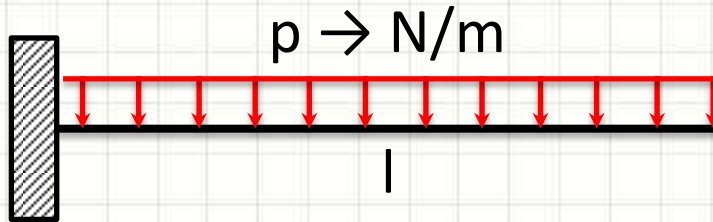
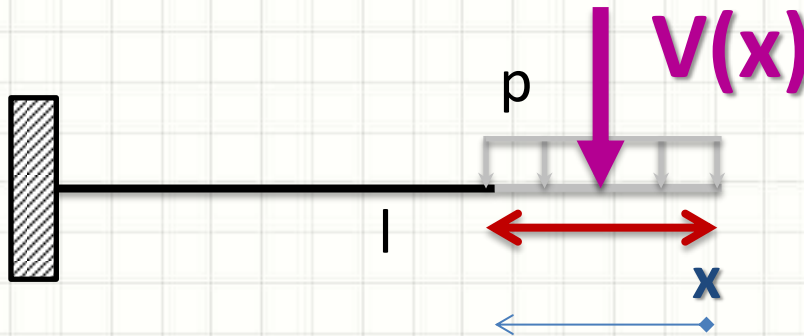


Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



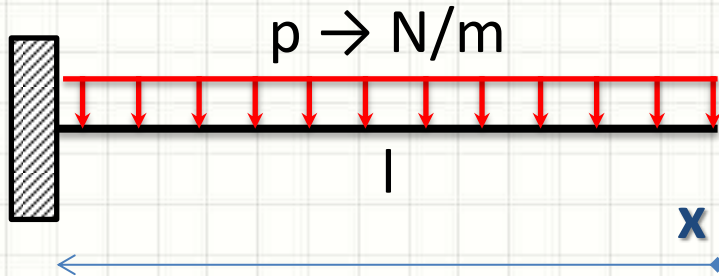
x

$$V(x) = p \cdot x$$

- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!

Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída

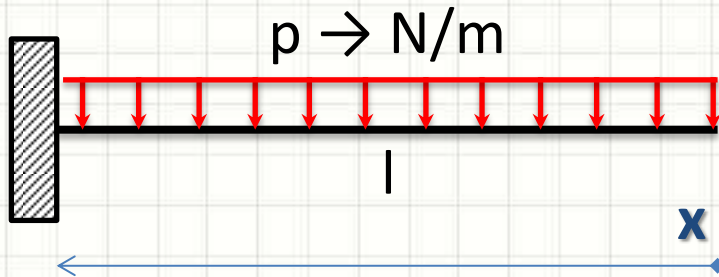


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...



Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída

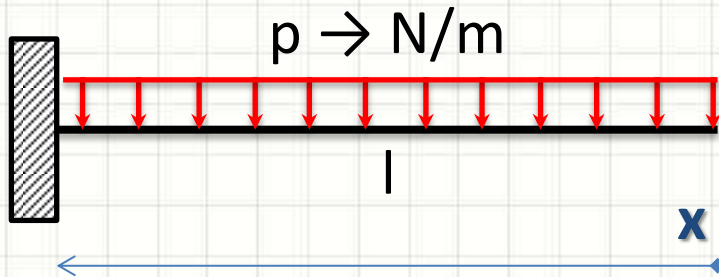


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...



Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$ sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

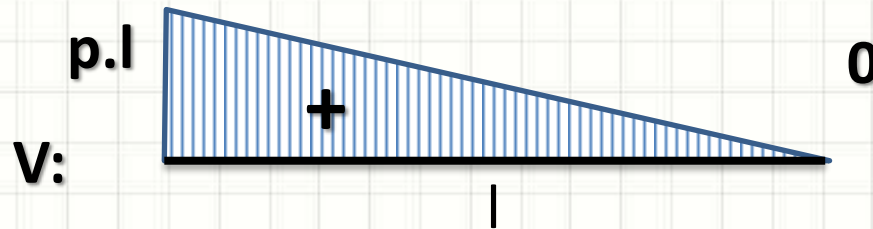
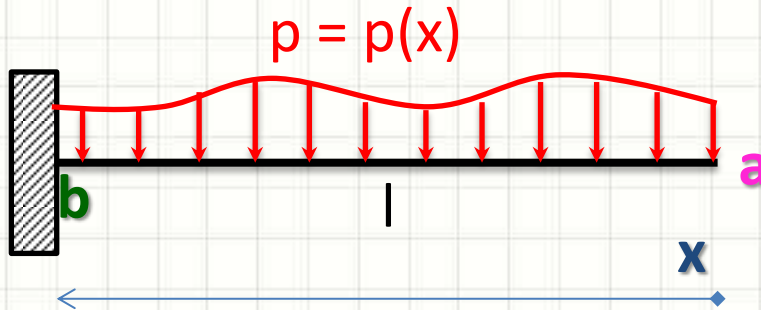


Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Genérica Distribuída

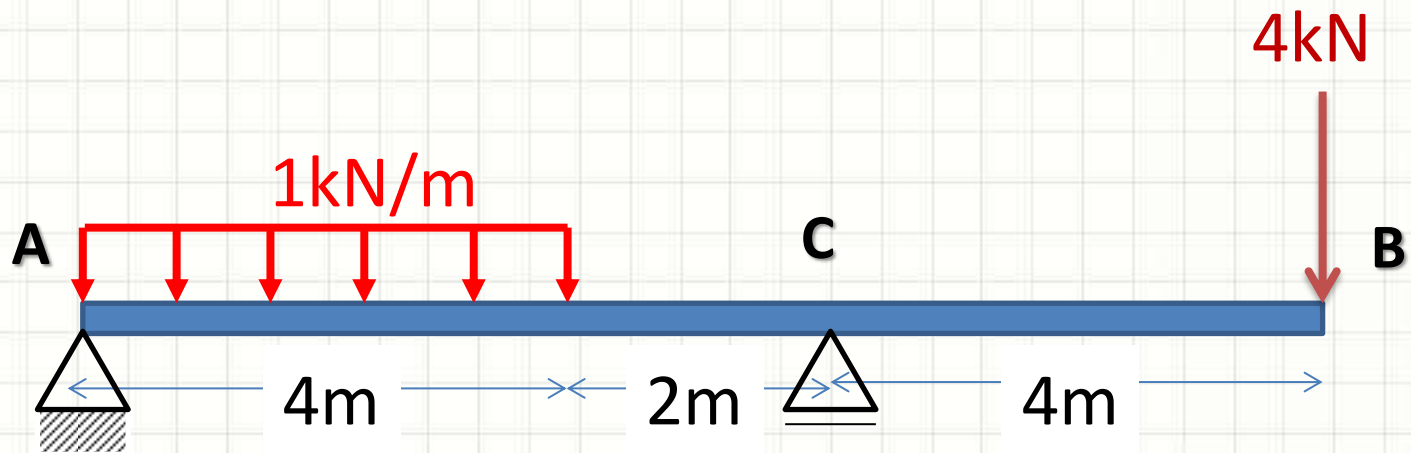


- Qual a força cortante de a até b ?

$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$

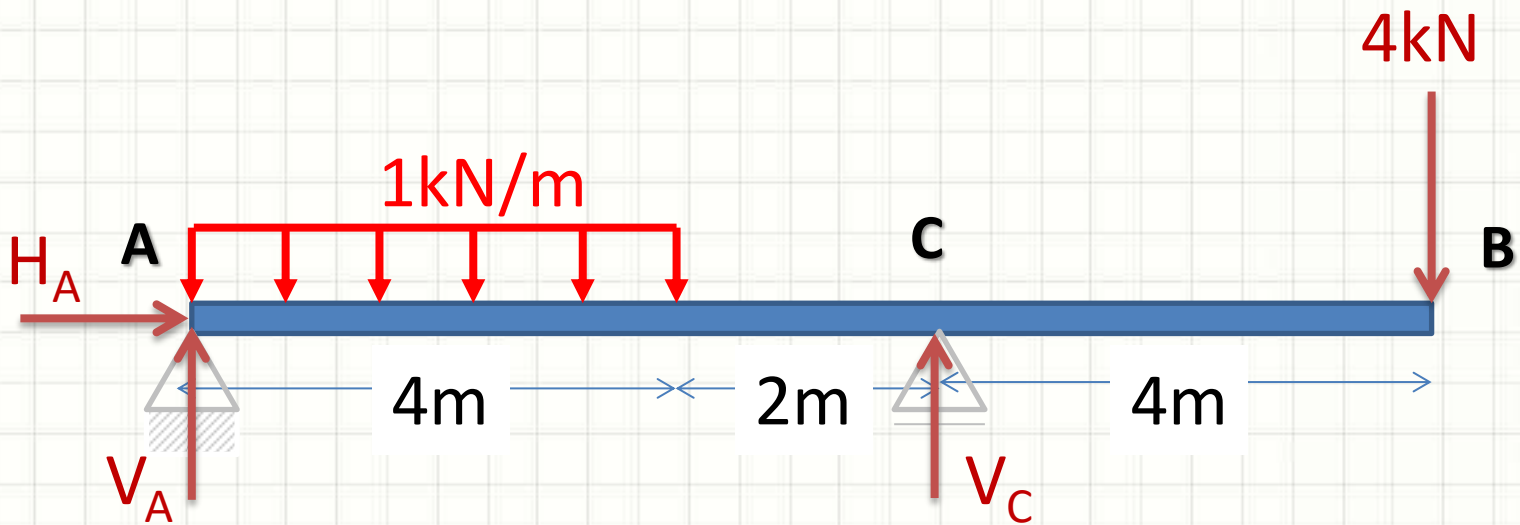
Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



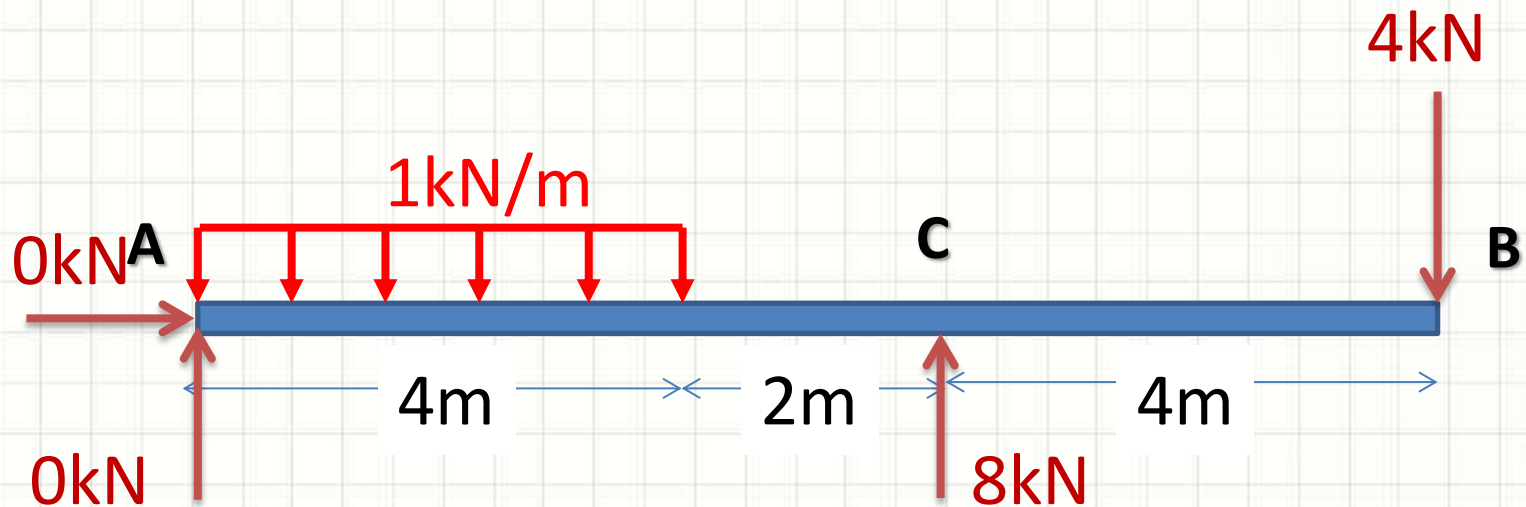
Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



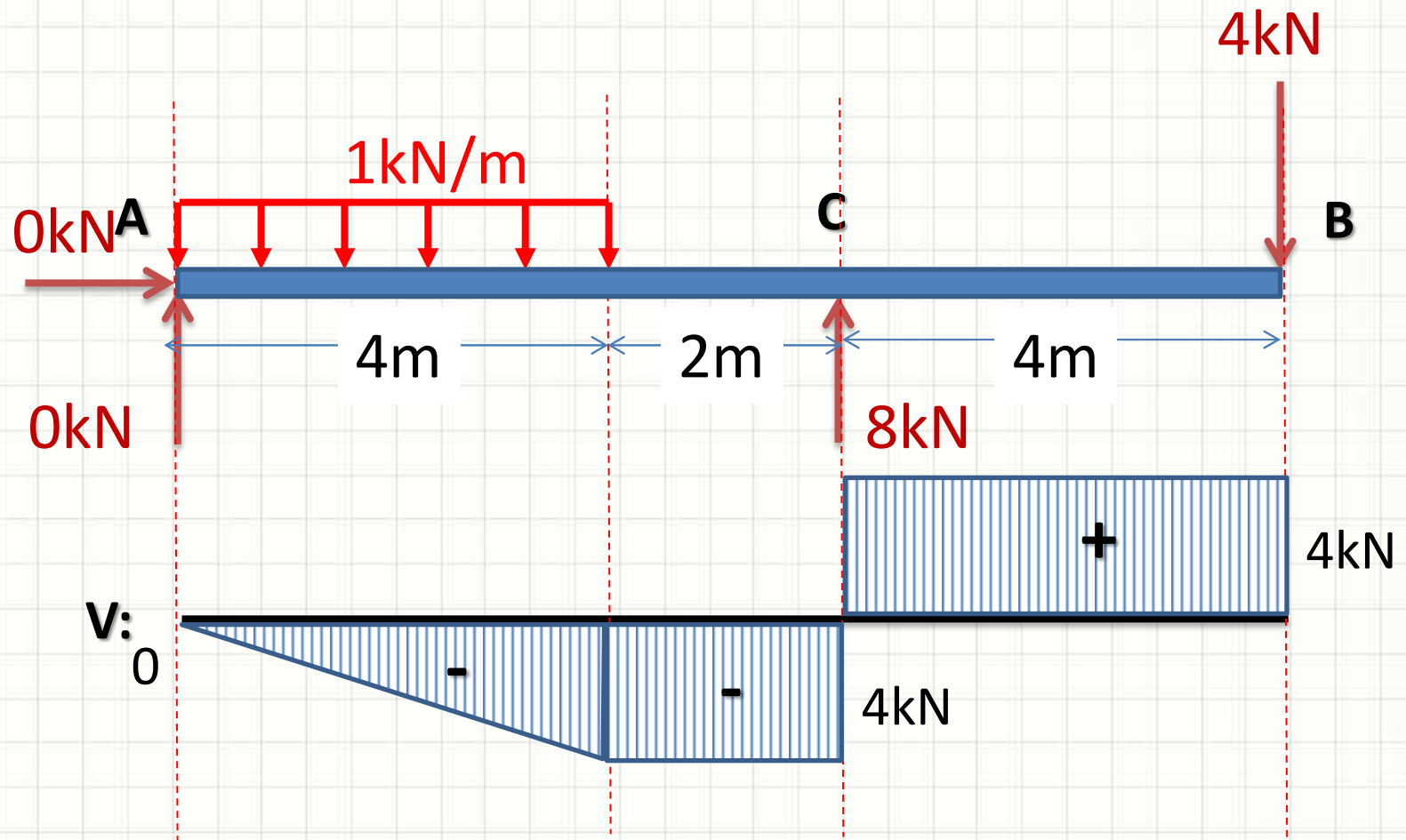
Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



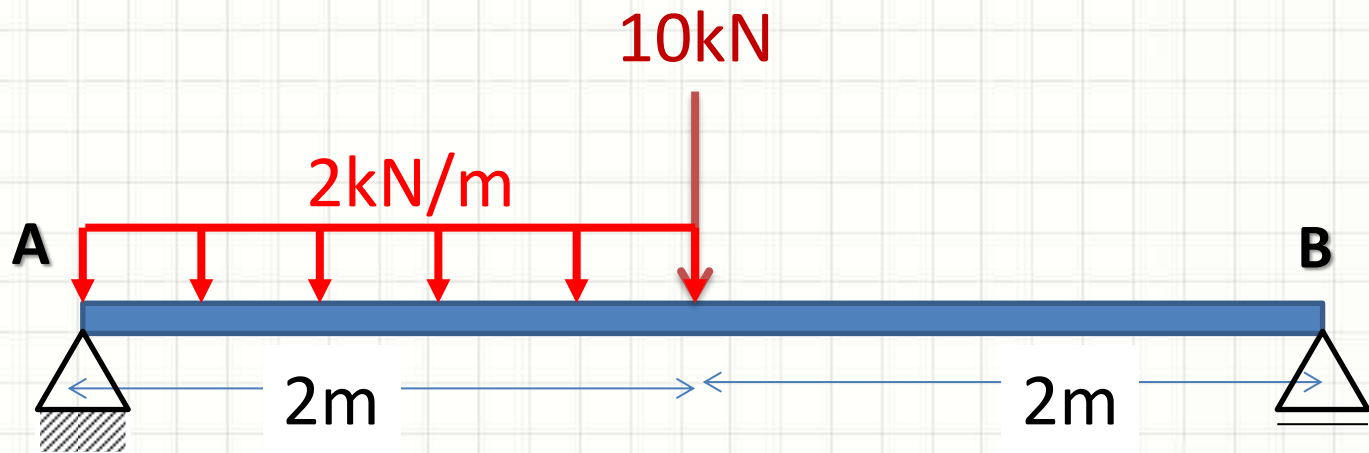
Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



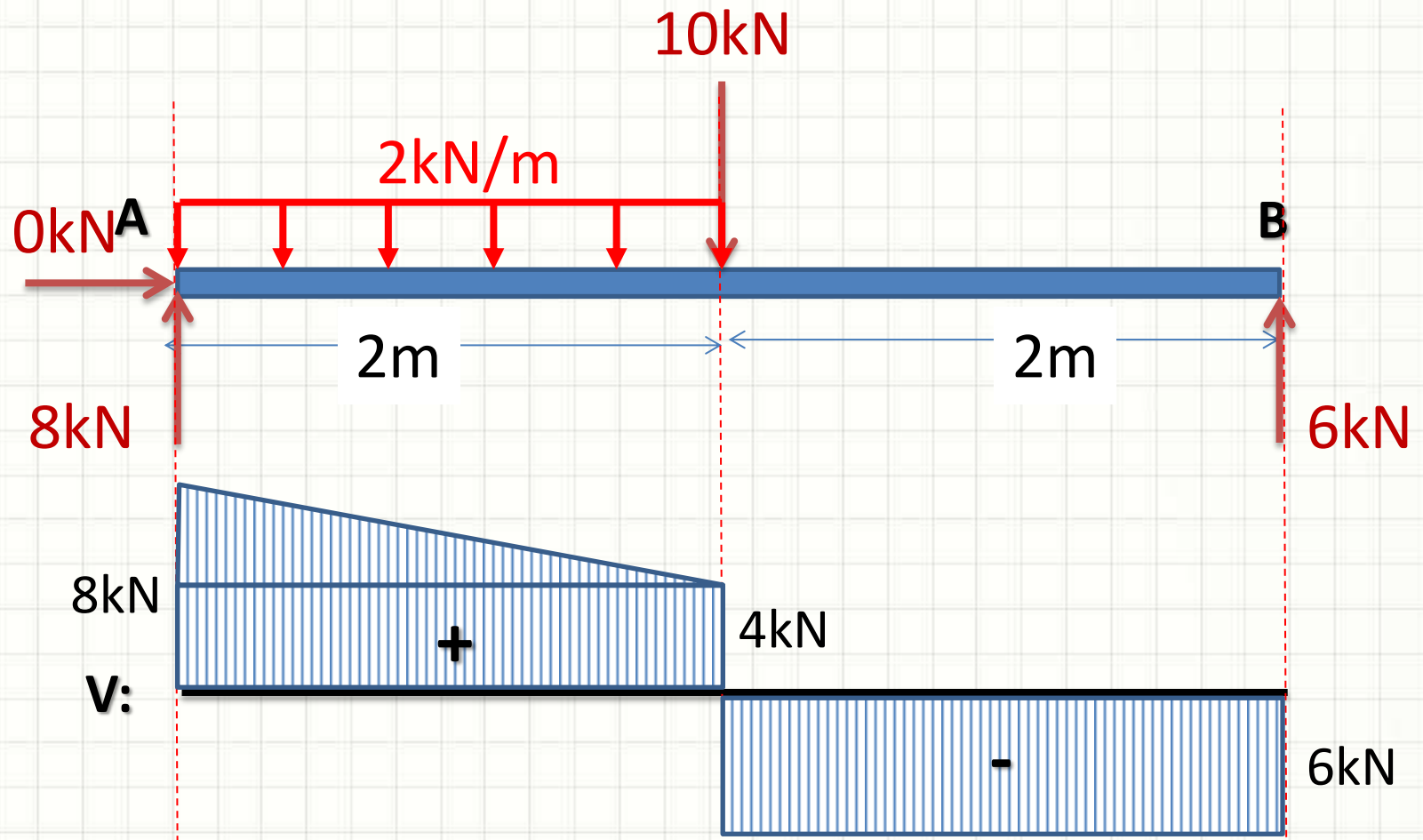
Exercício

- Trace o Diagrama de Cortante:



Exercício

- Trace o Diagrama de Cortante:



The background features a light gray grid pattern. A thick, dark red curved line arches across the top of the page. Below this line, a dashed red line follows a similar curved path. The text is positioned in the lower right quadrant of the grid.

DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR

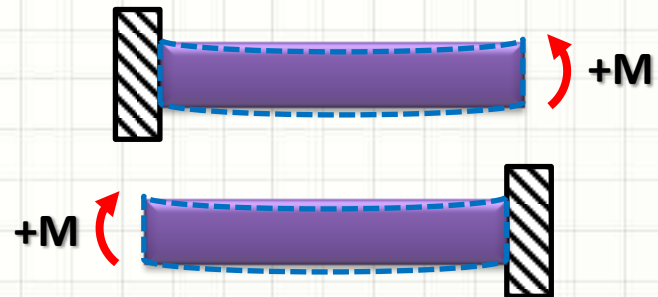
Diagramas de Momentos Fletores

- Por que traçar diagramas de momento?
 - Momento usualmente varia ao longo da viga
 - Encontrar o ponto de maior sollicitação

- Convenção de Sinais

- Momento Positivo

- Traciona parte inferior



- Momento Negativo

- Traciona parte superior



Convenção de Sinal em Diagramas

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Determinação do Equilíbrio Estático
 - Direções positivas são **arbitrárias**



Convenções de Sinal em Diagramas

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Traçado de Diagramas
 - Direções positivas são **convencionadas**

Grandeza	+	-
Força Normal	Força saindo da barra (tração)	Força entrando na barra (compr.)
Carga	Para baixo	Para cima
Força Cortante	Gira barra no sentido horário	Gira barra no sentido anti-horário
Momento Fletor	Traciona em baixo	Traciona em cima
Momento Torçor	Torque saindo da barra	Torque entrando na barra

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?

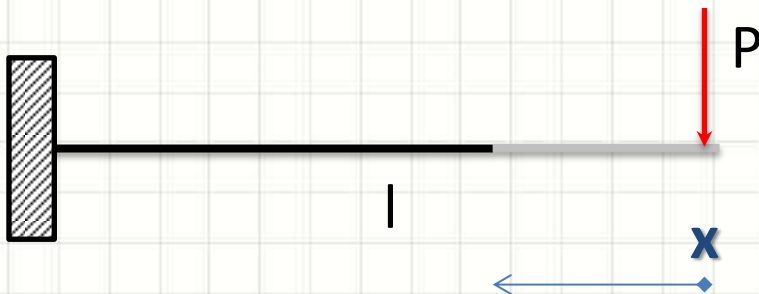
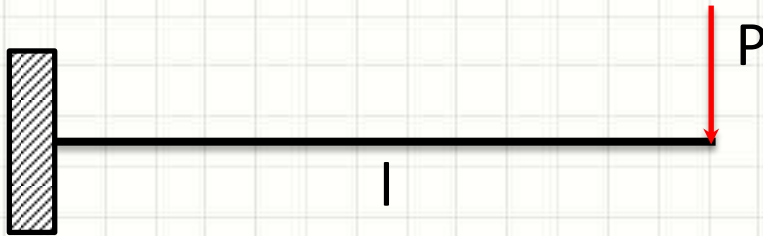
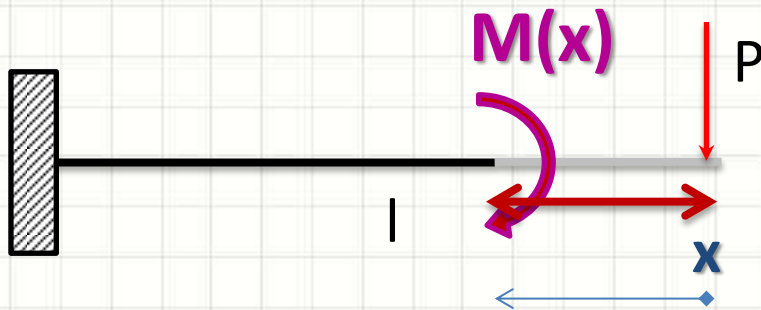


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “x”?



X

O sinal vem do fato que traciona em cima!

$$M(x) = -P \cdot x$$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada

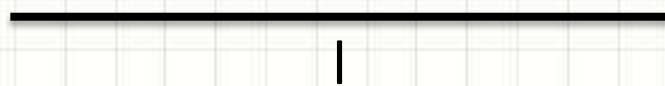


- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

??

0

M:



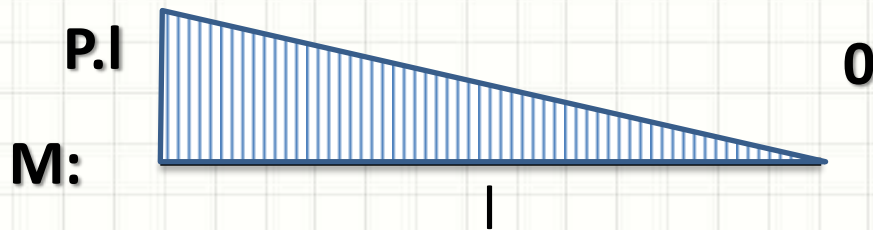
$x = l$

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada

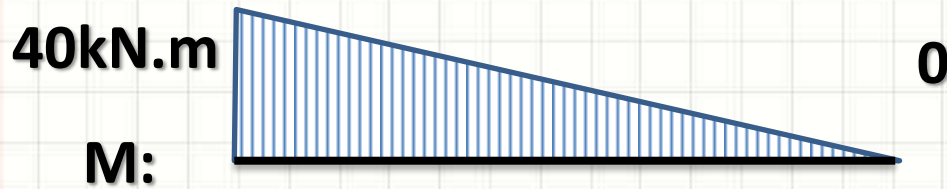
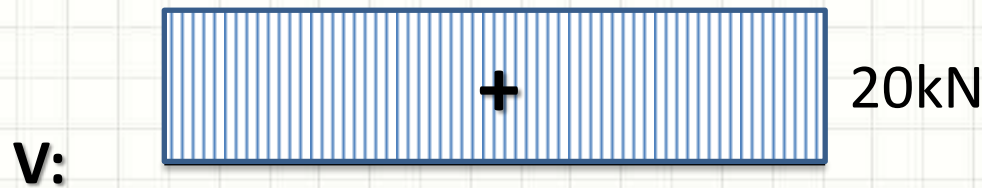
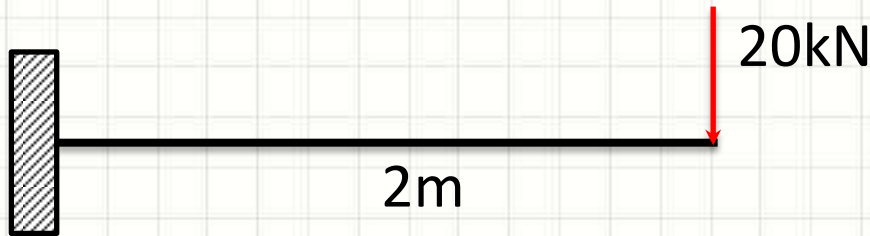


- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



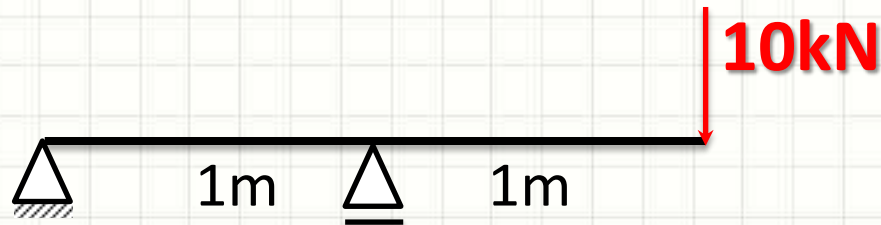
Diagramas de Cortante e Momento

- Força Cortante Concentrada



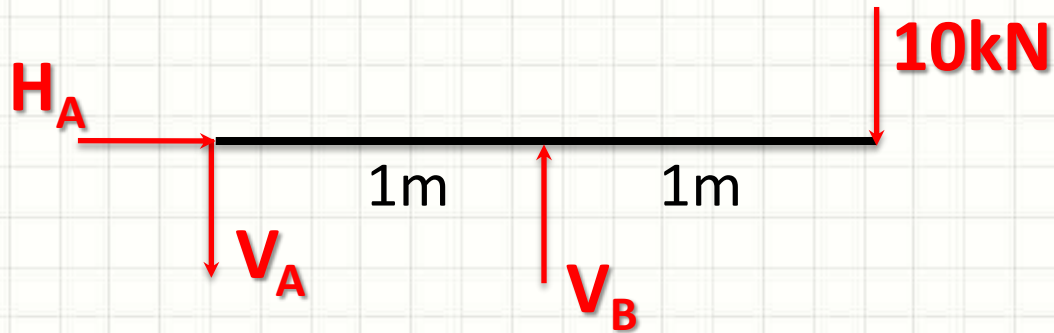
Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



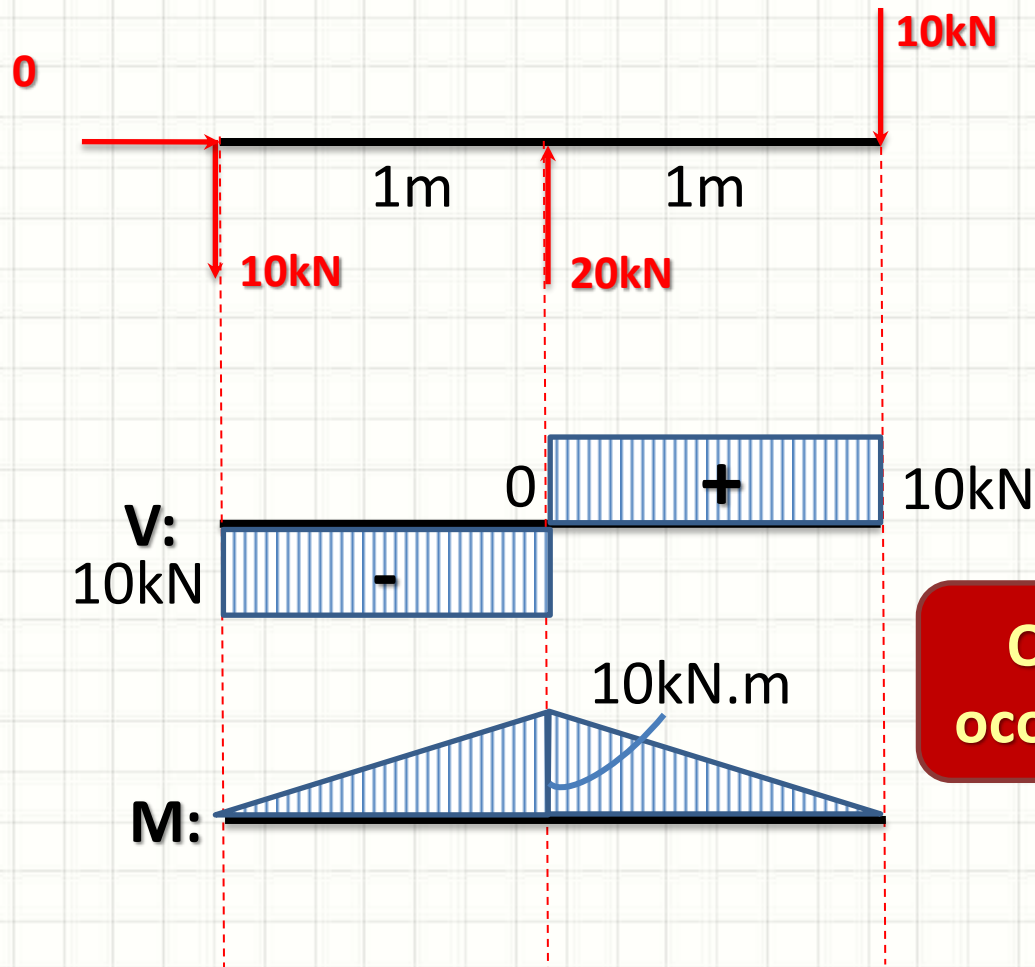
Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



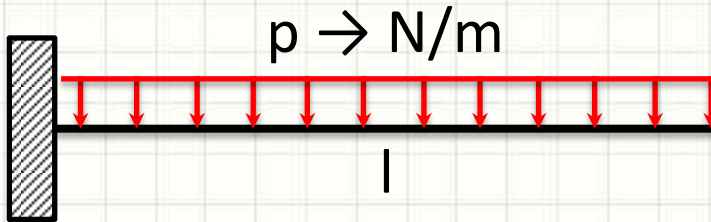
Observe: $M_{\text{máx}}$ ocorre onde $V = 0$!



**DIAGRAMAS DE
MOMENTOS FLETORES
EM CARGA DISTRIBUÍDA**

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?

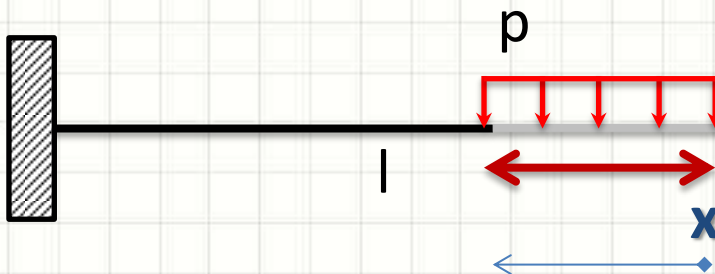
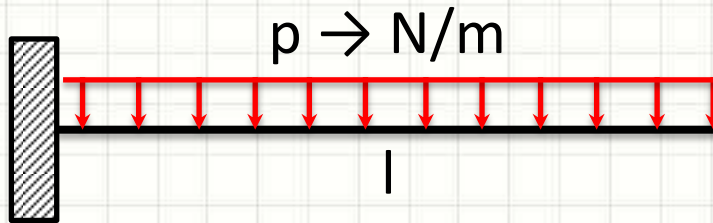
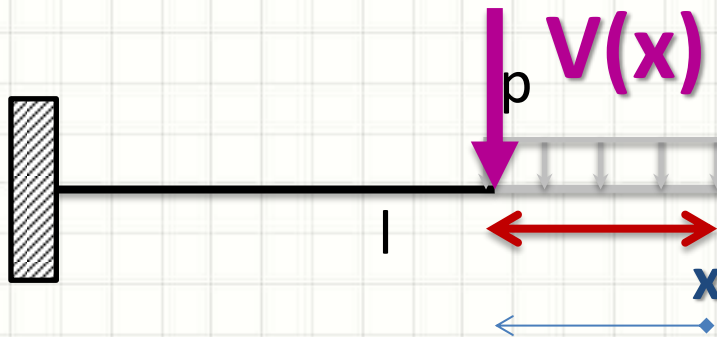


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?



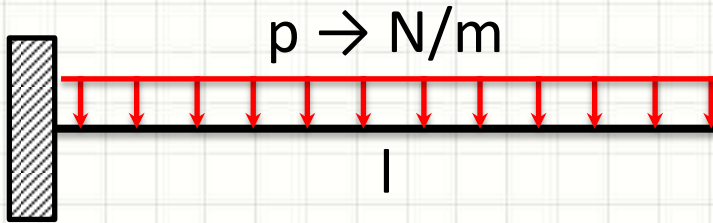
x

$$V(x) = p \cdot x$$

- Mas e o momento em “x”?

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “x”?

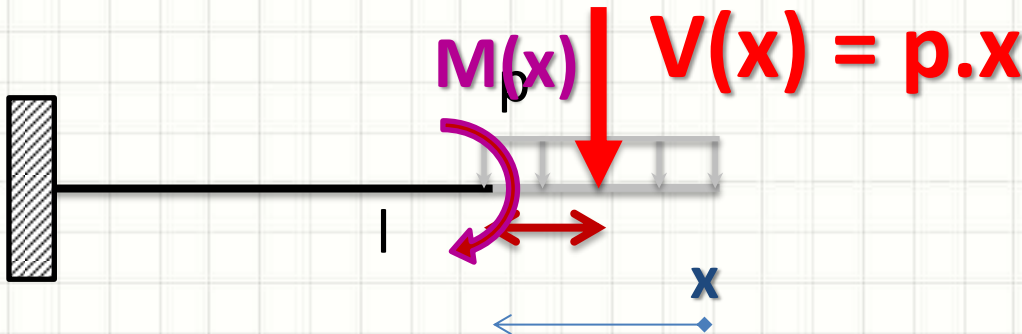
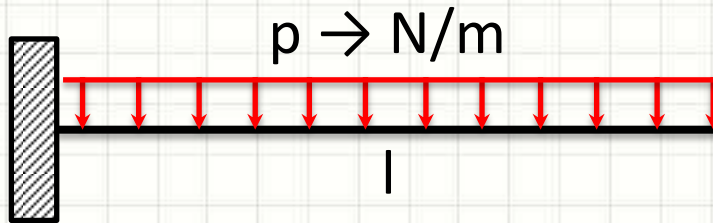


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual o momento em um ponto “x”?

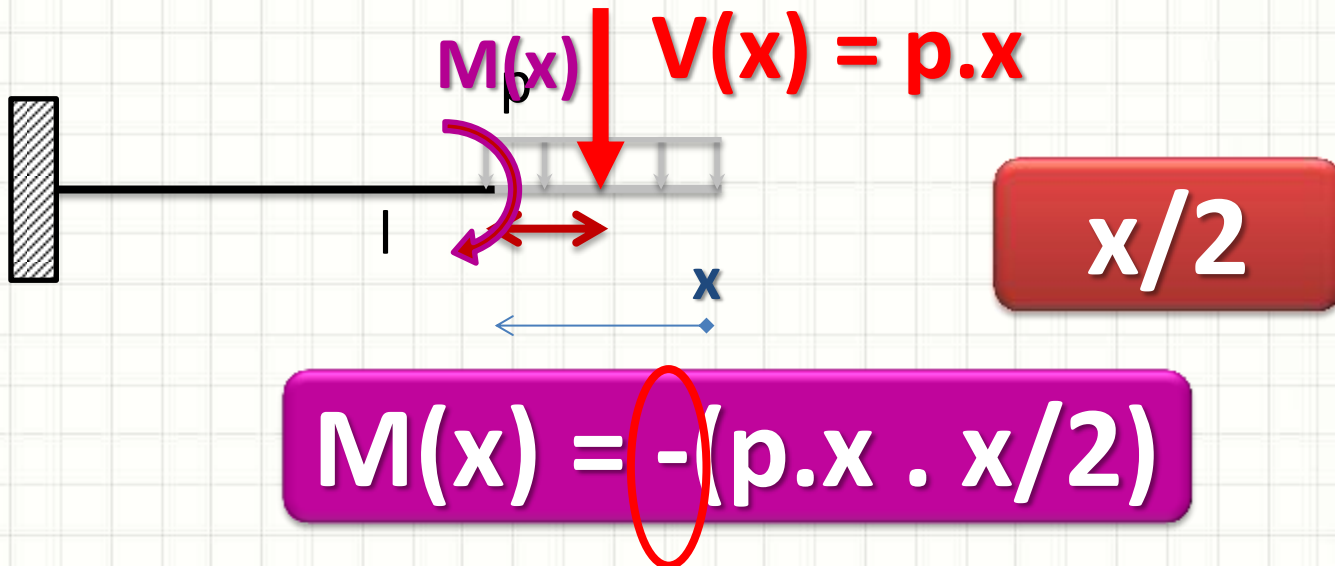
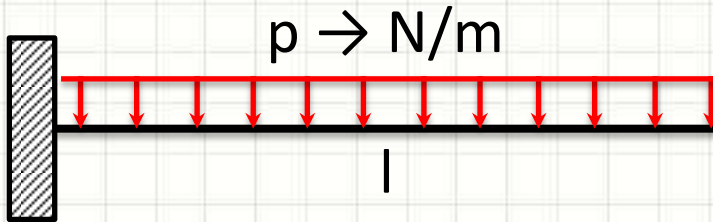


Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

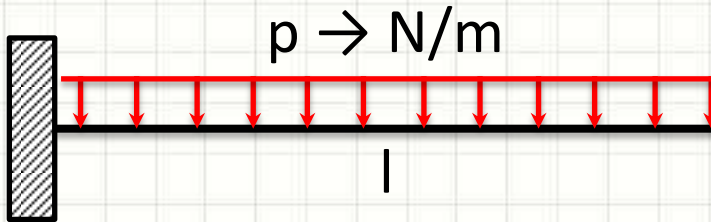


- $M(x) = - (p \cdot x^2 / 2) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - (p \cdot x^2 / 2) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

0

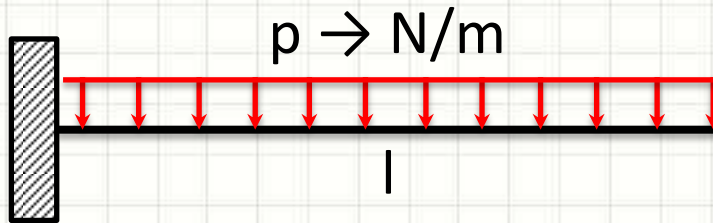
M:

$x = l$

|

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



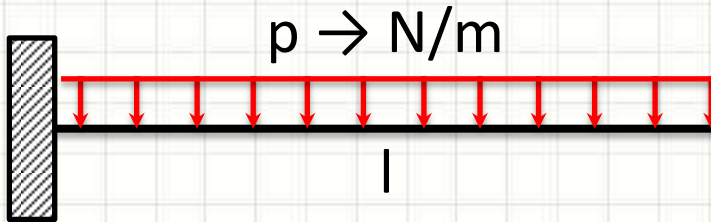
- $M(x) = - (p \cdot x^2 / 2) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



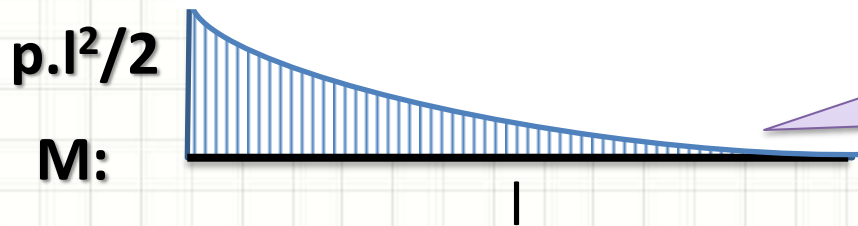
???

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



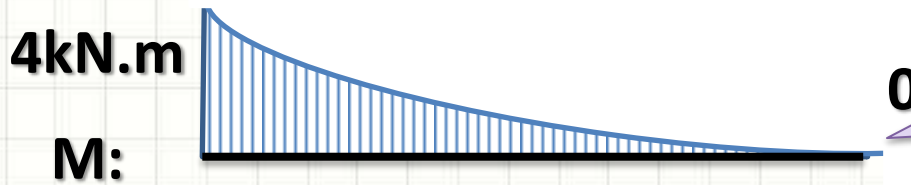
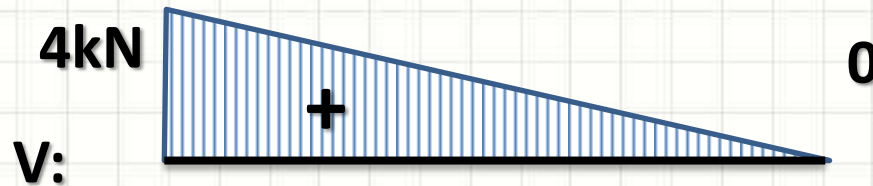
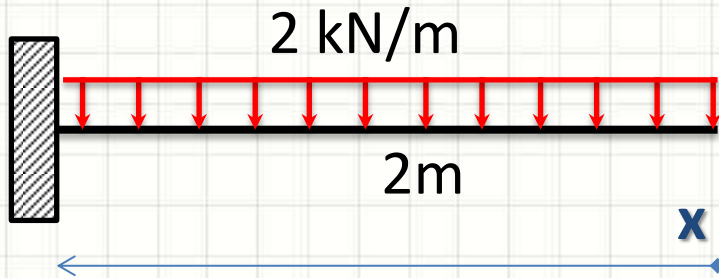
- $M(x) = - (p \cdot x^2 / 2) \rightarrow$ traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



“Boca para cima”
porque o sinal
de x^2 é positivo!

Diagrama de Momento Fletor

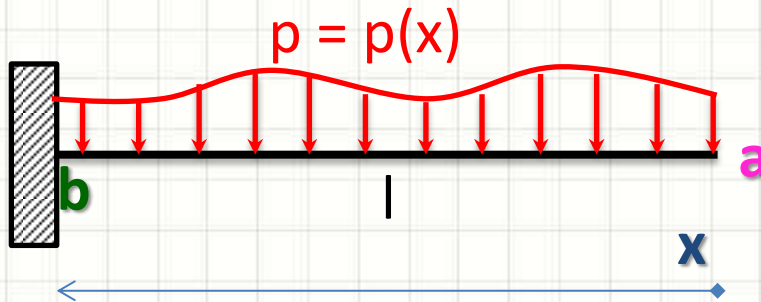
- Força Cortante Distribuída



Observe como a cortante crescente "acelera" o momento

Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Genérica Distribuída



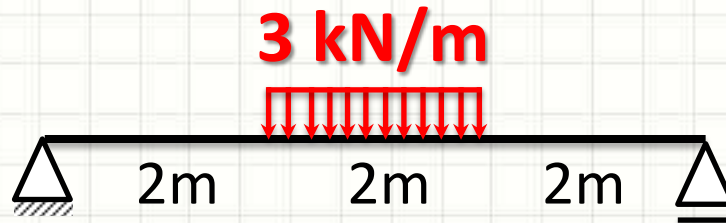
- Qual o momento de a até b ?

$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$

- Cuidado com o sinal!

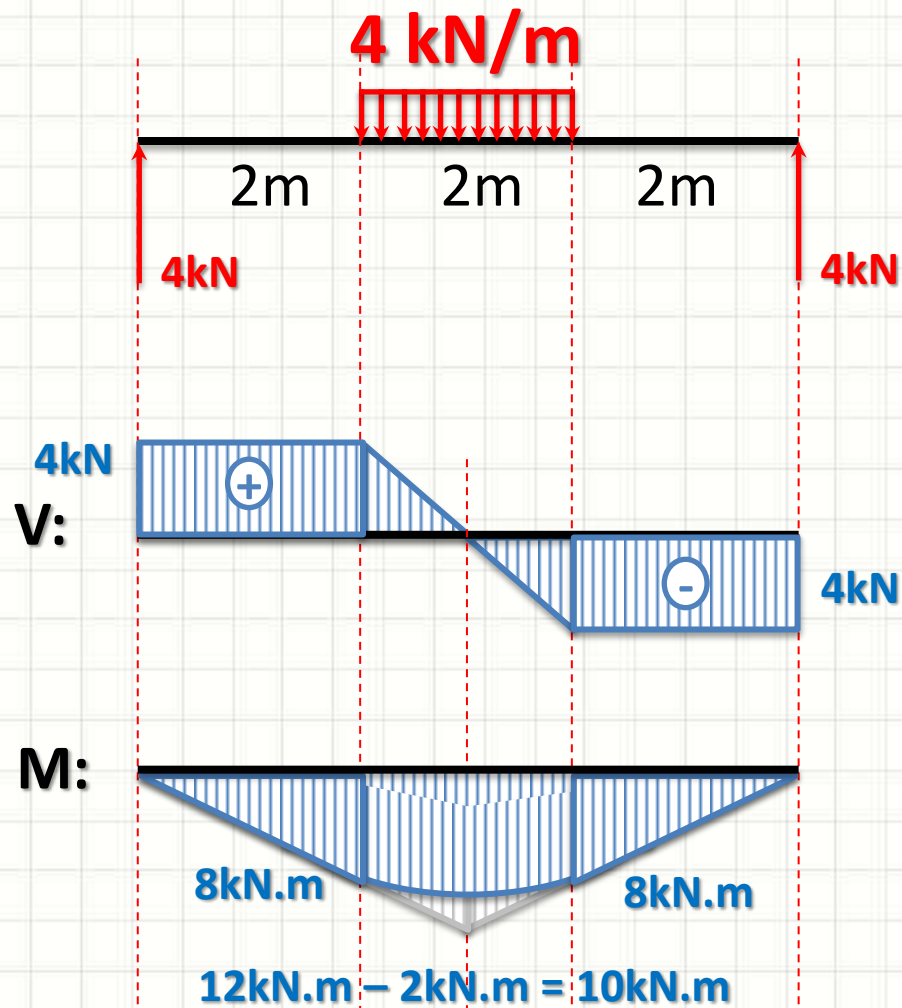
Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



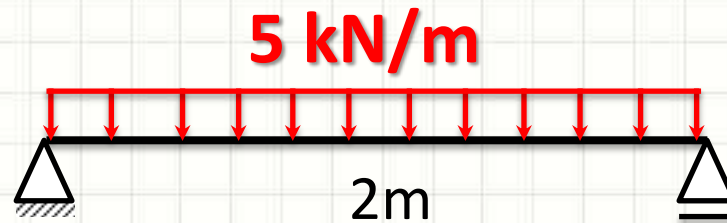
Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



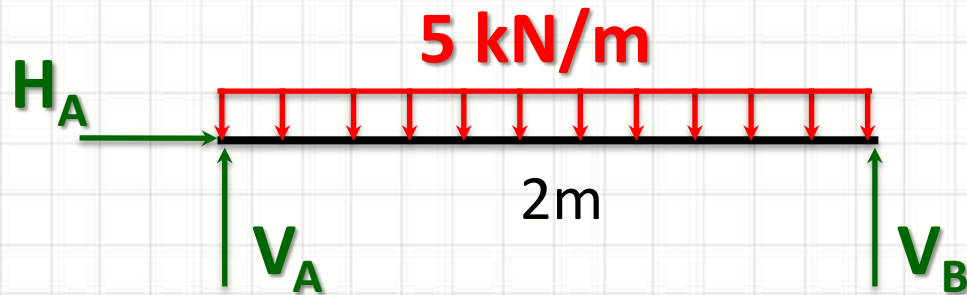
Exercício

- Diagramas de cortante e momento



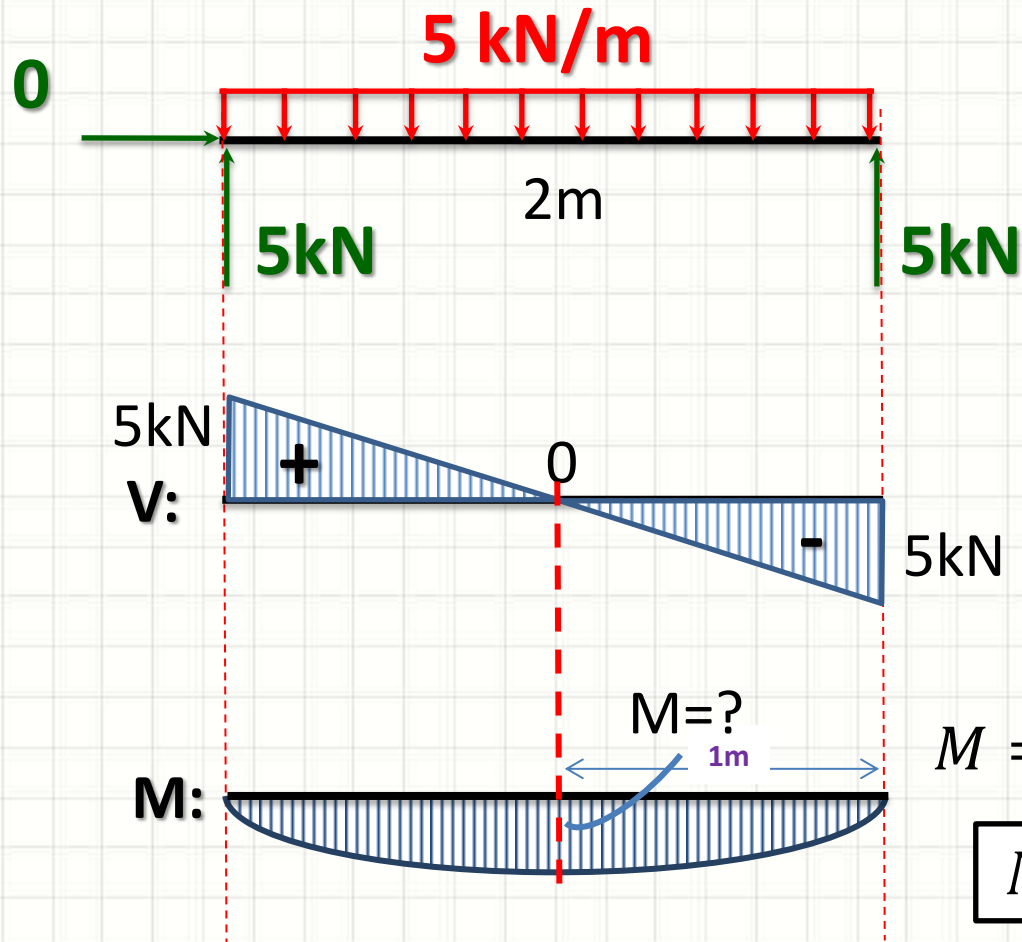
Exercício

- Diagramas de cortante e momento



Exercício

- Diagramas de cortante e momento

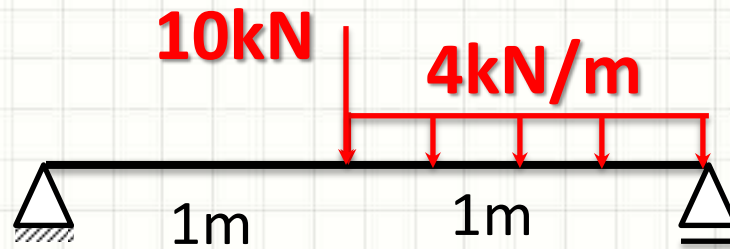


$$M = 5 \cdot 1 - (5 \cdot 1) \cdot 0,5$$

$$M = 2,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

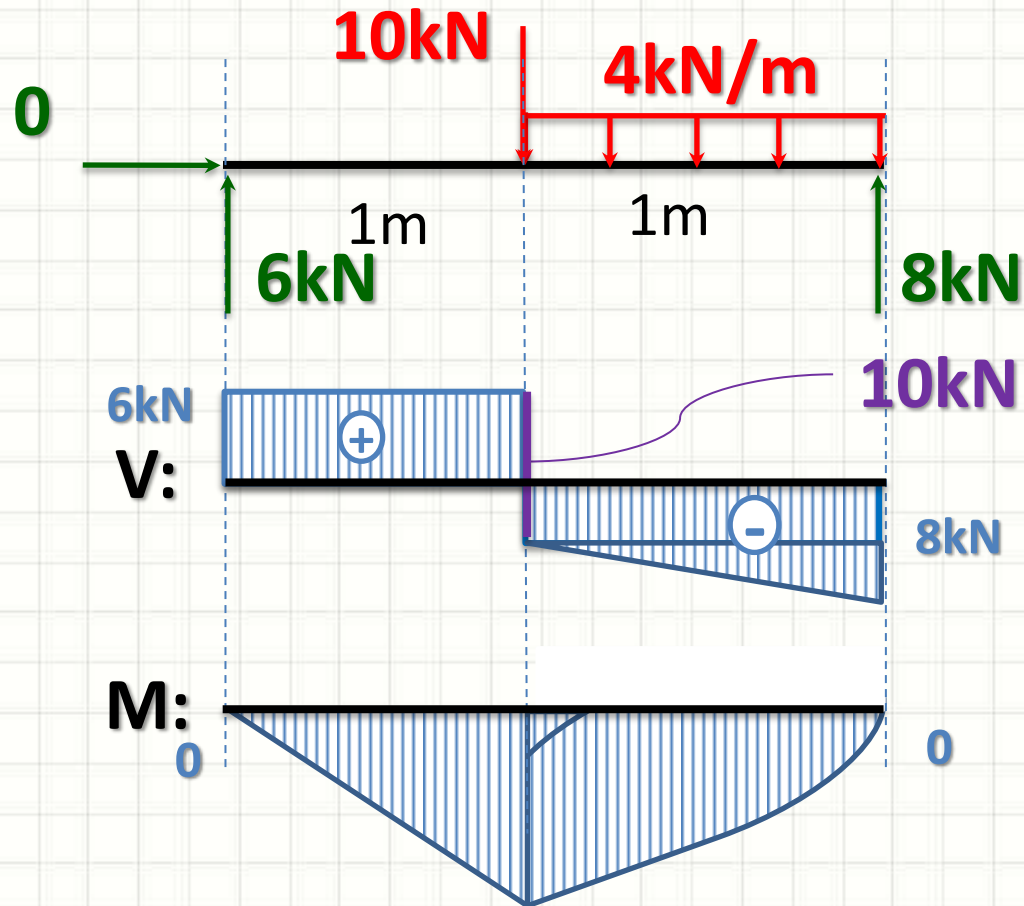
Exercício

- Diagramas de cortante e momento:



Exercício

- Diagramas de cortante e momento:





CONCLUSÕES

Resumo

- Cargas Distribuídas
 - Aplicação do teorema do corte
- Diagramas de cortante com cargas distribuídas
- Diagramas de momentos fletores
- **TAREFA:** Exercícios Aula 7
- Tensões Normais e Cisalhantes
- Compreendendo o material por dentro
 - As tensões internas no material

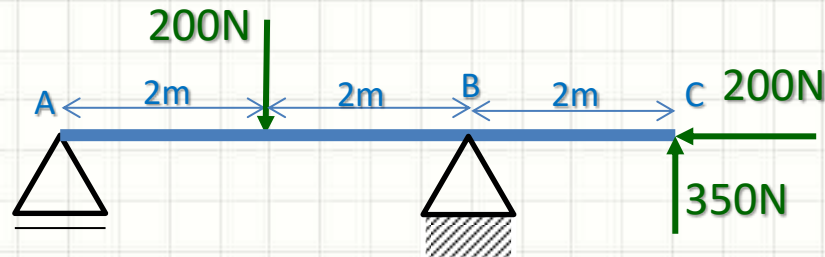
SAVA8!



PERGUNTAS?

Exercício para casa

Trace o diagrama de momento fletor:



Exercício para casa - Extra

- Trace os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo.

