Aula 03: Solução Gráfica de Problemas de P.L.

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar graficamente a solução de um problema de programação linear e a análise dos resultados gráficos.

Bibliografia:

- MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. Ed. Pioneira, 2007.

Introdução

Apesar de não ser qualquer tipo de problema de programação linear que permite uma solução gráfica, alguns deles permitem e a apresentação deste tipo de solução pode ser bastante positivo para a compreensão dos problemas em si, da modelagem matemática e até mesmo o funcionamento do algoritmo Simplex que, será apresentado nas próximas aulas.

Com este objetivo, esta aula será devotada à resolução gráfica de um dos problemas apresentados anteriormente. Adicionalmente serão feitos alguns comentários com relação à análise dos resultados obtidos.

1. A Modelagem e Solução

Problema (extraído de MOREIRA, 2006):

Uma fábrica produz dois produtos, A e B. Cada um deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2. Devido à programação de outros produtos que também usam estas máquinas, estão disponíveis para os produtos A e B apenas 24 horas da máquina M_1 e 16 horas da máquina M_2.

Para produzir uma unidade do produto A, são necessárias 4 horas em cada uma das máquinas e para produzir uma unidade do produto B, são necessárias 6 horas em M_1 e 2 horas em M_2. Cada unidade de A vendida gera um lucro de R$ 80,00 e cada unidade de B vendida gera um lucro de R$ 60,00.

Existe uma previsão de demanda máxima de 3 unidades para B, mas nenhuma restrição de demanda para A. Deseja-se saber: quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro?

Modelo Final

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B$

Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B \leqslant 24$ <= Restrição do número de horas de M_1
$4 * x_A + 2 * x_B \leqslant 16$ <= Restrição do número de horas de M_2
$x_B \leqslant 3$ <= Restrição de Demanda para B
$x_A \geqslant 0; x_B \geqslant 0$ <= Restrições de não-negatividade

Onde as variáveis de decisão são x_A e x_B.

1.1. Solução Gráfica

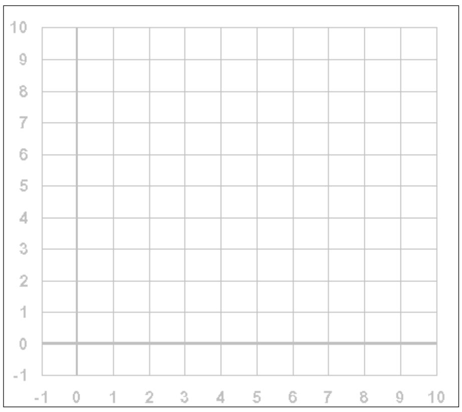
Sempre que um problema de programação linear tiver apenas duas variáveis de decisão, será possível resolvê-lo graficamente. Embora seja um tanto limitada e também não seja a forma mais rápida de resolver um problema, é uma maneira interessante de entender o mecanismo de solução de problemas de programação linear.

A idéia por trás da solução gráfica é delimitar a área em que todas as soluções possíveis se encontram e então buscar, neste espaço - chamado **Espaço de Soluções** - a melhor solução possível.

Bem, se o desejo é encontrar as soluções **possíveis** e tem-se o conhecimento de que elas são limitadas pelas **restrições**, então são estas que serão usadas para delimitar o espaço de soluções possíveis. Observe as restrições com atenção:

$4 * x_A + 6 * x_B \leqslant 24$ <= Restrição do número de horas de M_1
$4 * x_A + 2 * x_B \leqslant 16$ <= Restrição do número de horas de M_2
$x_B \leqslant 3$ <= Restrição de Demanda para B
$x_A \geqslant 0; x_B \geqslant 0$ <= Restrições de não-negatividade

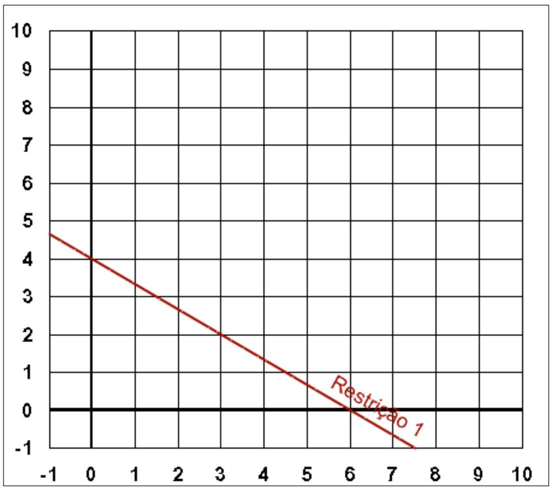
O primeiro passo é desenhar um plano cartesiano, onde serão traçadas, uma a uma, as áreas representadas pelas inequações:



Deve ser traçada, então, a reta equivalente à primeira restrição, $4 * x_A + 6 * x_B \leqslant 24$, que é a reta $4 * x_A + 6 * x_B = 24$. A tabela para esta construção é apresentada a seguir:

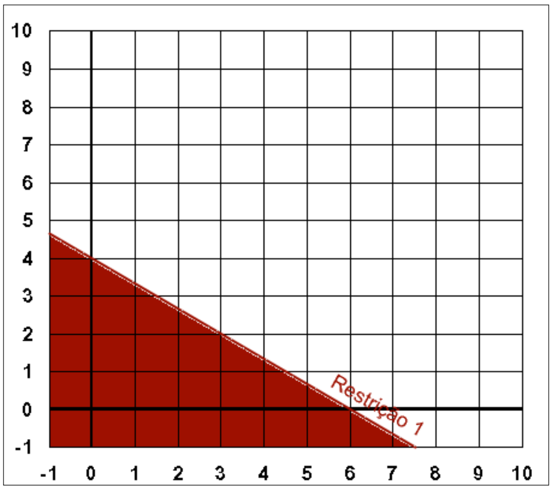
X (x_A)	**Y** (x_B)
0	4
6	0

Marcando os pontos e ligando-os, tem-se a seguinte reta:

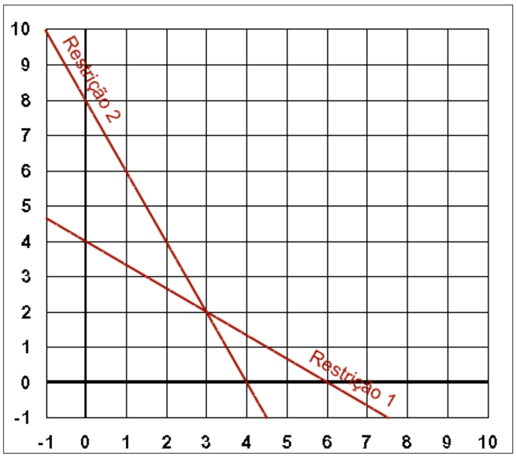


Entretanto, esta reta representa apenas a **borda** de um plano, afinal, a restrição original era uma **inequação** e não uma equação (que foi utilizada para desenhar a reta). A representação para a inequação deve incluir não apenas os pontos como (0,4) e (6,0) que satisfazem à igualdade, mas também aqueles que satisfazem a $4 * x_A + 6 * x_B < 24$.

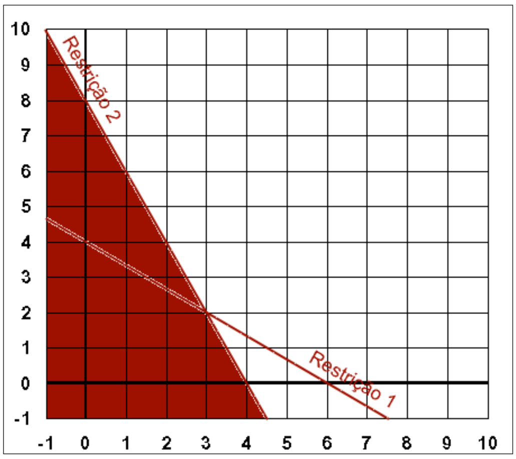
É possível testar um ponto claramente de um lado e de outro da reta, de forma a identificar qual dos lados representa a desigualdade. Pelo gráfico acima, o ponto (0,0) claramente está do lado de baixo da reta; substituindo-o na equação, tem-se que $4 * 0 + 6 * 0 < 24 \Rightarrow 0 < 24$, o que é correto. Logo, a área abaixo da reta **também** faz parte da representação da área da inequação:



Agora, deve-se traçar a reta que representa a equação relacionada à segunda restrição, $4 * x_A + 2 * x_B \leqslant 16$, no mesmo gráfico em que foi traçada a reta anterior. Para facilitar a visualização, foi eliminado temporariamente o preenchimento da área na próxima figura.

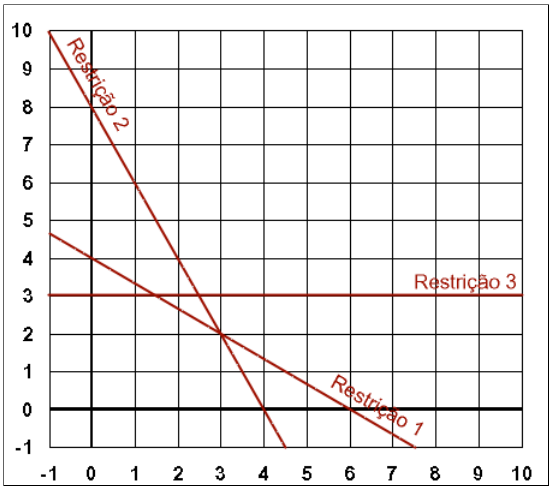


Entretanto, mais uma vez não se trata de uma equação e sim de uma **inequação**, que delimita um plano. Com o mesmo teste de lado pode-se verificar que a área delimitada pela inequação $4 * x_A + 2 * x_B \leqslant 16$ é a seguinte:

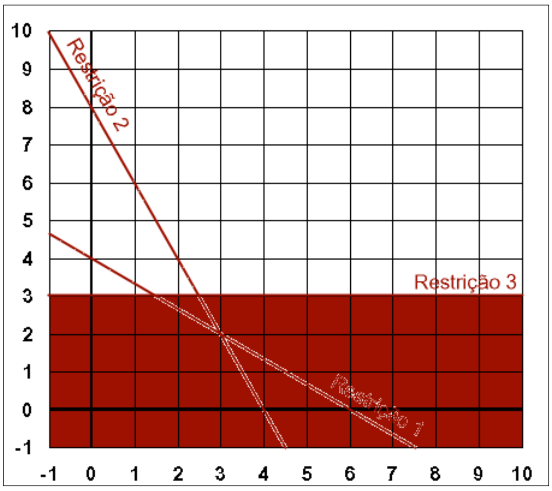


Entretanto, note que uma parte da área permitida pela Restrição 2 não é permitira pela Restrição 1 (área acima da reta da restrição 1 e abaixo da restrição 2, onde está o ponto (0,5), por exemplo). Assim, a área permissível pelas duas restrições será representada na próxima figura, mostrando como acrescentar a restrição 2 **reduziu** o espaço de soluções:

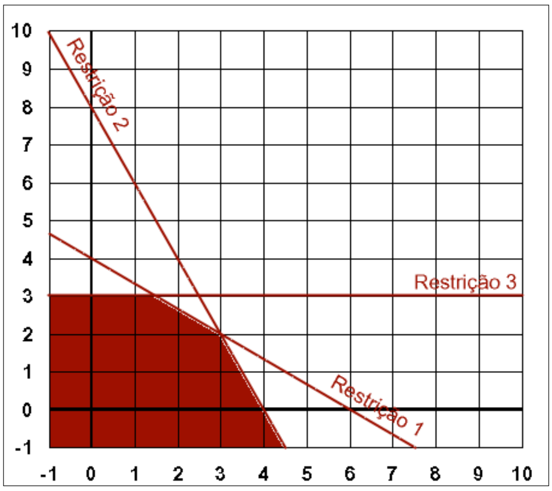
A terceira restrição é mais simples: $x_B \leqslant 3$. A equação associada é x = 3, que será representada na próxima figura:



E na próxima figura, será marcada a área permissível apenas pela restrição 3, ignorando as outras duas restrições:

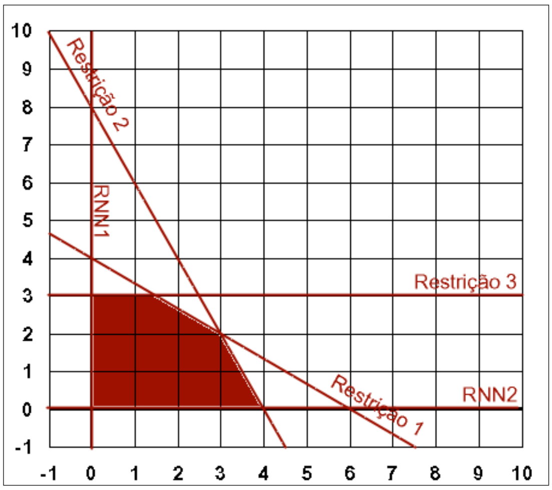


E agora, marcando apenas a área permissível ao mesmo tempo por todas as três restrições:



Entretanto, é possível observar que a área está se estendendo por regiões negativas tanto no eixo X (x_A) quanto no eixo Y (x_B). Isto está incorreto pois, como já comentado, existem sempre as duas restrições de não negatividade: $x_A \geqslant 0$; $x_B \geqslant 0$.

No próximo gráfico estão traçadas as restrições de não-negatividade e a área final já está delimitada:



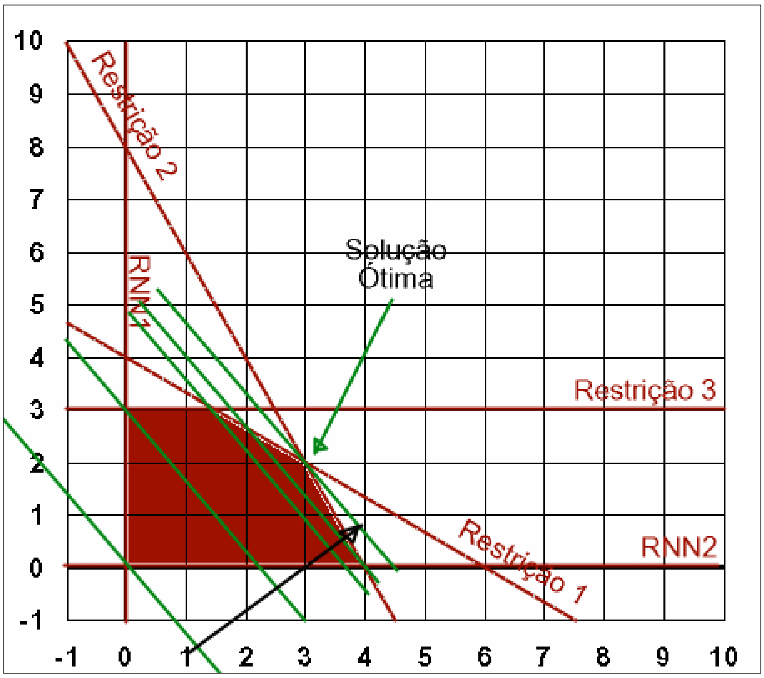
Com isso, temos a região de soluções possíveis delimitada. Todos os **pontos internos** à área vermelha representam **soluções possíveis** (*boas* ou *ruins*) e todos os **pontos externos** representam **soluções inviáveis**, ou seja, que ferem uma ou mais restrições. Mas, dentro desta área, qual das soluções é a melhor? Antes de fornecer a resposta, convém apresentar uma importante propriedade matemática:

"A solução ótima de um problema está em um dos pontos extremos da região permissível"

Em outras palavras, a solução ótima está em um dos "cantos" do espaço de soluções possíveis. A tabela abaixo apresenta os diversos pontos extremos do gráfico acima. Sua determinação é feita através das equações das retas que se cruzam para formar cada um deles:

Ponto Extremo	$\mathbf{x_A}$	$\mathbf{x_B}$	**Função Objetivo: $80*x_A + 60*x_B$**
1	0	0	0
2	4	0	320
3	3	2	360
4	1,5	3	300
5	0	3	180

Pelos valores calculados para a função objetivo, é possível ver que o ponto extremo 3 ($x_A = 3$ e $x_B = 2$) tem a melhor solução pois maximiza o lucro. Entretanto, esta não é a única forma de verificar a melhor solução. Pelo próprio gráfico é possível avaliar qual é o ponto extremo da melhor solução, se desenharmos a família de retas representada pela função objetivo. Por exemplo: $\mathbf{80*x_A + 60*x_B = 0}$, $\mathbf{80*x_A + 60*x_B = 180}$... e assim por diante, até encontrarmos o último ponto da figura que a reta da função objetivo toca, como indicado na figura a seguir.



2. Análises Possíveis

Através da representação gráfica dos problemas, é possível verificar porque algumas soluções indesejadas podem ocorrer. A seguir serão analisadas algumas destas situações e também será visto um pouco sobre o que é uma "análise de sensibilidade".

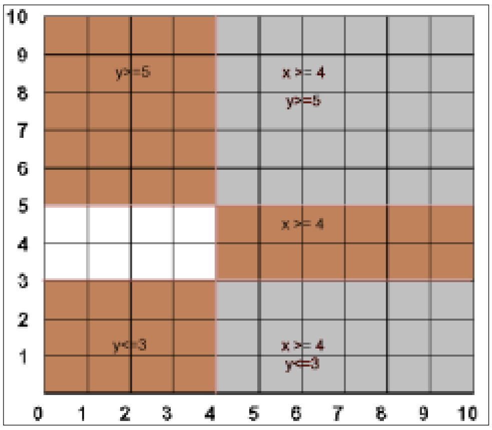
2.1. Restrições Incompatíveis

É possível que alguns problemas não possuam solução alguma (solução impossível), fato este causado por incompatibilidade entre as restrições. Por exemplo:

[MAX] $1*x + 2*y$

Sujeito a:
$$x \geqslant 4$$
$$y \geqslant 5$$
$$y \leqslant 3$$

Certamente há um problema aqui: y não pode ser, ao mesmo tempo, maior ou igual a cinco **E** menor ou igual a três. Entretanto, a incompatibilidade nem sempre é tão óbvia. É possível observar no gráfico a seguir como esta incompatibilidade de fato existe. Estão pintadas as áreas permissíveis a partir de cada restrição: note como não há nenhuma área que atenda simultaneamente às três restrições.



Como não há nenhum ponto extremo que obedeça às três restrições, este problema é de solução impossível.

2.2. Solução sem Fronteiras

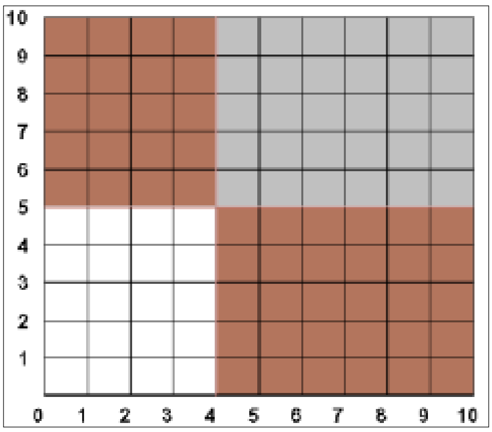
Considere um problema como este:

[MAX] 1*x + 2*y

Sujeito a: $x \geqslant 4$
$y \geqslant 5$

Isto representa um problema não limitado, o que normalmente é chamado de "**Solução sem Fronteiras**". O que isto significa? Significa que não há um máximo definido para a função objetivo: ela pode ser tão grande quanto se deseje, já que seu valor aumenta com o crescimento de X e Y e nenhuma destas variáveis tem seu valor máximo limitado.

No gráfico a seguir, esta situação é representada, valendo a pena notar que as regiões sombreadas não se limitam à área apresentada, estendendo-se infinitamente para cima e para a direita. Por esta razão, não é possível identificar o ponto extremo de máximo, que se daria justamente quando X e Y tiverem o valor infinito. Note que este é um problema que fere um dos princípios da programação linear, que não serve, obviamente, para resolver problemas ilimitados, como o representado pelo modelo matemático apresentado acima.



2.3. Restrições Redundantes

Considere o seguinte problema:

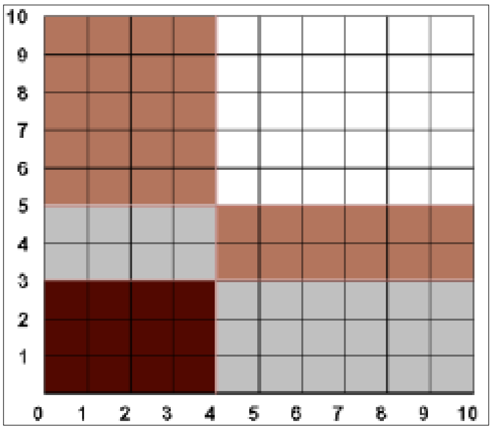
[MAX] 1*x + 2*y

Sujeito a: $x \leqslant 4$
$y \leqslant 5$
$y \leqslant 3$

Este problema possui o que são chamdas de "**Restrições Redundantes**", no caso, para a variável Y. A restrição $y \leqslant 3$ claramente já "inclui" a restrição $y \leqslant 5$, uma vez que se $y \leqslant 3$ for respeitada, $y \leqslant 5$ também sempre o será, automaticamente.

A representação deste problema em gráfico pode ser visualizada na próxima figura. Convém observar, entretanto, que este não é um "problema" em si, já que não atrapalha a solução do problema de programação linear.

É interessante, porém, eliminar as restrições redundantes que se identifique, a fim de simplificar o problema matemático a ser resolvido.



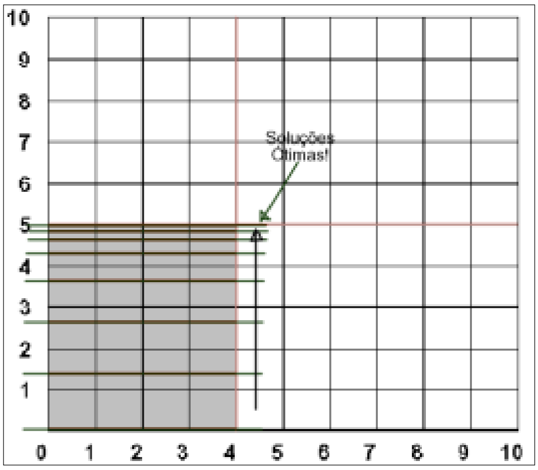
2.4. Soluções Alternativas

Em alguns problemas é impossível determinar um único ponto de extremo que seja a soluçao ótima. isso ocorre na situação em que a reta que representa a função objetivo é **paralela** à uma das restrições. Por exemplo:

[MAX] 1*y

Sujeito a: $x \leqslant 4$
$y \leqslant 5$

A representação gráfica a seguir mostra que, quando a reta da função objetivo toca o extremo da área de soluções possíveis, um segmento de reta inteiro fica marcado (e não apenas um ponto). Por esta razão, existem infinitas soluções ótimas para este problema, sendo qualquer uma delas aceitável de acordo com o modelo matemático apresentado.



Bibliografia

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.