



MECÂNICA DOS SÓLIDOS

SISTEMAS DE BARRAS CARREGADAS AXIALMENTE

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 1

Objetivos

- Conhecer o princípio da superposição
- Calcular deformações em barras e sistemas de barras submetidos a esforço normal

- **Atividade Aula 12 – SAVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica dos Sólidos – Aula 12)

Material Didático

-

Minha Biblioteca

-

Biblioteca Virtual

Resistência dos Materiais (Hibbeler, 7ª, cap. 3), pgs.
86 a 96



RETOMANDO:

ALONGAMENTO DE BARRAS

Calcular o alongamento da barra



$$A = 0,1\text{m}^2$$
$$E = 50\text{GPa}$$

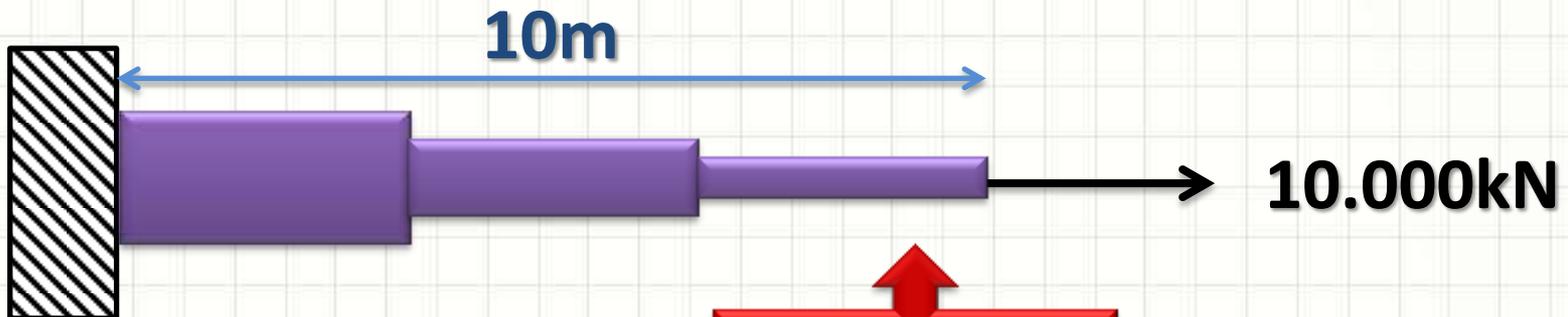
$$\delta = 0,02\text{ m}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

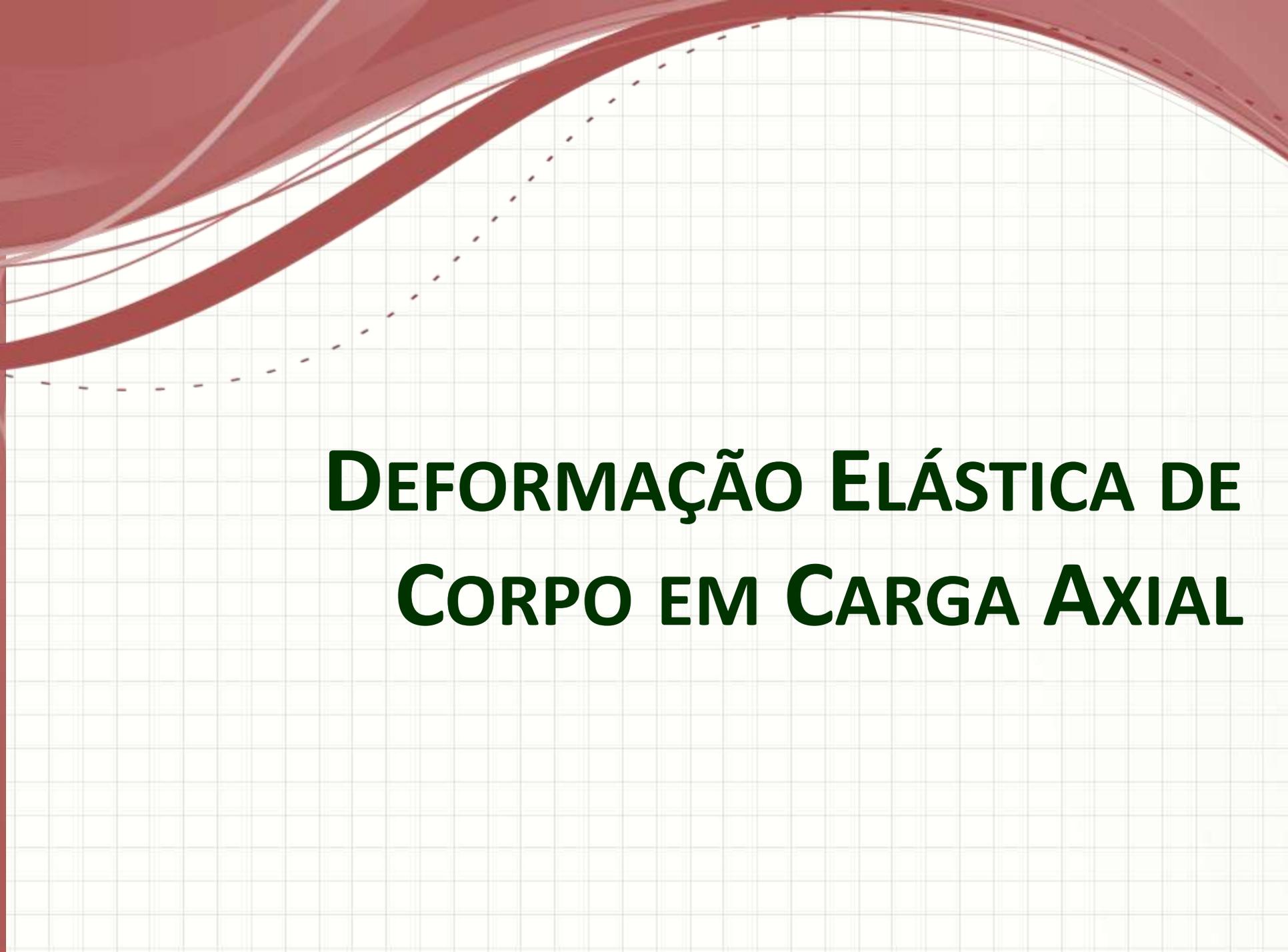
$$\sigma = F / A$$

Pressupostos?

- Área constante...
 - Material uniforme...



#comofaz?

The background features a light gray grid pattern. A thick, dark red curved line sweeps across the top of the page, starting from the left edge and curving towards the right. Below this line, a dashed red line follows a similar path, creating a sense of depth or a shadow effect.

DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DE CORPO EM CARGA AXIAL

Deformação por Carga Axial

- Vimos que podemos usar as relações

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = P/A$$

$$\delta = L \cdot \epsilon$$



- Podemos reescrever

$$\delta = L \cdot \epsilon$$

- Como

$$\epsilon = \delta/L$$

Deformação por Carga Axial

- Vimos que podemos usar as relações

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = P/A$$

$$\epsilon = \delta/L$$



- Agora, juntemos as equações

$$\frac{P}{A} = E \cdot \epsilon$$

Deformação por Carga Axial

- Vimos que podemos usar as relações

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\sigma = P/A$$

$$\epsilon = \delta/L$$



- Agora, juntemos as equações

$$\frac{P}{A} = E \cdot \epsilon \quad \rightarrow \quad \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

Deformação por Carga Axial

- Reorganizando a equação: isolar o δ



$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \rightarrow \frac{P \cdot L}{A \cdot E} = \delta$$

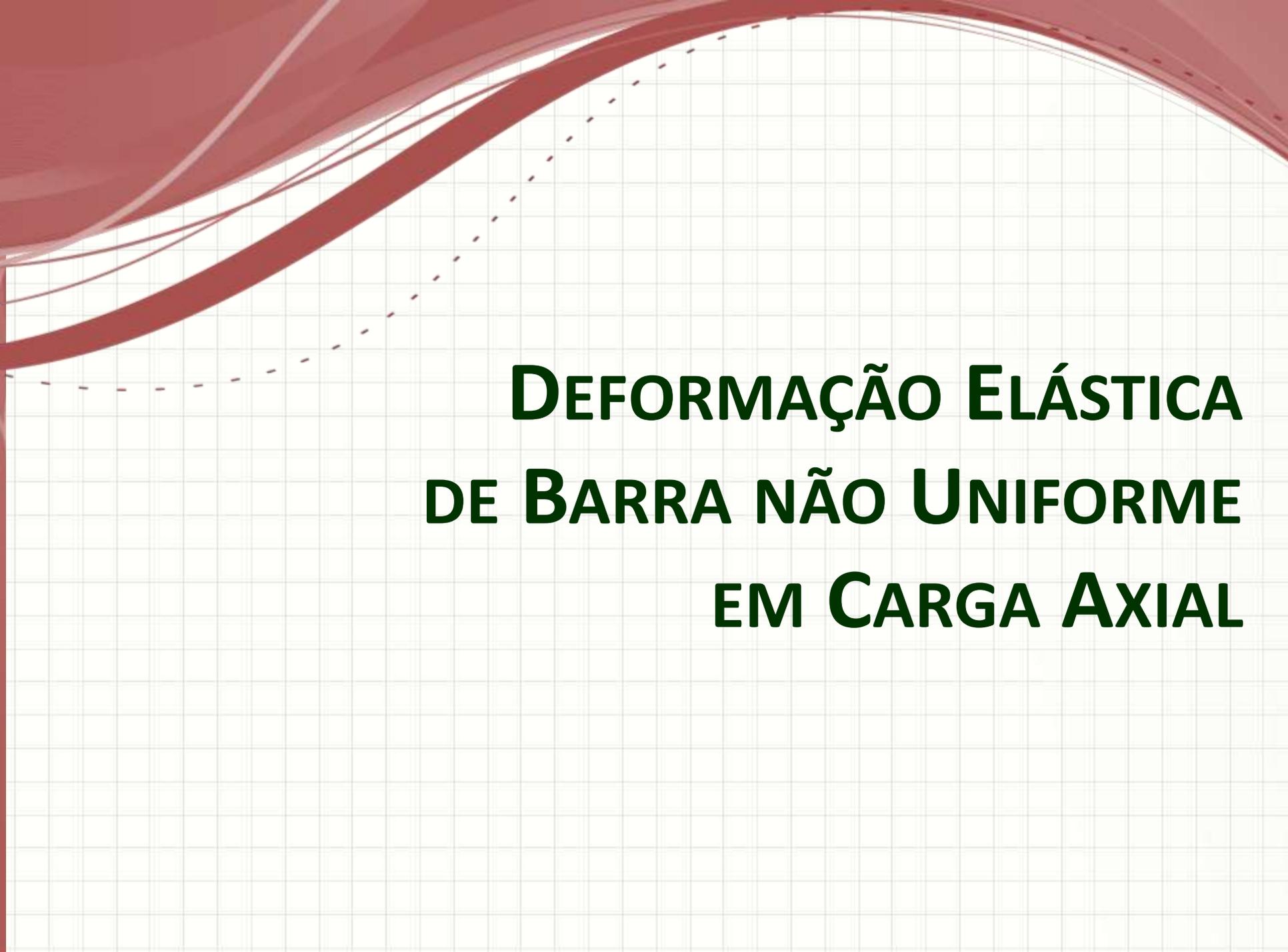
$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \quad \text{Anotem!}$$

Exercício: Alongamento da Barra



$$A = 0,2\text{m}^2$$
$$E = 30\text{GPa}$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$



**DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
DE BARRA NÃO UNIFORME
EM CARGA AXIAL**

Deformação por Carga Axial

- Deformação com área constante



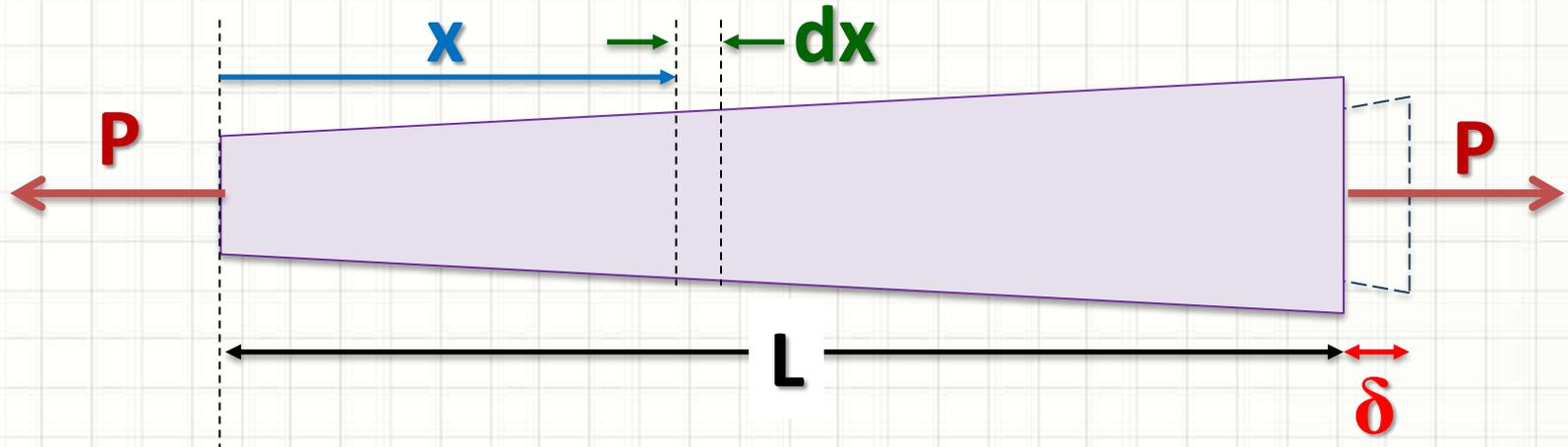
- Será que podemos superar essa limitação?



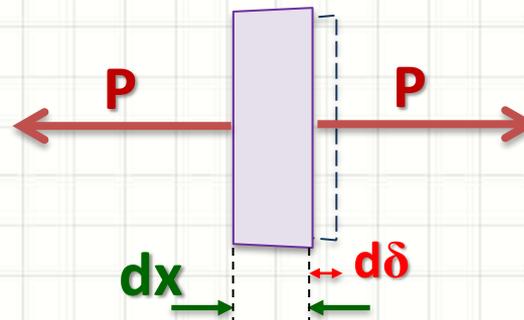
O que fazer quando a área varia?

Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial

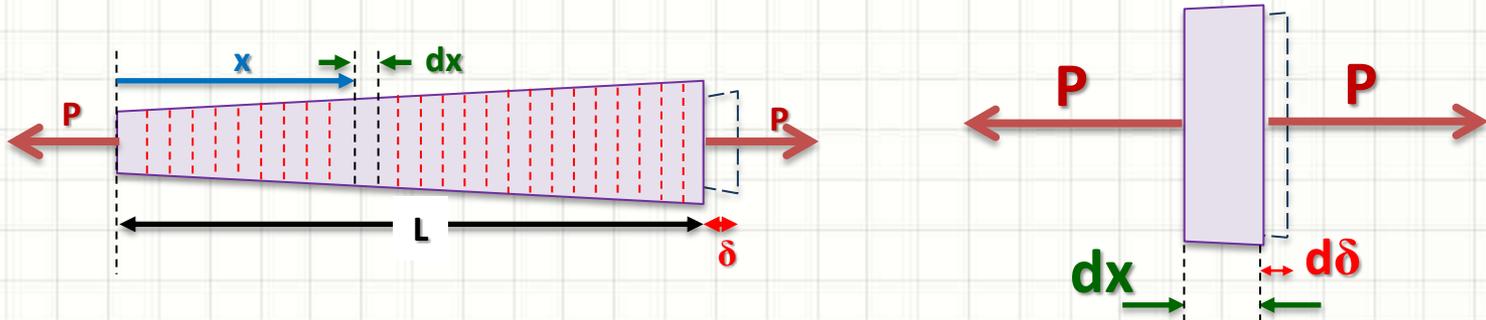


- Como calcular δ ? $A=A(x)$
- Vamos calcular a deformação no elemento dx



Deformação por Carga Axial

- Consideremos a viga genérica sob carga axial

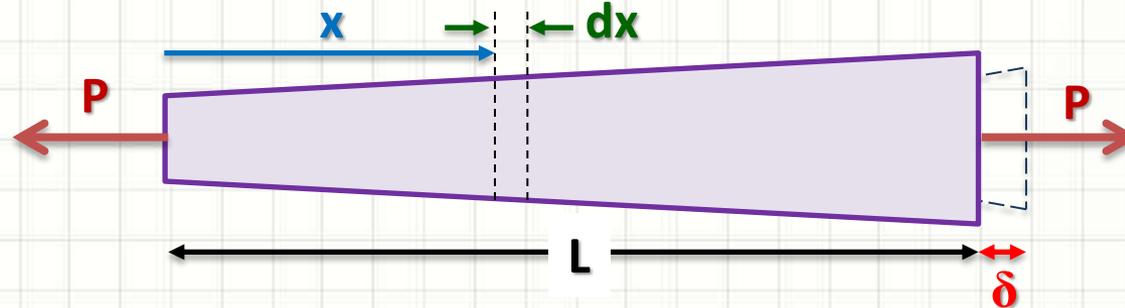


- Como calcular $d\delta$? $A \sim \text{cte.}$ $\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$?

$$d\delta = \frac{P \cdot dx}{E \cdot A(x)} \quad \rightarrow \quad \delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A(x)}$$

Deformação por Carga Axial

- Ou seja, para essa viga...



$$\delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A(x)} \rightarrow \delta = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

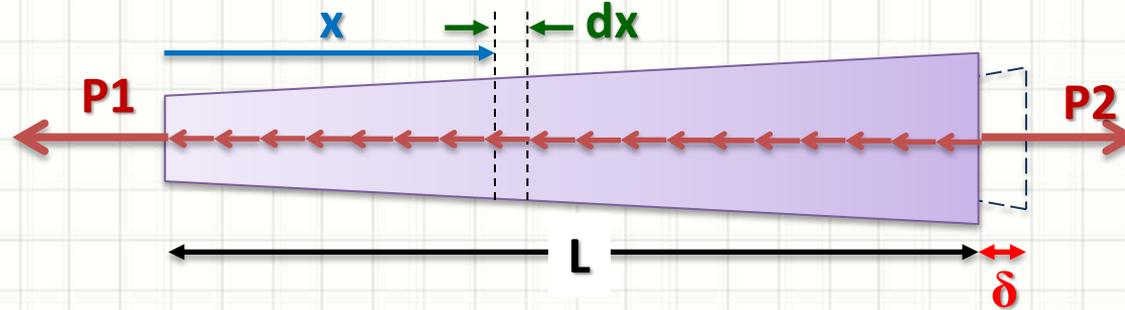
- Mas... E se a área fosse constante?

Compare!

$$\delta = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A} \rightarrow \delta = \frac{P}{E \cdot A} \int_0^L dx \rightarrow \delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Deformação por Carga Axial

- Dá para generalizar ainda mais?

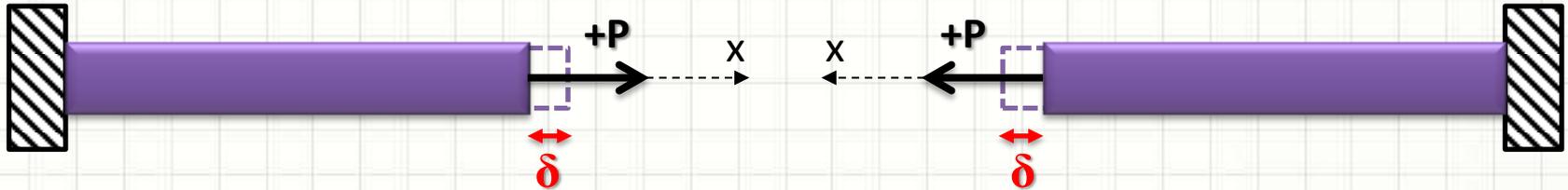


$$\delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{E \cdot A(x)} \quad \rightarrow \quad \delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E(x) \cdot A(x)}$$

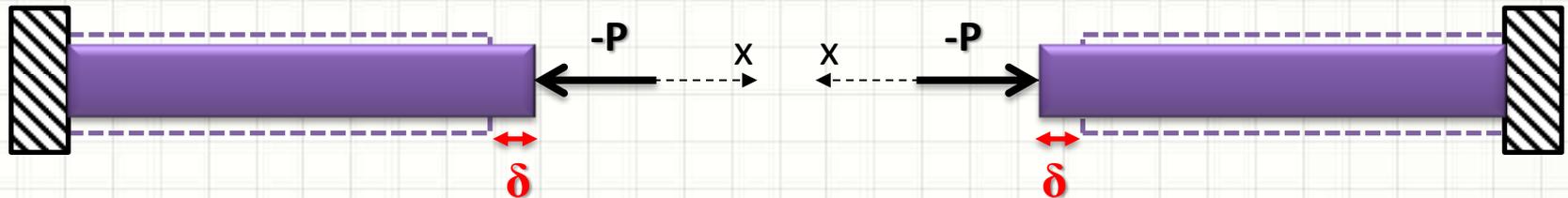
Fórmula Geral

Deformação por Carga Axial

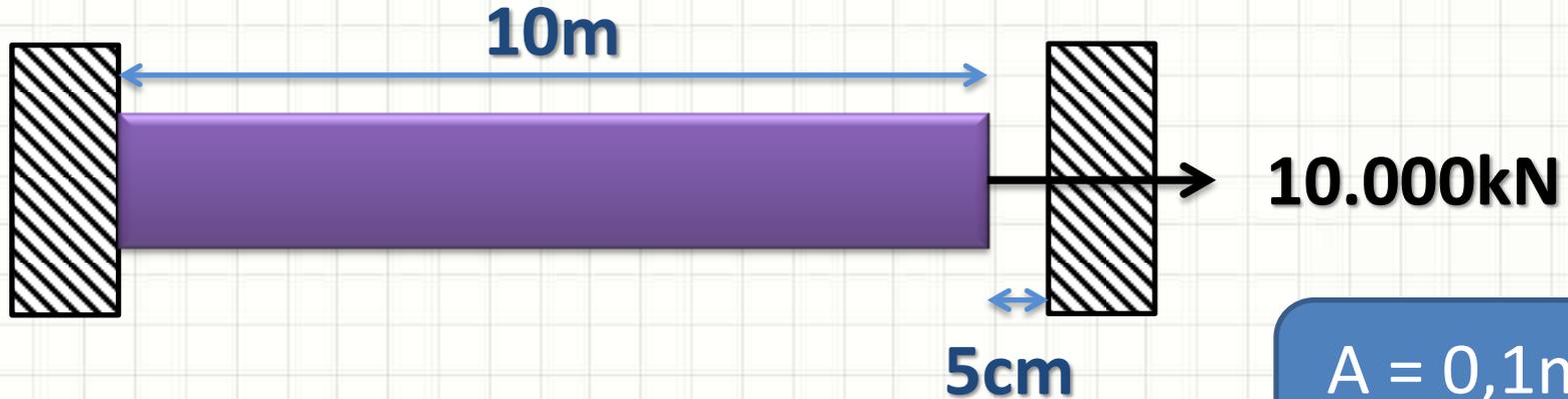
- Convenção de Sinais
- Trações \rightarrow Alongamentos $\rightarrow +$



- Compressões \rightarrow Contrações $\rightarrow -$



Exemplo – O vão é suficiente?



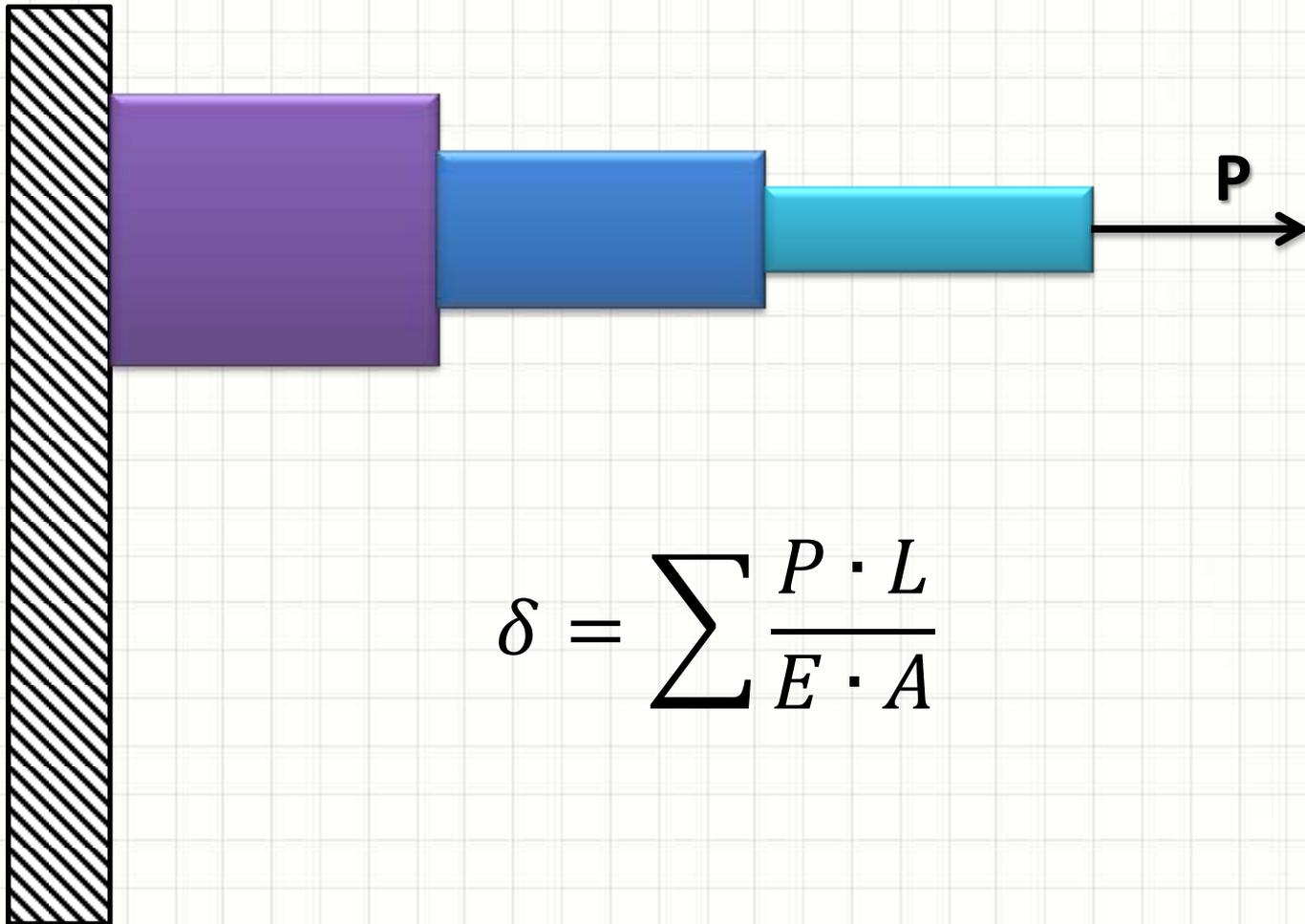
- Se o espaço for suficiente...

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{10^7 \cdot 10}{5 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-1}} = \frac{10^8}{5 \cdot 10^9}$$

$$\delta = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Múltiplos Elementos

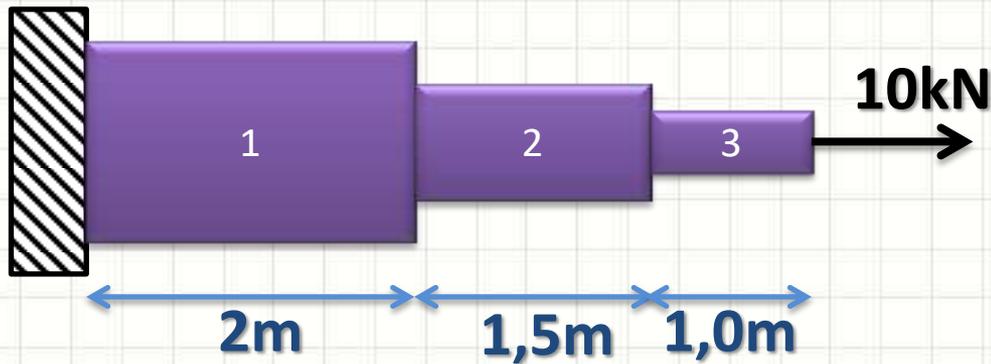
- Barras compostas de várias seções constantes



$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Exercício

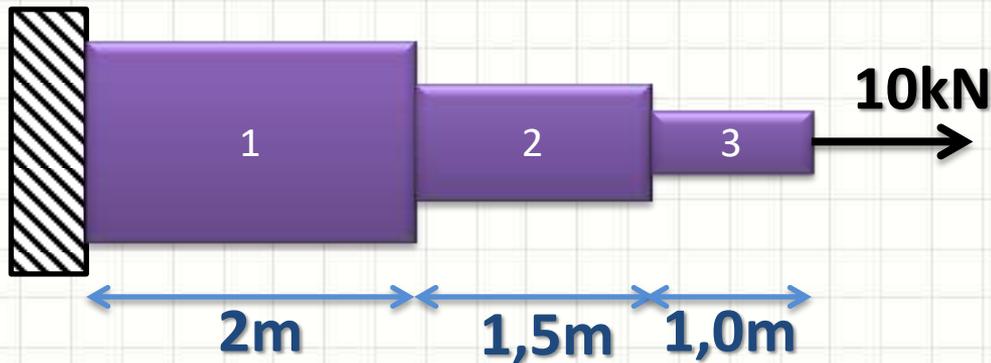
- Determine a deformação total



$$\begin{aligned}A_1 &= 1\text{m}^2 \\A_2 &= 0,8\text{m}^2 \\A_3 &= 0,5\text{m}^2 \\E_1 &= E_2 = E_3 \quad 50\text{GPa}\end{aligned}$$

Exercício

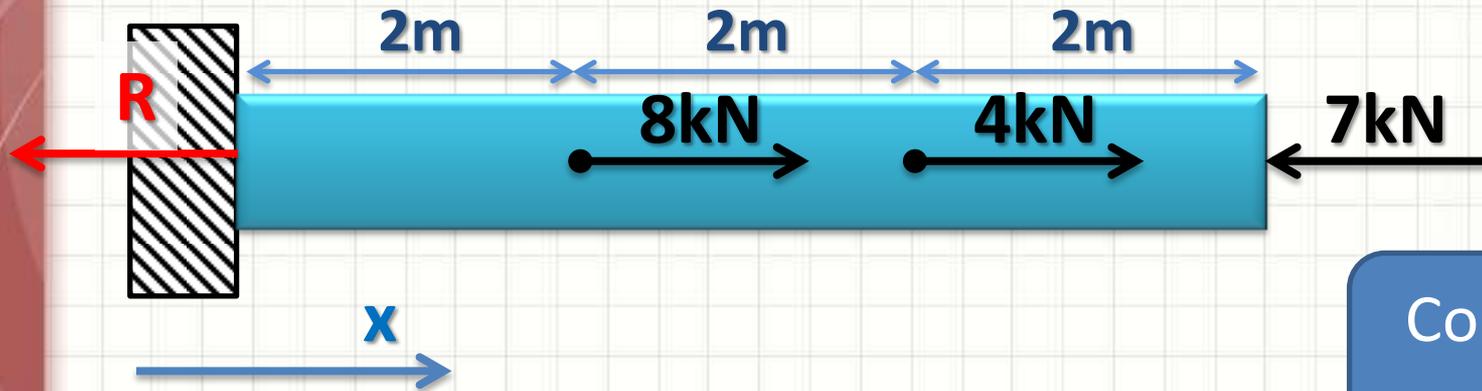
- Determine a deformação total



$$\begin{aligned}A_1 &= 1\text{m}^2 \\A_2 &= 0,8\text{m}^2 \\A_3 &= 0,5\text{m}^2 \\E_1 &= E_2 = E_3 = 50\text{GPa}\end{aligned}$$

1. Reações
2. Alongamentos parciais
3. Alongamento total

Várias Cargas Axiais



Conhecidos:
 E, A

- A reação de apoio é...?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$-R + 8 + 4 - 7 = 0 \Rightarrow \quad \mathbf{R = 5kN}$$

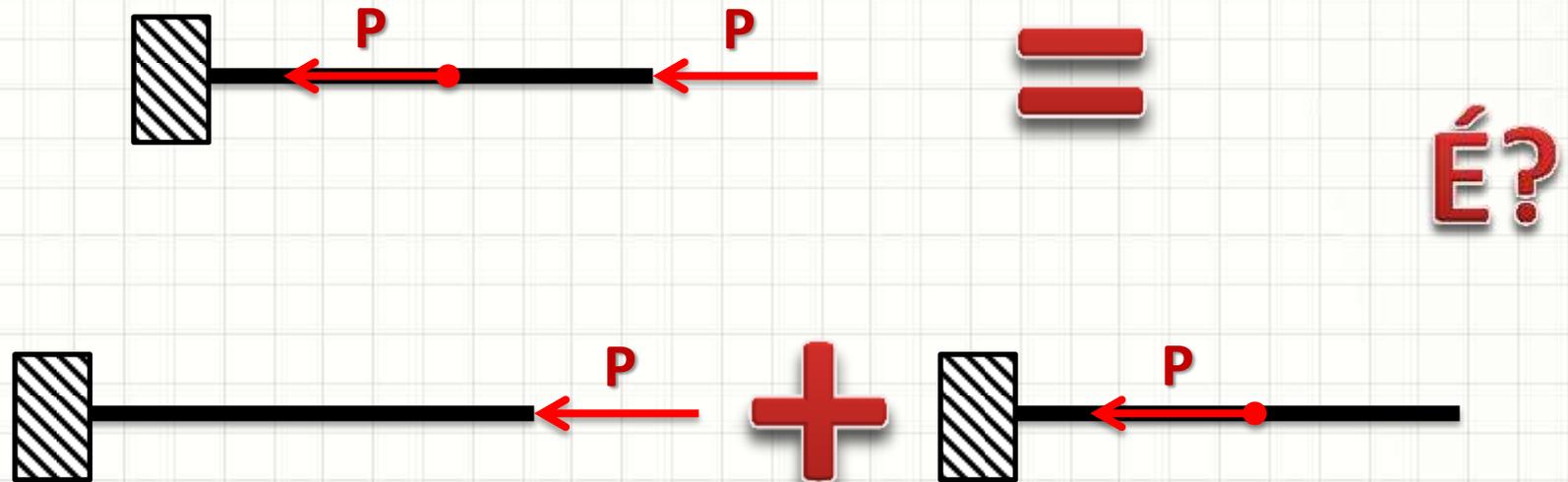
- Ok, mas e a deformação da barra? $\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$?



SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

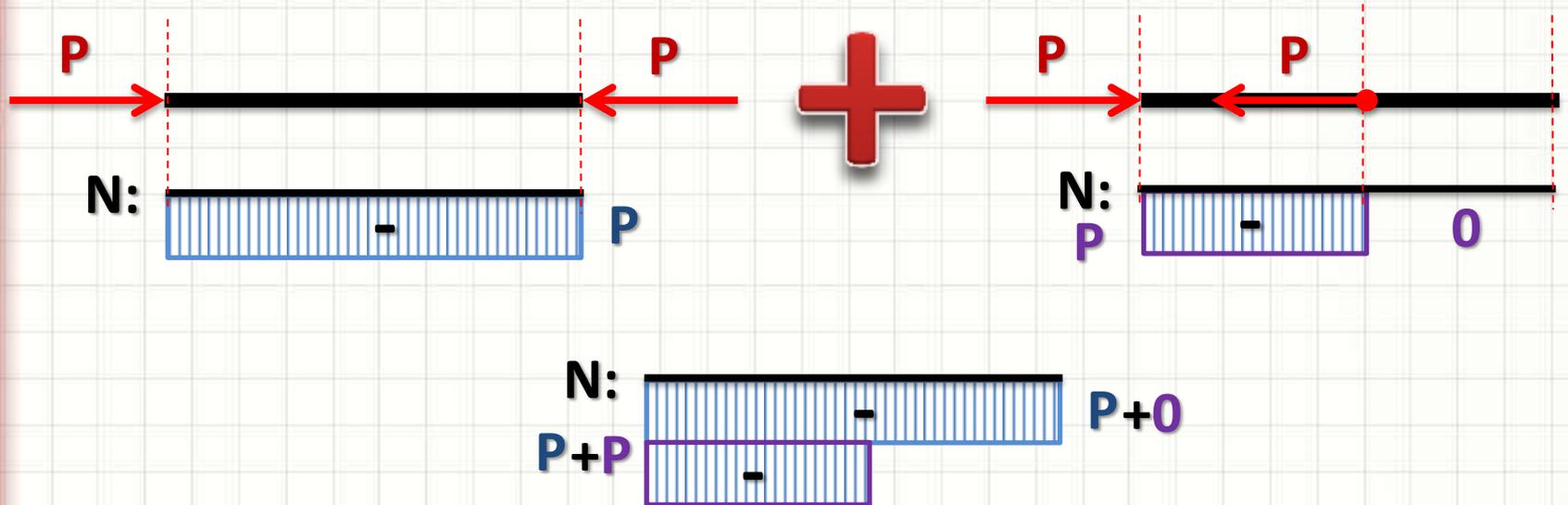
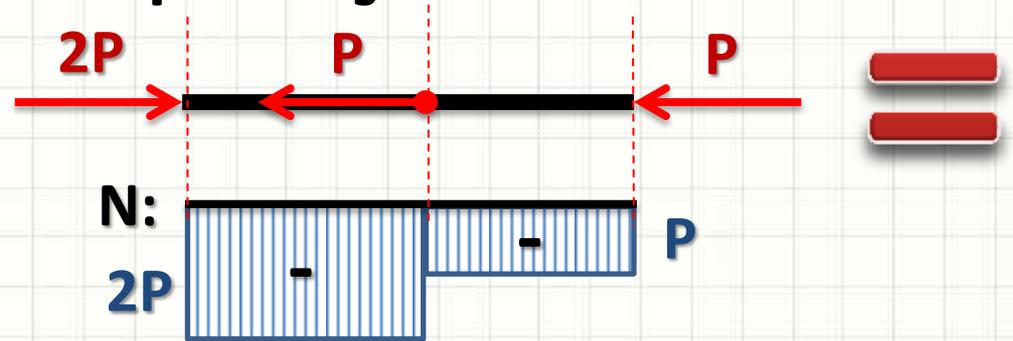
Superposição de Efeitos

- Princípio da Superposição de Efeitos
 - Subdividir o carregamento em componentes
 - Calcular os efeitos em separado
 - Somar os resultados



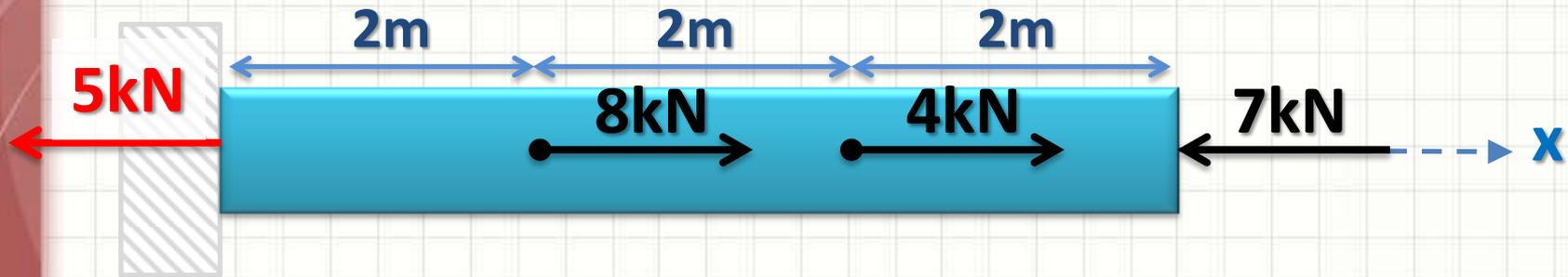
Exemplo: Superposição de Efeitos

- Diagramas



Válido para pequenas deformações!

Várias Cargas Axiais



- Qual é o “P”?

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

- O **P** dependerá da região da barra!

Diagrama de Esforços Normais

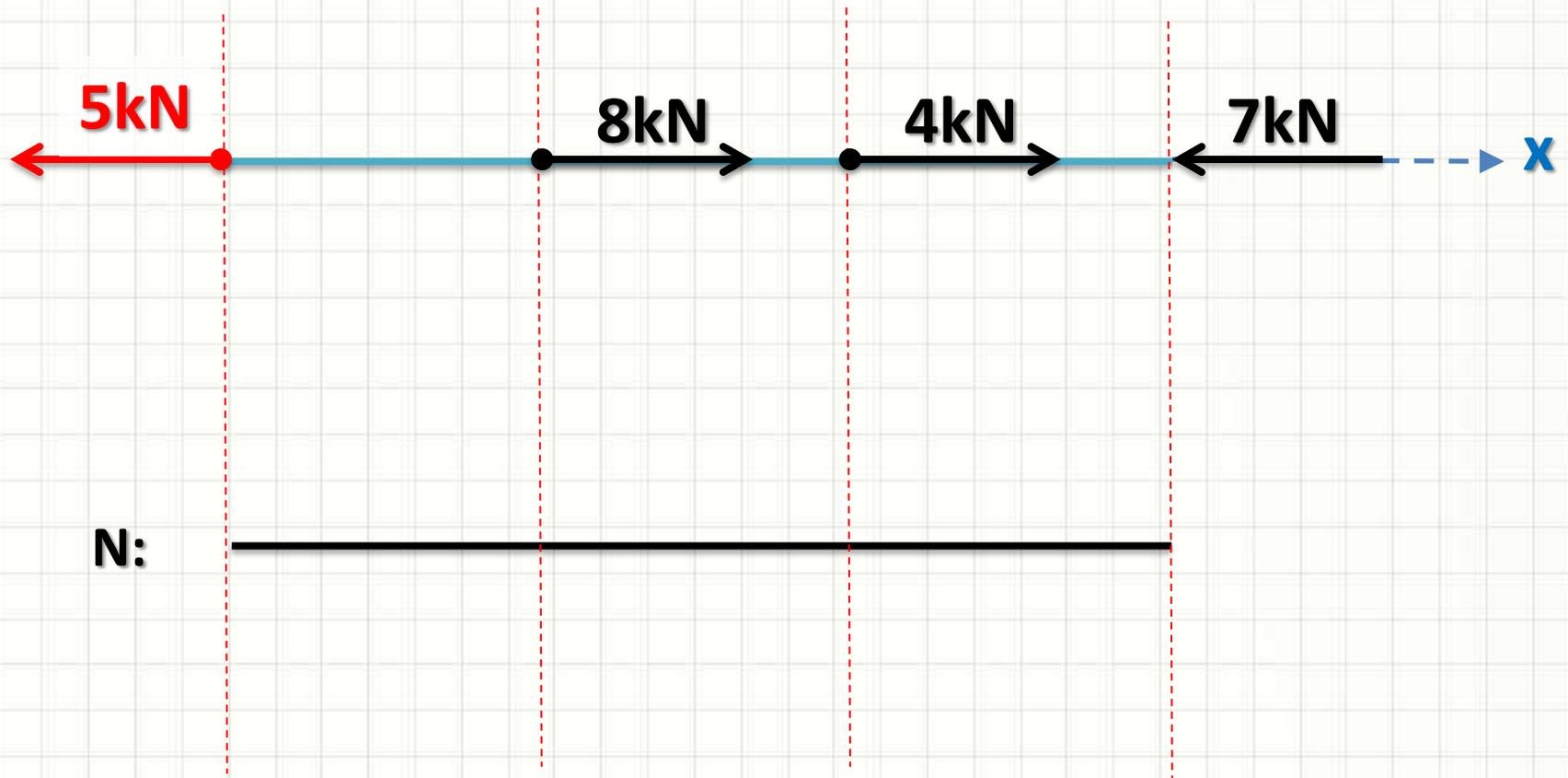


Diagrama de Esforços Normais

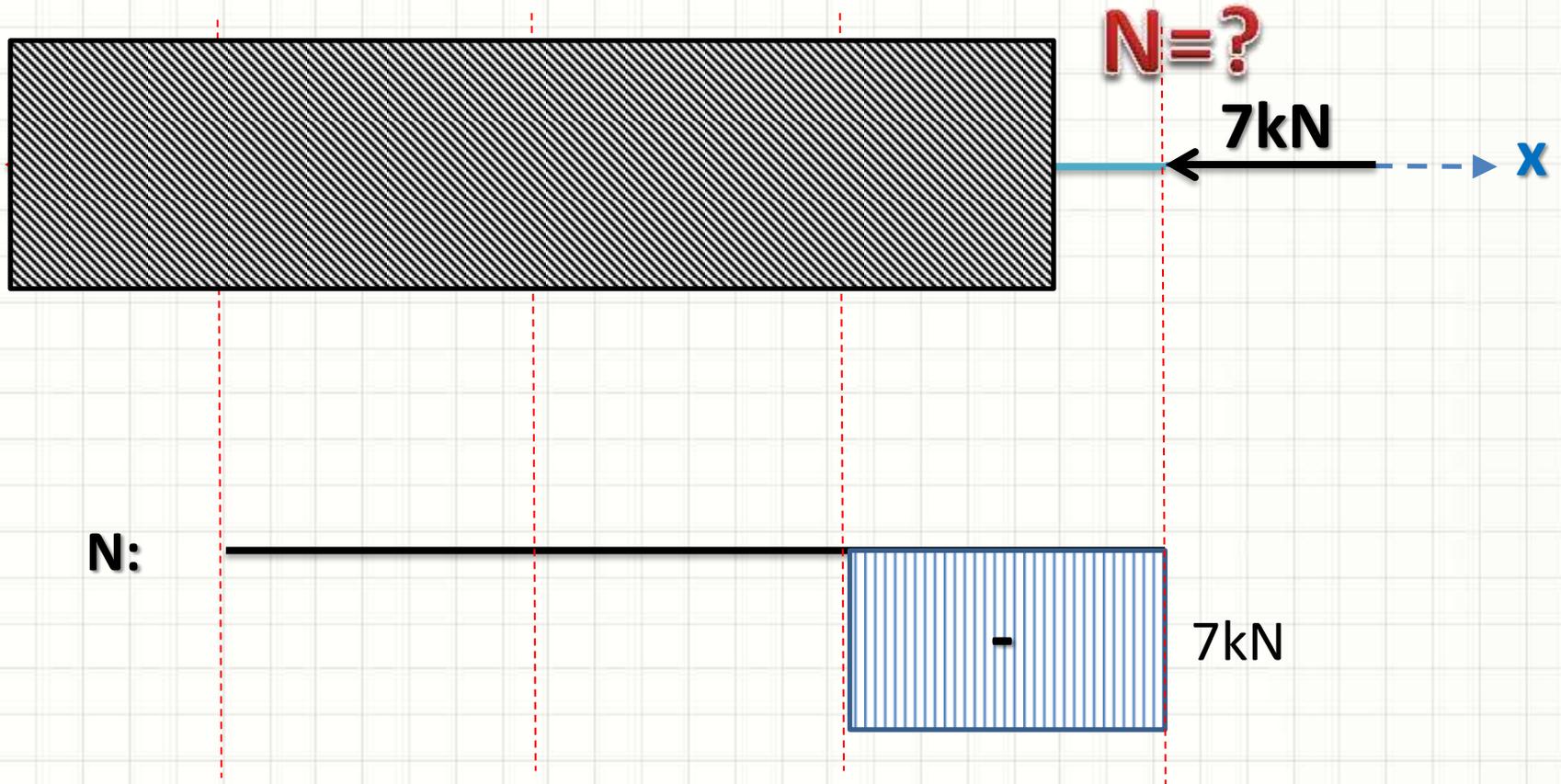


Diagrama de Esforços Normais

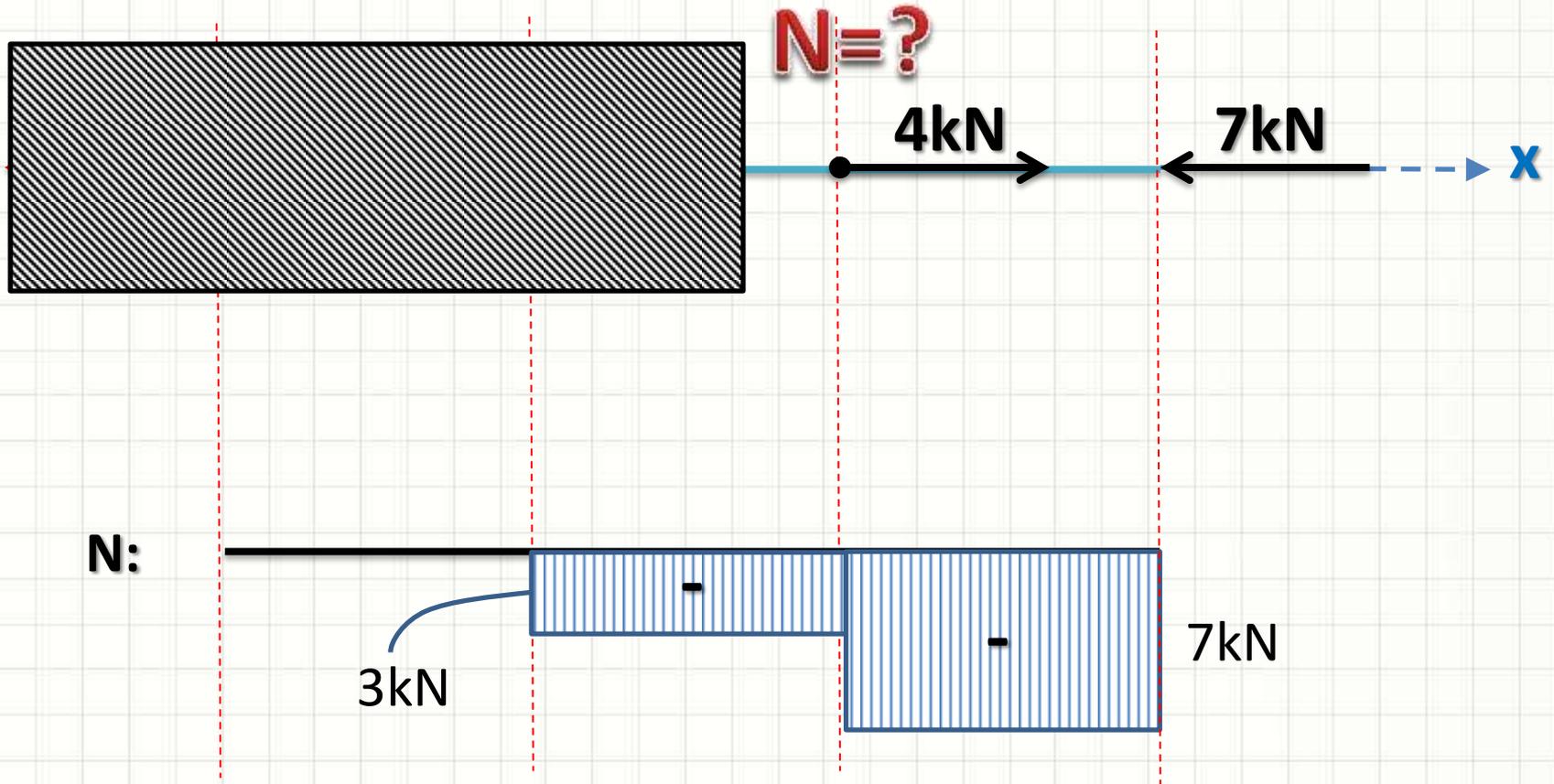


Diagrama de Esforços Normais

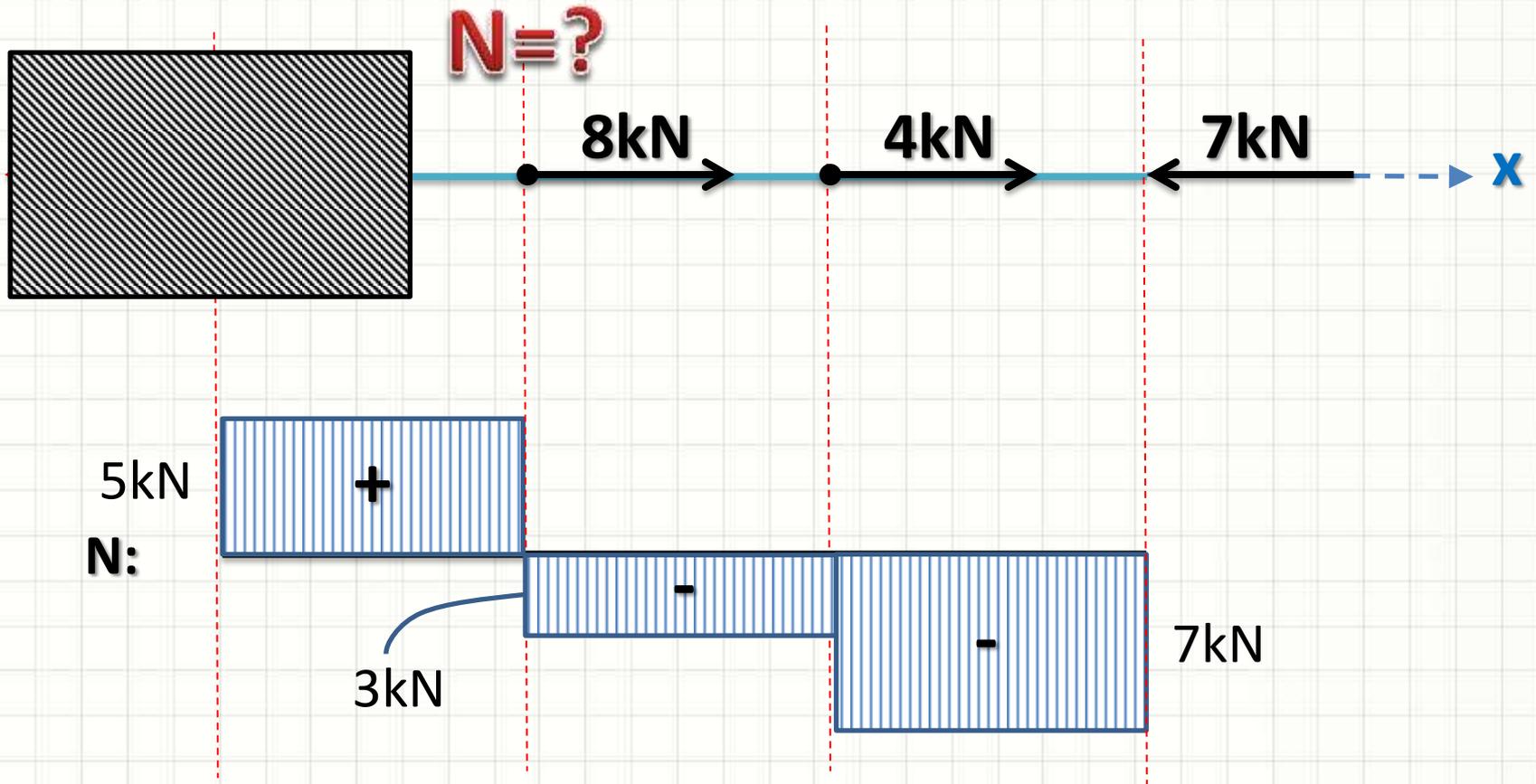
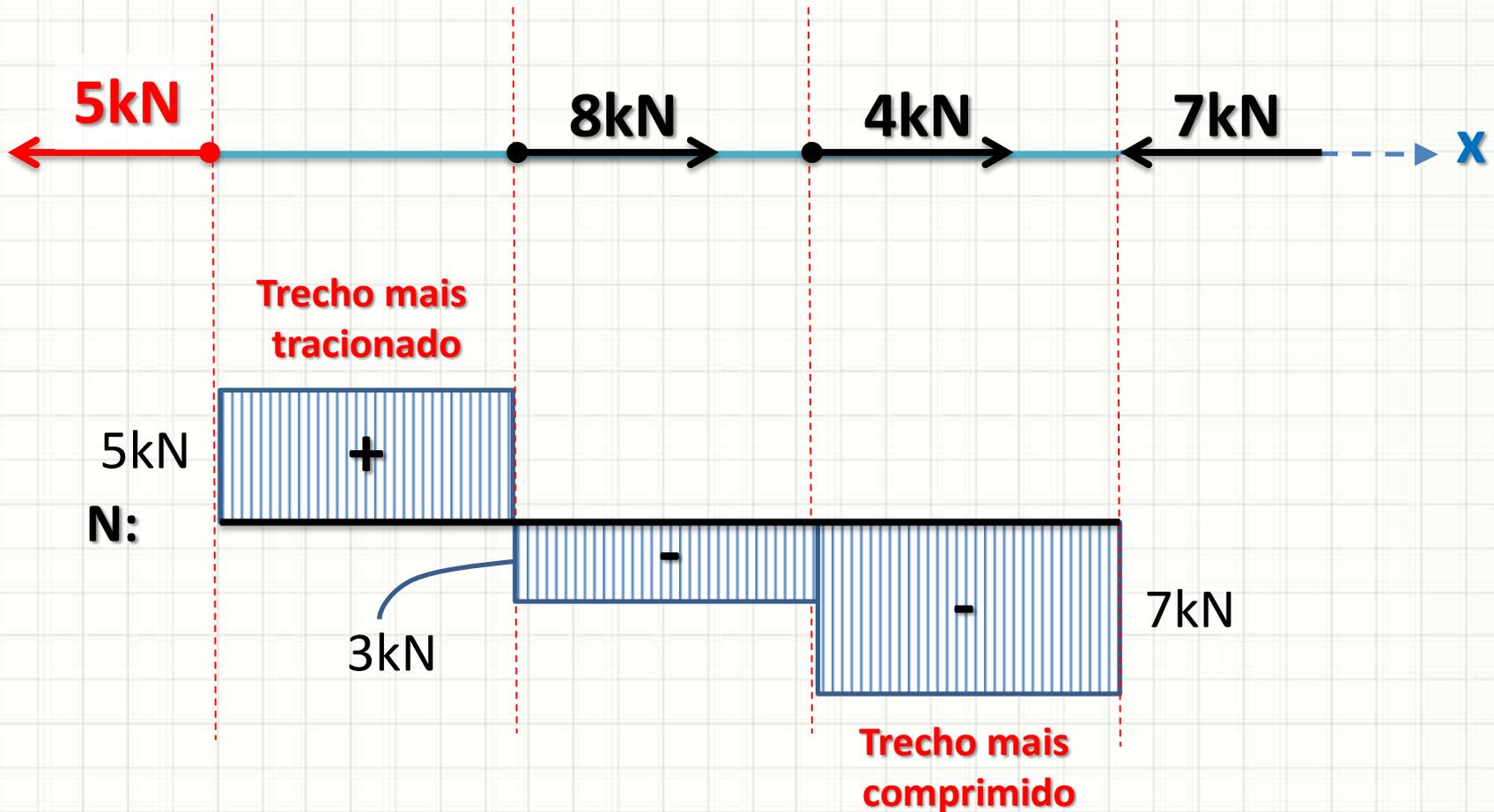


Diagrama de Esforços Normais



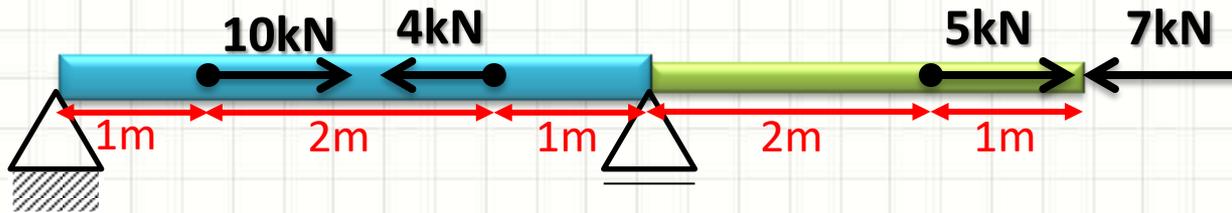
$$\delta = \frac{P_1 \cdot L_1}{E \cdot A} + \frac{P_2 \cdot L_2}{E \cdot A} + \frac{P_3 \cdot L_3}{E \cdot A}$$



EXERCÍCIOS

Exemplo

- Calcule a deformação total da barra



$E = 50\text{GPa}$

$A = 0,1\text{m}$

$E = 200\text{GPa}$

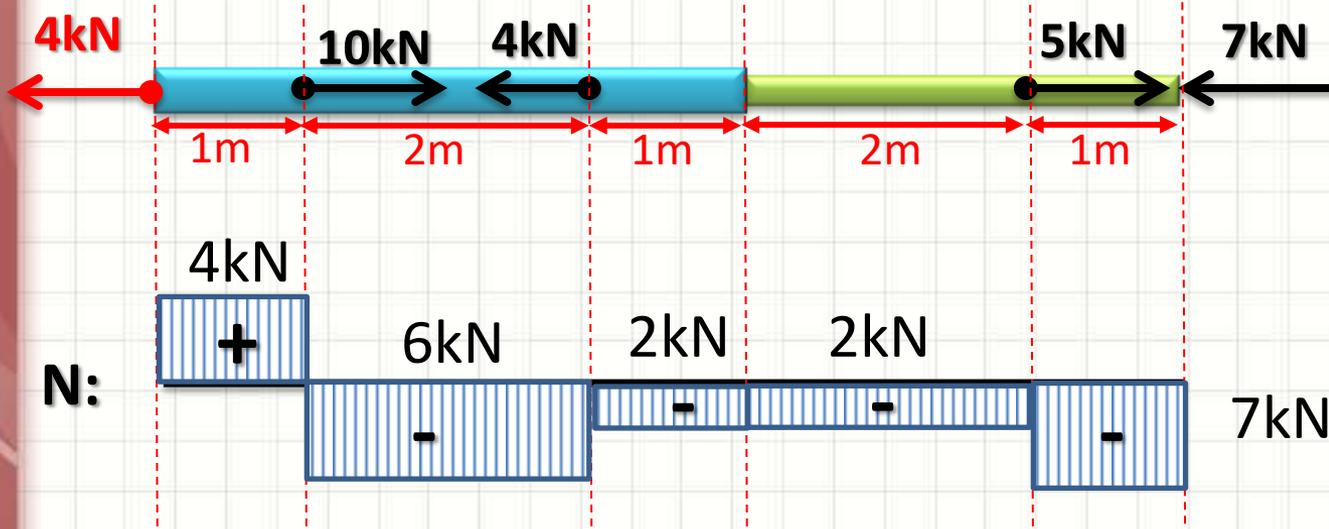
$A = 0,05\text{m}$

Exemplo

- Calcule a deformação total da barra

$E = 50\text{GPa}$
 $A = 0,1\text{m}$

$E = 200\text{GPa}$
 $A = 0,05\text{m}$



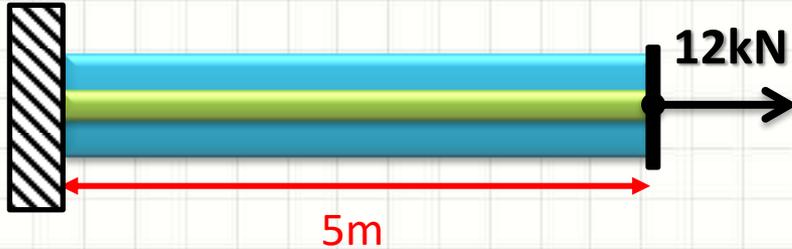
$$\delta = \frac{+4000 \cdot 1}{50 \cdot 10^9 \cdot 0,1} + \frac{-6000 \cdot 2}{50 \cdot 10^9 \cdot 0,1} + \frac{-2000 \cdot 1}{50 \cdot 10^9 \cdot 0,1} + \frac{-2000 \cdot 2}{200 \cdot 10^9 \cdot 0,05} + \frac{-7000 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 0,05}$$

$$\delta = \frac{+4000 - 12000 - 2000}{5 \cdot 10^9} + \frac{-4000 - 7000}{10 \cdot 10^9} = \frac{-10000}{5 \cdot 10^9} + \frac{-11000}{10 \cdot 10^9}$$

$$\delta = -3,1 \cdot 10^{-6} \text{m}$$

Exemplo

- Calcule a deformação na barra abaixo:



$$E = 10\text{GPa}$$
$$A = 0,1\text{m}$$

$$E = 50\text{GPa}$$
$$A = 0,01\text{m}$$

Exemplo

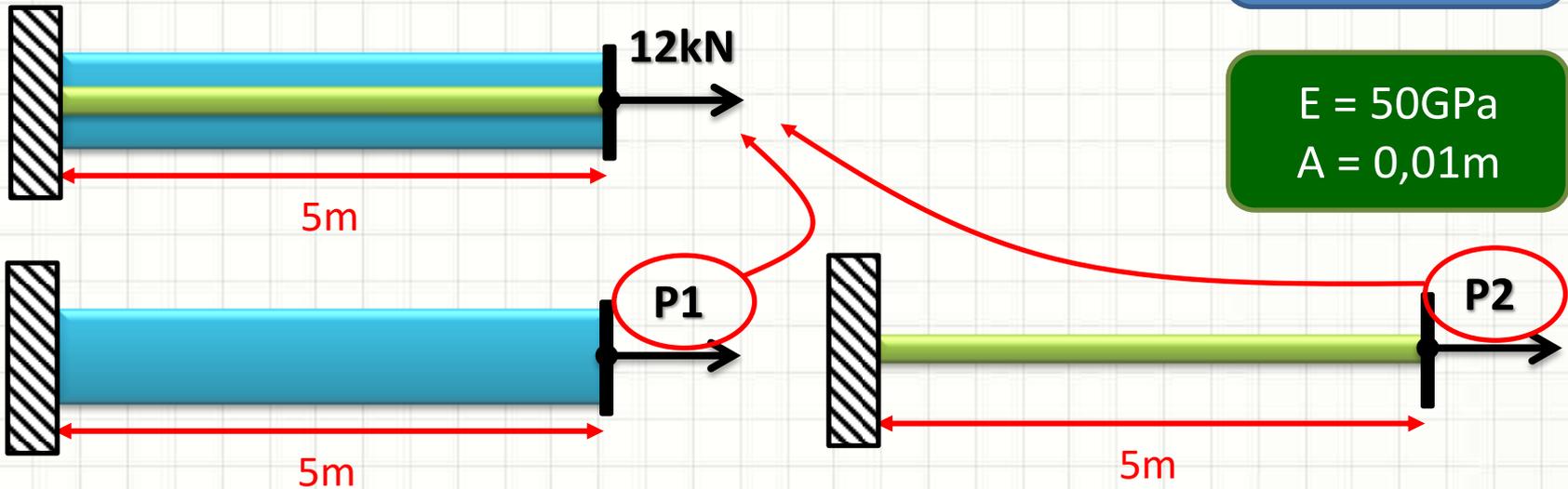
- Calcule a deformação na barra abaixo:

$$E = 10\text{GPa}$$

$$A = 0,1\text{m}$$

$$E = 50\text{GPa}$$

$$A = 0,01\text{m}$$



$$P1 + P2 = 12000$$

$$P2 = 12000 - P1$$

$$\delta = \frac{P1 \cdot 5}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,1}$$

$$\delta = \frac{P2 \cdot 5}{50 \cdot 10^9 \cdot 0,01}$$

$$\frac{P1}{0,2 \cdot 10^9} = \frac{P2}{0,1 \cdot 10^9} \Rightarrow P1 = 2 \cdot P2$$

$$3 \cdot P2 = 12000$$

$$P2 = 4\text{kN}$$

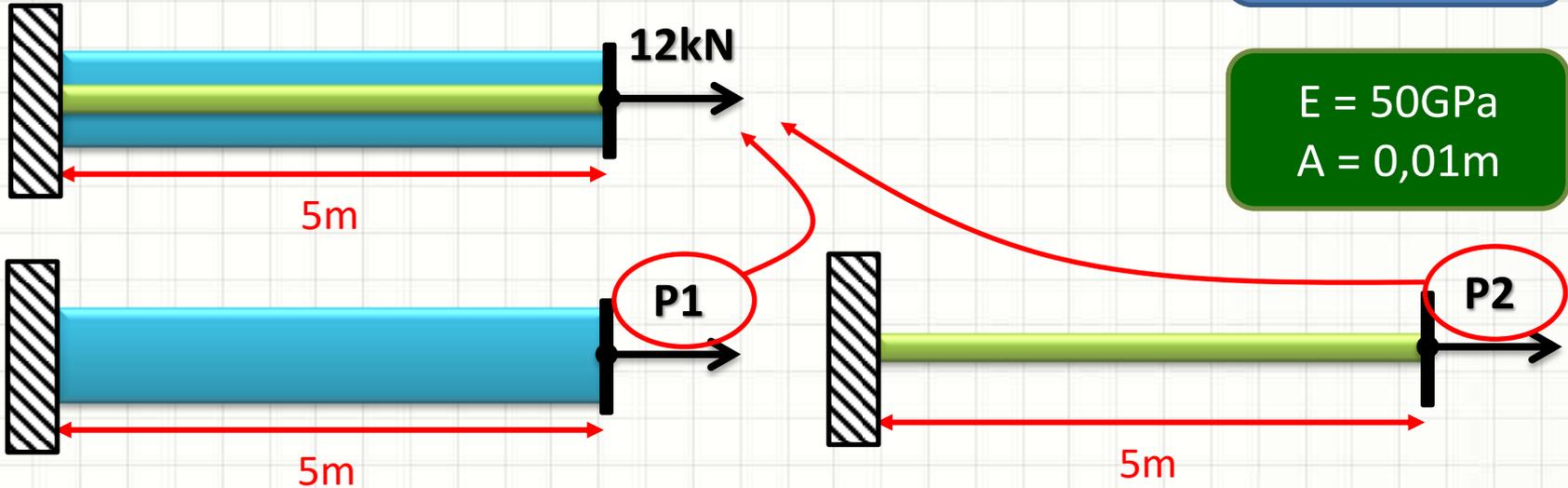
$$\therefore P1 = 8\text{kN}$$

Exemplo

- Calcule a deformação na barra abaixo:

$E = 10\text{GPa}$
 $A = 0,1\text{m}$

$E = 50\text{GPa}$
 $A = 0,01\text{m}$



$$P1 = 8\text{kN}$$

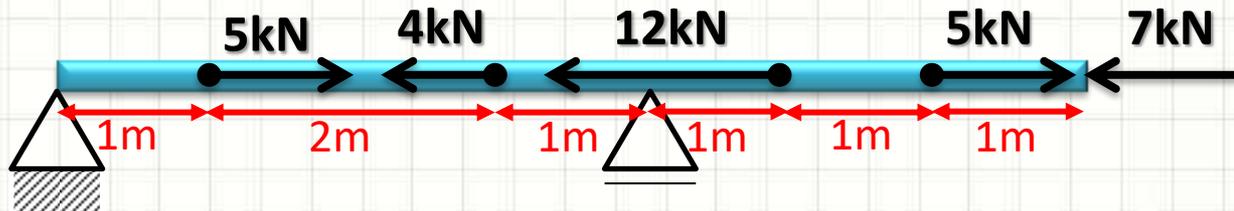
$$P2 = 4\text{kN}$$

$$\delta = \frac{P1 \cdot L}{E \cdot A} = \frac{8000 \cdot 5}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,1} = \frac{40000}{10^9} = \frac{4 \cdot 10^5}{10^9} = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta = 0,0004\text{m}$$

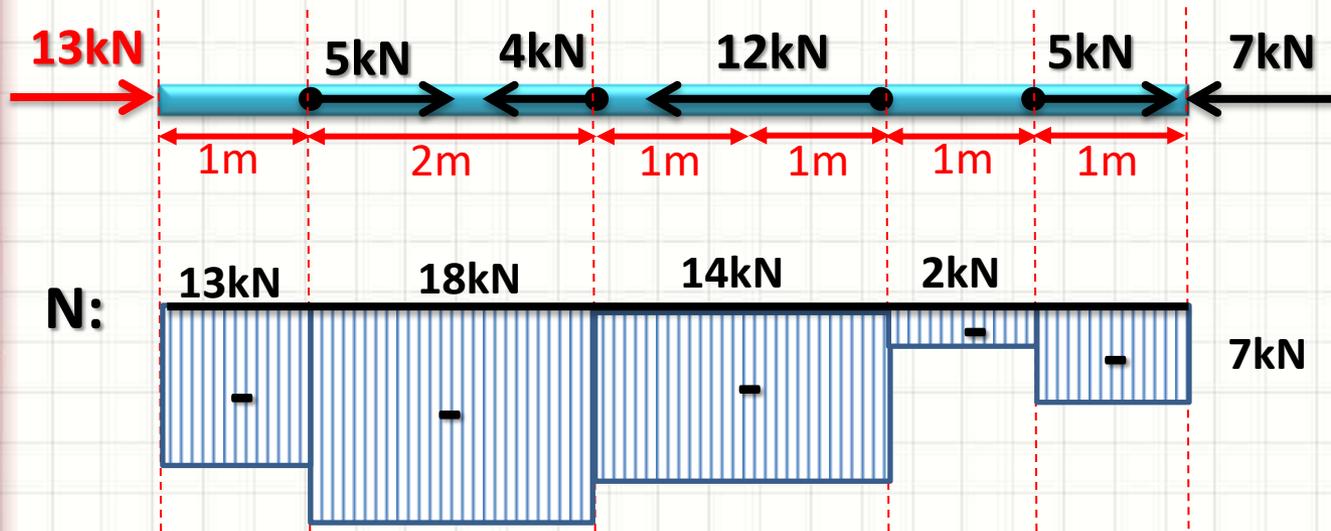
Exercício

- Calcule a deformação da barra abaixo, cujo $E = 10\text{GPa}$ e a área da seção transversal é de $0,01\text{m}^2$.



Exercício

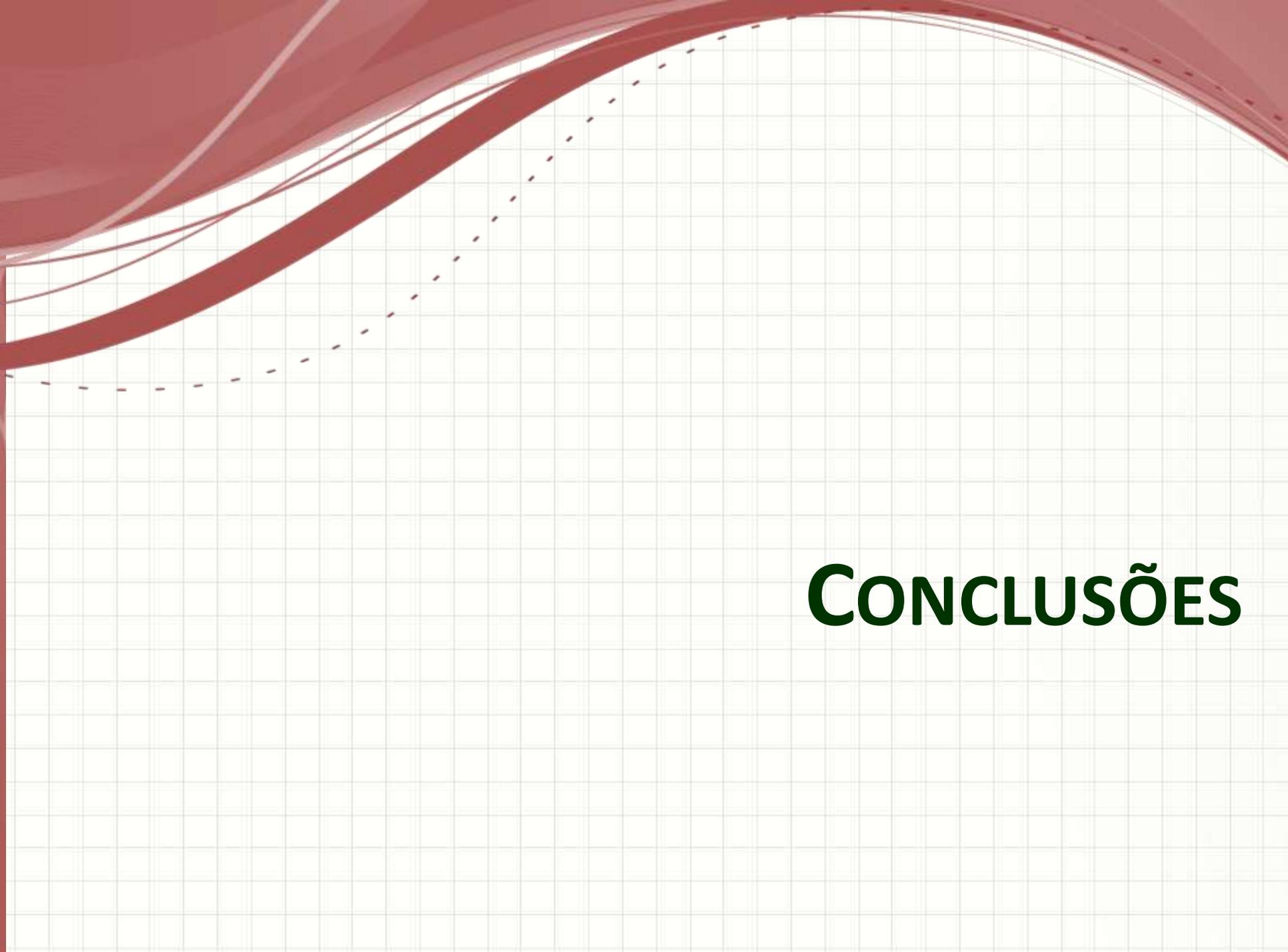
- Calcule a deformação da barra abaixo, cujo $E = 10\text{GPa}$ e a área da seção transversal é de $0,01\text{m}^2$.



$$\delta = \frac{-13000 \cdot 1 - 18000 \cdot 2 - 14000 \cdot 2 - 2000 \cdot 1 - 7000 \cdot 1}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,01} = \frac{-86000}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,01}$$

$$\delta = -860 \cdot 10^6$$

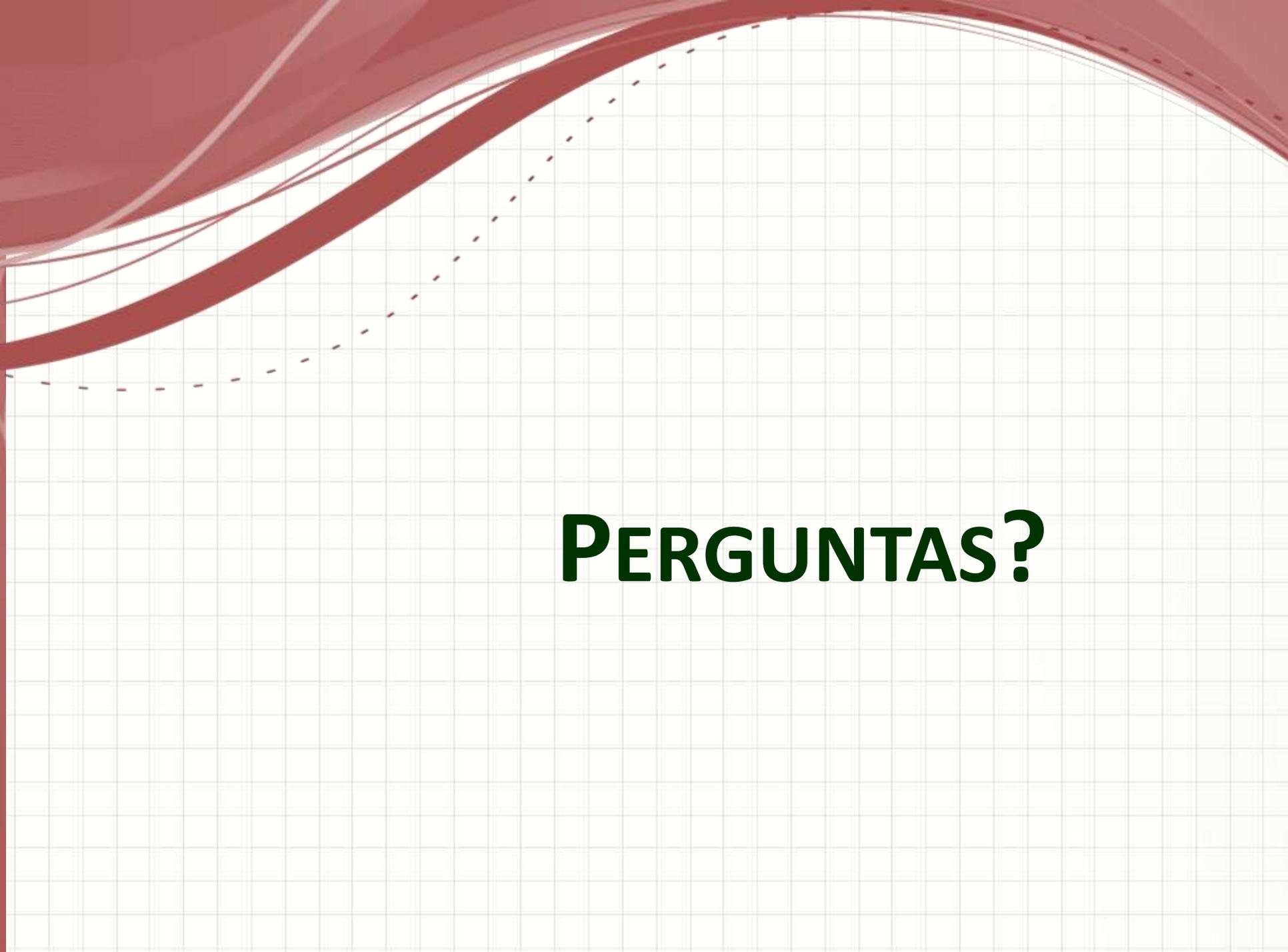
$$\delta = -8,9 \cdot 10^{-4} \text{m}$$



CONCLUSÕES

Resumo

- Existe relação entre carga e deformação
 - Influenciam
 - Elasticidade (E) / Área (A) / Comprimento (L)
 - Podemos “decompor” problemas
 - Superposição
 - Resolver problemas complexos!
 - **TAREFA:** Exercícios Aula 12
-
- Como resolver barras hiperestáticas?
 - Bi-engastadas, por exemplo?



PERGUNTAS?

Exercício (para casa)

- Trace o Diagrama de Normal
- Calcule o encurtamento total
- $\phi_A = 0,5\text{m}$ $\phi_B = 1\text{m}$
- $E_A = E_B = 50\text{GPa}$

