Aula 07: Artifícios de Modelagem e Variáveis Artificiais

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar artifícios para a resolução de alguns problemas de modelagem.

Bibliografia:
- MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. Ed. Pioneira, 2007.

Introdução

Até o presente momento foram modelados e resolvidos problemas considerados "bem comportados", isto é, que de início já possuiam praticamente todas as características para que funcionem bem com o Método Simplex. Adicionalmente, já foi apresentada a maneira de lidar com problemas em que há restrições do tipo ≤, que foram transformadas em restrições do tipo "=".

Entretanto, outras situações podem surgir: restrições com restrições do tipo maior ou igual, igualdades, problemas de minimização, "lado direito" de equações negativo... estas situações igualmente vão exigir que algum "truque" seja usado, similar ao que aconteceu com as variáveis de folga nas restrições do tipo ≤.

Nesta aula serão apresentados alguns destes truques, em que situações eles são usados e a forma de aplicá-los.

1. Restrições com Lado Direito Negativo

Considere que todas as variáveis de uma restrição sejam movidas o lado esquerdo do sinal da equação (= ou ≤ ou ≥) e todos os números (constantes) para o lado direito do sinal; em geral, haverá apenas um número (uma constante) solitária do lado direito. Isso é o que se chama de "lado direito". Esse é o valor que não poderá ser negativo e, se for, uma medida precisará ser tomada.

Apenas para elucidar o conceito de "lado direito", segue um exemplo abaixo:

$$x_A + x_B + 7 = y_A + y_B$$

$$||$$

$$x_A + x_B - y_A - y_B = -7$$

Neste caso, "-7" é o lado direito... e, neste caso, ele está menor que zero e não será possível utilizar esta equação, neste formato, para o Simplex. Mas por que não é possível? Na verdade, isso é uma consequência direta da condição de não negatividade e da maneira com que se determina a solução inicial; mas, simplificadamente, pode-se dizer simplesmente que a coluna b_j (o lado direito das restrições) nunca pode conter um número negativo, porque ela representa os recursos que estão sobrando, ou seja, os recursos disponíveis... e não faz sentido falar em recursos disponíveis negativos!

Assim, quando uma situação deste tipo ocorrer, será necessária uma correção; esta correção é simples: basta multiplicar a equação ou inequação por -1. Observe equação apresentada anteriormente:

$$x_A + x_B - y_A - y_B = -7$$

O lado direito tem o valor negativo -7... e isso não é aceitável. Neste caso, basta multiplicar a restrição toda por -1, invertendo todos os sinais e tornando o lado direito positivo:

$$[\ x_A + x_B - y_A - y_B = -7\ ] * (-1) \Rightarrow -x_A - x_B + y_A + y_B = 7$$

Mais alguns exemplos seguem. Se, ao modelar, houver equações do seguinte tipo:
ou ≥

$$5X_A - 6X_B \leq -17$$
$$2X_A + 1X_B \geq -3$$
$$-4X_A - 4X_B = -16$$

Basta multiplicar todas as restrições por **-1**, lembrando de inverter o sinal das desigualdades:

$$[\ 5X_A - 6X_B \leq -17\ ] \quad *(-1) \quad \Rightarrow \quad -5X_A + 6X_B \geq +17$$
$$[\ 2X_A + 1X_B \geq -3\ ] \quad *(-1) \quad \Rightarrow \quad -2X_A - 1X_B \leq +3$$
$$[-4X_A - 4X_B = -16\ ] \quad *(-1) \quad \Rightarrow \quad +4X_A + 4X_B = +16$$

É importante lembrar que apenas o **lado direito não pode** ser negativo. Os **coeficientes das *variáveis* podem**.

2. Restrições do Tipo ≥

Este tipo de restrição é bastante comum em problemas de minimização, embora apareça também em alguns problemas de maximização.

Assim como foi necessário fazer modificações nas restrições do tipo ≤, com as variáveis de folga, no caso das restrições do tipo ≥ também será necessário algum tipo de ajuste.

Considere, por exemplo, a restrição abaixo:

$4X_A + 10X_B \geq 45$

Qualquer valor de X_A e X_B que tornem a soma maior ou igual a 45 terá resolvido o problema. Por exemplo, substituindo os valores X_A=4 e X_B=3:

$4*4 + 10*3 = 16 + 30 = 46$ que é maior ou igual a 45.

Assim, pode-se dizer que X_A=4 e X_B=3 é uma solução possível para o problema. Mas, quando se transforma a inequação em uma equação, o problema surge:

$4X_A + 10X_B = 45$

Esta equação não mais admite X_A=4 e X_B=3 como resposta (porque 46 não é igual a 45), significando que modelagem, dessa forma, não é mais capaz de representar o problema original... e, devido ao objetivo final - que é o de resolver o problema real - não se pode realizar mudanças na modelagem que a torne incapaz de representar o problema! A solução aqui, similar à solução para a restrição do tipo ≤, é usar uma variável a mais, só que agora ela aparecerá do lado direito:

$4X_A + 10X_B \geq 45 \quad => \quad 4X_A + 10X_B = 45 + X_E$

Sempre será possível escolher um valor de X_E que torne a igualdade verdadeira. Esta variável é chamada de *variável de excesso*, que pode ser encarada como uma variável de folga negativa, ou uma "variável de falta":

$4X_A + 10X_B = 45 + X_E \quad => \quad 4X_A + 10X_B - X_E = 45$

Infelizmente isso não resolve totalmente o problema; isso ocorre porque, no momento de terminar a solução inicial, quando as variáveis de decisão (X_A e X_B, no caso) serão consideradas iguais a zero, será encontrado um valor negativo para a variável X_E, o que não é admissível. Observe o que ocorre ao considerar $X_A = X_B = 0$:

$4X_A + 10X_B - X_E = 45 \quad => \quad 4*0 + 10*0 - X_E = 45 \quad => \quad -X_E = 45 \quad => \quad X_E = -45$

X_E não pode ter um valor negativo! Como resolver este novo problema? Neste caso o truque é inserir **outra** variável e indicar que a variável de excesso também faz parte da solução não-básica, ou seja, que $X_A = X_B = X_E = 0$:

$4X_A + 10X_B - X_E + A_1 = 45 \quad => \quad 0 + A_1 = 45 \quad => \quad A_1 = 45$ OK!

Entretanto, essa variável a ser inserida não tem qualquer tipo de significado físico, ela é um artifício matemático para que se possa encontrar uma solução inicial simples. Por esta razão, este tipo de variável é chamada de *variável artificial*. Estas variáveis terão uma implicação na resolução do Simplex, mas este assunto não será estudado na aula de hoje.

3. Restrições do Tipo =

Aparentemente, como se deseja restrições de igualdade, a impressão que se tem inicialmente é que, ao encontrar uma restrição de igualdade, nada deve ser feito. Entretanto, isso não é verdade.

Isso ocorre porque é necessário calcular uma solução inicial viável para iniciar o Simplex; nesse sentido, observe o que ocorre quando se zera os valores as variáveis de decisão (X_A e X_B, neste caso) em uma restrição de igualdade:

$4X_A + 4X_B = 16$ => $4*0 + 4*0 = 16$ => $0 = 16$!?!?!?!?

Não é preciso muito esforço para perceber que este resultado é absurdo. Assim, para possibilitar a fácil determinação de uma solução inicial - sem causar este absurdo, basta inserir uma variável artificial nas restrições do tipo igualdade, ou seja:

$4X_A + 4X_B + A_1 = 16$ => $4*0 + 4*0 + A_1 = 16$ => $0 = 16 - A_1$ => $A_1 = 16$ OK!

Mais uma vez, o uso de variáveis artificiais traz implicações ao Simplex, que serão verificadas oportunamente.

4. Implicações dos Artifícios de Modelagem na Função Objetivo

Assim como a Função Objetivo é modificada na forma padrão com coeficientes 0 nas variáveis de folga acrescentadas ao modelo, também as variáveis de excesso entrarão na Função Objetivo com coeficiente zero, pela mesma razão anterior: para que todas as variáveis apareçam na Função Objetivo.

Mas, e as variáveis artificiais? Bem, como o próprio nome diz, estas variáveis não fazem parte do problema, são apenas um artifício para facilitar o cálculo de uma solução inicial de forma simples, para que possamos dar partida no Simplex. Por esta razão, é preciso garantir no método Simplex que estas variáveis sejam retiradas da base.

Para fazer isso, existem dois mecanismos:

1) **O Método do M grande**, onde as variáveis artificiais entram "prejudicando" a Função Objetivo na proporção de um valor M maior que qualquer outro valor existente no problema;
2) **O Método das Duas Fases**, sendo que na primeira fase se substitui a função objetivo pela minimização da soma de todas as variáveis artificiais e, ao obter o resultado final, volta-se à função objetivo original e, finalmente, resolve-se o problema.

O primeiro método pode ser visto no livro, e envolve algumas mudanças no procedimento de cálculo. O segundo método é um pouco mais longo (pois envolve duas soluções sequenciais), mas o procedimento não será diferente do que foi visto no cálculo do Simplex tradicional. Ambos os métodos fogem ao escopo deste curso.

4.1. Problemas de Minimização

Até agora, entretanto, nada foi dito sobre problemas de minimização. O método Simplex parece resolver muito bem problemas de maximização, mas não há nada parecido apra minimização? Na verdade, é possível alterar um pouco o procedimento do Simplex de forma que sua sistemática minimize o valor da função objetivo. Entretanto, há uma modificação simples que pode ser feita no problema para usar o mesmo procedimento que já foi apresentado.

A idéia é, então, transformar o problema de minimização em um problema de maximização que seja equivalente a ele. Isto é simples: basta multiplicar a função objetivo por -1. Assim, é possível dizer que:

$$[MIN]\ 4X_A + 4X_B \quad => \quad [MAX]\ - 4X_A - 4X_B$$

É importante ressaltar que os valores determinados para as variáveis de decisão, após este ajuste, estarão corretos ao final do processo. Nenhuma modificação precisará ser feita. Entretanto, o valor da função objetivo (que pode ser visto no cruzamento da Linha Z com a coluna b_j do tableau) estará ***invertido,*** ou seja, é preciso multiplicá-lo por -1 para obter o valor correto da função objetivo original.

Bibliografia

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.