Aula 06: Usando o Método Simplex para a Solução de Problemas

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar o Método Simplex para solução de problemas de Programação Linear.

Bibliografia:

- MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. Ed. Pioneira, 2007.

Introdução

O Método Simplex é um método sistemático para a resolução de problemas apresentados na forma de um Modelo de Programação Linear, baseado em um *tableau*, onde são indicados todos os dados do problema e, realizando algumas operações, encontra-se a solução ótima.

Embora o Simplex use cálculos bastante simples, sua sequência é bastante tediosa. Esta característica faz com que seja interessante criar programas para resolver problemas pelo Método Simplex. Entretanto, é necessário aprender todos os passos do Simplex, verificando suas qualidades e os pontos críticos onde podem surgir problemas, possibilitando uma correta interpretação dos resultados quando a solução por encontrada por meio de um software.

1. O Método Simplex

Para iniciar o Simplex é necessária uma solução possível, ainda que ela esteja longe de ser a melhor solução. A partir desta solução, o método permite que se "navegue" ao longo dos extremos do espaço de soluções possíveis, até chegar à solução ótima. O ponto de partida costuma ser a **solução trivial**, ou seja, aquela em que a origem do espaço é a solução. Em outras palavras, aquela em que **as variáveis de decisão são zero**.

O Método Simplex, entretanto, não é "cego", isto é, não explora os extremos do espaço de soluções de forma aleatória. Da "solução trivial", o processo irá para o próximo extremo contíguo que fornecer o maior incremento na função objetivo (no caso de um problema de maximização).

Cada solução intermediária será apresentada na forma de uma tabelinha denominada "tableau". Em cada tableau serão realizados alguns cálculos que permitirão gerar o próximo tableau, que representa a próxima solução (o extremo seguinte do espáco de soluções possíveis). O processo é repetido até que qualquer mudança nova sempre piore o resultado da função objetivo, ao invés de melhorar (quando então a resolução terá chegado ao fim).

O algoritmo é:

1) Monta-se o tableau da solução inicial, que corresponde à origem;
2) Aplicam-se cálculos no tableau, cujo resultado é um segundo tableau;
3) Realiza-se um teste para verificar se a solução é ótima;
4) Caso não seja, repetem-se os cálculos no tableau, gerando o próximo tableau.

1.1. Exemplo de Aplicação do Método Simplex

Neste primeiro exemplo, será resolvido o problema já apresentado, que possuía apenas restrições do tipo ≤, e que já foi devidamente convertido para a forma padrão. O modelo matemático na forma padrão encontrado anteriormente foi:

Função Objetivo:
[MAX] $80 * x_A + 60 * x_B + 0 * x_{F1} + 0 * x_{F2} + 0 * x_{F3}$

Sujeito a:
$4 * x_A + 6 * x_B + 1 * x_{F1} + 0 * x_{F2} + 0 * x_{F3} = 24$ <= Restrição M1
$4 * x_A + 2 * x_B + 0 * x_{F1} + 1 * x_{F2} + 0 * x_{F3} = 16$ <= Restrição M2
$0 * x_A + 1 * x_B + 0 * x_{F1} + 0 * x_{F2} + 1 * x_{F3} = 3$ <= Restrição B

Segue, agora, a construção do primeiro tableau.

1.1.1. Construção do Primeiro Tableau

O primeiro passo é construir uma pequena tabela. O número de linhas será o número de restrições mais quatro. Assim, este problema tem uma tabela de 7 linhas. O número de colunas é igual ao número de variáveis mais quatro, ou seja, neste caso o tableau terá 9 colunas. O aspecto do primeiro tableau deve ser:

		80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_{F1}**	4	6	1	0	0	24	
0	**X_{F2}**	4	2	0	1	0	16	
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Na primeira linha, temos a contribuição de cada variável para a função objetivo, sendo que X_{F1} a X_{F3} em nada contribuem, obviamente (em outras palavras, nesta linha é indicado o coeficiente na função objetivo da variável representada na coluna). Observe os valores 80, 60, 0, 0 e 0.

A segunda linha é basicamente uma linha de título, contendo os nomes das variáveis e algumas outras informações. A primeira coluna, **c_j**, indica a contribuição de cada variável na solução (**variáveis da solução básica**) para o valor da função objetivo. No caso, as variáveis na solução representada são as variáveis de folga (X_{F1} a X_{F3}), indicadas na segunda coluna, e nada contribuem na função objetivo (o c_j de cada uma delas é 0 - o valor é uma cópia do valor que está sobre a variável na primeira linha). É importante lembrar que estas variáveis estão aí porque **as variáveis X_A e X_B foram escolhidas como "solução não-básica"** e valem zero.

Ainda na segunda linha, aparecem os nomes das variáveis da função objetivo e restrições, além da coluna **b_j**, que representa o lado direito das equações, ou seja, o "número depois do igual" nas restrições da modelagem matemática. Finalmente, há a coluna **b_j/a_{ij}**, que será usada durante o cálculo do Simplex. Vale lembrar que em cada *tableau* calculado do Simplex é possível visualizar imediatamente a solução representada através da coluna "variáveis na solução" e da coluna "b_j". O valor da coluna b_j é o valor da variável na coluna "variáveis na solução" que estiver na mesma linha que ele. Assim, por exemplo, na linha 3 da tabela, a "variável na solução" é X_1 e o valor de b_j é 24. Isso significa que X_1 = 24 nesta solução e, da mesma forma, X_2 = 16 e X_3 = 3. As variáveis que não aparecem na coluna "variáveis na solução" (no caso, X_A e X_B) valem 0 (zero).

Nas linhas seguintes temos os coeficientes de cada variável, retirados diretamente do modelo matemático, sendo que cada linha é relativa a uma restrição. Note que, como as variáveis na solução são as variáveis de folga, o valor da coluna **b_j** indica os recursos disponíveis, ociosos, relativo a cada uma das variáveis de folga.

Finalmente, as duas últimas linhas. As linhas Z e C-Z são também usadas no cálculo. A ideia é indicar na linha Z quanto se retira da função objetivo por aumentar uma unidade desta variável. Já a linha CZ indica quanto se acrescenta na função objetivo por aumentar uma unidade desta variável.

Antes de apresentar o primeiro passo do cálculo, é importante apresentar um fato: observe que, nas colunas onde aparecem as variáveis que estão na solução básica (X_{F1} a X_{F3}), os coeficientes das restrições sempre são: 1 (um) quando a linha e coluna tem o mesmo nome da variável representado e 0 (zero) nas outras.

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_{F1}**	4	6	1	0	0	24	
0	**X_{F2}**	4	2	0	1	0	16	
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Dito isto, é necessário iniciar o cálculo do Simplex, que se inicia com o cálculo da linha Z. Para isso, são usadas as linhas relativas às variáveis na solução. O calculo a ser feito é o seguinte: para a coluna X_A, deve-se multiplicar, em cada linha de restrição, o valor do coeficiente nesta coluna pelo c_j da linha. Após a multiplicação, soma-se todos os resultados e este é o valor de Z da coluna X_A. Por exemplo: Z da coluna X_A = 4*0 + 4*0 + 0*0 = 0.

Deve-se repetir o processo para todas as colunas de variáveis **e** para a coluna bj. O resultado está apresentado na tabela seguinte:

Passo 1: multiplicando os elementos da linha **j** pelo valor de **c_j** (indicação da operação dentro dos parênteses, lembrando que a multiplicação é pelo valor c_j da linha, mas no caso deste primeiro tableau, os c_j são todos zero)

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4 (* 0)	6 (* 0)	1 (* 0)	0 (* 0)	0 (* 0)	24 (* 0)	
0	X_{F2}	4 (* 0)	2 (* 0)	0 (* 0)	1 (* 0)	0 (* 0)	16 (* 0)	
0	X_{F3}	0 (* 0)	1 (* 0)	0 (* 0)	0 (* 0)	1 (* 0)	3 (* 0)	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 2: Somando os resultados coluna a coluna (resultado dentro dos parênteses)

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4 (0)	6 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	24 (0)	
0	X_{F2}	4 (0)	2 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)	16 (0)	
0	X_{F3}	0 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (0)	3 (0)	
	Linha Z	0+0+0	0+0+0	0+0+0	0+0+0	0+0+0	0+0+0	
	Linha C-Z							

Passo 3: Resultado da linha Z calculado

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4	6	1	0	0	24	
0	X_{F2}	4	2	0	1	0	16	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z	0	0	0	0	0	0	
	Linha C-Z							

O cálculo da linha C-Z é mais simples: basta subtrair o valor de Z correspondente a cada variável do coeficiente da variável na função objetivo (Linha C):

Passo 4: Calculando C-Z

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4	6	1	0	0	24	
0	X_{F2}	4	2	0	1	0	16	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z	0	0	0	0	0	0	
	Linha C-Z	80-0	60-0	0-0	0-0	0-0		

Passo 5: C-Z calculado

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4	6	1	0	0	24	
0	X_{F2}	4	2	0	1	0	16	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z	0	0	0	0	0	0	
	Linha C-Z	80	60	0	0	0		

Agora o tableau está completo, valendo ressaltar que o valor no cruzamento da coluna b_j com a Linha Z representa o **valor da função objetivo para a solução atual**. Mas como saber se esta solução, na qual X_A=0 e X_B=0, é uma solução ótima?

Bem, a linha C-Z indica o quanto é possível aumentar na função objetivo com o acréscimo de uma unidade em uma dada variável; assim, enquanto houver valores positivos nesta linha, ainda não se chegou à solução ótima. A solução ótima terá sido encontrada quando todos os valores na linha C-Z forem nulos (zero) ou negativos, indicando que não é mais possível melhorar o valor da função objetivo. Assim, a regra é: **"Quando todos os valores da linha C-Z forem nulos ou negativos, foi atingida a solução ótima"**.

No caso acima, há valores positivos em duas colunas: na coluna do X_A e do X_B, indicando que ainda é possível melhorar a função objetivo, aumentando os valores de X_A e X_B (atualmente iguais a zero)

1.1.2. Construção do Segundo Tableau

Como dito antes, a ideia do Simplex é procurar qual a combinação de variáveis que devem ser iguais a zero para que a função objetivo seja maximizada. Como determinado no passo anterior, é necessário aumentar uma ou mais unidades em X_A ou X_B para que o valor da função objetivo cresça. Se uma destas variáveis (que vale zero) deixará de valer zero, é necessário tornar zero o valor de alguma outra variável.

Em outras palavras, é preciso tomar duas decisões:

1) Uma variável não-básica que se tornará uma variável da solução básica (entra na solução, ficará com valor diferente de zero).
2) Uma variável da solução básica que se tornará uma variável não-básica (sai da solução, ficará com valor igual a zero).

O primeiro problema é de simples solução: a **variável que entra na solução básica é aquela cujo valor de C-Z é o mais alto** (pois é aquela que mais contribui com o aumento da função objetivo). No caso deste problema, essa variável é a X_A, que apresenta um incremento de 80 por unidade na função objetivo.

O segundo problema já é um pouco mais complicado, e é agora que a coluna b_j/a_{ij} apresenta sua função. Para o cálculo, divide-se o b_j de cada linha pelo coeficiente da coluna da variável que entra na solução (no caso, X_A). Considerando que b_j é a quantidade de um dado recurso disponível e a_{ij} é a quantidade deste recurso necessária para cada unidade da variável que vai entrar, a ideia é procurar qual das linhas é mais restritiva. No nosso caso, buscamos a restrição que limita mais a produção.

Em outras palavras, buscamos o **menor valor de b_j/a_{ij}**. A linha que tiver o menor valor nesta coluna, indicará a variável que sai (veja na coluna Variáveis na Solução).

Passo 6: Calculando b_j/a_{ij}

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_{F1}**	4	6	1	0	0	24	24/4
0	**X_{F2}**	4	2	0	1	0	16	16/4
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	3/0
	Linha Z	0	0	0	0	0	0	
	Linha C-Z	80	60	0	0	0		

Variável que Entra — Valor de b_j

Passo 7: Com b_j/a_{ij}, identificada variável que sai (menor valor maior que 0 da coluna b_j/a_{ij})

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_{F1}**	4	6	1	0	0	24	6
0	**X_{F2}**	4	2	0	1	0	16	4
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	≡
	Linha Z	0	0	0	0	0	0	
	Linha C-Z	80	60	0	0	0		

Variável que Entra — Valor de b_j

Ou seja, como o menor valor de b_j/a_{ij} é 4, a variável que sai é a X_{F2}, entrando a variável X_A em seu lugar. A linha da variável que sai recebe o nome de "linha principal" e o elemento no cruzamento da coluna da variável que entra com a linha principal é chamado de "elemento pivô", sendo que neste caso este elemento vale 4.

Agora, X_{F2} deve ser substituído por X_A (lembrando de substituir cj pelo coeficiente da variável que entra na função objetivo, no caso, o 80 que está sobre o X_A), além de apagar todos os valores da coluna b_j/a_{ij}, das linhas Z e C-X e, em seguida, será necessário recalcular todas as linhas de restrição do tableau. O objetivo é conseguir que a propriedade de existir "1" na célula do cruzamento da variável na solução com sua coluna e "0" nas células de cruzamento da variável na solução com as colunas das outras variáveis na solução. Para isso, o primeiro passo é dividir todos os elementos da linha principal pelo elemento pivô, fazendo aparecer um "1" no cruzamento da linha da variável que entrou na solução (X_A) com a coluna da variável (no caso, X_A):

Passo 8: Recalculando a linha principal

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Variáveis na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4	6	1	0	0	24	
80	X_A	4/4	2/4	0/4	1/4	0/4	16/4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 9: Linha principal recalculada - note que na linha/coluna X_A, a célula vale 1.

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Variáveis na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4	6	1	0	0	24	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

O passo seguinte é recalcular as outras linhas para que as outras linhas da coluna XA valham 0 (zero). Neste caso, as outras linhas são referentes às variáveis X_{F1} e X_{F3}.

Recalculando X_{F1}:

Primeiramente, determina-se o pivo da linha da variável X_{F1}, que é o cruzamento da linha de X_{F1} com a coluna da variável que está entrando, no caso, X_A. No caso, este pivô também vale 4.

Passo 10: Pivô da linha da variável X_{F1}

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Variáveis na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4	6	1	0	0	24	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

A ideia é, então, subtrair de cada elemento da linha X_{F1} o valor do pivô desta linha (pivô = 4) multiplicado pelo elemento correspondente da linha principal, como indicado no tableau abaixo:

Passo 11: Recalculando a linha da variável X_{F1}

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	4 -4*1	6 -4*1/2	1 -4*0	0 -4*1/4	0 -4*0	24 -4*4	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 12: Linha da variável X_{F1} recalculada

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0	4	1	-1	0	8	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Recalculando X_{F3}:

Novamente, determina-se o pivô da linha, agora da variável X_{F3}, que é o cruzamento da linha de X_{F3} com a coluna da variável que está entrando, no caso, X_A. No caso, esse pivô vale 0.

Passo 13: Determinação do pivô da linha X_{F2}

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0	4	1	-1	0	8	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Mais uma vez, subtrai-se de cada elemento da linha X_{F3} o valor do pivô desta linha multiplicado pelo elemento correspondente da linha principal, como indicado abaixo:

Passo 14: Recalculando a linha da variável X_{F3}

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0	4	1	-1	0	8	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0 -0*1	1 -0*1/2	0 -0*0	0 -0*1/4	1 -0*0	3 -0*4	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 15: Linha da variável X_{F3} recalculada

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Variáveis na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0	4	1	-1	0	8	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Agora o tableau está atualizado e é possível recalcular as linhas Z e C-Z:

Passo 16: Calculando a nova linha Z

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Var. na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0 (*0)	4 (*0)	1 (*0)	-1 (*0)	0 (*0)	8 (*0)	
80	X_A	1(*80)	1/2(*80)	0 (*80)	1/4(*80)	0 (*80)	4 (*80)	
0	X_{F3}	0 (*0)	1 (*0)	0 (*0)	0 (*0)	1 (*0)	3 (*0)	
	Linha Z	0+80+0	0+40+0	0+0+0	0+20+0	0+0+0	0+320+0	
	Linha C-Z							

Passo 17: Linha Z calculada e calculando a nova linha C-Z

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Var. na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0	4	1	-1	0	8	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z	80	40	0	20	0	320	
	Linha C-Z	80-80	60-40	0-0	0-20	0-0		

Passo 18: Tableau 2 finalizado

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	Var. na Solução	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_{F1}	0	4	1	-1	0	8	
80	X_A	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z	80	40	0	20	0	320	
	Linha C-Z	0	20	0	-20	0		

1.1.3. Construção do Terceiro Tableau

Para a construção do terceiro tableau, novamente será necessário identificar a variável que vai entrar na solução e a variável que vai sair da solução. O C-Z mais alto é agora o da variável X_B, sendo ela a entrar na solução. Para identificar a variável que sai, é necessário calcular os b_j/a_{ij} de cada linha:

Passo 19: Indicação da variável que entra e variável que sai

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_{F1}**	0	4	1	-1	0	8	8/4 = 2
80	**X_A**	1	1/2	0	1/4	0	4	4/0,5 = 8
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	3/1 = 3
	Linha Z	80	40	0	20	0	320	
	Linha C-Z	0	20	0	-20	0		

O menor valor de **b_j/a_{ij}** foi 2, na linha de X_{F1}. Assim, é esta a variável que sai, como indicado no tableau anterior. O pivô da linha principal é o valor 4, também indicado.

Os próximos passos são a substituição da variável, ajuste do c_j, eliminação dos conteúdos da coluna b_j/a_{ij} e das linhas Z e C-Z, seguindo-se o recálculo da linha principal, dividindo todos seus elementos pelo valor do pivô (pivô = 4):

Passo 20: Cálculo da nova linha principal

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
60	**X_B**	0/4=0	4/4=1	1/4	-1/4	0/4=0	8/4=2	
80	**X_A**	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 21: Linha principal já recalculada

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_{F1}**	**X_{F2}**	**X_{F3}**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
60	**X_B**	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	**X_A**	1	1/2	0	1/4	0	4	
0	**X_{F3}**	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

O "1" no cruzamento XB já apareceu. Agora é preciso ajustar as outras linhas para que os "0" apareçam nas outras linhas desta coluna. Como o pivô da linha X_A é 1/2, a linha X_A será recalculada subtraindo de cada elemento dela o seu pivô multiplicado pelo elemento da linha principal:

Passo 22: Recalculando a linha X_A

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	X_A	1 -1/2*0	1/2 -1/2*1	0 -1/2*1/4	1/4 -1/2*-1/4	0 -1/2*0	4 -1/2*2	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 23: Linha X_A recalculada

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	X_A	1	0	-1/8	3/8	0	3	
0	X_{F3}	0	1	0	0	1	3	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Na linha X_{F3}, o pivô é o 1. A linha X_{F3} será recalculada subtraindo de cada elemento dela o seu pivô multiplicado pelo elemento da linha principal:

Passo 24: Recalculando a linha X_{F3}

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	X_A	1	0	-1/8	3/8	0	3	
0	X_{F3}	0 -1*0	1 -1*1	0 -1*1/4	0 -1*-1/4	1 -1*0	3 -1*2	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Passo 25: Linha X_{F3} recalculada

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	X_A	1	0	-1/8	3/8	0	3	
0	X_{F3}	0	0	-1/4	1/4	1	1	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Agora o tableau está atualizado e é possível recalcular a linha Z e C-Z:

Passo 26: Calculando a nova linha Z

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0 (*60)	1 (*60)	1/4(*60)	-1/4(*60)	0 (*60)	2 (*60)	
80	X_A	1 (*80)	0 (*80)	-1/8(*80)	3/8 (*80)	0 (*80)	3 (*80)	
0	X_{F3}	0 (*0)	0 (*0)	-1/4(*0)	1/4 (*0)	1 (*0)	1 (*0)	
	Linha Z	0+80+0	60+0+0	15-10+0	-15+30+0	0+0+0	120+240+0	
	Linha C-Z							

Passo 27: Calculando a nova linha C-Z

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	X_A	1	0	-1/8	3/8	0	3	
0	X_{F3}	0	0	-1/4	1/4	1	1	
	Linha Z	80	60	5	15	0	360	
	Linha C-Z	80-80	60-60	0-5	0-15	0-0		

Passo 28: Tableau final

	Linha C	80	60	0	0	0		Linha
c_j	**Var. na Solução**	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}	b_j	b_j / a_{ij}
60	X_B	0	1	1/4	-1/4	0	2	
80	X_A	1	0	-1/8	3/8	0	3	
0	X_{F3}	0	0	-1/4	1/4	1	1	
	Linha Z	80	60	5	15	0	360	
	Linha C-Z	0	0	-5	-15	0		

Como na linha C-Z não há qualquer valor maior que zero, esta é a solução ótima. A solução é indicada pelas variáveis na coluna "Variáveis na Solução" e seus respectivos valores estão na coluna b_j, sendo que as variáveis que não estão em nenhuma linha da tabela têm, por definição, valor igual a zero.

Assim, a solução ótima para o problema é:

$X_A = 3$
$X_B=2$
$X_{F1} = 0$
$X_{F2} = 0$
$X_{F3} = 1$

O que significa que serão produzidas 3 unidades de A, 2 unidades de B, esgotando as horas de máquina 1 e 2 disponíveis, mas não atendendo completamente a demanda de B, já que o valor de X_{F3} é 1 (quantas unidades faltaram para atender a demanda máxima de B). Também é possível observar o valor final da função objetivo, no cruzamento da coluna b_j com a linha Z: 360.

Bibliografia

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.