Aula 05: A Lógica do Simplex e a Forma Padrão

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar as modificações na modelagem matemática necessárias para a especificação de um modelo na forma padrão em um problema simples.

Bibliografia:

- MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. Ed. Pioneira, 2007.

<u>Introdução</u>

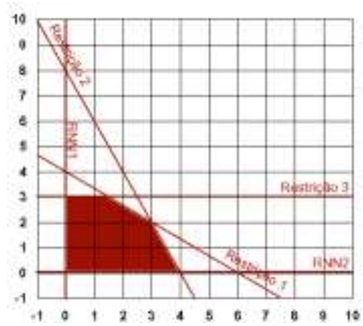
A solução gráfica para problemas de programação linear, vista nas aulas anteriores, é bastante elucidativa. Entretanto, é uma forma desajeitada de resolver problemas, além de se tornar complexa ou impossível de ser aplicada para problemas com mais de duas variáveis de decisão.

Uma forma alternativa é o uso do Método Simplex para a resolução dos problemas de programação linear. O Método Simplex é um método sistemático, baseado em um *tableau*, onde são indicados todos os dados do problema e, realizando algumas operações, encontra-se a solução ótima.

Porém, apesar de ter sido apresentada, nas aulas anteriores, a maneira de converter um problema real em um modelo matemático, tais modelos ainda não estão corretamente preparados para sua resolução pelo Simplex. Para que o modelo matemático se adapte às necessidades do Simplex, ainda são necessárias algumas modificações em sua forma, sem alterar o seu significado matemático. A forma final, pronta para o Simplex, é chamada de **Forma Padrão**.

<u>1. Requisitos do Simplex para a Modelagem</u>

Antes de mais nada, é interessante comentar a lógica por trás do Método Simplex. Na aula anterior, foi desenhado um gráfico que representava a **região de soluções viáveis** para o problema então modelado:



Também foi dito que as soluções ótimas estariam sempre nas regiões extremas desta área; em geral, nos vértices. O Simplex é um método matemático que explora estas características.

A ideia é a seguinte: dada uma solução inicial (um dos pontos de vértice), ele utiliza as inequações das restrições para determinar os próximos vértices e, escolhendo o melhor vértice encontrado, repete o processo. Resumidamente, se na figura anterior fosse iniciado o processo pelo vértice (0,0), o método calcularia o valor da função objetivo nos vértices (0,3) e (4,0) (que são os vértices vizinhos ao vértice (0,0)) e escolheria aquele que a função objetivo tivesse o maior valor (é um problema de maximização).

Supondo que este vértice seja o vértice (4,0), o método calcularia o valor dos vértices (0,0) e (3,2), que são os vértices vizinhos e, mais uma vez, escolheria aquele que tem o maior valor na função objetivo... repetindo este processo até que não fosse possível melhorar a solução.

Ora, como pode ser observado, para que esse processo seja iniciado, antes de mais nada é preciso encontrar uma solução inicial viável; garantindo isso, o método pressupõe que todas as soluções calculadas serão viáveis (mas nada pode ser garantido se o método for iniciado com uma solução inviável). Note que uma **solução inicial viável não significa** que ela precisa ser **ótima**... **nem** mesmo **boa**!

Ocorre que nem sempre é simples encontrar essa solução inicial viável na forma com que determinamos o modelo anteriormente. Assim, serão feitas algumas modificações no modelo com o objetivo de facilitar a determinação desta solução.

Adicionalmente, o Método Simplex age como a região viável fosse somente as **bordas** da região viável. Para tanto, exige que as restrições sejam todas **equações**, ou seja, expressas por **igualdades**. Claramente isso não é o caso comum e será necessário fazer uma alteração no modelo que transforme as inequações (com sinais ≤ ou ≥), em equações (com sinal =) **sem modificar o significado do modelo**. Neste ponto serão apresentados os truques para lidar com restrições do tipo ≤, ficando para aulas posteriores a análise de restrições do tipo ≤... e, como será visto, para facilitar a determinação da solução inicial, mesmo as restrições que já são igualdades (=) precisarão de um pequeno ajuste.

Visando a solução por computador, é necessário que todas as variáveis estejam presentes em todas as restrições e na função objetivo. Como isso nem sempre ocorre "naturalmente", já que frequentemente algumas restrições envolvem apenas uma ou duas variáveis, será necessário adicionar as variáveis faltantes, mais uma vez sem modificar o significado matemático das restrições. Também serão indicados coeficientes em todas as variáveis, mesmo que este coeficiente seja "1".

2. A Modelagem

Voltando ao Problema extraído de MOREIRA (2006):

Uma fábrica produz dois produtos, A e B. Cada um deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2. Devido à programação de outros produtos que também usam estas máquinas, estão disponíveis para os produtos A e B apenas 24 horas da máquina M_1 e 16 horas da máquina M_2.

Para produzir uma unidade do produto A, são necessárias 4 horas em cada uma das máquinas e para produzir uma unidade do produto B, são necessárias 6 horas em M_1 e 2 horas em M_2. Cada unidade de A vendida gera um lucro de R$ 80,00 e cada unidade de B vendida gera um lucro de R$ 60,00.

Existe uma previsão de demanda máxima de 3 unidades para B, mas nenhuma restrição de demanda para A. Deseja-se saber: quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro?

Modelo Final

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B$

Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B \leq 24$ <= Restrição do número de horas de M_1
$4 * x_A + 2 * x_B \leq 16$ <= Restrição do número de horas de M_2
$x_B \leq 3$ <= Restrição de Demanda para B

as variáveis de decisão são x_A e x_B e aqui não serão mais representadas as restrições de não-negatividade, porque elas são implícitas pelo método Simplex.

2.1. Resolvendo o Problema das Inequações

O que fazer para eliminar as desigualdades, neste caso? Uma coisa é certa: não é possível fazer isso:

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B$

Sujeito a (RESTRIÇÕES INCORRETAS!):
$4 * x_A + 6 * x_B = 24$ <= Restrição do número de horas de M_1
$4 * x_A + 2 * x_B = 16$ <= Restrição do número de horas de M_2
$x_B = 3$ <= Restrição de Demanda para B

E isso não é possível simplesmente porque assim o modelo seria **modificado** de uma maneira que **modificaria o problema** a ser resolvido. Em muitos casos, se isso fosse feito, o problema seria até mesmo insolúvel. Suponha, por exemplo, que a solução ótima do problema original fosse x_A=2 e x_B=2. Neste caso, pela restrição de hora de M_1:

$$4 * x_A + 6 * x_B = 24 \Rightarrow 4*2 + 6*2 = 24 \Rightarrow 8+12 = 24 \Rightarrow 20 = 24 \ !?!$$

Não! **20 g 24!** Como resolver a questão, então? A solução é usar um pequeno truque: acrescentar uma variável a mais em cada restrição:

Função Objetivo:
[MAX] 80 * x_A + 60 * x_B

Sujeito a:
4 * x_A + 6 * x_B + $\mathbf{x_{S1}}$ = 24 <= Restrição do número de horas de M_1
4 * x_A + 2 * x_B + $\mathbf{x_{S2}}$ = 16 <= Restrição do número de horas de M_2
x_B + $\mathbf{x_{S3}}$ = 3 <= Restrição de Demanda para B

Observe agora que, mesmo com o sinal de igual (=), o modelo não está restringindo mais a solução do que o modelo original. Por exemplo, suponha novamente que a solução ótima do problema original fosse x_A=2 e x_B=2.

Agora, pela restrição de horas de M_1, tem-se:

4 * x_A + 6 * x_B + x_{S1} = 24 <= Restrição do número de horas de M_1
4 * 2 + 6 * 2 + x_{S1} = 24
8 + 12 + x_{S1} = 24
20 + x_{S1} = 24
x_{S1} = 24 - 20
x_{S1} = 4

Ou seja, a suposta solução ótima x_A=2 e x_B=2 implicou um x_{S1} = 4, mas a solução voltou a ser possível e o objetivo de uma restrição com o sinal de igual foi atingido. De qualquer forma, uma pergunta fica no ar: o que representa esta variável x_{S1}?

Ora, neste caso, a variável x_{S1} representa o número de horas que **sobraram** da máquina M_1. x_{S1} é chamada uma **variável de folga**. Folga, em inglês, é Slack, daí o índice S na variável.

Repare, também, que as variáveis de folga também precisam obedecer às restrições de não-negatividade, já que não faz sentido sobrar "-10 horas" da máquina M_1, por exemplo. Note que o raciocínio todo acima pode ser repetido para as outras restrições, envolvendo x_{S2} e x_{S3}.

2.2. Resolvendo o Problema das Variáveis Faltantes

Este problema é bem mais fácil de ser resolvido que o anterior: basta acrescentar todas as variáveis faltantes em cada equação do modelo matemático, indicando-as com coeficiente zero. As que já existem sem coeficiente devem receber um coeficiente 1. Assim, o modelo que era:

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B$

Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B + x_{S1} = 24$ <= Restrição do número de horas de M_1
$4 * x_A + 2 * x_B + x_{S2} = 16$ <= Restrição do número de horas de M_2
$x_B + x_{S3} = 3$ <= Restrição de Demanda para B

Torna-se:

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3}$

Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B + 1 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 24$ <= Restrição M_1
$4 * x_A + 2 * x_B + 0 * x_{S1} + 1 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 16$ <= Restrição M_2
$0 * x_A + 1 * x_B + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 1 * x_{S3} = 3$ <= Restrição B

Observe que com as variáveis alinhadas a leitura do modelo se torna bem mais fácil, também.

3. Soluções Básicas e Não-Básicas: Encontrando uma Solução Inicial

Considere o modelo matemático apresentado anteriormente:

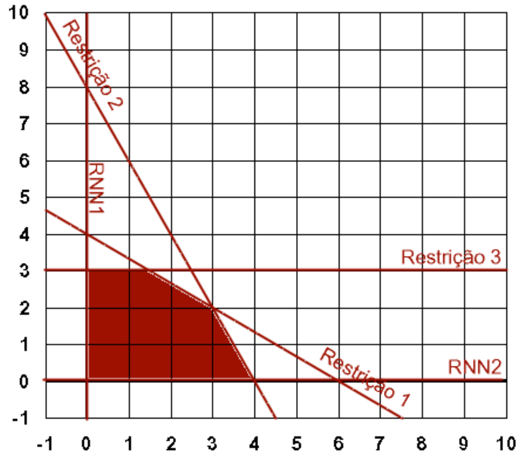
Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3}$
Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B + 1 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 24$ <= Restrição M_1
$4 * x_A + 2 * x_B + 0 * x_{S1} + 1 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 16$ <= Restrição M_2
$0 * x_A + 1 * x_B + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 1 * x_{S3} = 3$ <= Restrição B

Observando esta formulação, é possível verificar que há 5 incógnitas (x_A, x_B, x_{S1}, x_{S2}, x_{S3}) e apenas 3 equações de restrição (M_1, M_2 e B). Como há mais incógnitas do que equações, o problema é classificado como **indeterminado**, isto é, não é possível determinar uma solução única para ele, o que corrobora a solução gráfica, onde havia um grande número de soluções dentro da área de "soluções viáveis".

Entretanto, **se duas variáveis quaisquer forem escolhidas e tiverem seus valores fixados**, o resultado será um sistema de 3 equações e 3 incógnitas, tornando-se um sistema determinado, possibilitando o cálculo das variáveis restantes.

Por facilidade nas contas, os valores fixados para as variáveis em excesso é sempre 0 (zero). As variáveis escolhidas para terem seu valor definido como zero formam o que é chamado de "**solução não-básica**". As variáveis restantes, cujos valores serão calculados, formam a chamada "**solução básica**". Note que a solução básica definida desta forma, sem nenhum cuidado, pode não ser viável. Em outras palavras, uma solução inicial criada simplesmente impondo que duas variáveis valem zero, sem qualquer outro critério, pode desrespeitar as restrições previamente impostas.

Na aula anterior foi visto que a área de soluções viáveis para este problema era esta:



Mais uma vez, foi visto que a solução ótima estava sempre num ponto extremo. Assim, para verificar um resultado interessante, será feita uma análise dos valores das variáveis nos pontos extremos. Os pontos serão nomeados da seguinte forma: o ponto A é o ponto (0,0) e os pontos B, C, D e E são os seguintes, seqüenciais, no sentido horário:

Ponto	X_A	X_B	X_{S1}	X_{S2}	X_{S3}
A	**0**	**0**	24	16	3
B	**0**	3	6	10	**0**
C	1,5	3	**0**	4	**0**
D	3	2	**0**	**0**	1
E	4	**0**	8	**0**	3

Observe que em todos os pontos extremos **há sempre duas variáveis iguais a zero**! E os pontos extremos também representam **todas as soluções básicas possíveis**.

Pode-se dizer, de forma genérica, que sempre que houver um problema de programação linear com **m** incógnitas e **n** equações, em todos os extremos da região de soluções possíveis teremos **(m-n)** incógnitas com valor igual a zero.

<u>3.1. A Solução Inicial</u>

Como futuramente será necessário determinar uma solução inicial, convém analisar como encontrar tal solução inicial.

O primeiro aspecto importante é que deve ser simples encontrar a solução incial, ou seja, seu cálculo deve ser simples. Adicionalmente, se o método para encontrar esta solução inicial puder ser similar para todos os problemas, tanto melhor.

Curiosamente, existe uma solução inicial que se encaixa em todas estas características. E é uma solução tão simples e comum que ela é chamada, na matemática, de "**solução trivial**": basta definir que as variáveis de decisão originais valem ZERO, tornando-as variáveis **não-básicas** (fora da solução), a solução inicial será de cálculo imediato. Observe:

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3}$

Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B + 1 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 24$ <= Restrição M_1
$4 * x_A + 2 * x_B + 0 * x_{S1} + 1 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 16$ <= Restrição M_2
$0 * x_A + 1 * x_B + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 1 * x_{S3} = 3$ <= Restrição B

As variáveis de decisão são x_A e x_B. Seus valores serão igualados a zero: $x_A = x_B = 0$.
Substituindo os valores de x_A e x_B nas restrições:

$4 * 0 + 6 * 0 + 1 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 24$ <= Restrição M_1
$4 * 0 + 2 * 0 + 0 * x_{S1} + 1 * x_{S2} + 0 * x_{S3} = 16$ <= Restrição M_2
$0 * 0 + 1 * 0 + 0 * x_{S1} + 0 * x_{S2} + 1 * x_{S3} = 3$ <= Restrição B

Resolvendo os cálculos, isso pode ser reescrito da seguinte forma:

$0 + 0 + x_{S1} + 0 + 0 = 24$ <= Restrição M_1
$0 + 0 + 0 + x_{S2} + 0 = 16$ <= Restrição M_2
$0 + 0 + 0 + 0 + x_{S3} = 3$ <= Restrição B

Ora, limpando este monte de zeros, surge o resultado:

$x_{S1} = 24$ <= Restrição M_1
$x_{S2} = 16$ <= Restrição M_2
$x_{S3} = 3$ <= Restrição B

E, como foi definido, $x_A = x_B = 0$. Estes cinco valores compõem a solução inicial (que, normalmente, <u>não</u> é uma solução ótima).

Bibliografia

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.