Aula 02: Introdução à Modelagem Matemática

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Introduzir os conceitos de modelagem matemática.

Bibliografia:

- MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.

Introdução

Como visto na aula anterior, a solução de problemas de Pesquisa Operacional, em específico os problemas da Programação Linear, podem ser resolvidos por um processo que pode ser sintetizado da seguinte forma:

1) Definição da situação problema, ou seja, determinar quais são os objetivos desejados, quais são as restrições às soluções, quanto tempo existe para que o problema seja resolvido... e assim por diante. Neste passo informações genéricas e dispersas precisam ser transformadas em informações estruturadas e precisas.

2) Formulação de um modelo quantitativo, ou seja, formalizar todas as informações estruturadas no passo anterior em termos matemáticos, representando as relações entre variáveis dos problemas através de símbolos matemáticos. Na Programação Linear, uma das técnicas usadas pela PO, as relações são expressas por equações e inequações.

3) Resolução do Modelo, ou seja, manipular os valores das variáveis até que se obtenha a melhor solução possível, em termos do objetivo identificado no primeiro passo. É importante lembrar que algumas variáveis podem ser manipuladas livremente. Outras, entretanto, serão calculadas como resultado do processo. Estas últimas são chamadas **variáveis de decisão**.

4) Consideração de Fatores Imponderáveis, ou seja, analisar a solução encontrada e verificar se ela precisa ser modificada para incorporar fatores externos que não tenham sido considerados no modelo matemático.

5) Implementação da solução, ou seja, constatado que a solução é possível na prática, parte-se para a implementação, que deve ter sido projetada para uma transição o mais suave possível.

Nestas aulas e nas seguintes serão focados os passos 1 e 2.

1. O Uso de Modelos na Pesquisa Operacional

Tanto quanto possível, a PO busca obter a melhor solução possível, chamada "**solução ótima**" para um dado problema. Este tipo de resultado perfeito só é possível através do uso da matemática e, portanto, existe a necessidade de transformar um problema real em um **modelo matemático** teórico que possa ser resolvido.

A solução ótima do modelo matemático teórico será aplicável à realidade se e somente se o modelo matemático descrever adequadamente o problema real. Se o modelo matemático não descrever o problema corretamente, haverá grandes chances de que a solução encontrada não seja possível na realidade ou, mais frequentemente, que ela não seja, de fato, a melhor solução.

Por esta razão, a modelagem matemática tem uma grande importância no contexto da Pesquisa Operacional e seu aprendizado é baseado na prática. Neste curso serão apresentados problemas clássicos de PO e seus modelos decorrentes, os quais serão enfatizados.

Ainda que uma parte do curso seja voltada a métodos analíticos de solução, isso não pode, de forma alguma, ocultar o objetivo fundamental de se estudar PO, que é o de descobrir soluções para problemas práticos.

1.1. Modelagem Matemática para Programação Linear

Os modelos matemáticos mais populares são aqueles, provavelmente, denominados Modelos de Programação Linear. Estes modelos servem para representar problemas em que a relação entre as variáveis destes problemas possam ser expressas na forma de equações ou inequações lineares. As características fundamentais de um modelo deste tipo são:

1) Existe uma combinação de variáveis que deve ser maximizada ou minimizada, como por exemplo o custo de uma operação industrial ou rentabilidade média de ações. A esta combinação de variáveis dá-se o nome de **função objetivo**. Por exemplo: $7x + 2y$, onde x e y são variáveis de interesse. As variáveis que aparecem na função objetivo são as chamadas **variáveis de decisão**.

2) A estrutura do problema é tal que existe uma limitação de recursos, não sendo possível ter um lucro tão grande quanto se queira nem um custo tão pequeno quanto se queira. Estas limitações de recursos são expressas como equações ou inequações matemáticas e são chamadas **restrições**.

Assim, sempre que existir um problema em que se deseja definir qual é a melhor configuração de operação, ou seja, aquela que traz maior lucro ou reduz os custos, e for possível representar estes objetivo e restrições através de equações ou inequações lineares, é possível modelá-lo como um problema de Programação Linear para posterior resolução.

1.2. Primeiro Exemplo de Modelagem

A primeira modelagem que será vista é absolutamente simples, não representado sequer um problema real, mas será a base para a introdução de alguns conceitos-chave. Será apresentado um problema e em seguida a modelagem do mesmo, em passos.

Problema:

A esteira de uma seção de uma fábrica possui 70 metros. Sabendo que cada peça ocupa um espaço de 3,5 metros, maximize o número de peças que serão colocadas na esteira.

Modelagem:

O primeiro passo, que auxilia muito na solução, é fazer um pequeno quadro que resuma as informações do problema. Por exemplo:

Tamanho Esteira	Tamanho Peça
70	3,5

Passo 1: Identificar as Variáveis

Neste problema, o objetivo é claro: colocar o máximo possível de peças na esteira. Defina-se, então, como **x** o número de peças a serem colocadas na esteira.

Passo 2: Identificar a Função Objetivo

Pelo enunciado, o que se pede busca é maximizar o número de peças na esteira, não é? Então pode-se dizer que a **função objetivo** do problema é "maximizar o número de peças na esteira", o que pode ser escrito da seguinte forma:

F.O.: [MAX] **x**

Entretanto, é possível colocar quantas peças se desejar na esteira? **NÃO**! E para tornar isso claro matematicamente, é preciso indicar as **restrições**, que nada mais são que as **limitações** da solução do problema.

Passo 3: Identificar as Restrições

A principal restrição neste problema refere-se ao comprimento da esteira. É possível dizer que o comprimento total das peças colocadas em fila não deve ser maior que 70 metros (que é o tamanho da esteira). É possível indicar isto da seguinte forma:

Comprimento Total das Peças ≤ 70

Ou, abreviadamente:

$C_{TP} \leq 70$

Entretanto, C_{TP} é um valor que precisa estar relacionado com x, que representa o número de peças. É necessário encontrar esta relação, e neste caso isso é possível. O raciocínio é bastante simples. Como cada peça mede 3,5 metros, pode-se escrever uma equação que diga "o comprimento total de **x** peças" que, em outras palavras, será exatamente o C_{TP}. Obter essa equação é fácil. Observe:

- Se tivermos 1 peça, o comprimento total será 1 * 3,5;
- Se tivermos 2 peças, o comprimento total será 2 * 3,5;
- Se tivermos 3 peças, o comprimento total será 3 * 3,5;

Assim...

- Se tivermos **x** peças, o comprimento total será **x** * 3,5;

Pode-se escrever, então:

Comprimento total ocupado pelas peças = 3,5 * **x**

Ou ainda...

$C_{TP} = 3{,}5 * \mathbf{x}$

Como se sabe que $C_{TP} \leq 70$, é possível escrever:

$3{,}5 * \mathbf{x} \leq 70$

E esta é a restrição do problema. Assim, é possível apresentar este modelo matemático completo da seguinte forma:

F.O.: [MAX] **x**
S.A.: $3{,}5 * \mathbf{x} \leq 70$

Note que "F.O." significa "Função Objetivo" e "S.A." significa "Sujeito À". A sigla "F.O." normalmente precede a função objetivo e a sigla "S.A." é indicada na linha em que começam as restrições (que podem ser várias).

Uma vez que o modelo matemático esteja feito, o passo seguinte é encontrar sua solução. Para a maioria dos problemas, a solução não é simples. Mas para um problema tão pequeno, é possível encontrá-la apenas por inspeção. Qual é o valor máximo que **x** pode receber e que a restrição apresentada não será ferida? Pense!

1.3. Parâmetros x Variáveis de Decisão: Uma Primeira Noção

Independente do problema, antes de partir para a geração de um modelo, é importante ressaltar a diferença entre Parâmetros e Variáveis de Decisão. **Parâmetros são valores que são fornecidos** e nos quais não se pode mexer; devem permanecer como estão. **Variáveis de decisão são valores que podem ser alterados** e, em geral, são **valores que se deseja determinar**. As variáveis de decisão normalmente são expressas algebricamente, como x_1, x_2, x_3... observe que é comum o uso de índices (os pequenos números ao lado da letra).

Estes índices são usados para indicar diferentes instâncias de um mesmo tipo de variável. Por exemplo: pode-se dizer que **x** é uma variável que indica quanto combustível foi abastecido e o índice indica em que posto este abastecimento ocorreu.

Assim, segundo o exemplo acima, é possível dizer que x_1 é a quantidade de combustível que foi abastecida no posto 1, x_2 é a quantidade que foi abastecida no posto 2, x_3 é a quantidade que foi abastecida no posto 3... e assim por diante. É importante ressaltar que os **índices** têm um papel importante na especificação do modelo e não há um significado pré-definido para os mesmos. É tarefa do pesquisador descrever **o que** os índices significam.

1.4. Uma Modelagem mais Completa?

Observando o exemplo acima, uma relação direta pode ser feita com o problema clássico de minimizar o gasto com combustível em uma dada viagem. Considere que o caminho a percorrer consome em torno de 50 litros de combustível e na estrada existem três postos de combustível: p_1, p_2 e p_3. Adicionalmente, é sabido que cada um dos postos tem um custo (preço) de combustível diferente: c_1, c_2 e c_3. O que se deseja saber então é:

Quanto se deve abastecer no posto 1 (p_1), quanto no posto 2 (p_2) e quanto no posto 3 (p_3) para gastar o mínimo possível? Bem, se o desejo é saber quanto será abastecido em cada posto, é porque **pretende-se tomar uma decisão** que envolve estes valores. Por esta razão estas são chamadas de **variáveis de decisão**. Seguindo a definição feita anteriormente, em que **x** é uma variável que indica quanto combustível foi abastecido e o índice indica em que posto este abastecimento ocorreu, é possível dizer que x_1 indica o quanto será abastecido no posto 1, x_2 indica o quanto será abastecido no posto 2 e x_3 indica o quanto será abastecido no posto 3.

Assim, x_1, x_2 e x_3 são as variáveis de decisão deste problema e os valores de x_1, x_2 e x_3 vão expressar o número de litros de combustível abastecido em cada posto. <u>Se não houver a necessidade de abastecer em um dado posto, a variável de decisão que se refere à quantida de combustível abastecida naquele posto terá valor igual a **zero**</u>. Por exemplo: se a melhor opção for **não** abastecer no posto 2, o valor de x_2 será 0 ($x_2 = 0$).

Com isto em mente, é possível dizer que o valor gasto no posto 1 será o quanto foi abastecido no posto 1, multiplicado pelo preço do litro de combustível no posto 1, ou seja:

$$x_1 * p_1$$

Afinal, se for abastecido 1 litro, será pago 1 vez o preço de um litro. Se for abastecido 2 litros, será pago 2 vezes o preço do litro e assim por diante. Da mesma forma, se nada for abastecido, x_1 valerá zero e nada será pago no posto 1.

Seguindo o mesmo raciocínio, é possível dizer que o custo no posto 2 será $x_2 * p_2$ e que no posto 3 o custo será $x_3 * p_3$. Chamando os custos em cada posto de c_1, c_2 e c_3, é possível reescrever os custos da seguinte forma:

$$c_1 = x_1 * p_1$$
$$c_2 = x_2 * p_2$$
$$c_3 = x_3 * p_3$$

O custo total de abastecimento será $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3$, o que pode ser descrito da seguinte forma:

$$c = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3$$

Como o desejo é gastar o mínimo possível, ou seja, ter o menor custo possível, é possível dizer que se deseja **minimizar** este custo. A maneira formal de dizer isso é:

$$[\text{MIN}]\ x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3$$

Esta função, que descreve o que se deseja do problema é, como dito anteriormente, chamada de **função objetivo** e, neste caso, x_1, x_2 e x_3 são **variáveis de decisão** e p_1, p_2 e p_3 são os **parâmetros**.

1.5. Restrições

Na seção anterior, foi representado o desejo de gastar o mínimo possível. Entretanto, a solução para o problema apresentado é "fique em casa, não abasteça nada e não gaste nada", já que em lugar algum foi descrito que sair de casa é obrigatório.

Para que o problema representado se assemelhe mais com as necessidades, é preciso adicionar mais informações ao problema. Tais informações são acrescentadas na forma de restrições. Uma destas restrições poderia ser, por exemplo: "Não é possível 'ficar em casa'".

Entretanto, é preciso indicar este tipo de restrição usando as **variáveis de decisão** que já estão sendo usadas. No caso, a informação que pode ser usada é um consumo conhecido da viagem, que seria, por exemplo, de 50 litros de combustível.

Como acrescentar esta informação? Bem, se vai ser abastecido x_1 litros no posto 1, x_2 litros no posto 2 e x_3 litros no posto 3, é possível dizer que o total de litros abastecido é:

$$\text{total abastecido} = x_1 + x_2 + x_3$$

Ora, o total abastecido precisa ser um valor **maior ou igual** aos 50 litros necessários para a viagem; ou seja, formalmente:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$$

Com isso, é possível apresentar um primeiro modelo matemático muito simplificado:

[MIN] $x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3$
Sujeito à: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$

Ou ainda:

[MIN] $x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3$
S.A. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$

1.6. Condição de Não-Negatividade

Em programação linear, uma restrição sempre existente (mas implícita) é a de que as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos. Isso faz todo o sentido do mundo, uma vez que as variáveis de decisão praticamente sempre indicam quantidades... e quantidades negativas não fazem sentido. Por esta razão, sempre é posível incluir ao modelo restrições deste tipo:

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$

Ficando assim, o modelo final:

[MIN] $x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3$
S.A. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$

2. Modelagem Exemplo

Problema (extraído de MOREIRA, 2006):

Uma fábrica produz dois produtos, A e B. Cada um deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2. Devido à programação de outros produtos que também usam estas máquinas, estão disponíveis para os produtos A e B apenas 24 horas da máquina M_1 e 16 horas da máquina M_2.

Para produzir uma unidade do produto A, são necessárias 4 horas em cada uma das máquinas e para produzir uma unidade do produto B, são necessárias 6 horas em M_1 e 2 horas em M_2. Cada unidade de A vendida gera um lucro de R$ 80,00 e cada unidade de B vendida gera um lucro de R$ 60,00.

Existe uma previsão de demanda máxima de 3 unidades para B, mas nenhuma restrição de demanda para A. Deseja-se saber: quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro?

Solução

O primeiro passo que auxilia muito na solução, é fazer um pequeno quadro de informações. Por exemplo:

Produto	**Horas de M_1**	**Horas deM_2**	**Demanda Max**	**Lucro Unitário**
A	4	4	-	80
B	6	2	3	60
Horas Disp.	24	16	-	-

Neste problema, o objetivo é claro: maximizar o lucro. Assim, a função objetivo será de maximização. Mas como se pode descrever esta função objetivo em termos dos dados apresentados?

Ora, é sabido o lucro gerado por cada unidade de A e B: se uma unidade de A for vendida, o lucro será de R$ 80,00. Se uma unidade de B for vendida, o lucro será de R$ 60,00. Considerando o número de unidades de A vendidas como x_A e o número de unidades de B vendidas como x_B, é possível dizer que:

Lucro pelas vendas de A = $80 * x_A$
Lucro pelas vendas de B = $60 * x_B$

Lucro Total = $80 * x_A + 60 * x_B$

Ora, então essa é a função objetivo, já que se deseja maximizar este lucro... E x_A e x_B são as variáveis de decisão. A função objetivo pode ser formalizada como:

Função Objetivo:
[MAX] 80 * x_A + 60 * x_B

Esta é a primeira parte do modelo, mas ele ainda está longe de estar completo... Afinal, na forma com que foi representado, pode-se definir um lucro infinito... e na prática isso não ocorre! Como contornar isso? Impondo as limitações que o próprio problema apresenta:

- Limitação de Horas de M_1 : 24
- Limitação de Horas de M_2 : 16
- Limitação de Demanda para B : 3

Como escrever isso matematicamente? Deve-se estudar caso a caso.

Limitação de Horas de M_1 : 24

A máquina M_1 terá de ser compartilhada pela produção de A e B, uma vez que ambos a utilizam. Sabe-se que cada unidade de A produzida consome 4 horas de M_1 e cada unidade de B produzida consome 6 horas de M_1. Ora, se o número de unidades produzidas de A (x_A) for multiplicado por 4, o resultado será o número de horas de M_1 que é gasto com produção de A e multiplicando o número de unidades produzidas de B (x_B) por 6, o resultado será o número de horas de M_1 que é gasto com a produção de B:

Tempo de M_1 gasto com produção de A : 4 * x_A
Tempo de M_1 gasto com produção de B : 6 * x_B
Tempo total de M_1 : 4 * x_A + 6 * x_B

Mas a limitação de horas de M_1 é 24 horas, ou seja, é possível usar M_1 por qualquer número de horas, desde que ele não exceda 24 horas. Isso pode ser escrito da seguinte forma:

Tempo total de M_1 = 4 * x_A + 6 * x_B
Tempo total de M_1 ≤ 24

Juntando ambos...

4 * x_A + 6 * x_B ≤ 24 <= Restrição do número de horas de M_1

Limitação de Horas de M_2 : 16

A máquina M_2 também terá de ser compartilhada pela produção de A e B. Sabe-se que cada unidade de A produzida consome 4 horas de M_2 e cada unidade de B produzida consome 2 horas de M_2. Ora, se o número de unidades produzidas de A (x_A) for multiplicado por 4, o resultado será o número de horas de M_2 que é gasto com produção de A e multiplicando o número de unidades produzidas de B (x_B) por 2, o resultado será o número de horas de M_2 que é gasto com a produção de B:

Tempo de M_2 gasto com produção de A : $4 * x_A$
Tempo de M_2 gasto com produção de B : $2 * x_B$
Tempo total de M_2 : $4 * x_A + 2 * x_B$

Mas a limitação de horas de M_2 é 16 horas, ou seja, é possível usar M_2 por qualquer número de horas, desde que ele não exceda 16 horas. Isto pode ser escrito da seguinte forma:

Tempo total de $M_2 = 4 * x_A + 2 * x_B$
Tempo total de $M_2 \leq 16$

Juntando ambos...

$4 * x_A + 2 * x_B \leq 16$ <= Restrição do número de horas de M_2

Limitação de Demanda para B : 3

Em tese, pode-se produzir qualquer número de unidades de A e B, desde que sejam respeitados os limites de horas disponíveis em cada máquina. Entretanto, foi fornecida uma informação adicional: a de que caso sejam produzidos mais do que 3 unidades de B, as que excederem este valor não serão vendidas. Unidades não vendidas significam custo para produzir e nenhum lucro. Assim, não é adequado permitir que isso ocorra, pois isso faria com que o lucro da empresa fosse menor.

Para evitar este problema, basta adicionar uma limitação a mais, indicando que qualquer número de unidades produzidas de B (x_B) é adequado, desde que não exceda 3. Matematicamente:

$x_B \leq 3$ <= Restrição de Demanda para B

Condição de Não-Negatividade

Em programação linear, uma restrição sempre implícita é a de que as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos. Isso faz todo o sentido do mundo, uma vez que as variáveis de decisão praticamente sempre indicam quantidades... e quantidades negativas não fazem sentido. Por esta razão, serão incluídas duas restrições ao modelo:

$x_A \geq 0; x_B \geq 0$ <= Restrições de não-negatividade

Modelo Final

O resultado da junção da função objetivo com todas as restrições é o modelo matemático final para o problema:

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B$

Restrições:
$4 * x_A + 6 * x_B \leq 24$ <= Restrição do número de horas de M_1
$4 * x_A + 2 * x_B \leq 16$ <= Restrição do número de horas de M_2
$x_B \leq 3$ <= Restrição de Demanda para B
$x_A \geq 0; x_B \geq 0$ <= Restrições de não-negatividade

Onde as variáveis de decisão são x_A e x_B.

Bibliografia

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.